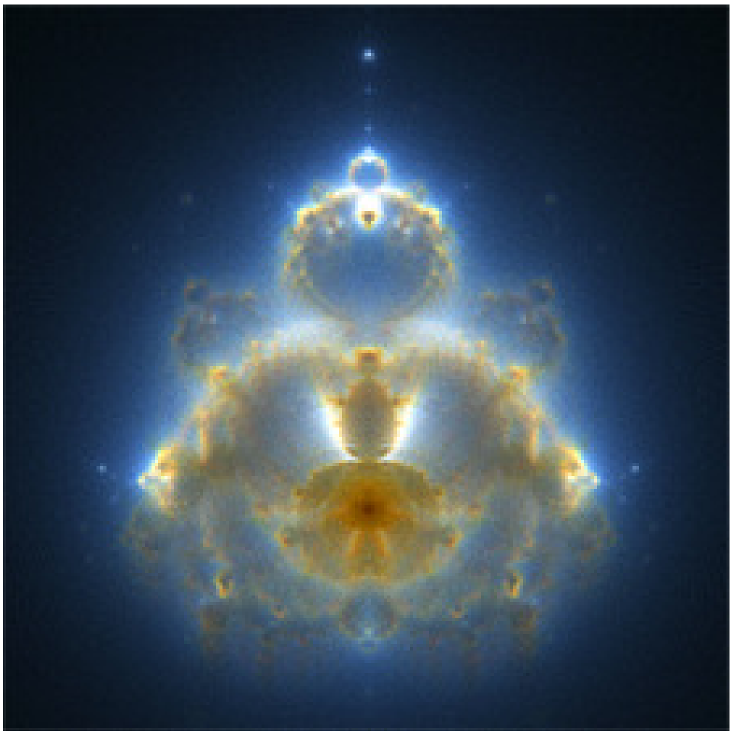
Cours de mathématiques
CPGE ECE 1ère année



2020–2021

Antoine CROUZET

Lycée Rabelais
Saint-Brieuc

Introduction

Vous retrouverez, dans l'ensemble de ce papier, l'intégralité de mon cours de Classes Préparatoires aux Grandes Écoles, voie ECE - 1ère année, tel que je l'enseigne à mes élèves.

Il ne s'agit que d'une base, souvent complétée lors des cours (au *feeling*) et ne peut donc être considéré comme complet à 100%. C'est cependant une bonne base de révision pour les élèves qui vont passer les concours après une CPGE ECE.

Dans tous les cas, l'ensemble n'est pas exempt - loin s'en faut - d'erreurs (de la coquille à l'erreur grossière due à un manque de (re)lecture). Il sera mis à jour régulièrement pour corriger ces erreurs, mais aussi pour l'enrichir.

Dernière mise à jour : 7 février 2021

Plan du cours

Chapitre 7. **Convergence d'une suite**

Chapitre 8. **Systèmes linéaires**

Chapitre 9. **Dénombrement**

Chapitre 10. **Matrices**

Chapitre 11. **Limites de fonctions**

Chapitre 12. **Continuité**

Chapitre 13. **Calcul différentiel**

Chapitre 0

Préparations

Résumé

Ce chapitre a pour objectif d'effectuer des révisions de bases des années précédentes : ensembles usuels, calculs fractionnaires et de puissances, développement et factorisation, équations et inéquations.

> *« J'ai trouvé cette chose étonnante : on peut représenter par les nombres toutes sortes de vérités. »*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1717)

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① connaitre les ensembles usuels . . . . ☐

② savoir calculer et simplifier des résultats :

- en simplifiant des fractions . . . . ☐
- en développant et en factorisant . . . . ☐
- en calculant avec des puissances . . . . ☐
- en simplifiant des racines carrées . . . . ☐

③ savoir résoudre des questions et inéquations . . . . ☐

I. Ensembles de nombres

Définition 0.1. Ensembles usuels

On dispose des cinq ensembles usuels suivants :

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des **entiers naturels**
$$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;\dots\}$$
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des **entiers relatifs**
$$\mathbb{Z} = \{\dots;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;\dots\}$$
- L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres ayant un nombre fini de chiffres après la virgule.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire les nombres s'écrivant sous la forme $\frac{p}{q}$, où p est un entier relatif, et q un entier naturel.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ de l'ensemble des nombres réels.

Notation

On note $x \in \mathbb{K}$ pour indiquer que le nombre x **appartient** à l'ensemble $\mathbb{K}$.

Exemple 0.1

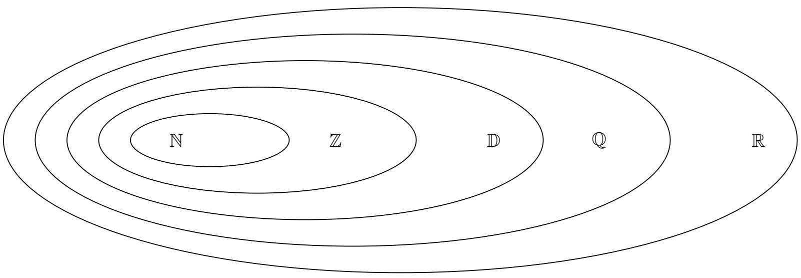
Par exemple,
$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad 0,41 \in \mathbb{D}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Définition 0.2.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F, et on note $E \subset F$, si tout élément x de E appartient également à F.

Propriété 0.1.

On dispose des inclusions suivantes :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Démonstration

Par définition, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ (car les entiers relatifs ont un nombre fini de chiffres après la virgule, à savoir 0). $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ par définition également. Il reste à voir que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
Soit $a \in \mathbb{D}$. Alors a possède un nombre fini de chiffres après la virgule ; on note d le nombre de chiffres après la virgule. Alors,
$$b = 10^d a \in \mathbb{Z}$$
et donc
$$a = \frac{b}{10^d} \in \mathbb{Q}$$

Notation
On note
$$\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 0\}$$
De même, on note
$$\mathbb{R}^- =]-\infty;0] = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant 0\}$$
On note $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$, et de même pour $\mathbb{R}_-^*$. Les notations $+, -$ et $*$ s'étendent à tous les ensembles vus précédemment.

Exercice 0.2
Décrire les ensembles $\mathbb{Z}_-^*, \mathbb{Z}^+, \mathbb{N}^-$ et $\mathbb{Q}^-$.

Solution
Rapidement, $\mathbb{Z}_-^*$ sont les entiers strictement négatifs, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_- = \{0\}$ et $\mathbb{Q}^-$ sont les rationnels négatifs.

☞ *Exercice 1.*

II. Calculs

1. Calcul fractionnaire

Les règles de calcul sur les fractions doivent être maitrisées dès le début d'année. Rappelons-les :

Propriété 0.2.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$:
$$\frac{0}{b} = 0 \qquad \frac{a}{1} = a \qquad \frac{a}{-1} = -a$$
$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$
$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b} = \frac{1}{b}a$$
$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a};$$
pour $k \in \mathbb{R}^*$
$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$$
et si $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}^*$:
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exercice 0.3
Calculer $\mathrm{A} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}}$, $\mathrm{B} = \frac{\frac{2}{3}}{6}$, $\mathrm{C} = 3 \times \frac{7}{18}$ et $\mathrm{D} = \frac{4+17}{11+4}$.

Solution
En appliquant ce qui précède, on a rapidement :
$$\mathrm{A} = \frac{15}{14}, \quad \mathrm{B} = \frac{1}{9}, \quad \mathrm{C} = \frac{7}{6}$$
Enfin, attention : on ne simplifie pas comme on le veut dans une fraction (il faut d'abord factoriser). Ici
$$\mathrm{D} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

☞ *Exercice 2.*

2. Développement et factorisation

Développer une expression c'est l'écrire sous la forme d'une somme; factoriser c'est l'écrire sous la forme d'un produit. Par exemple :

$(x+1)(x+2) = x^2+3x+2$ est un développement

$x^2+2x = x(x+2)$ est une factorisation

Les identités suivantes sont à connaître :

Propriété 0.3. Identités remarquables

On dispose des identités suivantes :

- Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ a^2-b^2 &= (a-b)(a+b)\end{aligned}$$

- Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\ a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2)\\ a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\end{aligned}$$

Exercice 0.4

Développer, pour tout réel x, $(x+1)^2, (x+1)^3, (1-x)^2$ et $(1-x)^3$. Factoriser $4-x^2$ et $8+x^3$.

Solution

En utilisant les identités remarquables :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= x^2+2x+1\\ (x+1)^3 &= x^3+3x^2+3x+1\\ (1-x)^2 &= x^2-2x+1\\ (1-x)^3 &= 1-3x+3x^2-x^3\\ 4-x^2 &= (2-x)(2+x)\\ 8+x^3 &= (2+x)(4-2x+x^2)\end{aligned}$$

☞ *Exercices 6 et 7.*

3. Puissances

Rappelons la définition de la puissance entière d'un nombre réel :

Définition 0.3.

Soit a un réel non nul, et $n \in \mathbb{N}$. On définit a^n de la manière suivante :

- $a^0 = 1$;
- $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ si $n \geqslant 1$.

De plus, on note

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

On définit ainsi a^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 0.5

On a $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$, $(-12)^1 = -12$ et $(1409091)^0 = 1$.

Propriété 0.4.

Soient a et b deux réels non nuls, et n, m deux entiers relatifs.

- (puissances différentes)

$$a^n \times a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm};$$

- (puissances identiques)

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \quad \text{et} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Exercice 0.6

Simplifier

$$A = \frac{5^4 \times 3^2 \times 2^3}{15^3} \quad \text{et} \quad \frac{21 \times 10^{-3}}{3 \times 10^2}.$$

Solution

En utilisant la propriété précédente :

$$A = 5^1 \times 3^{-1} \times 2^3 = \frac{40}{3}$$

$$B = \frac{21}{3} \times \frac{10^{-3}}{10^2} = 7 \times 10^{-5}$$

☞ *Exercices 3 et 4.*

4. Racine carrée

Commençons par un rappel de la définition de la racine carrée d'un réel positif :

Définition 0.4. Racine carrée

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Il existe un *unique* réel positif, noté $\sqrt{a}$, vérifiant

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Ce nombre $\sqrt{a}$ est appelé **racine carrée** de a.

Remarque

On dispose des valeurs remarquables suivantes :

$$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{4} = 2 \quad \text{et} \quad \sqrt{9} = 3$$

⚠ **Attention**

On ne dispose pas de la racine carrée d'un nombre strictement négatif. Ainsi, la fonction racine carrée n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$.

Propriété 0.5.
Soient a et b deux réels positifs. Alors
$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$
et si $b \neq 0$, alors
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

⚠ **Attention**
En règle général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$! Par exemple, $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et ce n'est pas égal à $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$.

Exercice 0.7

Simplifier $\sqrt{8}$, $\sqrt{48}$ et $\sqrt{\frac{9}{32}}$.

Solution
Rapidement
$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{9}{32}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

☞ *Exercice 5.*

III. Equations, inéquations

1. Equations

Une équation est une égalité faisant apparaitre une, ou plusieurs inconnue(s). En général, les inconnues sont notées $x, y, z, \ldots$.

Exemple 0.8
L'équation $x^2 + x = 3 - x$ est une équation faisant intervenir une variable. L'équation $x + y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ fait intervenir deux variables, x et y.

Définition 0.5.
Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble de *toutes* les valeurs de l'inconnues vérifiant l'équation ; on parle alors d'une **solution** de l'équation, et on recherche toutes les solutions de l'équation.

Méthode
La première chose à faire est de trouver les valeurs interdites (division par 0, par exemple).
Pour résoudre ensuite une équation, il n'y a pas de méthode universelle : on applique toutes propriétés possibles (multiplication, division) en raisonnant si possible par équivalence pour trouver les solutions.

Exercice 0.9
Résoudre l'équation
$$\frac{1}{x+2} + \frac{x+1}{x} = 1$$

Solution
Déjà, il faut éviter -2 et 0. On se place sur $\mathbb{R} \backslash \{-2; 0\}$. Alors, en multipliant par $x(x+2)$ (qui ne s'annule

alors pas) :

$$\frac{1}{x+2}+\frac{x+1}{x}=1 \text{ équivaut à } x+(x+1)(x+2)=x(x+2)$$
$$\text{soit } x+x^2+3x+2=x^2+2x$$
$$\text{ce qui donne } 2x=-2$$
$$\text{et donc } x=-1$$

Cette solution est autorisée (car différente de 0 et −2). On a procédé par équivalence, et on peut conclure que l'ensemble des solutions est $\{-1\}$, ce qu'on note, en général

$$\mathscr{S}=\{-1\}$$

Remarque

On aurait pu, au lieu de mettre des mots en français, écrire $\Longleftrightarrow$. En général, on évitera l'enchaînement de symbole équivalent et implication, souvent illisible. On y reviendra dans le chapitre suivant.

☞ *Exercices 8, 9 et 10.*

2. Inéquations

Une inéquation est une inégalité faisant apparaitre une, ou plusieurs inconnue(s).
Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les solutions de l'inéquation, c'est-à-dire trouver toutes les valeurs de l'inconnue vérifiant l'inégalité.

Méthode

Pour résoudre une inéquation, on procède comme pour les équations, en utilisant les règles de calculs pour les inégalités.

Propriété 0.6. Règles sur les inégalités

Pour tous réels x et y

- Pour tout réel k, $x \leqslant y$ si et seulement si $x+k \leqslant y+k$;
- pour tout réel $k>0$, $x \leqslant y$ si et seulement si $k\times x \leqslant k\times y$;
- pour tout réel $k<0$, $x \leqslant y$ si et seulement si $k\times x \geqslant k\times y$;

On retiendra que multiplier par un nombre strictement positif conserve l'ordre, alors que multiplier par un nombre strictement négatif renverse l'ordre.

Remarque

La propriété précédente est valable en remplaçant $\leqslant$ par $<$, $>$ et $\geqslant$.

Exemple 0.10

Résoudre l'inéquation

$$-2(x-4)\geqslant 3x-2$$

Solution

Pour tout réel x :

$$-2(x-4)\geqslant 3x-2 \text{ soit } -2x+8\geqslant 3x-2$$
$$\text{et donc } -5x\geqslant -10$$
$$\text{puis } x\leqslant 2$$

Ainsi, l'inégalité est vérifiée pour tout $x\leqslant 2$:

$$\mathscr{S}=\{x\in\mathbb{R},\quad x\leqslant 2\}=]-\infty;2]$$

☞ *Exercices 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 et 18.*

Exercices
Préparations

0

Exercices

Ensembles

●○○ **Exercice 1 Non inclusion** (5 min.)
Montrer que $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, $\mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{D}$.

Calculs

●○○ **Exercice 2 Fractions** (10 min.)
Calculer les expressions suivantes. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{4}{3} \times \left(\frac{13}{4} - \frac{12}{6}\right) \qquad B = \frac{4}{3} - 1$$
$$C = \frac{\frac{1}{3}+2}{\frac{5}{6}-1} \qquad D = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{8}}$$

●○○ **Exercice 3 Puissances** (10 min.)
Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \frac{4\times 10^{12}\times 9\times 10^{-5}}{1,2\times 10^2} \qquad B = \frac{4\times 7^2 - 2^5\times 3}{4^4-4^3}$$
$$C = \frac{3^2\times 27}{81^2} \qquad D = 4\times(2^2-2^4)^2-64$$

●○○ **Exercice 4 Sur $(-1)^n$** (5 min.)
Calculer $(-1)^n$ pour $n = 0,1,2,\dots,5$. Que constate-t-on ? Déterminer la valeur de $(-1)^n$ pour tout entier naturel n.

●○○ **Exercice 5 Racines** (15 min.)

1. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b le plus petit possible.
$$A = \sqrt{54} - 3\sqrt{96} - 5\sqrt{24} \qquad B = \sqrt{160}\times\sqrt{40}\times\sqrt{90}$$
2. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers.
$$C = \left(3\sqrt{10} - 5\sqrt{3}\right)^2 \qquad D = \left(3\sqrt{5}+2\sqrt{6}\right)^2$$
3. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'un nombre entier.
$$E = \left(3-2\sqrt{5}\right)\left(3+2\sqrt{5}\right) \qquad F = \frac{24\sqrt{45}}{9\sqrt{80}}$$

Développement, factorisation

●○○ **Exercice 6 Factorisation** (10 min.)
Factoriser chacune des expressions littérales suivantes :

$A = 64x^2 - 100$
$B = -(9x-2)\times(4x+9)+(3x-8)\times(9x-2)$
$C = 16x^2 - 24x + 9$
$D = (x+5)^2 - 81$
$E = (-8x+2)^2 + (-8x+2)\times(8x+4)$
$F = (9x+7)\times(3x+3)+9x+7$

●○○ Exercice 7 Développement (10 min.)

Développer chacune des expressions littérales suivantes :

$A = (4x+4)\times(4x-4)$
$B = (5x+10)^2$
$C = (10x-2)\times(10x+2)$
$D = \left(\frac{1}{8}x - \frac{10}{3}\right)^2$
$E = (-5x+9)\times(8x-2)-7x-8$
$F = (9x+2)\times(-3x-5)+4$
$G = (-8x+4)\times(9x-8)+2x^2$

Equations

●○○ Exercice 8 Équations (10 min.)

Résoudre les équations suivantes :

1) $(2x-1)(x+1) = x+1$.
2) $\dfrac{x^2-2}{x+1} = x+4$.

●○○ Exercice 9 Second degré (15 min.)

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto -0.5x^2 - 7x - 22.5$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = -0.5(x+9)(x+5)$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = -0.5(x+7)^2 + 2$.
2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.
   (a) $f(x) = 0$
   (b) $f(x) = -22.5$
   (c) $f(x) = 2$

●●○ Exercice 10 Second degré - plus difficile (15 min.)

On note (E) l'équation $2x^2 + 11x - 4 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet deux solutions, qu'on notera x_1 et x_2 et qu'on ne calculera pas.
2. Donner les valeurs de $x_1 + x_2$ et x_1x_2.
3. En déduire la valeur de $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.
4. Calculer $x_1^2 + x_2^2$.
5. Calculer $x_1^3 + x_2^3$.
6. Calculer $\dfrac{1}{x_1+1} + \dfrac{1}{x_2+1}$.

Inéquations

●○○ Exercice 11 Inéquation (5 min.)

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{-6x+5}{6} - \frac{3x-10}{2} \geqslant \frac{9x+8}{3}$$

●○○ Exercice 12 Inéquation (5 min.)

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{4x-5}{9} - \frac{6x+9}{4} < \frac{9x+5}{6}$$

●○○ Exercice 13 Inéquation (10 min.)

Résoudre l'inéquation :

$$(2x-1)(1-3x) < 0$$

●○○ **Exercice 14 Inéquation** (10 min.)

Résoudre l'inéquation :

$$3x+5 \geqslant (x+6)\times(3x+5)$$

●○○ **Exercice 15 Inéquation** (10 min.)

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{(x+1)(x-2)}{2x+1} > 0$$

●○○ **Exercice 16 Inéquations** (10 min.)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x+3)(3x-5)(7-x) < 0$.

●○○ **Exercice 17 Inéquation** (10 min.)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x(x+1) \geqslant (1-3x)(x+1)$.

●○○ **Exercice 18 Inéquations** (10 min.)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 - x \leqslant 2x^2 - 2$.

Corrigés

Préparations

Corrigés des exercices

Exercice 1

On donne un contre exemple pour chaque cas. Ainsi :

$$-1 \in \mathbb{Z} \text{ mais } -1 \notin \mathbb{N}$$
$$0,1 \in \mathbb{D} \text{ mais } 0,1 \notin \mathbb{Z}$$
$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \text{ mais } \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

Le dernier résultat venant du fait qu'il y a une infinité de chiffres après la virgule pour $\frac{1}{3}$.

Exercice 2

On utilise les propriétés des fractions. On obtient alors :

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{3}\left(\frac{39-24}{12}\right) \\ &= \frac{4}{3}\frac{15}{12} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

De même $B = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned} C &= \frac{\frac{1}{3}+\frac{6}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{6}{6}} \\ &= \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{1}{6}} \\ &= \frac{7}{3} \times (-6) = -14 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D &= \frac{\frac{2}{6}-\frac{3}{6}}{\frac{16}{40}+\frac{15}{40}} \\ &= \frac{-1}{6} \times \frac{40}{31} = -\frac{20}{93} \end{aligned}$$

Exercice 3

On utilise les régles sur les puissances et les fractions. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} A &= \frac{4 \times 3 \times 10^7}{\frac{6}{5} \times 10^2} \\ &= \frac{12 \times 5}{6} \times 10^5 = \frac{2}{5} \times 10^5 = 4 \times 10^4 \\ B &= \frac{2^2(7^2 - 2^3 \times 3)}{4^3(4-1)} \\ &= \frac{7^2 - 2^3 \times 3}{4^2 \times 3} = \frac{25}{48} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{3^2 \times 3^3}{((3^2)^2)^2} \\
&= \frac{3^5}{3^8} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \\
D &= (2^3 - 2^5)^2 - 8^2 \\
&= (2^3 - 2^5 - 8)(2^3 - 2^5 + 8) \\
&= (-2^5)(2^4 - 2^5) = 2^{10} - 2^9 = 2^9(2-1) = 2^9 = 512
\end{aligned}$$

Exercice 4

Rapidement :

$$(-1)^0 = 1, \quad (-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1, \quad (-1)^3 = -1, \quad (-1)^4 = 1 \quad \text{et} \quad (-1)^5 = -1$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $(-1)^n = 1$ si n est pair, -1 sinon.

Exercice 5

1. On utilise la règle $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ pour a et b deux réels positifs. Ainsi :

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{2 \times 3^3} - 3\sqrt{3 \times 2^5} - 5\sqrt{2^3 \times 3} \\
&= 3\sqrt{6} - 12\sqrt{6} - 10\sqrt{6} = -19\sqrt{6} \\
B &= \sqrt{5 \times 2^5} \times \sqrt{2^3 \times 5} \times \sqrt{3^2 \times 2 \times 5} \\
&= \sqrt{5^3 \times 2^9 \times 3^2} = 240\sqrt{10}
\end{aligned}$$

2. On développe par l'identité remarquable et on conclut :

$$\begin{aligned}
C &= (3\sqrt{10})^2 - 2 \times 3\sqrt{10} \times 5\sqrt{3} + (5\sqrt{3})^2 \\
&= 90 - 30\sqrt{30} + 75 = 165 - 30\sqrt{30} \\
D &= (3\sqrt{5})^2 + 2 \times 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{6} + (2\sqrt{6})^2 \\
&= 45 + 12\sqrt{30} + 24 = 69 + 12\sqrt{30}
\end{aligned}$$

3. On développe et utilise les formules sur les racines.

$$\begin{aligned}
E &= 3^2 - (2\sqrt{5})^2 = 9 - 20 = -11 \\
F &= \frac{24}{9}\sqrt{\frac{45}{80}} \\
&= \frac{8}{3}\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{8}{3}\frac{3}{4} = 2
\end{aligned}$$

Exercice 6

On utilise les identités remarquables, ou les méthodes de factorisation usuelles. Cela donne ainsi :

$$\begin{aligned}
A &= (8x)^2 - 10^2 = (8x - 10)(8x + 10) \\
B &= (9x - 2)[-(4x + 9) + (3x + 8)] = (9x - 2)(-x - 1) \\
C &= (4x)^2 - 2 \times (4x) \times 3 + 3^2 = (4x - 3)^2 \\
D &= (x + 5)^2 - 9^2 = (x + 5 - 9)(x + 5 + 9) = (x - 4)(x + 14) \\
E &= (-8x + 2)[(-8x + 2) + (8x + 4)] = 6(-8x + 2) \\
F &= (9x + 7)[(3x + 3) + 1] = (9x + 7)(3x + 4)
\end{aligned}$$

Exercice 7

Après développement, en utilisant soit les identités remarquables (A, B, C et D), soit la double distributivité :

$$\begin{aligned}
A &= (4x)^2 - 4^2 = 16x^2 - 16\\
B &= 25x^2 + 100x + 100\\
C &= 100x^2 - 4\\
D &= \frac{1}{64}x^2 - 2\times\frac{1}{8}\times\frac{10}{3}x + \frac{100}{9} = \frac{1}{64}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{100}{9}\\
E &= (-40x^2 + 10x + 72x - 18) - 7x - 8 = -40x^2 + 75x - 26\\
F &= (-27x^2 - 45x - 6x - 10) + 4 = -27x^2 - 51x - 6\\
G &= (-72x^2 + 64x + 36x - 32) + 2x^2 = -70x^2 + 100x - 32
\end{aligned}$$

Exercice 8

1. On regroupe dans un même membre, et on factorise :

$$\begin{aligned}
(2x-1)(x+1) = (x+1) &\Leftrightarrow (x+1)(2x-1-1) = 0\\
&\Leftrightarrow (x+1)(2x-2) = 0
\end{aligned}$$

Ce produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nuls. Donc $(2x-1)(x+1) = x+1$ si et seulement si $x+1=0$ ou $2x-2=0$, c'est-à-dire si et seulement si $x=-1$ ou $x=1$.
Bilan : l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-1; 1\}$.
2. On remarque tout d'abord qu'on ne peut résoudre l'équation que sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Sur cet ensemble, l'équation est s'écrit alors

$$x^2 - 2 = (x+4)(x+1) \Longleftrightarrow 5x + 6 = 0$$

et donc l'unique solution possible est $-\frac{6}{5}$ qui est bien dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Bilan : l'équation a pour ensemble de solutions $\mathscr{S} = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$.

Exercice 9

1. Il suffit de développer les deux formes données pour vérifier le résultat. La forme de l'énoncé est appelée *forme développée*, la forme (a) est la *forme factorisée*, et la forme (b) est la *forme canonique*.
2. (a) Pour cette équation, on utilise la forme factorisée. L'équation devient $-0.5(x+9)(x+5)=0$ et cela nous donne ainsi

$$\mathscr{S} = \{-5; -9\}$$

(b) On utilise la forme développée. L'équation devient $-0,5x^2 - 7x = 0$, c'est-à-dire $x(-0,5x-7)=0$. Ainsi, l'équation possède deux solutions : $x=0$ et $-0,5x-7=0$, soit $x=-14$.

$$\mathscr{S} = \{-14; 0\}$$

(c) Pour cette dernière, on utilise la forme canonique et l'équation devient $-0,5(x+7)^2=0$. Ainsi

$$\mathscr{S} = \{-7\}$$

Exercice 10

1. On calcule le discriminant : $\Delta = 11^2 - 4\times 2\times(-4) = 153$.
2. On peut alors factoriser $2x^2 + 11x - 4 = 2(x-x_1)(x-x_2)$. Si on développe et on identifie, on obtient

$$2x^2 + 11x - 4 = 2x^2 - 2(x_1+x_2)x + 2x_1x_2$$

Ainsi, $x_1 + x_2 = -\frac{11}{2}$ et $x_1x_2 = -\frac{4}{2} = -2$.
3. On met au même dénominateur, et on utilise la question précédente :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\\
&= \frac{-\frac{11}{2}}{-2} = \frac{11}{4}
\end{aligned}$$

4. On développe $(x_1+x_2)^2$. Cela donne $(x_1+x_2)^2 = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$. Ainsi :
$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{11}{2}\right)^2-2\times(-2)=\frac{137}{4}$$
5. On factorise :
$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)$$
En utilisant les résultats précédents :
$$x_1^3+x_2^3=-\frac{11}{2}\left(\frac{137}{4}-(-2)\right)=\frac{1595}{8}$$
6. On met au même dénominateur et on développe pour retrouver les résultats précédents.
$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}&=\frac{x_1+x_2+2}{(x_1+1)(x_2+1)}\\&=\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}\end{aligned}$$
Ainsi
$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{-\frac{11}{2}+2}{-2-\frac{11}{2}+1}=\frac{7}{13}$$

Exercice 11

On regroupe dans un seul membre et on met au même dénominateur :
$$\begin{aligned}\frac{-6x+5}{6}-\frac{3x-10}{2}\geqslant\frac{9x+8}{3}&\text{ c'est-à-dire }\frac{-6x+5}{6}-\frac{3x-10}{2}-\frac{9x+8}{3}\geqslant 0\\&\text{soit }\frac{-6x+5}{6}-\frac{9x-30}{6}-\frac{18x+16}{6}\geqslant 0\\&\text{ou encore }\frac{-6x+5-(9x-30)-(18x+16)}{6}\geqslant 0\\&\text{ce qui donne }\frac{-33x+19}{6}\geqslant 0\\&\text{puis }-33x+19\geqslant 0\\&\text{et finalement }x\leqslant\frac{19}{33}\end{aligned}$$
Ainsi, l'ensemble des solutions est
$$\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty,\frac{19}{33}\right]}$$

Exercice 12

On commence par multiplier par 36 pour simplifier les fractions :
$$\begin{aligned}\frac{4x-5}{9}-\frac{6x+9}{4}<\frac{9x+5}{6}&\Longleftrightarrow 4(4x-5)-9(6x+9)<6(9x+5)\\&\Longleftrightarrow -92x<71\\&\Longleftrightarrow x>-\frac{71}{92}\end{aligned}$$
Ainsi, $\mathscr{S}=\left]-\frac{71}{92};+\infty\right[$.

Exercice 13

On dresse le tableau de signe rapidement (fonctions affines ici) :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-3x$		$+$	0	$-$		$+$	
$(2x-1)(1-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Exercice 14

On passant tous les termes dans un même membre, on obtient

$$3x+5-(x+6)\times(3x+5)\geqslant 0$$

soit, en factorisant :

$$(3x+5)(1-(x+6))\geqslant 0 \Leftrightarrow (3x+5)(-x-5)\geqslant 0$$

On dresse alors le tableau de signes suivant, en résolvant cette inéquation sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-5		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x+5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x+5)(-x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit alors que l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[-5;-\frac{5}{3}\right]}$$

Exercice 15

On dresse le tableau de signes sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $-\frac{1}{2}$ étant une valeur interdite :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{1}$		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x+1)(x-2)}{2x+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left]-1,-\frac{1}{2}\right[\cup \left]2,+\infty\right[}$$

Exercice 16

On dresse le tableau de signe, sachant que l'on peut étudier l'inéquation sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		7		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$7-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x+3)(3x-5)(7-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut alors conclure : l'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x+3)(3x-5)(7-x)<0$ est

$$\mathscr{S} = \left]-\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right[\cup \left]7,+\infty\right[$$

Exercice 17

On passe tout dans un même membre, et on factorise :

$$\begin{aligned} 2x(x+1) \geqslant (1-3x)(x+1) &\iff (x+1)(2x-(1-3x)) \geqslant 0 \\ &\iff (x+1)(5x-1) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Il nous reste à faire un tableau de signe, en étudiant l'inéquation sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(5x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est alors

$$\mathscr{S} =]-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right[$$

Exercice 18

On commence par factoriser :

$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1) \quad \text{et} \quad 2x^2 - 2 = 2(x^2-1) = 2(x-1)(x+1)$$

On passe tout dans un même membre, et on factorise :

$$x^3 - x \leqslant 2(x^2-1) \iff (x-1)(x+1)(x-2) \leqslant 0$$

Il nous reste à faire un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-1)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathscr{S} =]-\infty, -1] \cup [1, 2]$$

1

Chapitre

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Résumé

Ce chapitre introductif est très important. Il pose les bases nécessaires à l'ensemble de l'année :

- *les principes de raisonnement (récurrence, contraposée, absurde) ;*
- *les notions liées aux ensembles ;*
- *les notions de bases sur les applications, qui feront l'objet de chapitres supplémentaires.*

Même si ce chapitre est un peu abrupt, il faut régulièrement y revenir pour maitriser l'ensemble des éléments présents.

> *« La logique est l'hygiène des mathématiques. »*

André Weil (1906 – 1998)

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① mener un raisonnement par récurrence .... ☐

② maitriser les raisonnements élémentaires :

- le raisonnement par contraposée .... ☐
- le raisonnement par l'absurde .... ☐
- la justification d'équivalence et d'implication .... ☐

③ connaitre les notions essentielles sur les ensembles :

- la définition d'ensemble .... ☐
- l'union, l'intersection .... ☐
- le complémentaire .... ☐
- l'ensemble des parties .... ☐
- le produit cartésien .... ☐

④ connaître les notions importantes liées aux applications :

- la définition d'injection et les méthodes associées .... ☐
- la définition de surjection et les méthodes associées .... ☐
- la définition de bijection et les méthodes associées .... ☐
- la définition d'image directe .... ☐
- la définition d'image réciproque .... ☐
- la définition de restriction .... ☐

I. Raisonnement par récurrence

1. Principe de récurrence

Le **raisonnement par récurrence** est un raisonnement important des mathématiques. Pour le comprendre, nous allons partir d'un exemple :

Exemple 1.1

On considère la proposition $\mathrm{P}(n)$ dépendant d'un entier n : « $2^n \geqslant n+1$ »

Vérifions que cette propriété est vraie pour $n=0,1,2,3,4$:

Pour $n=0$: $2^0=1\geqslant 0+1=1$
Pour $n=1$: $2^1=2\geqslant 1+1=2$
Pour $n=2$: $2^2=4\geqslant 2+1=3$
Pour $n=3$: $2^3=8\geqslant 3+1=4$
Pour $n=4$: $2^4=16\geqslant 4+1=5$

On peut continuer les vérifications pour tous les entiers que l'on souhaite, mais on ne pourra jamais affirmer que la proposition est vraie **pour tout entier** n. Pour démontrer cette proposition, on va faire appel au **raisonnement par récurrence**.

Axiome 1.1.

Soit $\mathrm{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier, et n_0 un entier fixé.

- Si $\mathrm{P}(n_0)$ est vraie (**initialisation**),
- et si pour tout entier $n\geqslant n_0$, $\mathrm{P}(n)\Rightarrow\mathrm{P}(n+1)$ (**hérédité**),

alors $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n\geqslant n_0$.

Démonstration

Ceci est un **axiome des mathématiques** : c'est une propriété de base, qui ne se démontre pas, mais qui semble « logique » .

L'idée est simple : si on peut poser la première brique d'un mur, et si à chaque fois qu'on a posé une brique, on peut en poser une autre par dessus, on peut effectivement construire un mur complet (infini, certes).

Remarque

Si, pour tout entier $n\geqslant n_0$, $\mathrm{P}(n) \implies \mathrm{P}(n+1)$, on dit que la propriété P est **héréditaire**.

Solution

Démontrons maintenant la propriété $\mathrm{P}(n)$: « $2^n\geqslant n+1$ » pour $n\geqslant 0$ par récurrence :

- **initialisation** : pour $n=0$, on a bien $2^0=1\geqslant 0+1=1$.
- **hérédité** : supposons que la propriété $\mathrm{P}(n)$ soit vraie pour **un certain** n fixé. On a donc $2^n\geqslant n+1$: c'est **l'hypothèse de récurrence**
  On veut alors démontrer $\mathrm{P}(n+1)$, *c'est à dire* $2^{n+1}\geqslant(n+1)+1$

$$\begin{array}{llrcll}
\text{Si } 2^n\geqslant n+1 & \text{alors} & 2\times 2^n & \geqslant & 2(n+1) & \text{car } 2\geqslant 0\\
 & \text{puis} & 2^{n+1} & \geqslant & 2n+2 & \\
 & \text{donc} & 2^{n+1}-(n+1+1) & \geqslant & 2n+2-(n+1+1) & \\
 & \text{et enfin} & 2^{n+1}-(n+2) & \geqslant & n\geqslant 0 & \text{car } n\geqslant 0
\end{array}$$

  On a donc bien $2^{n+1}\geqslant(n+1)+1$: la proposition $\mathrm{P}(n+1)$ est donc vérifiée, et P est donc héréditaire.

On a bien démontrer l'initialisation et l'hérédité : on a donc démontré par récurrence que la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie **pour tout entier** n :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ 2^n\geqslant n+1$$

Exercice 1.2

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall\, n \geqslant 1,\ 1+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall\, n \geqslant 1,\ 1^2+\ldots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solution

1. Soit P la proposition définie pour tout $n \geqslant 1$ par P_n : « $1+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».
   - Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part la somme qui est réduite à un élément, 1, et d'autre part $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc P_1 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la proposition P_n soit vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons que P_{n+1} est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
     Or, $1+2+\ldots+(n+1) = (1+2+\ldots n)+(n+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
     Ainsi, la proposition P_{n+1} est vraie, et la propriété P est donc héréditaire.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$\forall\, n \geqslant 1,\ \ 1+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Soit Q la proposition définie pour tout $n \geqslant 1$ par Q_n : « $1^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
   - Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part $1^2 = 1$, et d'autre part $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Donc Q_1 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la proposition Q_n soit vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
     Comme précédemment, on a alors
     $$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$$
     soit
     $$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = (n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6} = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}$$
     Or, $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$. Donc,
     $$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$
     Ainsi, la proposition Q_{n+1} est vraie, et la propriété Q est donc héréditaire.

   D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$\forall\, n \geqslant 1,\ \ 1^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Même si des traces de principe de récurrence ont été trouvées dans les travaux de Pascal (XVIIe siècle), ce …

sont **Richard Dedekind** en 1888 et indépendamment **Giuseppe Peano** en 1889 qui énoncent le principe de récurrence tel qu'on le connait.

Le raisonnement par récurrence est également utile pour démontrer des résultats de divisibilité.

Exemple 1.3
Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $10^n-(-1)^n$ est un multiple de 11.

Solution
Soit $\mathrm{P}(n)$ la proposition « $10^n-(-1)^n$ est un multiple de 11 »

- **initialisation** : pour $n=0$, $10^0-(-1)^0=0=0\times 11$.
- **hérédité** : supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie pour **un certain** n. On peut donc écrire $10^n-(-1)^n=11\times p$ où p est un nombre entier. On a alors

$$\begin{array}{rcl}
10^n & = & 11\times p+(-1)^n \\
10\times 10^n & = & 10\times 11\times p+10\times(-1)^n \\
10^{n+1} & = & 110p+10.(-1)^n \\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} & = & 110p+10.(-1)^n-(-1)^{n+1} \\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} & = & 11\times 10p+(-1)^n\,[10-(-1)] \\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} & = & 11\times 10p+(-1)^n\times 11 \\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} & = & 11\times\left[10p+(-1)^n\right]
\end{array}$$

Donc $10^{n+1}-(-1)^{n+1}$ est bien un multiple de 11 : $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, on a donc bien démontré $\mathrm{P}(n)$ pour tout n.

2. Récurrence double, récurrence forte

Dans certains cas, la récurrence précédente ne peut être utilisée, car on a besoin de plus d'informations. On peut utiliser alors un des deux principes suivants :

Axiome 1.2. Principe de récurrence double

Soit $\mathrm{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n.

- Si $\mathrm{P}(0)$ et $\mathrm{P}(1)$ sont vraies.
- et si, pour tout entier naturel n, $(\mathrm{P}(n)$ et $\mathrm{P}(n+1)) \implies \mathrm{P}(n+2)$

alors $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Axiome 1.3. Principe de récurrence forte

Soit $\mathrm{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n.

- Si $\mathrm{P}(0)$ est vraie.
- et si, pour tout entier naturel n, $(\mathrm{P}(0),\mathrm{P}(1),\dots,\mathrm{P}(n)) \implies \mathrm{P}(n+1)$

alors $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Remarque
On utilisera souvent la récurrence double lorsqu'une relation fait intervenir à la fois n, $n+1$ et $n+2$.

Exemple 1.4
Soit u la suite définie par $u_0=2$, $u_1=3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n=1+2^n$.

Solution

Soit P la proposition définie pour tout entier n par P(n) : « $u_n = 1+2^n$ » .

- **initialisation** : pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 = 1+2^0$ et pour $n = 1$ on a $u_1 = 3 = 1+2^1$. Ainsi P(0) et P(1) sont vraies.
- **hérédité** : supposons que les propositions P(n) et P($n+1$) sont vraies pour un certain entier n fixé. Par hypothèse de récurrence, on a donc que $u_n = 1+2^n$ et $u_{n+1} = 1+2^{n+1}$. Alors, par définition de u, on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &\underbrace{=}_{\text{H.R.}} 3(1+2^{n+1}) - 2(1+2^n) \\ &= 3+3.2^{n+1} - 2 - 2.2^n = 1+3.2^{n+1} - 2^{n+1} = 1+2.2^{n+1} = 1+2^{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi, P($n+2$) est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall\ n, \quad u_n = 1+2^n$$

☞ *Exercice 1.*

II. Raisonnement

1. Symboles mathématiques

Nous utiliserons très souvent plusieurs symboles mathématiques. Ils ne doivent être utilisés **que dans des phrases mathématiques** ! Ce ne sont pas des abréviations.

- $\forall$ signifie « pour tout » ou « quel que soit » .
- $\exists$ signifie « il existe » .
- $\exists!$ signifie « il existe un unique » .

On utilise / , | ou simplement « , » pour signifier « tel que » .

Exemple 1.5

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! y \in \mathbb{R},\ y = x+1$ signifie : « pour tout réel x, il existe un unique réel y tel que $y = x+1$ » .

Exercice 1.6

Traduire les phrases mathématiques suivantes :

- $\forall\ x \geqslant 0,\ \exists! y \geqslant 0,\ y^2 = x$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2+1 = x^2+x$

Solution

- La première se traduit par « pour tout réel x positif, il existe un unique y positif tel que $y^2 = x$ » . Ainsi, cette phrase traduit l'existence de $\sqrt{x}$ pour tout réel x positif.
- La deuxième se traduit par « il existe un réel x tel que $x^2+1 = x^2+x$ » . Elle traduit donc l'existence d'une solution à l'équation $x^2+1 = x^2+x$.

2. Négation

Définition 1.4.

La **négation** d'une proposition P est la proposition qui est vraie quand P est fausse, et qui est fausse quand P est vraie. On la note $\overline{\mathrm{P}}$.

Exemple 1.7

La négation de la proposition $x \geqslant 1$ est $x < 1$.

Proposition 1.1.

Lorsqu'on nie une proposition (on écrit sa **négation**), on échange quantificateur universel et quantificateur existentiel.

Remarque

La négation de $\forall\ x \in \mathbb{R}, \dots$ est donc $\exists\ x \in \mathbb{R}, \dots$. Ainsi, pour réfuter une proposition universelle, il suffit d'exhiber un **contre-exemple**.

Exercice 1.8

Déterminer la négation de la proposition : $\exists\ m \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant m$.

Solution

La négation est : $\forall\ m \in \mathbb{R},\ \exists\ x \in \mathbb{R},\ f(x) < m$.

3. Implication et équivalence

Nous disposons aussi de certains connecteurs logiques :

- $\Longleftrightarrow$: c'est l'équivalence, le « si et seulement si » .
- $\Leftarrow$ et $\Rightarrow$: les implications.

Remarque

Lorsque l'on a $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$, on dit que B est la condition **nécessaire**, et A la condition **suffisante**. En effet, il **suffit** d'avoir A pour avoir B, et il est **nécessaire** d'avoir B si on a A.
Lorsqu'on a $\mathrm{A} \Longleftrightarrow \mathrm{B}$, A et B sont des conditions nécessaires et suffisantes.

Définition 1.5.

Si $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ (sens direct), alors sa **réciproque** est $\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}$.
Si on a à la fois le sens direct et sa réciproque, on a alors l'équivalence.

Remarque

Ainsi, pour démontrer que certains résultats sont équivalents, on raisonnera par double implications : on démontrera tout d'abord que $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$, puis que $\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}$ pour conclure que A et B sont équivalentes.

4. Raisonnement direct, par contraposée, et par l'absurde

Théorème 1.2.

On a l'équivalence entre $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ (raisonnement **direct**) et $\overline{\mathrm{B}} \Rightarrow \overline{\mathrm{A}}$ (raisonnement **par contraposée**).
Pour démontrer un résultat du type $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$, il est souvent plus commode d'utiliser un raisonnement par contraposée : on suppose que l'on a $\overline{\mathrm{B}}$ et on démontre qu'alors on a $\overline{\mathrm{A}}$.

Exemple 1.9

Démontrer que $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

Solution

Un raisonnement direct est compliqué à faire rigoureusement. En revanche, la contraposée de $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ est $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, qui est vrai. Donc on a bien $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

Remarque
On peut enfin utiliser un raisonnement **par l'absurde** : si on veut montrer $A \Rightarrow B$, on suppose que l'on a A et $\overline{B}$ en même temps, et on essaie d'aboutir à une contradiction.

Exercice 1.10
Démontrer que $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ par l'absurde.

Solution
Par l'absurde, on suppose que $x \neq 0$ et que $x^2 = 0$. Mais alors, si $x^2 = 0$, $x = 0$. Or $x \neq 0$: c'est absurde ! Ainsi, notre hypothèse de départ est fausse, et $x^2 \neq 0$.

5. Égalité

Méthode
Pour démontrer une égalité :

1. on introduit les variables nécessaires avec les mots « soit » , ou « pour tout » , c'est-à-dire que l'on **quantifie** les variables.
2. en partant d'un des deux membres, on aboutit à l'autre membre par des égalités successives.
3. on conclut.

Exemple 1.11
Montrer que pour tous réels a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Solution
Soient a et b deux réels. Alors, en développant le membre de droite :

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3\\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous réels a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

6. Équation et inéquation

Lorsqu'on résout une équation ou une inéquation, il est important de raisonner par équivalence. Si on raisonne par implication, il est **nécessaire** de vérifier les résultats obtenus.

Pour résoudre une équation, on peut :

- partir de l'équation qu'on modifie (par équivalence) pour aboutir au résultat ;
- regroupe tous les termes dans un même membre, et on factorise ;
- ou enfin, on regroupe tous les termes dans un même membre, et on étudie une fonction.

Exemple 1.12
Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\ln(x) = x - 1$.

Solution
L'équation s'écrit également $\ln(x) - x + 1 = 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

On obtient ainsi le tableau de signe et variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution : $x=1$.

Méthode

Pour résoudre une inéquation :

1. on quantifie les variables nécessaires avec les mots « soit » , ou « pour tout » .
2. on part de l'équation ou l'inéquation, et on résout en appliquant différentes propriétés par équivalence
3. ou alors on regroupe tous les termes dans un même membre, et on factorise, pour dresser un tableau de signe.
4. on conclut.

Rappel

Les propriétés suivantes n'ont pas à être justifiées.

- On ne modifie pas une équation en ajoutant un même nombre, en multipliant ou divisant par un même nombre *non nul*, en simplifiant ou en appliquant une fonction strictement monotone.
- Ajouter un terme à une inégalité ne change pas le sens de celle-ci, de même que multiplier l'inégalité par un même nombre positif. En revanche, multiplier par un nombre négatif une inégalité change le sens de celle-ci.

Quand on résout une inéquation, on justifiera **toutes** les étapes non triviales, par exemple en utilisant les variations d'une fonction.

Exemple 1.13

Résoudre l'inéquation $3x-3<1-2x$.

Solution

On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} 3x-3<1-2x &\Longleftrightarrow 5x-3<1 \\ &\Longleftrightarrow 5x<4 \\ &\Longleftrightarrow x<\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\left]-\infty;\frac{4}{5}\right[$.

Remarque

On peut utiliser des mots en français (« c'est-à-dire » , « si et seulement si« , « soit ») pour remplacer le symbole $\Longleftrightarrow$, mais aussi pour l'implication (« donc » , « puis »...).

III. Ensembles

1. Ensembles et éléments

Définition 1.6.

On appelle **ensemble** toute *collection* d'objets, appelés **éléments** de cet ensemble.
Pour signifier que l'élément x appartient à un ensemble E, on note $x \in \mathrm{E}$. Si x n'appartient pas à E, on écrit $x \notin \mathrm{E}$.

Exemple 1.14

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont des ensembles usuels. On a $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.
$\{x_1, \dots, x_n\}$ est l'ensemble constitué uniquement de $x_1, \dots x_n$.

Définition 1.7.

L'ensemble constitué d'aucun élément est appelé **ensemble vide**, et est noté $\varnothing$.

Attention

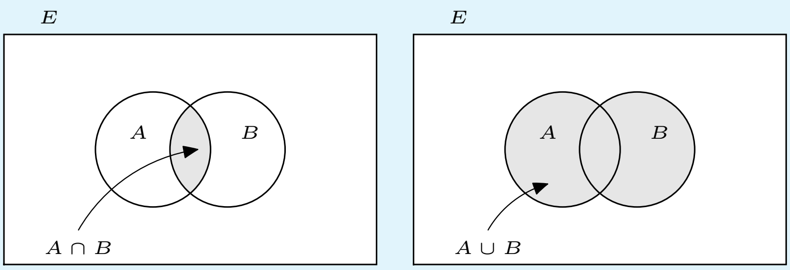
On note $\varnothing$ et non $\{\varnothing\}$. $\{\varnothing\}$ représente l'ensemble contenant l'ensemble vide.

2. Union, intersection

Définition 1.8.

Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **intersection** de E et de F, noté $\mathrm{E} \cap \mathrm{F}$, l'ensemble constitué des éléments qui sont à la fois dans E et dans F.
- On appelle **réunion** (ou **union**) de E et de F, noté $\mathrm{E} \cup \mathrm{F}$, l'ensemble constitué des éléments qui sont dans E ou dans F (voire dans les deux).



Exemple 1.15

Si $\mathrm{A} = \{1; 2; 4\}$ et $\mathrm{B} = \{2; 4; 5\}$ alors

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1; 2; 4; 5\} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2; 4\}$$

3. Inclusion, sous-ensemble

Définition 1.9.

Soit E un ensemble. On dit que F est **inclus** dans E, et on note $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E. On dit alors que F est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de E.

Exemple 1.16

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}$.

Définition 1.10.

Soit E un ensemble. On appelle **ensemble des parties** de E, et on note $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, l'ensemble formé des sous-ensembles de E.

Exemple 1.17

On a $\mathscr{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

Exercice 1.18

Déterminer $\mathscr{P}(\{a,b,c\})$.

Solution

Si $\mathrm{E} = \{a,b,c\}$, alors

$$\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Théorème 1.3.

Soit E un ensemble possédant n éléments (avec $n \geqslant 1$). Alors $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ possède 2^n éléments.

Démonstration

Pour construire un sous-ensemble de E, il faut prendre certains éléments de E et pas d'autres. Si on note $x_1; \dots; x_n$ les éléments de E, alors pour chaque élément x_k, on peut soit le prendre, soit ne pas le prendre ; il y a donc 2 possibilités pour chaque élément. Puisqu'il y a n éléments, et que le choix se fait de manière indépendante, il y a donc

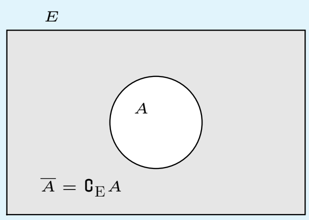
$$\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n \text{ sous-parties}$$

☞ *Exercice 4.*

4. Complémentaire

Définition 1.11.

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle **complémentaire** de A, et on note $\overline{\mathrm{A}}$ ou $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A : $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$.



Exemple 1.19

Si $\mathrm{E} = \{1;2;3;4;5\}$ et $\mathrm{A} = \{1;2;4\}$ alors $\overline{\mathrm{A}} = \{3;5\}$.

Théorème 1.4. Lois de de Morgan

Soit E un ensemble, et soient A, B deux sous-ensembles de E.

- $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$
- $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$

Méthode

Pour montrer une égalité entre deux ensembles, on utilise la **double inclusion** : si $C \subset D$ et $D \subset C$ alors nécessairement $C = D$.

Démonstration

- Soit $x \in \overline{A \cup B}$. Cela veut dire qu'il n'est pas dans $A \cup B$. Donc il n'est ni dans A, ni dans B : il est donc dans $\overline{A} \cap \overline{B}$.
- Soit $\in \overline{A} \cap \overline{B}$. Il n'est donc pas dans A, et il n'est pas dans B : il n'est donc pas dans $A \cup B$. Ainsi, $x \in \overline{A \cup B}$.

L'autre égalité se montre de la même manière.

☞ *Exercices 2 et 3.*

5. Produit cartésien

Définition 1.12.

Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, l'ensemble formé des couples (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$.

Exemple 1.20

Si $E = \{a, b\}$ et $F = \{-1, 1\}$ alors $E \times F = \{(a, -1), (a, 1), (b, -1), (b, 1)\}$.

Remarque

- Si $E = F$, on note en général $E \times E = E^2$.
- On peut généraliser à un produit fini d'ensemble $E_1 \times \ldots \times E_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} E_k$

Exemple 1.21

Les deux exemples classiques sont $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ et

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi, par exemple, $(1; -4\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ et $(0; 0; 1) \in \mathbb{R}^3$.

IV. Applications

1. Définition

Définition 1.13.

Soient E et F deux ensembles. Une **application** (ou **fonction**) f de E vers F est une transformation qui, à chaque élément x de E, associe un unique élément y de F. L'élément y de F est alors noté $f(x)$ et est appelé **image** de x par f. x est alors un **antécédent** de $y = f(x)$ par f.
L'ensemble E est appelé **ensemble (ou domaine) de définition**.

Notation

On note $f : E \to F$ pour signifier que f est une application de E vers F.
L'ensemble des fonctions de E vers F est noté $\mathscr{F}(E, F)$.

Exemple 1.22

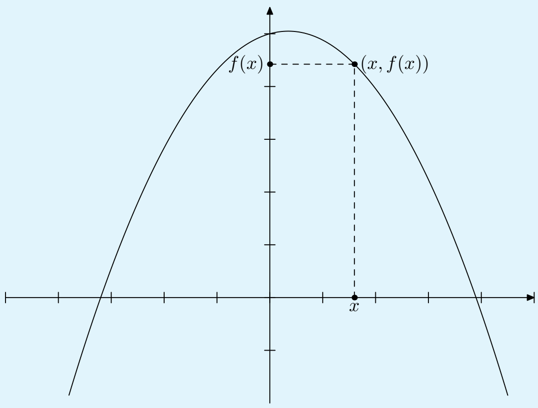
$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x^2} \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x+y}{1+x^2+y^2} \end{array}\right.$ sont des applications.

Remarque

Il y a, en réalité, une différence entre application et fonction. On peut parler généralement de la fonction logarithme népérien, sans indiquer qu'elle n'a pas de sens sur $\mathbb{R}^-$. En revanche, on parlera de l'application logarithme népérien définie sur $\mathbb{R}_*^+$. Dans la pratique, on utilisera quasi-systématiquement le mot fonction.

Définition 1.14.

L'ensemble des points du plan cartésien de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un élément du domaine de définition de f est appelé **courbe représentative** de la fonction f.



Remarque

Si l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas indiqué, il est convenu que cet ensemble de définition est le **plus grand ensemble** sur lequel $f(x)$ existe.

Exercice 1.23

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$.

Solution

La fonction f est définie si et seulement si $x^2-4 \geqslant 0$. Puisque $x^2-4=(x-2)(x+2)$, et après tableau de signe rapide, on obtient $\mathscr{D}_f =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$.

2. Opérations sur les fonctions

Définition 1.15.

Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble E. Soit λ un réel.

- On appelle $f+g$ la fonction définie sur E par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
- On appelle $f\times g$ la fonction définie sur E par $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$.
- On appelle λf la fonction définie sur E par $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$.
- On appelle $f+\lambda$ la fonction définie sur E par $(f+\lambda)(x)=f(x)+\lambda$.
- Si g **ne s'annule pas** sur E, on appelle $\frac{f}{g}$ la fonction définie sur E par $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple 1.24

Soient f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + 1$. Déterminer $f+g$ et $\frac{f}{g}$.

Solution

Par définition, $f+g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(f+g)(x) = x^2 + e^x + 1$ et $\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{e^x+1}$.

Définition 1.16.

Soit f une fonction définie sur E et prenant ses valeurs dans F.
Soit g une fonction définie sur F et à valeur dans G.
La fonction qui, à tout réel x de E, fait correspondre le réel $g(f(x))$ est appelée **fonction composée** de f suivie de g. On a ainsi

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} \longrightarrow & \mathrm{F} & \longrightarrow \mathrm{G} \\ x \longmapsto & f(x) & \longmapsto g(f(x)) \end{array}$$

Cette fonction est notée $g \circ f$.

Exemple 1.25

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array} \right.$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Solution

On a, pour tout réel x,

$$g \circ f(x) = x^2 - 1 \text{ et } f \circ g(x) = (x-1)^2$$

Remarque

Dans le résultat précédent, on remarque que $g \circ f \neq f \circ g$. On dit que la composée n'est pas **commutative**.

Méthode

Pour déterminer la composée de deux fonctions, on étudiera d'abord les domaines de définition pour déterminer le domaine de définition de la fonction composée.

Exemple 1.26

Soit $f : x \longmapsto x^2 - 1$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$. Déterminer $g \circ f$.

Solution

$g \circ f(x)$ n'est définie que si $f(x) \geqslant 0$ (car g est la fonction racine, définie sur $\mathbb{R}^+$). Or

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

Ainsi, $g \circ f$ est définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Proposition 1.5. associativité

Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, $h : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ sont trois fonctions, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

☞ *Exercices 5 et 6.*

3. Injection, surjection

a. Injection

Définition 1.17.

On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est **injective** si f ne prend jamais deux fois la même valeur :

$$\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Remarque

On dispose également de la formulation équivalente suivante (il s'agit de la contraposée de la précédente) :

$$\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Méthode

Pour montrer qu'une fonction est injective, on prend deux éléments x et x' de E vérifiant $f(x) = f(x')$. On montre alors que nécessairement $x = x'$.

Exemple 1.27

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x+1}$ est injective.

Solution

En effet, soient $x, x' \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = f(x')$. On a donc $\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^{x'+1}$, c'est-à-dire $x + 1 = x' + 1$ en composant par la fonction logarithme népérien. On a donc bien $x = x'$.

Remarque

$f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ n'est pas injective si et seulement si

$$\exists (x, x') \in \mathrm{E}^2, f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x'$$

Méthode

Pour montrer qu'une fonction n'est pas injective, on cherche un contre-exemple.

Exemple 1.28

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas injective.

Solution

En effet, $1 \neq -1$ et pourtant $1^2 = (-1)^2 = 1$.

Théorème 1.6.

Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont deux applications injectives, alors $g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ est aussi injective.

Démonstration

Soient x et x' deux éléments de E tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Alors, puisque $g(f(x)) = g(f(x'))$, et comme g est injective, on a nécessairement $f(x) = f(x')$. Or, f est aussi injective : on a donc $x = x'$. $g \circ f$ est bien injective.

b. Surjection

Définition 1.18.

On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent par f dans E :

$$\forall\ y \in \mathrm{F}, \exists\ x \in \mathrm{E},\ y = f(x)$$

Méthode

Pour prouver qu'une fonction f est surjective, il suffit donc de trouver une solution x à l'équation $f(x) = y$ pour tout élément y de F.

Exemple 1.29

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout x par $f(x) = 2x - 1$ est surjective.

Solution

En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$. Il existe donc au moins un antécédent à y par la fonction f.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction n'est pas surjective, on exhibe une valeur qui ne peut être atteinte par la fonction.

Exemple 1.30

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^x$ n'est pas surjective.

Solution

Puisque, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, la valeur 0 n'est jamais atteinte par f. Ainsi, f n'est pas surjective.

Remarque

On constate cependant que la fonction précédente est surjective sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1.7.

Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont deux applications surjectives, alors $g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ est aussi surjective.

Démonstration

Soit z un élément de G. Puisque g est surjective, il existe un élément $y \in \mathrm{F}$ tel que $g(y) = z$. De plus, f est surjective, donc il existe un élément $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$. Mais alors

$$g(f(x)) = g(y) = z$$

Donc x est un antécédent de z par la fonction $g \circ f$.

c. Bijection

Définition 1.19.

On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi, f est bijective si, et seulement si, chaque élément de F possède un **unique antécédent** par f dans E :

$$\forall\ y \in \mathrm{F}, \exists!\ x \in \mathrm{E},\ y = f(x)$$

Méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective, il faut montrer que, pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'équation $f(x) = y$ possède une **unique** solution dans E.

Exemple 1.31

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 4$ est bijective.

Solution

En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = y \Leftrightarrow x - 4 = y \Leftrightarrow x = y + 4$$

Il existe donc bien un unique antécédent à y par f.

Exemple 1.32

L'application $\mathrm{id}_\mathrm{E} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie pour tout x de E par $\mathrm{id}_\mathrm{E}(x) = x$ est une bijection de E dans E.

Proposition 1.8.

La fonction id_E est le neutre pour la composition :

$$\forall\, f \in \mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ \forall\, g \in \mathscr{F}\mathrm{F},\mathrm{E}, \quad f \circ \mathrm{id}_\mathrm{E} = \mathrm{id}_\mathrm{E} \circ g = g$$

Démonstration

En effet, pour tout $x \in \mathrm{E}$:

$$f \circ \mathrm{id}_\mathrm{E}(x) = f(\mathrm{id}_\mathrm{E}(x)) = f(x) \text{ car } \mathrm{id}_\mathrm{E}(x) = x$$

et pour tout $x \in \mathrm{F}$:

$$\mathrm{id}_\mathrm{E} \circ g(x) = \mathrm{id}_\mathrm{E}(g(x)) = g(x) \text{ car } \mathrm{id}_\mathrm{E}(u) = u \text{ avec ici } u = g(x)$$

Théorème 1.9.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction. f est bijective si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$, telle que $f \circ g = \mathrm{id}_\mathrm{F}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.
La fonction g est appelée **fonction réciproque** de f, et est notée $g = f^{-1}$.

Exemple 1.33

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 2x - 1$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto \frac{x+1}{2}$. Montrer que f et g sont bijectives, et réciproques l'une de l'autre.

Solution

On constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f \circ g(x) = 2\frac{x+1}{2} - 1 = x \text{ et } g \circ f(x) = \frac{(2x-1)+1}{2} = x$$

Ainsi, f est bijective, et sa bijection réciproque est la fonction g.

Méthode

Pour déterminer la fonction réciproque d'une fonction f, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x. On obtiendra $x = g(y)$ et g représente alors la fonction réciproque.

Exemple 1.34

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x+1}$. Déterminer f^{-1}.

Solution
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors
$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{x+1} = y \Leftrightarrow x = \ln(y) - 1$$
qui a un sens car $y > 0$. Ainsi $x = g(y)$ avec $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x > 0$ par $g(x) = \ln(x) - 1$. Donc $f^{-1} = g$.

Méthode
Lorsqu'on donne f et g et qu'on demande de montrer que $g = f^{-1}$, il suffit de montrer que $f \circ g = \mathrm{id}$ et $g \circ f = \mathrm{id}$.

Exemple 1.35
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 2$. Montrer que f^{-1} est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{4}$.

Solution
Notons $g : y \mapsto \frac{y+2}{4}$. Alors, pour tous réels x et y, on a
$$f \circ g(y) = f\left(\frac{y+2}{4}\right) = 4\left(\frac{y+2}{4}\right) - 2 = y$$
$$g \circ f(x) = g(4x-2) = \frac{(4x-2)+2}{4} = x$$
Ainsi, on a bien $f \circ g = \mathrm{I}d_{\mathbb{R}}$ et $g \circ f = \mathrm{I}d_{\mathbb{R}}$: $g = f^{-1}$.

Théorème 1.10.
Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ est bijective, et on a
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration
En effet,
$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_{\mathrm{F}} \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$$
et
$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_{\mathrm{F}} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$$
D'après le théorème précédent, $g \circ f$ est bijective, d'application réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.

☞ *Exercice 7.*

4. Image directe, image réciproque

Définition 1.20.
Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction.

- Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on appelle **image directe** de A par f, et on note $f(\mathrm{A})$, l'ensemble composé par les images par f des éléments de A :
$$f(\mathrm{A}) = \left\{ y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{A},\ f(x) = y \right\}$$
- Si $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$, on appelle **image réciproque** de B par f, et on note $f^{-1}(\mathrm{B})$, l'ensemble composé par les antécédents par f des éléments de B :
$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \left\{ x \in \mathrm{E},\ f(x) \in \mathrm{B} \right\}$$

Exemple 1.36

Soit $f : x \mapsto x+2$. Déterminer $f([0;1])$ et $f^{-1}([0;1])$.

Solution

On a :

$$f([0;1]) = [2;3] \quad \text{et} \quad f^{-1}(([0;1]) = [-2;-1]$$

⚠ Attention

On ne confondra pas l'image réciproque d'un ensemble $f^{-1}(\mathrm{B})$ et l'application réciproque d'une application f^{-1} lorsque celle-ci existe.

Proposition 1.11.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. f est surjective si et seulement si $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$.

Démonstration

Si f est surjective, tout élément de F admet au moins un antécédent dans E. Donc $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$.
Réciproquement, si $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$, alors pour tout élément $y \in \mathrm{F}$, il existe un $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$: par définition, f est surjective.

☞ *Exercice 8.*

5. Restriction

Définition 1.21.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction, et $\mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. On appelle **restriction** de f à G, et on note $f|_{\mathrm{G}}$ l'application définie sur G par

$$\forall\, x \in \mathrm{G},\ f|_{\mathrm{G}}(x) = f(x)$$

Exemple 1.37

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$. f n'est pas injective. En revanche, $f|_{\mathbb{R}^+}$ est injective.

Exercices

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

1

Exercices

Récurrences

●○○ **Exercice 1 Récurrences** (40 min.)

Démontrer par récurrence les résultats suivants :

1. $\forall\, n \geqslant 1, \quad 1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. Si a est un réel fixé $a \geqslant -1$,
$$\forall\, n, \quad (1+a)^n \geqslant 1+na \qquad \text{(inégalité de Bernoulli)}$$
3. Si u est la suite définie par $u_0=7$ et pour tout entier n, $u_{n+1}=2u_n-3$, alors
$$\forall\, n, \quad u_n=2^{n+2}+3$$
4. Si $q \neq 1$, alors
$$\forall\, n, \quad 1+q+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
5. $\forall\, n \geqslant 1, \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

Ensemble

●○○ **Exercice 2 Ensembles** (5 min.)

Soient les ensembles suivants :

$$\mathrm{A}=\{1,2,3,4,5,6,7\}, \quad \mathrm{B}=\{1,3,5,7\}, \quad \mathrm{C}=\{2,4,6\}, \quad \text{et} \quad \mathrm{D}=\{3,6\}$$

Déterminer $\mathrm{B}\cap\mathrm{D}, \mathrm{C}\cap\mathrm{D}, \mathrm{B}\cup\mathrm{C}, \mathrm{B}\cup\mathrm{D}$. Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D.

●●○ **Exercice 3 Lois de de Morgan et distributivités** (10 min.)

Soient E un ensemble, et A, B et C des sous-ensembles de E. Montrer par double inclusion les résultats suivants :

- $\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}$
- $\overline{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}}$
- $\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\cap(\mathrm{A}\cup\mathrm{C})$
- $\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})$.

●○○ **Exercice 4 Ensemble des parties** (5 min.)

Déterminer les éléments de $\mathscr{P}(\{0,1,2\})$

Fonctions

●○○ **Exercice 5 Composées** (10 min.)

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2, g : x \mapsto \sqrt{x}$ et $h : x \mapsto x-2$. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression des fonctions suivantes :

$$f\circ g, f\circ h, g\circ h, h\circ f, h\circ g, g\circ f$$

●○○ **Exercice 6 Composées** (5 min.)

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Déterminer quatre fonctions u, v, w, et z telles que $f=u\circ v$ et $g=w\circ z$.

●●○ Exercice 7 Injectivité, surjectivité, bijectivité (15 min.)

Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
- $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = \mathrm{e}^{3+\ln(x)}$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$

●○○ Exercice 8 Image directe, image réciproque (5 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x+1}$.
Déterminer l'image directe par f de $[0;1]$. Déterminer l'image réciproque par f de $\mathbb{R}^+$ et de $[1;\mathrm{e}]$.

Corrigés

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. Soit P_n la propriété "$1^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$" définie pour tout entier $n\geqslant 1$, et montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n\geqslant 1$.
• **Initialisation** : Pour $n=1$, la somme vaut $1^3=1$ et

$$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2=1^2=1$$

La propriété P_1 est donc vraie.
• **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain $n\geqslant 1$, et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que

$$1^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

donc

$$1^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$$

Or

$$\begin{aligned}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3&=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+(n+1)\right)\\&=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)\\&=(n+1)^2\left(\frac{n+2}{2}\right)^2=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$1^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.
Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n\geqslant 1$.
2. *L'inégalité de Bernoulli nous sera utile plus tard. Elle est donc à retenir.*
Soit P_n la propriété "$(1+a)^n\geqslant 1+na$" définie pour tout entier $n\geqslant 0$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n.
• **Initialisation** : Pour $n=0$, on a $(1+a)^0=1$ et $1+0\times a=1$. Ainsi, $(1+a)^0\geqslant 1+0\times a$.
La propriété P_0 est donc vraie.
• **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que

$$(1+a)^n\geqslant 1+na$$

En multipliant par $(1+a)>0$ par hypothèse, on a

$$(1+a)(1+a)^n\geqslant(1+a)(1+na)$$

soit

$$(1+a)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)a+na^2$$

Or $na^2\geqslant 0$, donc

$$(1+a)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)a+na^2\geqslant 1+(n+1)a$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n.
3. Soit P_n la propriété "$u_n = 2^{n+2}+3$" définie pour tout entier $n \geqslant 0$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n.
- **Initialisation** : pour $n=0$, $u_0 = 7$ et $2^{0+2}+3 = 2^2+3 = 7$.

La propriété P_0 est donc vraie.
- **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que

$$u_n = 2^{n+2}+3$$

Or, par définition, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Donc, par hypothèse de récurrence (H.R.) :

$$u_{n+1} = 2\left(\underbrace{2^{n+2}+3}_{\text{H.R.}}\right) - 3 = 2\times 2^{n+2}+6-3 = 2^{n+3}+3 = 2^{(n+1)+2}+3$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.
Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n.
4. *Cette démonstration peut se faire sans récurrence, en calculant* $(1-q)(1+q+\cdots+q^n)$.
Soit P_n la propriété "$1+q+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$" définie pour tout entier $n \geqslant 0$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n.
- **Initialisation** : pour $n=0$, la somme est réduite à $q^0 = 1$ et $\frac{1-q^1}{1-q} = 1$.

La propriété P_0 est donc vraie.
- **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que

$$1+q+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Donc

$$1+q+\cdots+q^n+q^{n+1} = \underbrace{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}_{\text{H.R.}} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.
Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n.
5. Soit P_n la propriété "$1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$" définie pour tout entier $n \geqslant 1$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
- **Initialisation** : pour $n=1$, la somme est réduite à 1 et $1^2 = 1$.

La propriété P_1 est donc vraie.
- **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que

$$1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$$

Donc,

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = \underbrace{n^2}_{\text{H.R.}} + (2n+1) = (n+1)^2$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.
Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 2

Exercice rapide pour bien maitriser les différents concepts. On obtient :

$$B\cap D = \{3\},\quad C\cap D = \{6\},\quad B\cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\} = A,\quad B\cup D = \{1,3,5,6,7\}$$

Enfin, dans A, on a :

$$\overline{B} = \{2,4,6\} = C,\quad \overline{C} = \{1,3,5,7\} = B,\quad \overline{D} = \{1,2,4,5,7\}$$

Exercice 3

On raisonne par double inclusion : si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$.

- $[\subset]$: si $x \in \overline{A \cup B}$, cela veut dire que x n'est pas dans $A \cup B$, dont il n'est ni dans A, ni dans B. Il est ainsi dans $\overline{A}$ et $\overline{B}$: donc $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
$[\supset]$: si $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, cela veut dire que x n'est pas dans A et x n'est pas dans B. Il n'est donc ni dans A, ni dans B, donc pas dans $A \cup B$. Ainsi, $x \in \overline{A \cup B}$
- $[\subset]$: si $x \in \overline{A \cap B}$, cela veut dire que x n'est pas dans $A \cap B$, donc il n'est pas dans A, ou pas dans B. Donc il est dans $\overline{A}$ ou dans $\overline{B}$: donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
$[\supset]$: si $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, cela veut dire que x est dans $\overline{A}$ ou dans $\overline{B}$. Ainsi, il n'est pas dans A ou pas dans B. Dans tous les cas, il n'est pas dans $A \cap B$: $x \in \overline{A \cap B}$.
- $[\subset]$: si $x \in A \cup (B \cap C)$, cela veut dire que x est dans A, ou dans $B \cap C$, donc dans A ou dans B et C. Dans tous les cas, il est dans $A \cup B$ et dans $A \cup C$: $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
$[\supset]$: si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, cela veut dire que x est dans$A \cup B$ et dans $A \cup C$. Donc x est dans A, ou alors il est dans B et C, donc dans A ou dans $B \cap C$: $x \in A \cup (B \cap C)$.
- $[\subset]$: si $x \in A \cap (B \cup C)$, cela veut dire que x est dans A et dans $B \cup C$, donc dans A et dans B ou C. Donc x est dans A et B, ou dans A et C : $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. $[\supset]$: si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, cela veut dire que x est dans $A \cap B$ ou dans $A \cap C$, donc dans A et B, ou dans A et C. Dans tous les cas, x est dans A et dans B ou C : $x \in A \cap (B \cup C)$.

Exercice 4

On doit déterminer tous les sous-ensembles de $\{0,1,2\}$:

- à 0 élément, il n'y a que $\varnothing$.
- à 1 éléments, il y a $\{0\}, \{1\}$ et $\{2\}$.
- à 2 éléments, il y a $\{0,1\}, \{0,2\}$ et $\{1,2\}$.
- à 3 éléments, il n'y a que $\{0,1,2\}$.

Ainsi,

$$\mathscr{P}(\{0,1,2\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

On obtient bien $2^3 = 8$ sous ensembles.

Exercice 5

Remarquons tout d'abord que f est définie sur $\mathbb{R}$, g est définie sur $\mathbb{R}^+$ et h est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f est toujours positive, et h est positive sur $[2;+\infty[$. Ainsi :

- $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $x \geqslant 0$, $f \circ g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
- $f \circ h$ est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ h(x) = (x-2)^2$.
- $g \circ h$ est définie sur $[2;+\infty[$, et pour tout $x \geqslant 2$, $g \circ h(x) = \sqrt{x-2}$.
- $h \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h \circ f(x) = x^2 - 2$.
- $h \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $x \geqslant 0$, $h \circ g(x) = \sqrt{x} - 2$.
- $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

Exercice 6

On peut écrire f sous la forme $\frac{1}{v}$ avec $v : x \mapsto x^2 + 1$. Ainsi, $f = u \circ v$ avec $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $v : x \mapsto x^2 + 1$.
De même, g s'écrit e^z avec $z : x \mapsto -x^2$. Ainsi, $g = w \circ z$ avec $w : x \mapsto e^x$ et $z : x \mapsto -x^2$.

Exercice 7

- **Injectivité**. *Rappel de la méthode : pour montrer qu'une fonction est injective, on écrit $f(x) = f(x')$ et on essaie de montrer que $x = x'$. Pour montrer qu'elle n'est pas injective, on exhibe un contre-exemple.*

f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$. En effet, $-1 \neq 1$ et pourtant $f(-1) = f(1) = 2$.
g est injective sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, soient x et x' deux réels strictement positifs. Alors

$$g(x) = g(x') \Leftrightarrow e^{3+\ln(x)} = e^{3+\ln(x')} \Leftrightarrow 3 + \ln(x) = 3 + \ln(x') \text{ car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

Ainsi, $\ln(x) = \ln(x')$ puis $x = x'$ car la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
h est injective sur $\mathbb{R}$. En effet, soient x et x' deux réels. Alors

$$h(x) = h(x') \Leftrightarrow \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{x'^3+1} \Leftrightarrow x^3 + 1 = x'^3 + 1 \text{ en appliquant la fonction inverse}$$

donc $x^3 = x'^3$ puis $x = x'$ car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• **Surjectivité**. *Rappel de la méthode : pour montrer qu'une fonction est surjective sur un ensemble, on prend y un élément de cet ensemble, et on lui cherche au moins un antécédent. Pour montrer qu'elle n'est pas surjective, on exhibe un élément y de cet ensemble qui n'est pas atteint par la fonction.*
f n'est pas surjective. En effet, pour tout réel x, $x^2+1 \geqslant 1$, donc (par exemple) 0 n'est jamais atteint par la fonction f. *En revanche, elle est surjective sur* $[1;+\infty[$.
g n'est pas surjective. En effet, pour tout réel $x>0$, $g(x)>0$ (car une exponentielle est toujours positive), donc (par exemple) -1 n'est jamais atteint par la fonction g. *En revanche, elle est surjective sur* $]0;+\infty[$.
h est surjective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}^*$. Alors $h(x)=y$ nous donne $\frac{1}{x^3+1}=y$ puis $x^3=\frac{1}{y}-1$ ($y \neq 0$) et enfin $x=\sqrt[3]{\frac{1}{y}-1}$ (fonction qui est bien définie sur $\mathbb{R}$).
• **Bijectivité**. f n'étant pas injective, elle n'est a fortiori par bijective. De même, g n'étant pas surjective, elle n'est pas bijective. Enfin, h étant à la fois injective et surjective, elle est bijective.

Exercice 8

Pour tout x dans $[0;1]$, $x+1$ parcourt $[1;2]$. Par stricte croissance de exp, e^{x+1} parcourt alors $\left[e^1;e^2\right]$. Donc

$$f([0;1])=\left[e;e^2\right]$$

Enfin e^{x+1} est dans $[1;e]$ si et seulement si $x+1$ est dans $[\ln(1);\ln(e)]=[0;1]$, et donc si $x\in[-1;0]$:

$$f^{-1}([1;e])=[-1;0]$$

Chapitre 2

Utilisation des symboles Σ et Π

Résumé

Le but de ce (petit) chapitre est d'introduire les symboles Σ et Π que l'on utilisera régulièrement au cours de l'année.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① maitriser les symboles Σ et $\prod$:
- le changement de variable dans une somme .... ☐
- la simplification d'une somme télescopique .... ☐

② connaître la définition de la factorielle .... ☐

③ connaître les propriétés de la factorielle .... ☐

I. Définitions et propriétés

1. Définition

Définition 2.1.

Soient n et p deux entiers tels que $p < n$. On note $[\![p, n]\!] = \{p; p+1; \cdots; n\}$.

Exemple 2.1

Par exemple, $[\![2, 5]\!] = \{2, 3, 4, 5\}$.

Remarque

Il y a n entiers dans $[\![1, n]\!]$, et $n+1$ entiers dans $[\![0, n]\!]$. Il y a $n-p+1$ entiers dans $[\![p, n]\!]$.

Exemple 2.2

Il y a 7 entiers dans $[\![2, 8]\!]$.

Définition 2.2.

- Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des réels. On note
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots a_n$$
et on lit "somme de $k=0$ à n des a_k".
- Soient $a_p, \cdots, a_n$ des réels ($p \leqslant n$). On note
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + \cdots + a_n$$
et on lit "somme de $k=p$ à n des a_k".

Exemple 2.3

Par exemple, $\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$.

Exercice 2.4

Ecrire la notation en extension de $\sum_{k=2}^{30} k$ et $\sum_{n=1}^{p} \sqrt{n}$.

Ecrire à l'aide du symbole $\sum$ l'expression $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et $2+4+6+\cdots+18$.

Solution

On a, rapidement :

- $\sum_{k=2}^{30} k = 2 + 3 + \cdots + 30$,
- $\sum_{n=1}^{p} \sqrt{n} = 1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{p}$,
- $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,
- $2 + 4 + \cdots + 18 = \sum_{k=1}^{9} 2k$.

Remarque

L'ordre de la sommation n'a pas d'importance. Ainsi $\sum_{k=1}^{n} k^2$ représente la même somme que $\sum_{k=n}^{1} k^2$.

Remarque

On définit de la même manière $a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_n = \prod_{k=p}^{n} a_k$.

Définition 2.3. Factorielle

Soit n un entier non nul. On appelle **factorielle** de n, et on note $n!$, le nombre $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Par convention, $0! = 1$.

Remarque

On a ainsi $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$ et $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

Proposition 2.1.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

Démonstration

En effet, par définition,

$$(n+1)! = \underbrace{1 \times 2 \times \cdots \times n}_{=n!} \times (n+1) = n! \times (n+1)$$

Exercice 2.5

Pour $n \geqslant 1$, simplifier $\frac{(n+2)!}{n!}$.

Solution

On a

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

2. Première propriétés

Soient deux entiers p et n tels que $p \leqslant n$, soient $a_p, \cdots, a_n, b_p, \cdots, b_n$ des réels.

- Linéarité :

$$\sum_{k=p}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{k=p}^{n} \lambda . a_k = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k$$

- Relation de Chasles : pour tout entier $m > n$,

$$\sum_{k=p}^{m} a_k = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k$$

- $\prod_{k=p}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^{n} a_k \times \prod_{k=p}^{n} b_k$

- $\forall \lambda, \prod_{k=p}^{n} (\lambda a_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} a_k$

3. ln et exp

Propriété 2.2.

- Pour tous réels $a_p, \cdots, a_n$, on a

$$\exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} e^{a_k}$$

- Pour tous réels $a_p > 0, \cdots, a_n > 0$, on a

$$\ln\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \ln(a_k)$$

4. Sommes usuelles

♡ **Proposition 2.3.**

On dispose des résultats suivants :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} (\text{si } q \neq 1)$$

Démonstration

Elles ont été vues dans le chapitre précédent.

II. Changement de variables

1. Variables muettes

Remarque

Lorsqu'on écrit $\sum_{k=p}^{n} a_k$, la variable k est appelée **variable muette** : on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre non utilisée :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{z=p}^{n} a_z$$

2. Changement de variable

Puisque la variable d'une somme est muette, on peut faire un changement de variable, qui consiste à ré-écrire la somme différemment.

Proposition 2.4.

Soient $p \leqslant n$ deux entiers, l un entier, et $a_{p+l}, \cdots a_{n+l}$ des réels. Alors

$$\sum_{k=p+l}^{n+l} a_k = \sum_{j=p}^{n} a_{j+l}$$

On a effectué le changement de variable $j = k - l$: ainsi, si $k = p + l$, alors $j = p$. De même, $k = n + l$ amène $j = n$.

Méthode

Pour faire un changement de variable $j = f(k)$, on procède en remplaçant toutes les occurrences de k par son expression en fonction de j, mais on n'oublie pas de changer les bornes en conséquence !

Exemple 2.6

Calculer $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)$ en posant $j = n - k$.

Solution

Posons $j = n - k$. Alors

$$\mathrm{S} = \sum_{j=n}^{0} j = \sum_{j=0}^{n} j$$

car l'ordre de la somme des termes n'importe pas. On a donc

$$\mathrm{S} = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Sommes doubles

Remarque

On peut envisager de calculer des sommes de sommes. Dans ce cas, on fera attention à utiliser deux variables différentes.

Exemple 2.7

La somme suivante est une somme double :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$$

Remarque

On peut calculer la somme précédente. En effet, lorsqu'on somme sur j, la variable i est une variable indépendante. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Dans certains cas, on ne peut pas séparer les variables, quand une somme dépend d'une des variables. Par exemple,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j$$

Dans ce cas, on peut calculer la somme, mais en étant rigoureux :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + i = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

III. Sommes télescopiques

1. Définition

Définition 2.4.

Soient $a_0, \cdots, a_{n+1}$ des réels. On appelle **somme télescopique** une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k$$

Exemple 2.8

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ est une somme télescopique.

2. Simplification

Proposition 2.5.

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k$. Alors

$$S_n = a_{n+1} - a_0$$

Démonstration

En effet,

$$S_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = -a_0 + a_{n+1}$$

Exemple 2.9

La somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ se simplifie en

$$S_n = \frac{1}{n+1} - 1$$

Exercice 2.10

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$. Simplifier S_n.

Solution

On constate en effet, en utilisant les propriétés du logarithme, que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$$

La somme S_n est donc télescopique. On a donc

$$S_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

3. Produits télescopiques

On peut définir également les produits télescopiques, avec un résultat assez similaire à celui des sommes télescopiques.

Définition 2.5.

Soient $a_0, \cdots a_{n+1}$ des réels tous non nuls. On appelle **produit télescopique** un produit de la forme

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Exemple 2.11

Le produit

$$\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$$

est un produit télescopique.

Proposition 2.6.

Soit $\mathrm{P}_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ avec $a_0, \cdots a_{n+1}$ tous non nuls. Alors $\mathrm{P}_n = \frac{a_{n+1}}{a_0}$

Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

Résumé

Dans ce chapitre, on rappelle certaines généralités sur les fonctions, et on ajoute certains compléments permettant d'étudier les fonctions (parité, périodicité) ainsi que de nouvelles fonctions (valeur absolue, partie entière)

> « *La nature préfère les croissances vertigineuses, ou résolument plus douces, les exposants et les logarithmes. La nature est par nature non linéaire.* »

Paolo Giordano (1982 –). *Contagions*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① savoir déterminer certaines caractéristiques d'une fonction :

- parité et périodicité . . . . ☐
- les extrema d'une fonction . . . . ☐

② connaître les fonctions usuelles (variations, dérivées, représentation graphique) :

- fonctions affines et trinômes du second degré . . . . ☐
- fonctions valeur absolue, racine carrée et inverse . . . . ☐
- fonction partie entière . . . . ☐
- fonctions ln, exp et puissances . . . . ☐

I. Généralités sur les fonctions

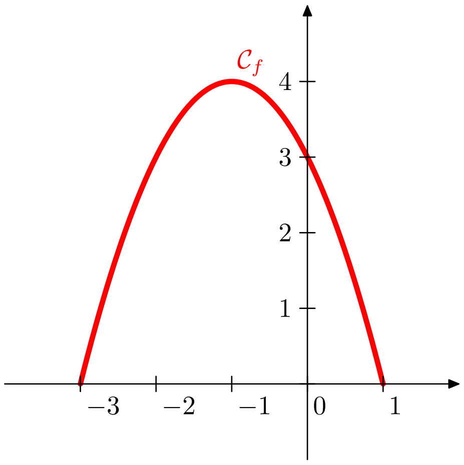
1. Notion de fonction

Définition 3.1.

On appelle **fonction** f, définie sur un domaine I, un objet qui, à partir d'un nombre x de I donné, associe **une unique image** noté $f(x)$.
On note $x \mapsto f(x)$ pour dire "x, on associe le nombre $f(x)$".

Exemple 3.1

- Fonction définie graphiquement :



- Fonction définie par une formule : $g(x)=3x^2+1$
- Fonction définie par un tableau :

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	1	-3	2	$\frac{1}{2}$	0

Définition 3.2.

On appelle **ensemble de définition** d'une fonction f, noté $\mathscr{D}_f$ en général, l'ensemble de tous les nombres x où on peut calculer $f(x)$ (c'est à dire, où $f(x)$ est définie).

Exemple 3.2

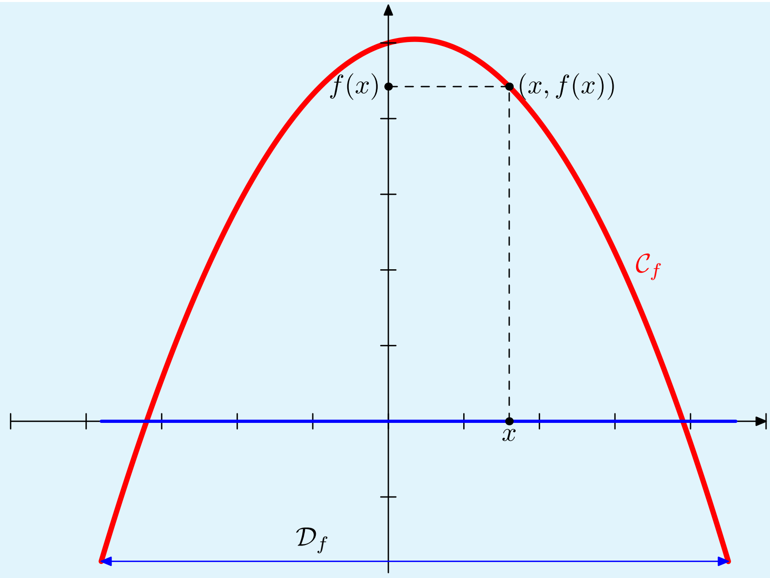
Dans les exemples précédents :

- f est définie graphiquement sur $[-3;1]$: en effet, on ne peut calculer $f(x)$ que si $-3 \leqslant x \leqslant 1$.
- g est définie sur $\mathbb{R}$: en effet, pour tout nombre réel x, on peut calculer $3x^2+1$, et donc $g(x)$.
- h est définie sur $\{-2;-1;0;1;2\}$.

2. Courbe représentative

Définition 3.3.

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$. Soit (O;I;J) un repère (en général orthonormé) du plan. La **courbe représentative** (ou représentation graphique) de f, notée $\mathscr{C}_f$, est l'ensemble des points $(x;f(x))$ où x décrit l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.



3. Parité et imparité

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, définie sur $\mathscr{D}_f$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

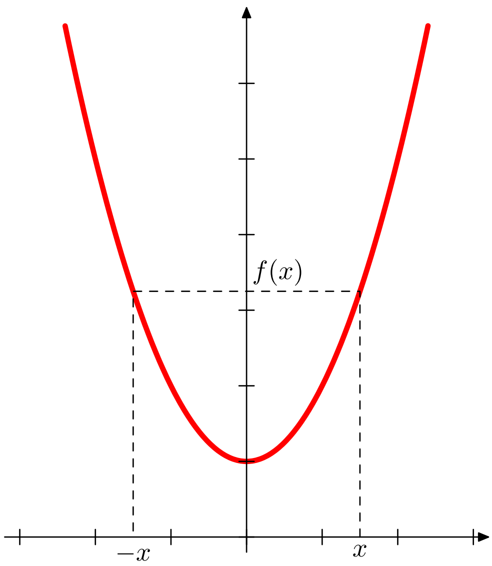
Définition 3.4.

f est dite **paire** si

- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f$ (le domaine de définition est symétrique par rapport à 0).
- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = f(x)$

Remarque

f est paire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



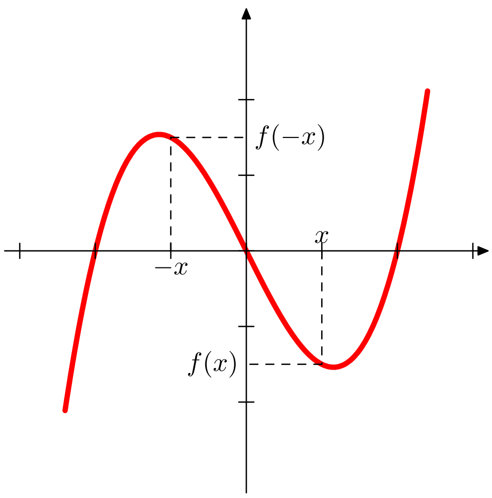
Définition 3.5.

f est dite **impaire** si

- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f$ (le domaine de définition est symétrique par rapport à 0).
- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = -f(x)$

Remarque

f est impaire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.



Exemple 3.3

La fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ est une fonction paire ; la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction impaire. En effet,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (-x)^2 = x^2 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

Méthode

Pour déterminer la parité d'une fonction, on procède en deux étapes :

- On vérifie que le domaine est bien symétrique par rapport à 0.
- Pour un certain x dans $\mathscr{D}_f$ on calcule $f(-x)$ et on essaie de retrouver $f(x)$ ou $-f(x)$.

Exemple 3.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Déterminer la parité de f.

Solution

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ qui est bien symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$f(-x) = \mathrm{e}^{-(-x)^2} = \mathrm{e}^{-x^2} = f(x)$$

La fonction f est donc paire.

Méthode

Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire, ni impaire, on exhibe un contre-exemple : on cherche deux réels x et y dans $\mathscr{D}_f$ tels que $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-y) \neq -f(y)$ (selon le cas, cela peut être le même réel).

Exemple 3.5

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 + x$ n'est ni paire, ni impaire.

Solution

En effet, on constate que, pour $x = 1$, on a

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 0$$

alors que $f(1) = 1^2 + 1 = 2$. Donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$: la fonction n'est ni paire, ni impaire.

4. Périodicité

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

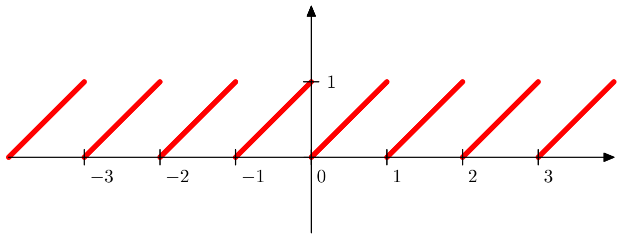
Définition 3.6.

On dit que f est **périodique** de période $\mathrm{T} > 0$ si :

- $\forall\, x \in \mathscr{D}_f, \quad x + \mathrm{T} \in \mathscr{D}_f$
- $\forall\, x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x + \mathrm{T}) = f(x)$

Remarque

La courbe représentative d'une fonction périodique n'est donc qu'une répétition de sa représentation sur $[0; \mathrm{T}]$. La fonction suivante est périodique, de période 1 :



5. Sens de variation

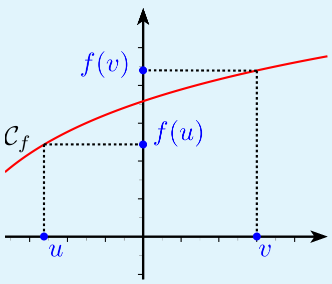
Définition 3.7.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère.

On dit que f est **croissante** sur I si, pour tous nombres réels u et v de l'intervalle I on a

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) \leqslant f(v)$$

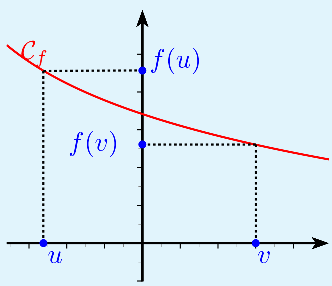
Une fonction croissante conserve l'ordre



On dit que f est **décroissante** sur I si, pour tous nombres réels u et v de l'intervalle I on a

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) \geqslant f(v)$$

Une fonction décroissante change l'ordre



Remarque

On définit également la croissance stricte et la décroissance stricte. Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **strictement croissante** lorsque pour tout u, v de l'intervalle I

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) < f(v)$$

Propriété 3.1.

- La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissante) est croissante (resp. décroissante).
- La composée de deux fonctions ayant le même sens de variation est croissante.
- La composée de deux fonctions ayant des sens de variations contraires est décroissante.

Démonstration

- Soit $x < y$. Si f et g sont croissantes, alors $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$. En additionnant les inégalités, $f(x)+g(x) \leqslant f(y)+g(y)$: $f+g$ est bien croissante.
- Soit $x < y$ et f, g deux fonctions croissantes. Alors $f(x) \leqslant f(y)$. Puisque g est croissante, on a également $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$: $g \circ f$ est bien croissante.

Les autres inégalités se démontrent de la même manière.

⚠ **Attention**

La somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut tout donner!

Théorème 3.2.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application strictement monotone. Alors f est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$.

Démonstration

f est par définition surjective sur $f(\mathrm{I})$. Enfin, si $x \neq x'$, $f(x) \neq f(x')$ car la fonction f est strictement monotone : donc f est injective, et donc bijective.

☞ *Exercice 1.*

6. Majorant-Minorant

Définition 3.8.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

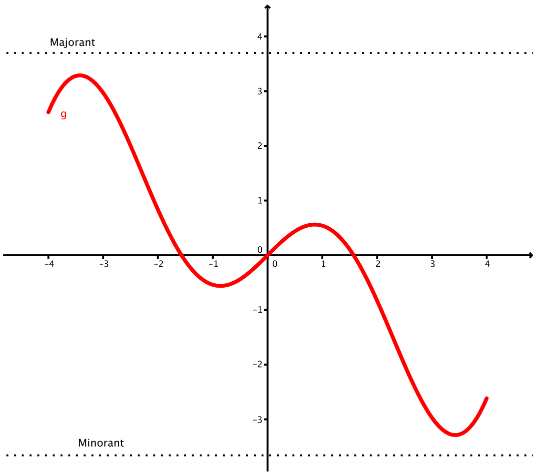
- f est dite **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que,

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant \mathrm{M}$$

  M est appelé un **majorant** de f sur I.
- f est dite **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que,

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant m$$

  m est appelé un **minorant** de f sur I.
- f est dite **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée.

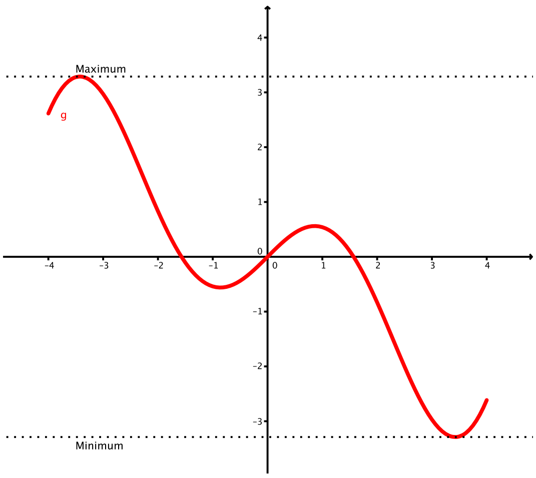


7. Maximum-Minimum

Définition 3.9.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un nombre réel de l'intervalle I.

- On dit que f admet un **maximum** en a si, pour tout réel x de I, on
$$f(x) \leqslant f(a)$$
On note $\max_{x \in \mathrm{I}} f(x) = f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum** en a si, pour tout réel x de I, on
$$f(x) \geqslant f(a)$$
On note $\min_{x \in \mathrm{I}} f(x) = f(a)$.



Remarque

On dit que $f(a)$ est un **extremum** de f sur I si $f(a)$ est un minimum ou un maximum de f sur I.
Si $f(a)$ est un extremum sur un intervalle ouvert contenant a, mais pas sur I tout entier, on dit que $f(a)$ est un **extremum local** en a.

II. Fonctions de référence

1. Fonctions affines

Définition 3.10.

Une fonction affine est une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax+b$, où a et b sont des réels fixés. a est appelé le **coefficient directeur** de f et b son **ordonnée à l'origine**.

Proposition 3.3.

Sa courbe représentative est une droite.
On rappelle le tableau de signe et variations :

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de f		$-$	0	$+$	
Variation de f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de f		$+$	0	$-$	
Variation de f		$\searrow$	0	$\searrow$	

2. Fonction trinômes

Définition 3.11.

On appelle fonction **trinôme du second degré** à coefficients réels une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$, avec a, b et c trois réels fixes et $a \neq 0$.

Proposition 3.4.

Sa courbe représentative est une parabole.
On rappelle son tableau de variations :

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Variation de f		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

Proposition 3.5.

On appelle **discriminant** du trinôme $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, f admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Il se factorise en $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ et son tableau de signe est donné par (en supposant ici que $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de f		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, f admet une racine $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Il se factorise en $f(x) = a(x - x_0)^2$ et son tableau de signe est donné par

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de f		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$, f n'admet pas de racine réelle et ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$. Son tableau de signe est donné par

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de f		signe de a	

3. Fonction valeur absolue

Définition 3.12.

La fonction **valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

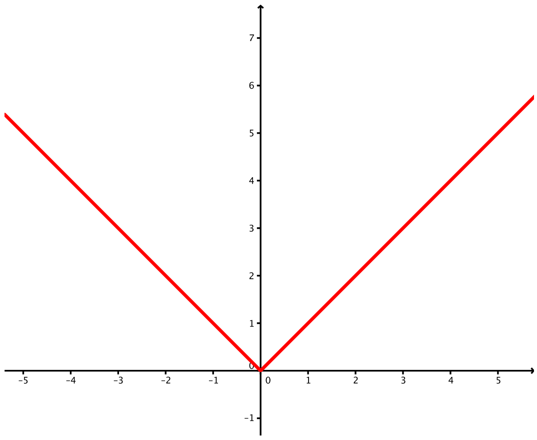
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Exemple 3.6

$|3| = 3$ et $|-4| = 4$.

Remarque

Par construction, la valeur absolue est une fonction paire, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.



Propriété 3.6.

Soient x, y deux réels, et $n \in \mathbb{N}$.

- $|-x| = |x|$ (parité) $\qquad |xy| = |x||y| \qquad |x^n| = |x|^n \qquad |x|^2 = x^2$
- Si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
- Si $y > 0$, $\quad |x| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y$
- Si $y > 0$, $\quad |x| \geqslant y \Leftrightarrow x \leqslant -y$ ou $x \geqslant y$

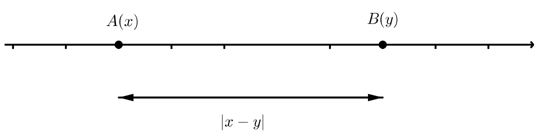
Théorème 3.7. Inégalité triangulaire

Pour tous réels x et y,

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{et} \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$$

Remarque

Si x et y sont des réels, $|x-y|$ représente la distance entre les points A d'abscisse x et B d'abscisse y.



Ainsi $|4-1| = 3$ car la distance entre le point A(1) et le point B(4) est de 3.

Démonstration

Calculons $(|x|+|y|)^2 - |x+y|^2$:

$$\begin{aligned}(|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 &= (|x|^2 + 2|x|\cdot|y| + |y|^2) - (x+y)^2 \\ &= x^2 + 2|x|\cdot|y| - (x^2 + 2xy + y) \\ &= 2(|xy| - xy)\end{aligned}$$

Or, par définition de la valeur absolue, $|xy| - xy \geqslant 0$. Donc $(|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$(|x|+|y|)^2 \geqslant |x+y|^2$$

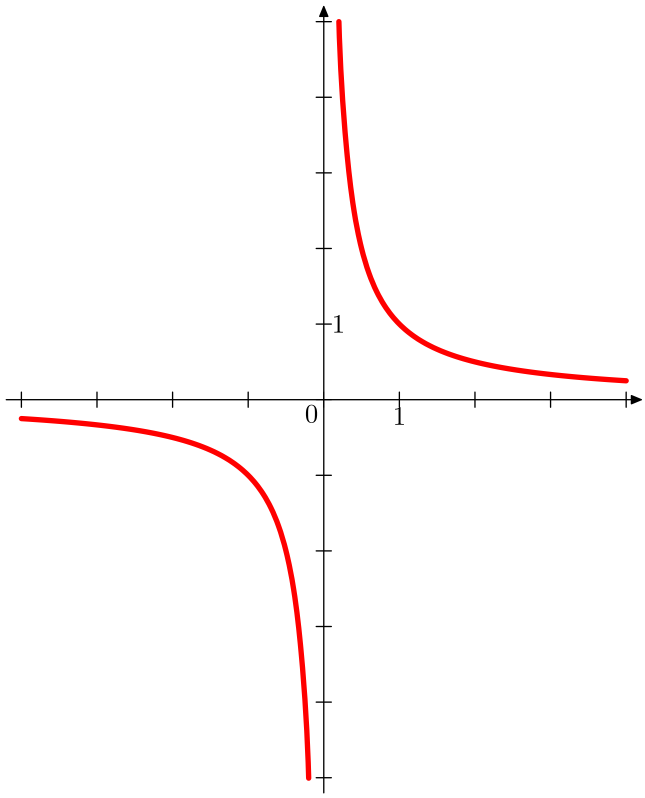
Puisque les deux nombres $|x|+|y|$ et $|x+y|$ sont positifs, cela implique que $|x|+|y| \geqslant |x+y|$.
La deuxième inégalité se traite de la même manière.

4. Fonctions racine carrée et inverse

a. Fonction inverse

Définition 3.13.

La fonction **inverse** est la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$, par $f(x) = \frac{1}{x}$.



Propriété 3.8.

- La fonction inverse est impaire : $\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\quad \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$.
- Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

- Pour tout réel $a \neq 0$, $\frac{1}{x} = a \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$.

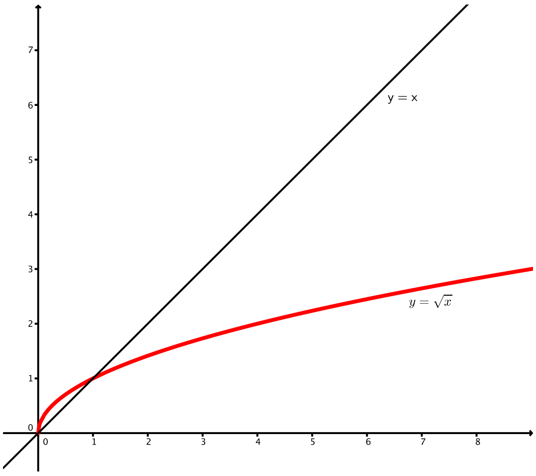
b. Fonction racine carrée

Définition 3.14.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ est l'unique réel positif dont le carré est x :

$$\sqrt{x} > 0 \quad \text{et} \quad (\sqrt{x})^2 = x$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est appelée **fonction racine carrée**.



Propriété 3.9.

- $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$.
- Pour tous réels positifs x et y :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad (\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{et si } y \neq 0, \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

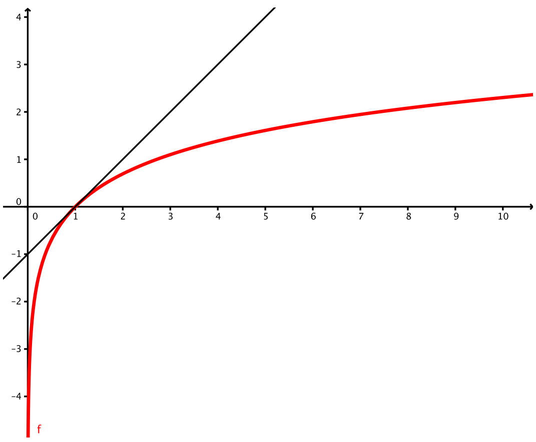
- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

5. Fonction logarithme népérien

Définition 3.15.

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall\ x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0$$



Propriété 3.10.

- La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tous réels x et y de $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{1}{y}\right)=-\ln(y)$$

Ainsi,

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y) \qquad \forall\, n\in\mathbb{Z},\quad \ln(x^n)=n\ln(x)$$

$$\ln\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\ln(x)$$

- Grâce à la stricte croissance de ln, pour tous réels x, y strictement positifs :

$$\ln(x)=\ln(y)\Leftrightarrow x=y \quad \text{et} \quad \ln(x)<\ln(y)\Leftrightarrow x<y$$

En particulier $\ln(x)=0\Leftrightarrow x=1$ et $\ln(x)=1\Leftrightarrow x=\mathrm{e}$ avec $\mathrm{e}\approx 2,718$.

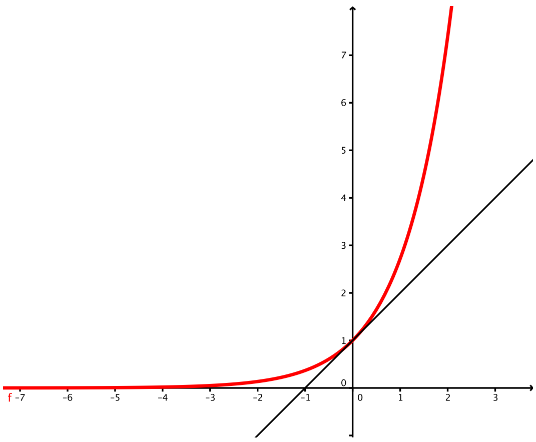
RÉFÉRENCE HISTORIQUE

John Neper inventa les logarithmes vers 1613. Le logarithme le plus utilisé (dit en “base e”) porte ainsi son nom.

6. Fonction exponentielle

Définition 3.16.

La fonction **exponentielle**, noté exp, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est elle-même, et telle que $\exp(0)=1$. On note $\exp(x)=\mathrm{e}^x$.



♡ **Propriété 3.11.**

- La fonction exp est strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}$.
- Par définition, $\mathrm{e}^0=1$, et $\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.
- Pour tous réels x et y,

$$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y) \quad \text{et} \quad \exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$$

Ainsi,

$$\exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad \text{et} \quad \forall\, n\in\mathbb{Z},\quad (\exp(x))^n=\exp(nx)$$

- Grâce à la stricte croissance de exp, pour tout réels x et y :

$$\exp(x)=\exp(y)\Leftrightarrow x=y \quad \text{et} \quad \exp(x)<\exp(y)\Leftrightarrow x<y$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Le mot "exponentiel" a été introduit pour la première fois par **Jean Bernoulli** en 1694, dans une correspondance avec **Leibniz**. La notation e est due à **Leonhard Euler**, utilisée pour la première fois en 1728.

Remarque

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien :

- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout réel x, et tout réel $y > 0$, $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$.

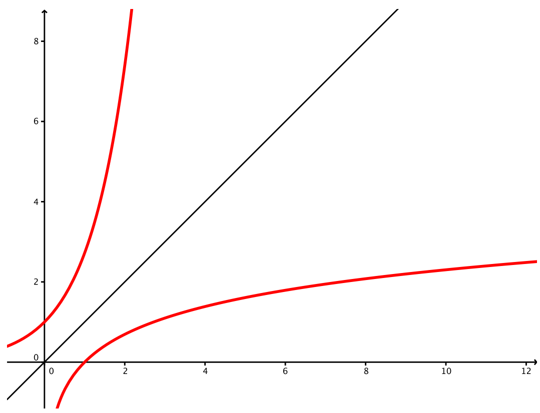
Ainsi, on retiendra également que $\ln(e) = 1$.

Propriété 3.12. Comparaison $\ln$, $\exp$, $x \mapsto x$

Pour tout réel $x > 0$, on a

$$\ln(x) \leqslant x \leqslant \exp(x)$$

et les courbes représentatives de exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



7. Fonctions puissances

Les fonctions puissances généralisent les fonctions $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Définition 3.17.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)}$$

Remarque

Attention : l'écriture x^α n'est qu'une notation. En pratique, on repassera toujours à l'écrire $e^{\alpha \ln(x)}$.

♡ **Propriété 3.13.**

Les fonctions puissances possèdent les mêmes règles de calcul que les puissances entières :

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta.$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad (x \times y)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad \text{et} \quad x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Ainsi,

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$$

Démonstration

Les démonstrations sont toutes sur le même modèle. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $x>0$. Alors

$$x^{\alpha+\beta}=\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)\ln(x)}=\mathrm{e}^{\alpha\ln(x)+\beta\ln(x)}=\mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}\mathrm{e}^{\beta\ln(x)}=x^{\alpha}x^{\beta}$$

où on utilise les propriétés de la fonction exponentielle.

Remarque

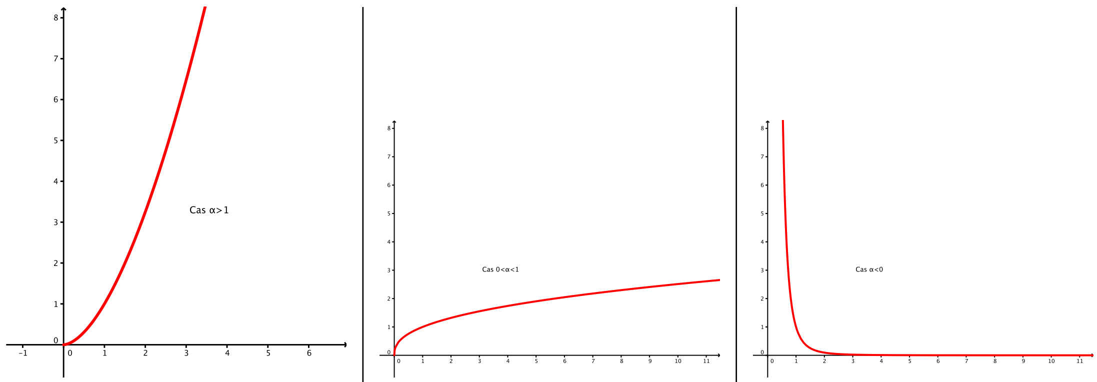
Ainsi, pour tout $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n=x$$

En particulier, $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ pour $x>0$. Par abus d'écriture, on confondra les deux écritures pour $x\geqslant 0$.

La représentation graphique des fonctions puissances dépend de α :

Propriété 3.14.



Cas $\alpha>1$ — Cas $0<\alpha<1$ — Cas $\alpha<0$

Remarque

On dispose d'autres fonctions puissances, dans le cas où la variable x est un exposant.
Pour tout réel $a>0$, on définit la fonction $x\longmapsto a^x$ par

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ a^x=\mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

Ainsi, les fonctions du type $x\longmapsto x^{\alpha}$ sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$, alors que les fonctions du type $x\longmapsto a^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Dans les deux cas, elles vérifient les propriétés sur les puissances.

☞ *Exercices 2, 3, 4 et 5.*

8. Fonction partie entière

Définition 3.18.

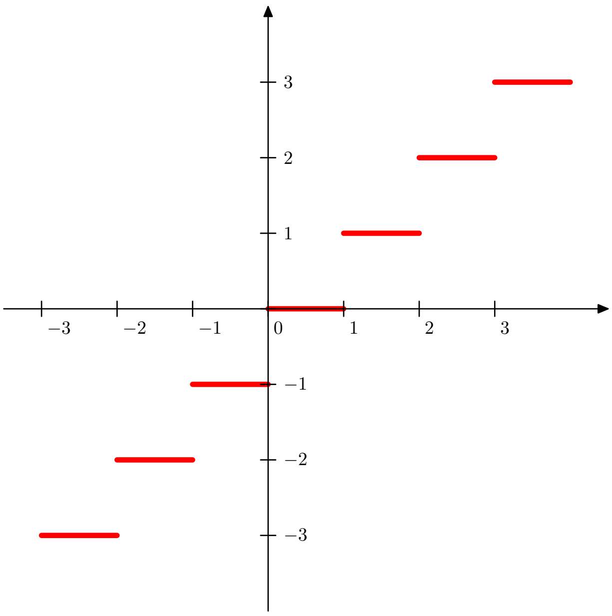
Soit x un nombre réel. On appelle **partie entière** de x, et on note $\mathrm{E}(x)$, $[x]$ ou $\lfloor x\rfloor$, le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

Remarque

On utilisera en général la notation $[x]$, voire $\lfloor x\rfloor$.

Exemple 3.7

Ainsi, $[3,2]=3$, $[\pi]=3$, $[-3,2]=-4$.



Propriété 3.15.

- $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad [x] \in \mathbb{Z}$.
- $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad [x] \leqslant x$ par définition.
- $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad x < [x]+1$ aussi par définition. Ainsi,

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad [x] \leqslant x < [x]+1$$

  On a également la relation

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad x-1 < [x] \leqslant x$$

- La fonction partie entière est constante par morceaux : pour tout $x \in [n; n+1[$ (où $n \in \mathbb{Z}$), $[x] = n$.

Définition 3.19.

Soit x un nombre réel. On appelle **partie entière supérieure**, et on note $\lceil x \rceil$, le plus petit nombre entier supérieur ou égal à x.

Remarque

On dispose également d'une inégalité pratique : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$.

☞ *Exercice 8.*

9. Maximum, minimum de deux fonctions

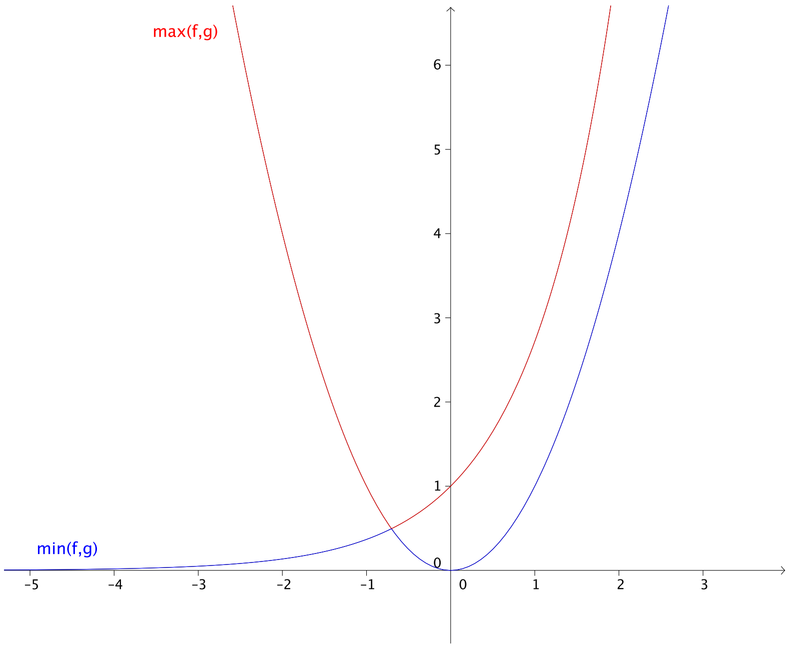
Définition 3.20.

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I.

- On appelle **maximum** de f et g, et on note $\max(f, g)$ l'application qui à tout réel $x \in \mathrm{I}$ associe le plus grand des deux nombres $f(x)$ et $g(x)$.
- On appelle **minimum** de f et g, et on note $\min(f, g)$ l'application qui à tout réel $x \in \mathrm{I}$ associe le plus petit des deux nombres $f(x)$ et $g(x)$.

Exemple 3.8

Si $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$, on obtient la figure suivante :



Théorème 3.16.

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. Alors, pour tout réel $x \in \mathrm{I}$:

$$\max(f,g)(x) = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \quad \text{et} \quad \min(f,g)(x) = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

Démonstration

Si $f(x) \geqslant g(x)$, alors $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$ et donc

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2} = f(x) = \max(f,g)(x)$$

$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-(f(x)-g(x))}{2} = g(x) = \min(f,g)(x)$$

Si cette fois-ci $f(x) < g(x)$ alors $|f(x)-g(x)| = |g(x)-f(x)| = g(x)-f(x)$. Ainsi :

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+g(x)-f(x)}{2} = g(x) = \max(f,g)(x)$$

$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-(g(x)-f(x))}{2} = f(x) = \min(f,g)(x)$$

Exercices

Généralités sur les fonctions

3

Exercices

Calculs et démonstrations

●●○ **Exercice 1** (10 min.)

Déterminer le sens de variations des fonctions $x \mapsto ax+b$ $(a \neq 0)$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ en revenant à la définition.

●○○ **Exercice 2 Puissances, logarithmes et exponentielles** (10 min.)

1. Exprimer les puissances suivantes à l'aide de puissance de 2 et de 3 :

$$4^4 \qquad 9^7 \qquad 6^3 \qquad 36^4$$

2. Exprimer $\ln(24)$, $\ln(72)$ et $\ln(\sqrt{12})$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.
3. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{\exp(2x^2-1)}{\exp(2x-1)} \qquad C = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \qquad E = \exp(\ln(3))$$

$$F = \exp(3\ln(2))$$

$$B = \exp(x^2+1) - (\exp(x))^2 \qquad D = \ln(2x) - \ln(x) \qquad G = \exp(-\ln(5))$$

Equations, inéquations

●○○ **Exercice 3** (25 min.)

Résoudre les équations suivantes :

1. $(E_1) : x^4 + x^2 - 2 = 0$
2. $(E_2) : \exp(2x) + \exp(x) - 6 = 0$
3. $(E_3) : \ln(x)^2 + 2\ln(x) - 3 = 0.$
4. $(E_4) : x = \sqrt{x+2}$
5. $(E_5) : e^x + e^{-x} = 2$

Méthode

On rappelle que dans le cas d'équation proche d'une équation du second degré, on change de variable inconnue pour se ramener à une équation de ce type.

●○○ **Exercice 4** (30 min.)

Résoudre les inégalités suivantes :

1. $(2x+1)(3x-1) > 0$
2. $\dfrac{4x+3}{2x+1} \geqslant 0$
3. $\dfrac{1-2x}{x+1} > 0$
4. $5x^2 - 10x + 4 \leqslant 0$
5. $\ln(2x+1) \leqslant \ln(x+7)$
6. $2x^3 + 2x \leqslant -2x$
7. $2^x \geqslant 3^{x-1}$

●●○ Exercice 5 (10 min.)

Montrer les résultats suivants :

$$\forall\, x>0,\quad \sqrt{\frac{2}{x+1}} \geqslant \sqrt{\frac{2}{x+4}} \qquad \forall\, x,\quad e^{2x+1} \leqslant e^{x^2+2}$$

Définitions et parités

●○○ Exercice 6 Domaine de définition (10 min.)

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2+5x+6} \qquad g : x \mapsto \ln\left(2x^2+2x-12\right)$$

●○○ Exercice 7 Parités (15 min.)

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x^2+1)}{x^4+1} \qquad g : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad h : x \mapsto x(x^2+2)^3(e^{x^2+1}+3)$$

Pour aller plus loin

●●○ Exercice 8 (10 min.)

Soit $f : x \mapsto x-[x]$. Etudier la monotonie de f. Que représente $f(x)$ pour un réel x ? Représenter f.

●●○ Exercice 9 (10 min.)

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie pour tout entier x par $f(x) = (-1)^x$. Déterminer l'image de la fonction f, $f(\mathbb{Z})$. Déterminer l'image réciproque par f de $\{1\}$.

●○○ Exercice 10 (10 min.)

Soit (E) : $mx^2 + x(2m-1) - 2 = 0$ où x et m sont des réels.

1. Soit m fixé. Résoudre l'équation (E) d'inconnue x.
2. Soit x fixé. Résoudre l'équation (E) d'inconnue m.

Corrigés

Généralités sur les fonctions

Corrigés des exercices

Exercice 1

Notons $f : x \mapsto ax+b$, $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto \frac{1}{x}$.

• (f dans le cas $a>0$) Soient x et y deux réels tels que $x<y$. Alors $ax<ay$ (car $a>0$) puis $ax+b<ay+b$, soit $f(x)<f(y)$: ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• (f dans le cas $a<0$) Soient x et y deux réels tels que $x<y$. Alors $ax>ay$ (car $a<0$) puis $ax+b>ay+b$, soit $f(x)>f(y)$: ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

• Soient x et y deux réels tels que $x<y$. Calculons $f(y)-f(x)$:

$$f(y)-f(x)=y^2-x^2=(y-x)(y+x)$$

Puisque $x<y$, $y-x>0$. Sur $\mathbb{R}^+$, $y+x>0$ et donc $f(y)-f(x)>0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Sur $\mathbb{R}^-$, $y+x<0$ donc $f(y)-f(x)<0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

• Soient x et y deux réels non nuls tels que $x<y$. Calculons $f(y)-f(x)$:

$$f(y)-f(x)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{x-y}{xy}$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $xy>0$ et $x-y<0$ car $x<y$. Ainsi, $f(y)-f(x)<0$ et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Sur $\mathbb{R}_-^*$, $xy>0$ et $x-y<0$ donc $f(y)-f(x)<0$ et f est également strictement décroissante sur R_-^*.

Exercice 2

> **Remarque**
> On utilise les propriétés des fonctions puissances, logarithme et exponentielle qu'on évitera d'inverser.

1. On a :

$$4^4=(2^2)^4=2^8 \qquad 9^7=(3^2)^7=3^{14} \qquad 6^3=(3\times 2)^3=3^3 2^3 \qquad 36^4=(3^2\times 2^2)^4=3^8 2^8$$

2. On a $24=3\times 2^3$. Par propriétés de la fonction logarithme,

$$\ln(24)=\ln(3\times 2^3)=\ln(3)+\ln(2^3)=\ln(3)+3\ln(2)$$

De même, $72=2^3\times 3^2$ donc

$$\ln(72)=\ln(2^3 3^2)=3\ln(2)+2\ln(3)$$

Enfin, $12=3\times 2^2$ donc

$$\ln(\sqrt{12})=\frac{1}{2}\ln(12)=\frac{1}{2}(\ln(3)+2\ln(2))$$

3. On utilise les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme quand c'est possible :

$$\mathrm{A}=\frac{\mathrm{e}^{2x^2-1}}{\mathrm{e}^{2x-1}}=\mathrm{e}^{2x^2-1-(2x-1)}=\mathrm{e}^{2x^2-2x} \qquad \mathrm{B}=\mathrm{e}^{x^2+1}-(\mathrm{e}^x)^2=\mathrm{e}^{x^2+1}-\mathrm{e}^{2x} \qquad \mathrm{C}=\frac{\ln(2)+\ln(x)}{\ln(x)}=\frac{\ln(2)}{\ln(x)}+1$$

$$\mathrm{D}=\ln(2)+\ln(x)-\ln(x)=\ln(2) \qquad \mathrm{E}=\mathrm{e}^{\ln(3)}=3 \qquad \mathrm{F}=\mathrm{e}^{3\ln(2)}=\mathrm{e}^{\ln(2^3)}=2^3=8 \qquad \mathrm{G}=\mathrm{e}^{-\ln(5)}=\mathrm{e}^{\ln(1/5)}=\frac{1}{5}$$

Exercice 3

1. On pose $X = x^2$. (E_1) s'écrit alors $X^2 + X - 2 = 0$.
Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times -2 = 9$, et le trinôme possède donc deux solutions : $X_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.
On revient à l'inconnue de départ. Nous avons donc $X = 1$ soit $x^2 = 1$, ce qui nous donne finalement deux solutions : $x = 1$ ou $x = -1$:

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1; 1\}}$$

2. (E_2) s'écrit également $(e^x)^2 + e^x - 6 = 0$. On pose $X = e^x$. (E_2) devient alors $X^2 + X - 6 = 0$. Ce trinôme possède deux solutions, qui sont -3 et 2.
On revient à l'inconnue de départ : nous avons donc $e^x = -3$, ce qui est impossible, ou $e^x = 2$ soit $x = \ln(2)$. Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{\ln(2)\}}$$

3. On pose $X = \ln(x)$. (E_3) devient $X^2 + 2X - 3 = 0$. Ce trinôme possède deux solutions : -3 et 1.
On revient à l'inconnue de départ : on a donc $\ln(x) = -3$, soit $x = e^{-3}$, ou $\ln(x) = 1$, soit $x = e$. Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{e^{-3}; e\right\}}$$

4. On constate que (E_4) s'écrit $(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 2 = 0$. On pose alors $X = \sqrt{x}$. (E_4) s'écrit alors $X^2 - X - 2 = 0$. Ce trinôme possède deux solutions : -1 et 2.
On revient à l'inconnue de départ : $\sqrt{x} = -1$, ce qui est impossible, ou $\sqrt{x} = 2$, c'est-à-dire $x = 4$. Ainsi

$$\boxed{\mathscr{S} = \{4\}}$$

5. (E_5) s'écrit également $(e^x)^2 + 1 - 2e^x = 0$ en multipliant par $e^x \neq 0$. On pose alors $X = e^x$. (E_5) s'écrit alors $X^2 - 2X + 1 = 0$ qui possède une unique solution : 1.
On revient à l'inconnue de départ : $e^x = 1$, c'est-à-dire $x = 0$. Ainsi

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$$

Exercice 4

> ***Méthode***
> Dans la plupart des cas, pour déterminer le signe d'une expression, on essaie de factoriser au maximum puis de faire un tableau de signe.

1. On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+1)(3x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

2. On dresse le tableau de signe, en oubliant pas les doubles barres en cas de non-définition.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{4x+3}{2x+1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left]-\infty;-\frac{3}{4}\right] \cup \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$$

3. On dresse le tableau de signe.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{1-2x}{x+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left]-1;\frac{1}{2}\right[$$

4. Pour les trinômes du second degré, on dispose d'un théorème. Le discriminant ici vaut $\Delta = 20$, donc le trinôme dispose de deux racines : $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{20}}{10}$ et $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{20}}{10}$. Ainsi, puisque $5 > 0$, on dispose du tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$5x^2-10x+4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi

$$\mathscr{S} = [x_1; x_2]$$

5. L'équation n'a de sens que si $2x+1 > 0$ et $x+7 > 0$, c'est-à-dire $x > -\frac{1}{2}$ et $x > -7$. On se place donc sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$. Par stricte croissance de la fonction logarithme :

$$\ln(2x+1) \leqslant \ln(x+7) \Leftrightarrow 2x+1 \leqslant x+7 \Leftrightarrow x \leqslant 6$$

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left]-\frac{1}{2};6\right]$$

6. On a

$$2x^3+2x \leqslant -2x \Leftrightarrow 2x^3+4x \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x(x^2+2) \leqslant 0$$

$x^2+2 > 0$ pour tout réel x, donc ce produit est du signe de $2x$. Ainsi

$$\mathscr{S} = \mathbb{R}^-$$

7. Les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$2^x \geqslant 3^{x-1} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x\ln(2)} \geqslant \mathrm{e}^{(x-1)\ln(3)}$$

et par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$2^x \geqslant 3^{x-1} \Leftrightarrow x\ln(2) \geqslant (x-1)\ln(3)$$

soit

$$2^x \geqslant 3^{x-1} \Leftrightarrow x(\ln(2)-\ln(3)) \geqslant -\ln(3) \Leftrightarrow x \leqslant \frac{-\ln(3)}{\ln(2)-\ln(3)} = \frac{\ln(3)}{\ln(3)-\ln(2)} \text{ car } \ln(2)-\ln(3) < 0$$

Ainsi

$$\mathscr{S} = \left]-\infty;\frac{\ln(3)}{\ln(3)-\ln(2)}\right]$$

Exercice 5

1. Pour $x>0$, on a $x+1<x+4$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{1}{x+1} \geqslant \frac{1}{x+4}$$

soit

$$\frac{2}{x+1} \geqslant \frac{2}{x+4}$$

Enfin, par stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{\frac{2}{x+1}} \geqslant \sqrt{\frac{2}{x+4}}$$

2. Calculons

$$\frac{e^{x^2+2}}{e^{2x+1}} = e^{x^2+2-2x-1} = e^{x^2-2x+1}$$

Or, pour tout réel x, $x^2-2x+1=(x-1)^2 \geqslant 0$. Donc, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$e^{x^2-2x+1} \geqslant e^0 = 1$$

Ainsi,

$$\frac{e^{x^2+2}}{e^{2x+1}} \geqslant 1$$

Enfin, puisque $e^{2x+1}>0$, on en déduit bien

$$e^{x^2+2} \geqslant e^{2x+1}$$

Exercice 6

Méthode

Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction, on détermine toutes les conditions d'existence (racine, dénominateur, logarithme,...). On conclut ensuite.

Pour la fonction f, nous avons deux conditions :

- $\sqrt{2x+1}$ n'est définie que si $2x+1 \geqslant 0$ soit $x \geqslant -\frac{1}{2}$.

- Le quotient n'a un sens que si $x^2+5x+6 \neq 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 1$. Ce trinôme possède donc deux racines : $x_1 = \frac{-5-1}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$. Il faut donc également que $x \neq -2$ et $x \neq -3$.

Bilan : la fonction f est donc définie sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Pour la fonction g, celle-ci n'est définie que si $2x^2+2x-12>0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 100$. Le trinôme possède donc deux racines, $x_1 = \frac{-2-10}{4} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+10}{4} = 2$. Ainsi, nous avons le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$2x^2+2x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$$\mathscr{D}_g =]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$$

Exercice 7

> **Rappel**
> On détermine d'abord le domaine de définition, avant de déterminer sa parité. En effet, celui-ci doit être symétrique par rapport à l'origine.

1. Puisque, pour tout réel x, $x^2+1>0$ et $x^4+1>0$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Enfin, pour tout réel x,

$$f(-x)=\frac{\ln((-x)^2+1)}{(-x)^4+1}=\frac{\ln(x^2+1)}{x^4+1}=f(x)$$

Ainsi, la fonction f est paire.

2. g n'est définie que si le quotient est strictement positif. Dressons le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, g est définie sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Enfin, pour tout $x\in\ ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$:

$$g(-x)=\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)=\ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-g(x)$$

Ainsi, g est une fonction impaire.

3. La fonction h est clairement définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0, et on a

$$\forall\ x\in\mathbb{R},\quad h(-x)=(-x)((-x)^2+2)^3(\mathrm{e}^{(-x)^2+1}+3)=-x(x^2+2)^3(\mathrm{e}^{x^2+1}+3)=-h(x)$$

Ainsi, h est impaire.

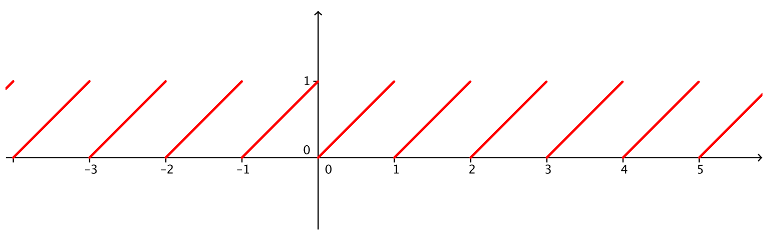
Exercice 8

La fonction n'est ni croissante, ni décroissante. En effet :

$$f(0)=0\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\qquad f(1)=0$$

Donc $f(0)<f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)>f(1)$.

Si $x\in\mathbb{R}$, $f(x)$ représente la partie décimale d'un nombre. Ainsi, pour tout entier k, la fonction est croissante sur $[k;k+1[$, $f(k)=0$. Cela donne la courbe représentative suivante :



Exercice 9

Par définition, f prend deux valeurs : 1 et -1. Donc

$$f(\mathbb{Z})=\{-1;1\}$$

Enfin, l'image réciproque de 1 est composé de tous les éléments de $\mathbb{Z}$ ayant pour image 1, c'est-à-dire les nombres pairs. Ainsi, $f^{-1}(\{1\})=2\mathbb{Z}$.

Exercice 10

1. Pour m fixé **non nul**, il faut donc résoudre l'équation du second degré $mx^2 + x(2m-1) - 2 = 0$ d'inconnue x. Son discriminant vaut

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4m(-2) = 4m^2 - 4m + 1 + 8m = 4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2$$

L'équation possède donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(2m-1)-(2m+1)}{2m} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(2m-1)+(2m+1)}{2m} = \frac{1}{m}$$

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left\{-2; \frac{1}{m}\right\}$$

Si $m = 0$ l'équation devient $-x - 2 = 0$ qui admet -2 comme unique solution.

Bilan : si $m \neq 0$, alors $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-2; \frac{1}{m}\right\}}$, et si $m = 0$, $\boxed{\mathscr{S} = \{-2\}}$.

2. Pour x fixé, c'est une équation du premier degré en m. Ainsi

$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow m(x^2 + 2x) = 2 + x$$

Soit $m(x(x+2)) = x + 2$. Si $x \neq 0$ et $x \neq -2$ alors, on dispose d'une unique solution :

$$\frac{x+2}{x(x+2)} = \frac{1}{x}$$

Si $x = 0$, l'équation (E) devient $-2 = 0$ ce qui est absurde, donc l'équation n'admet aucune solution.
Si $x = -2$, l'équation (E) devient $0 = 0$, soit $m \in \mathbb{R}$
Bilan : si $x = 0$, l'équation n'admet aucune solution ; si $x = -2$, alors $\mathscr{S} = \mathbb{R}$. Sinon,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{x}\right\}}$$

Chapitre 4

Polynômes

Résumé

Dans ce chapitre, on introduit un objet qui servira tant en première qu'en deuxième année, et qui a déjà été vu, en partie, au lycée.

> *« Rien n'est solitaire, tout est solidaire. L'homme est solidaire avec la planète, la planète est solidaire avec le soleil, le soleil est solidaire avec l'étoile, l'étoile est solidaire avec la nébuleuse, la nébuleuse, groupe stellaire, est solidaire avec l'infini. Ôtez un terme de cette formule, le polynôme se désorganise, l'équation chancelle, la création n'a plus de sens dans le cosmos et la démocratie n'a plus de sens sur la terre. Donc, solidarité de tout avec tout, et de chacun avec chaque chose. La solidarité des hommes est le corollaire invincible de la solidarité des univers. Le lien démocratique est de même nature que le rayon solaire. »*

Victor Hugo (1802 – 1885). *Proses philosophiques, L'âme*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir manipuler la notion de degré (définition, opérations) .... □

② Savoir manipuler la notion de dérivation de polynôme .... □

③ Connaître le principe de la division euclidienne .... □

④ Connaître la notion de racine .... □

⑤ Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}$ .... □

⑥ Savoir résoudre des équations se ramenant à un polynôme .... □

I. Définitions

1. Notion de polynômes

Notation

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on introduit les fonctions $X^i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^i \end{array}$ et la fonction $X^0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$

Définitions 4.1.

On appelle **polynôme à coefficients réels** toute somme finie d'applications précédentes, c'est-à-dire toute fonction s'écrivant sous la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, k \in [\![0, n]\!], a_k \in \mathbb{R}$.

- Les nombres a_k sont appelés les **coefficients** du polynôme P.
- Si $a_n \neq 0$, on dit que P est de **degré** n et on note $\deg(P) = n$. Dans ce cas, a_n est appelé **coefficient dominant** du polynôme P.
- La **fonction polynôme associée** au polynôme P est la fonction, encore notée P, définie sur $\mathbb{R}$ par $P : x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

Exemple 4.1

Le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^2 + 1$ est un polynôme de degré 4 et de coefficient dominant 1. Sa fonction polynôme associée est la fonction $P : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$. Ainsi, $P(1) = 1^4 - 2 \times 1^2 + 1 = 0$.

Remarque

Attention : la notation P(X) représente une fonction (c'est une représentation **formelle**). On peut ainsi parler du polynôme $P(X) = X^2 - 1$ plutôt que de parler de la fonction polynôme P définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 1$.

Notation

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Ainsi, $\mathbb{R}_1[X] = \{aX + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

2. Degré

Propriété 4.1.

Soient P et Q deux polynômes.

- Le degré d'un polynôme constant non nul est 0.
- $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Démonstration

On note n le degré de P et m le degré de Q. Ainsi, $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ et $Q(X) = b_m X^m + \cdots + b_0$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

- On a $(P+Q)(X) = a_n X^n + \cdots + a_0 + b_m X^m + \cdots + b_0$. Par construction, le degré de P + Q est égale au plus grand des deux degrés, sauf si $n = m$ et $a_n = -b_m$, et dans ce cas, le degré est strictement inférieur à n. Dans tous les cas $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- Quand on développe P(X)Q(X), le terme de plus haut degré est le terme $a_n X^n b_m X^m = a_n b_m X^{n+m}$ (avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$). Donc $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Remarque

Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. Par convention, on dit qu'il est degré $-\infty$.

3. Dérivée d'un polynôme

Définition 4.2.

Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. On appelle **polynôme dérivé**, et on note P', le polynôme définie par

$$P'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + 2a_2 X + a_1$$

Remarque

On peut dérivée à nouveau P' et on note P'' ou $P^{(2)}$ la dérivée seconde de P. Plus généralement, on note $P^{(k)}$ la dérivée k-ième de P.

Exemple 4.2

Soit $P(X) = 3X^3 + 2X^2 - 1$. Alors $P'(X) = 9X^2 + 4X$, $P^{(2)}(X) = 18X + 4$, $P^{(3)}(X) = 18$ et $P^{(4)}(X) = 0$.

Remarque

- Si $\deg(P) = n \geqslant 1$, alors $\deg(P') = n - 1$.
- Si $\deg(P) = n$, alors $\forall\, k > n, \quad P^{(k)} = 0$.

☞ *Exercices 1, 2 et 3.*

II. Egalité de polynômes et identification

1. Egalité de polynômes

Théorème 4.2.

Soient $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux polynômes. Alors $P = Q$ si et seulement si

$$n = m \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0; n]\!], \quad a_k = b_k$$

Ainsi, deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont même degré, et mêmes coefficients.

Exemple 4.3

Soient $P(X) = 2X^2 + 3X - 1$ et $Q(X) = 2X^2 + aX - b$. Alors $P = Q$ si et seulement si $a = 3$ et $b = 1$.

2. Application à l'identification

Exemple 4.4

Soit $P(X) = X^3 - X^2 - 3X + 2$. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

Solution

Soit $Q(X) = (X-2)(aX^2 + bX + c)$. En développant,

$$Q(X) = aX^3 + bX^2 + cX - 2aX^2 - 2bX - 2c = aX^3 + (b-2a)X^2 + (c-2b)X - 2c$$

Pour que $P = Q$, par unicité de l'écriture d'un polynôme, on identifie les coefficients :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b-2a & = & -1 \\ c-2b & = & -3 \\ -2c & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 1 \\ c & = & -1 \end{array}\right.$$

Ainsi, $P(X) = (X-2)(X^2+X-1)$.

Exercice 4.5

Trouver deux réels a et b tels que,

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

Solution

En mettant au même dénominateur, on cherche a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, on a

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$$

Par identification des coefficients, on a donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ a-b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{2} \\ b & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ains, pour tout réel x différent de 1 et -1, on a

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

☞ *Exercice 4.*

III. Racines d'un polynôme

1. Définition

Définition 4.3.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et a un réel. On dit que a est une **racine** de P si $P(a) = 0$.

Remarque

Chercher les racines de P, c'est donc résoudre l'équation $P(X) = 0$.

Exemple 4.6

1 est une racine du polynôme $P(X) = X^2 - 1$. En effet, $P(1) = 0$.

Définition 4.4.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et a un réel. On dit que le polynôme P se **factorise** par $X-a$ (ou que $X-a$ **divise** P) s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)Q(X)$.

Exemple 4.7

Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ se factorise par $X-1$. En effet, on a $P(X) = (X-1)(X^2+1)$.

Théorème 4.3.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et a un réel. Alors

...

a est une racine de P si et seulement s'il existe un polynôme Q(X) tel que $P(X) = (X - a)Q(X)$.

Dans ce cas, on a alors $\deg(P) = \deg(X - a) + \deg(Q)$ c'est-à-dire $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Exemple 4.8

Soit P le polynôme défini par $P(X) = X^3 - 2X + 1$. Montrer que 1 est racine, puis factoriser P par $(X - 1)$.

Solution

On constate que $P(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine. Par théorème, on peut donc factoriser P par $X - 1$: il existe Q un polynôme tel que $P(X) = (X - 1)Q(X)$ avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = 2$. On cherche donc a, b et c tel que

$$X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$$

Après développement, on obtient

$$X^3 - 2X + 1 = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$$

Par identification, on obtient $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$. Ainsi

$$X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1)$$

2. Nombre de racines d'un polynôme

Théorème 4.4.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Alors P a **au plus** n racines.

Démonstration

Théorème admis.

Remarque

Ainsi, un polynôme de degré 3 a au plus 3 racines, c'est-à-dire qu'il peut en avoir aucune, une, deux ou trois.

Conséquence 4.5.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si P a $n + 1$ racines, alors P est le polynôme nul.

Démonstration

En effet, P est au plus de degré n. Il ne peut pas admettre plus de n racines, sauf s'il est nul.

3. Cas des polynômes de degré 2.

Théorème 4.6.

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme P possède deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  On a alors $P(X) = a(X - x_1)(X - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, le polynôme P possède une unique racine réelle dite double

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

  On a alors $P(X) = a(X - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme P ne possède pas de racines réelles, et ne se factorise donc pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 4.9

Factoriser $P(X) = 2X^2 + 2X - 4$.

Solution

On a $\Delta = 36 > 0$ donc le polynôme P possède deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2\times 2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = 1$$

Donc $P(X) = 2(X-1)(X+2)$.

Remarque

Attention : on n'oubliera pas, lors de la factorisation, de mettre en facteur le coefficient de plus haut degré (dans l'exemple précédent, le 2).

4. Cas général

Méthode

Lorsqu'on doit factoriser un polynôme P (ou déterminer ses racines) :

- On cherche des racines évidentes $(-2, -1, 0, 1, 2)$ pour se ramener à un (ou des) polynôme(s) de degré 2.
- On factorise le polynôme P par $X - a$ où a désigne une racine évidente.
- Une fois ramené à un (ou des) polynômes de degré 2, on utilise la méthode classique du discriminant.

Exemple 4.10

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$. Déterminer les racines de P.

Solution

- Premier étape : on cherche une “racine évidente” : $-2, -1, 0, 1, 2$. Ici, on constate que $P(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$ donc 1 est racine évidente.
- Deuxième étape : on factorise P par $X - 1$: on écrit $P(X) = (X-1)Q(X)$ avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = 2$. Donc Q peut s'écrire $aX^2 + bX + c$.
  On a alors
  $$P(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$$
  Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on identifie les coefficients :
  $$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b-a & = & -2 \\ c-b & = & -1 \\ -c & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -1 \\ c & = & -2 \end{array}\right.$$
  Donc $P(X) = (X-1)(X^2 - X - 2)$.
- Troisième étape : on détermine les racines du polynôme Q. Ici, Q est du second degré, dont le discriminant vaut $\Delta = 9$. Donc Q possède deux racines :
  $$x_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = 2$$
  Donc $Q(X) = (X-2)(X+1)$
- Quatrième étape : on conclut. On a donc
  $$P(X) = (X-1)(X-2)(X+1)$$
  et P possède trois racines réelles : $1, 2$ et -1.

5. Division euclidienne

Remarque

Pour factoriser, plutôt que de procéder par identification, on peut également utiliser la division euclidienne.
En reprenant l'exemple précédent :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -2X^2 & -X & +2 & X\ -1 \\ \cline{5-5}
-X^3 & +X^2 & & & X^2\ -X\ -2 \\ \cline{1-2}
 & -1X^2 & -X & & \\
 & X^2 & -X & & \\ \cline{2-3}
 & & -2X & +2 & \\
 & & 2X & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

☞ *Exercices 5 et 7.*

6. Équations se ramenant à un polynôme

Il est possible de résoudre des équations particulières en se ramenant à une équation polynomiale.

Exemple 4.11

Résoudre l'équation $\ln(x)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$.

Méthode

Pour résoudre une équation liée à un polynôme, on effectue un changement de variable : on posera, ici, $u = \ln(x)$ et on se ramènera à un polynôme.

Solution

L'équation n'a de sens que sur $]0, +\infty[$. On pose alors $u = \ln(x)$. L'équation s'écrit alors

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$

Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$. Les racines sont alors

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_2 = 2$$

On revient alors à la variable de départ :

$$
\begin{aligned}
u_1 = 1 &\Leftrightarrow \ln(x_1) = 1 \\
&\Leftrightarrow x_1 = e^1 = e \\
\text{et } u_2 = 2 &\Leftrightarrow \ln(x_2) = 2 \\
&\Leftrightarrow x_2 = e^2
\end{aligned}
$$

Les solutions x_1 et x_2 sont bien dans $]0, +\infty[$. On peut alors conclure que l'ensemble des solutions de l'équation $\ln(x)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$ est $\mathscr{S} = \left\{e, e^2\right\}$.

Exercice 4.12

Résoudre l'équation $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$.

Solution

L'équation est valable sur $\mathbb{R}$. On pose $u = e^x$. En constatant que $e^{2x} = (e^x)^2$, l'équation devient alors $u^2 - 2u - 3 = 0$.
Les racines sont $u_1 = -1$ et $u_2 = 3$. On revient alors à la variable de départ. $u_1 = -1$ devient $e^{x_1} = -1$ ce

qui est impossible. La deuxième devient $e^{x_2} = 3$ soit $x_2 = \ln(3)$.
Ainsi, l'équation $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ admet une unique solution : $\mathscr{S} = \{\ln(3)\}$.

☞ *Exercices 6 et 8.*

Exercices

Polynômes

4

Exercices

Recherches

●○○ **Exercice 1** (5 min.)

Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels et de degré 2 tels que $P(1) = 0$, $P'(1) = 1$ et $P''(1) = 4$.

●○○ **Exercice 2** (5 min.)

Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels et de degré 2 tels que $P(1) = 1$ et $P'(1) = 0$.

●●○ **Exercice 3** (10 min.)

Soit P le polynôme définie par $P(X) = (X-1)^4$. Calculer $P^{(k)}(1)$ pour tout entier $k > 0$. Généraliser dans le cas où $P(X) = (X-a)^n$ $(a \in \mathbb{R}, n > 0)$.

Identification

●○○ **Exercice 4** (10 min.)

Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a

$$\frac{x^2+1}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

Factorisation, signes, équations

●○○ **Exercice 5 Factorisation** (10 min.)

Pour tout réel x, soit $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

1. Montrer que P est factorisable par $x - 1$.
2. Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $(x-1)$ par un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.
3. En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.

●○○ **Exercice 6 Factorisation** (10 min.)

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Vérifier que $X + 2$ divise P.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(X) = (X+2)(aX^2 + bX + c)$.
3. En déduire l'ensemble des racines de P.
4. Résoudre l'équation $e^{2x} - 2e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$.

●○○ **Exercice 7 Factorisation tout seul** (20 min.)

Factoriser, déterminer l'ensemble des racines, puis le signe des deux polynômes suivants :

$$P(X) = 2X^3 + X^2 - 23X + 20 \qquad Q(X) = X^3 - 13X - 12$$

●●○ **Exercice 8 Résolutions d'équations liées à un polynôme** (15 min.)

Résoudre les équations suivantes :

1. (E_1) : $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
2. (E_2) : $2x + 6\sqrt{x} + 4 = 0$
3. (E_3) : $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

Pour aller plus loin

●●○ Exercice 9 Sur la somme et le produit des racines (15 min.)

Soit $P(X) = ax^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$) et possédant deux racines réelles, qu'on note α et β.

1. Factoriser P en fonction de α et β. En développant l'expression obtenue, exprimer $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de a, b et c.
2. Réciproquement, soient p et q deux nombres réels distincts. On pose $S = p + q$ et $P = pq$. Montrer que p et q sont les racines du polynômes $X^2 - SX + P$. Que se passe-t-il si $p = q$?
3. Déterminer l'âge de Boule et Bill, sachant que Bill est le plus âgé, que la somme de leurs âges est égale à 28, et que le produit de leurs âges est égal à 192. (On pourra utiliser le fait que $784 = 28^2$).

Corrigés

Polynômes

Corrigés des exercices

Exercice 1

On cherche un polynôme de degré 2. On cherche donc a, b et c réels tels que $P(X) = aX^2 + bX + c$. Ainsi, $P'(X) = 2aX + b$ et $P''(X) = 2a$. Ainsi, $P''(1) = 4$ nous donne $a = 2$. Puis $P'(1) = 1$ nous donne

$$2a + b = 1 \Longleftrightarrow b = 1 - 2a = -3$$

Enfin, $P(1) = 0$ nous donne

$$a + b + c = 0 \Longleftrightarrow c = -a - b = 1$$

Bilan : il y a un seul polynôme solution : $P(X) = 2X^2 - 3X + 1$.

Exercice 2

De même, on cherche a, b et c trois réels tels que $P(X) = aX^2 + bX + c$. Ainsi, $P'(X) = 2aX + b$. Les deux conditions $P(1) = 1$ et $P'(1) = 0$ s'écrivent alors

$$a + b + c = 1 \quad \text{et} \quad 2a + b = 0 \Longleftrightarrow b = -2a \quad \text{et} \quad c = 1 - a - b = 1 + a$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{P(X) = aX^2 - 2aX + (1 + a), \quad a \in \mathbb{R}\right\}}$$

Exercice 3

On constate que

$$P'(X) = 4(X-1)^3, \quad P''(X) = 4 \times 3(X-1)^2 = 12(X-1)^2, \quad P^{(3)}(X) = 12 \times 2(X-1) = 24(X-1)$$
$$P^{(4)}(X) = 24 \quad \text{et} \quad P^{(n)}(X) = 0 \text{ si } n \geqslant 5$$

Ainsi, $P^{(k)}(1) = 0$ si $k \leqslant 3$ et $k \geqslant 5$, et $P^{(4)}(1) = 24$.
De manière plus générale, si $P(X) = (X - a)^n$, on a :

$$P^{(k)}(a) = 0 \text{ si } k \leqslant n-1 \text{ ou } k \geqslant n+1, \quad \text{et} \quad P^{(n)}(a) = n!$$

Exercice 4

Pour tout réel x différent de 1, on a

$$ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$$

Ainsi

$$ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1} \Longleftrightarrow \frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Par identification des coefficients, on a alors

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b-a & = & 0 \\ c-b & = & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & 1 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}}$$

Exercice 5

1. *Rappel* : pour montrer qu'un polynôme est factorisable par $x-a$, il suffit de montrer que a est racine du polynôme.
On constate que $\mathrm{P}(1)=0$. Ainsi, 1 est racine de P, donc P est factorisable par $x-1$.
2. P étant de degré 3, il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$$

Après développement, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 3x^3-x-2=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$$

Par identification des coefficients, on a

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 3 \\ b-a & = & 0 \\ c-b & = & -1 \\ -c & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 3 \\ b & = & 3 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$$

3. Soit Q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{Q}(x)=3x^2+3x+2$. Q est un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta=3^2-4\times3\times2=-15<0$. Ainsi, Q est de signe constant, et est donc positif sur $\mathbb{R}$ $(3>0)$. On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{Q}(x)$		$+$		$+$	
$\mathrm{P}(x)$		$-$	0	$+$	

P est donc négatif sur $]-\infty;1[$ et positif sur $]1;+\infty[$.

Exercice 6

1. On constate que $\mathrm{P}(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-5(-2)+6=0$. Ainsi, $\mathrm{X}+2$ divise P.
2. On cherche trois réels a, b et c tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X})=(\mathrm{X}+2)(a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{X}^3-2\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+6=a\mathrm{X}^3+(b+2a)\mathrm{X}^2+(c+2b)\mathrm{X}+2c$$

Par identification des coefficients, on a

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b+2a & = & -2 \\ c+2b & = & -5 \\ 2c & = & 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & -4 \\ c & = & 3 \end{array}\right.$$

Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{X})=(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}^2-4\mathrm{X}+3)$$

3. Déterminons les racines de $\mathrm{Q}(\mathrm{X})=\mathrm{X}^2-4\mathrm{X}+3$. Son discriminant vaut $\Delta=(-4)^2-4\times1\times3=4$. Ainsi, Q admet deux racines :

$$x_1=\frac{4+\sqrt{4}}{2}=4 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{4-\sqrt{4}}{2}=1$$

Ainsi, le polynôme P admet, quand à lui, trois racines : -2, 1 et 4.
4. Remarquons, puisque $\mathrm{e}^x>0$ que

$$\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+6\mathrm{e}^{-x}-5=0 \iff \mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^x+6=0 \iff \mathrm{P}(\mathrm{e}^x)=0$$

D'après l'étude précédente, on en déduit que

$$\mathrm{e}^x=-2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^x=1 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^x=4$$

La première égalité est impossible. Les deux autres donnent $x=0$ ou $x=\ln(4)$. Ainsi

$$\boxed{\mathscr{S}=\{0,\ \ln(4)\}}$$

Exercice 7

On utilise la méthode classique : on cherche une solution particulière, on factorise et on conclut. On obtient ainsi :

- $P(X) = 2(X-1)(X+4)\left(X-\frac{5}{2}\right)$ et ses racines sont $-4, 1$ et $\frac{5}{2}$. On obtient le signe suivant :

x	$-\infty$		-4		1		$\frac{5}{2}$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- $Q(X) = (X+1)(X+3)(X-4)$ et ses racines sont $-3, -1$ et 4. On obtient le signe suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		4	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Exercice 8

La méthode, déjà précisée dans l'exercice **??**, est de poser un changement de variable, pour se ramener à un polynôme dont on cherchera les racines. On revient, ensuite, à la variable de départ.

1. Posons $u = x^2$. L'équation (E_1) s'écrit alors $u^2 - 5u + 6 = 0$. Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 = 1$, et ses racines sont alors

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$$

On revient à la variable de départ :

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 6 = 0 &\Leftrightarrow u^2 - 5u + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow u = 2 \text{ ou } u = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2 \text{ ou } x^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est donc

$$\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$$

2. Tout d'abord, on résout (E_2) sur $\mathbb{R}^+$. Posons $u = \sqrt{x}$. L'équation (E_2) s'écrit alors $3u^2 + 6u + 4 = 0$. Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 4 = 4$, et ses racines sont alors

$$x_1 = \frac{-6-\sqrt{4}}{2\times 2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6+\sqrt{4}}{2 \times 2} = -1$$

On revient à la variable de départ :

$$\begin{aligned} 2x + 6\sqrt{x} + 4 = 0 &\Leftrightarrow 2u^2 + 6u + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u = -2 \text{ ou } u = -1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = -2 \text{ ou } \sqrt{x} = -1 \text{ ce qui est impossible} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est donc

$$\mathscr{S} = \emptyset$$

Exercice 9

1. Puisque α et β sont les deux racines, on a

$$P(X) = a(X-\alpha)(X-\beta)$$

En développant, on a donc

$$P(X) = aX^2 + bX + c = aX^2 - a(\alpha+\beta)X + a\alpha\beta$$

Ainsi, par identification, on en déduit que

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

2. Notons $Q(X) = X^2 - SX + P = X^2 - (p+q)X + pq$. Alors

$$Q(p) = p^2 - (p+q)p + pq = 0 \quad \text{et} \quad Q(q) = q^2 - (p+q)q + pq = 0$$

Ainsi, p et q sont racines de Q, et ce sont donc ses deux racines (car il est de degré 2.). Si $p = q$ alors

$$Q(X) = X^2 - 2pX + p^2 = (X-p)^2$$

donc Q admet p comme racine double.

3. On note p l'âge de Boule et q l'âge de Bill. On a donc $p+q=28$ et $pq=192$. D'après la question précédente, p et q sont racines du polynômes

$$\mathrm{P}(\mathrm{X})=\mathrm{X}^2-28\mathrm{X}+192$$

dont le discriminant est $\Delta=(-28)^2-4\times1\times192=16$. Ainsi, ce polynôme admet deux racines :

$$x_1=\frac{28-\sqrt{16}}{2}=12 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{28+\sqrt{16}}{2}=16$$

Puisque Bill est le plus âgé, on en déduit que Bill a 16 ans et Boule 12 ans.

Chapitre 5

Généralités sur les suites

Résumé

Dans ce chapitre, on reprend les notions connues sur les suites, et on ajoute des suites de références : les suites arithmético-géométriques, et les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

> « *Une suite de petites volontés fait un gros résultat.* »
>
> Charles Baudelaire (1821 – 1867). *Mon Coeur mis à nu*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les généralités sur les suites :

- Connaître la méthode de représentation des suites .... □
- Savoir démontrer des variations par étude de fonctions .... □
- Savoir démontrer des variations par la méthode $u_{n+1} - u_n$ .... □
- Savoir démontrer des variations par récurrence .... □
- Savoir démontrer une majoration par récurrence .... □

② Concernant les suites particulières :

- Savoir étudier les suites arithmétiques et géométriques .... □
- Savoir étudier les suites arithmético-géométriques .... □
- Connaître la méthode d'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 .... □

I. Généralités

1. Définition et notations

Définition 5.1.

Une **suite numérique réelle** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

Notation

Soit u une suite.

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

La suite u peut aussi se noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n). L'élément u_n est appelé **terme de rang** n de la suite u.

2. Trois types de définition de suites

On peut définir une suite de trois manières différentes.

a. Définition explicite

La suite peut être définie explicitement :

- v est la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- u est la suite définie par u_n est la $n^{\text{è}}$ décimale de π, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- w est la suite définie par

$$\begin{cases} w_n = 3n + 2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ w_n = \dfrac{1}{n} + 4 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

b. Définition par récurrence

Elle peut également être définie par récurrence :

- u est la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2 \times u_n - 1$.
- $\begin{cases} u_0 = & 2 \\ \forall\, n,\ u_{n+1} = & \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

Remarque

Pour déterminer u_n dans le cas d'une suite définie par récurrence, il est nécessaire de calculer $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ pour déterminer ensuite u_n. Par exemple, dans le cas de la suite u définie précédemment, pour calculer u_2 :

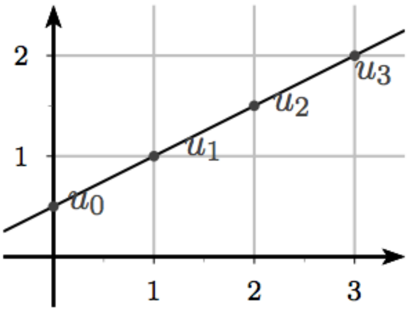
$$u_0 = -1 \text{ donc } u_1 = 2 \times u_0 - 1 = -3 \text{ et donc } u_2 = 2 \times u_1 - 1 = -7$$

c. Définition par équation

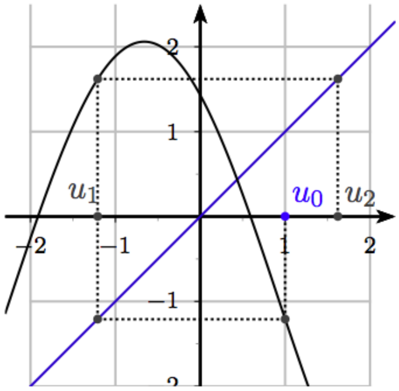
Une suite peut également être définie par une equation. Par exemple, soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 3$ par u_n est l'unique solution de l'équation $\ln(x) = nx$.

3. Représentation graphique d'une suite

On représente une suite définie explicitement par l'ensemble des points $(n; u_n)$. On peut également représenter les suites définies par récurrence par une représentation "en toile d'araignée".



Définition $u_n = f(n)$



Définition par récurrence, $u_0 = 1$

II. Monotonie, majoration, minoration

1. Suites monotones

Définition 5.2.

Soit (u_n) une suite.
On dit que (u_n) est une suite **croissante** si $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n.
On dit que (u_n) est une suite **décroissante** si $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout n.
Une suite **monotone** est une suite soit croissante, soit décroissante.

Remarque

- On a aussi des suites strictement croissantes ou strictement décroissantes.
- Une suite peut n'être monotone qu'à partir d'un certain rang n_0, c'est à dire $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \geqslant n_0$ (par exemple).

2. Méthodes de recherche des variations d'une suite

a. Pour les suites $u_n = f(n)$

Théorème 5.1.

Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) est croissante.
Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration

Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$n < n+1 \implies u_n = f(n) \leqslant f(n+1) = u_{n+1}$$

Exemple 5.1

- Soit u la suite définie par $u_n = n^2$ pour tout n. La fonction $x \mapsto x^2$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- La suite u définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ est strictement décroissante, car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Méthode

Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = f(n)$, on introduit la fonction f associée, et on étudie ses variations. On en déduit alors la monotonie de u.

Exercice 5.2

Soit u la suite définie pour tout entier n par $u_n = n^2 - 4n + 2$. Déterminer la monotonie de u.

Solution

Introduisons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 2$. f étant un trinôme du second degré, on connait ses variations : ici, $a = 1 > 0$, $b = -4$ donc $-\frac{b}{2a} = 2$. Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty;2]$ et est croissante sur $[2;+\infty[$.
La suite (u_n) est donc croissante pour $n \geqslant 2$.

b. Termes consécutifs

Théorème 5.2. Etude de la différence de deux termes consécutifs

Soit une suite u donnée. On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n, alors la suite u est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout n, alors la suite u est décroissante.

Théorème 5.3. Etude du quotient de deux termes consécutifs

Soit une suite u à termes *strictement positifs*, on peut utiliser :
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp. > 1) alors la suite u est croissante (resp. strictement croissante).
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ (resp. < 1) alors la suite u est décroissante (resp. strictement décroissante).

Remarque

Cette méthode est, en général, reservée aux suites définies par des puissances.

Exemple 5.3

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2+1}$ pour tout n. Alors, pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2+1} > 0$: la suite (u_n) est donc strictement croissante.
- La suite u définie pour tout n par $u_n = \frac{5^n}{2^{n+1}}$ est strictement croissante. En effet, elle est à termes strictement positifs, et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{5^n}{2^{n+1}}} = \frac{5^{n+1}}{2^{n+2}}.\frac{2^{n+1}}{5^n} = \frac{5}{2} > 1$$

Conséquence 5.4.

- Si $a > 1$, la suite (a^n) est strictement croissante.
- Si $a = 1$, la suite (a^n) est constante.
- Si $0 < a < 1$, la suite (a^n) est strictement décroissante.

Démonstration

Pour tout réel $a > 0$, on constate que la suite (a^n) est à termes strictement positifs. Enfin, en notant pour tout entier n, $u_n = a^n$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = a$$

Ainsi, la suite (a^n) est strictement croissante si $a > 1$, et strictement décroissante si $a < 1$. Elle est enfin constante si $a = 1$.

☞ *Exercice 1.*

c. Par récurrence

Méthode

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut étudier sa monotonie par récurrence, en prenant comme hypothèse de récurrence P_n : "$u_{n+1} \geqslant u_n$" pour montrer que la suite est croissante, ou P_n : "$u_{n+1} \leqslant u_n$" pour montrer qu'elle est décroissante.

Exemple 5.4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Montrer que la suite u est croissante.

Solution

Soit (P_n) la propriété définie pour tout n par P_n :"$u_{n+1} \geqslant u_n$".

- **initialisation** : $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2} \geqslant u_0$. Donc P_0 est vraie.
- **hérédité** : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain n. Alors

  $u_{n+1} \geqslant u_n \Rightarrow u_{n+1} + 1 \geqslant u_n + 1 \Rightarrow \sqrt{u_{n+1}+1} \geqslant \sqrt{u_n + 1}$ car la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}^+$

  Donc $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$: la propriété est héréditaire.
- **conclusion** : la propriété est donc vraie pour tout n : $\forall\, n,\ u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite u est donc croissante.

3. Suites majorées, minorées, bornées

Définition 5.3.

- Une suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leqslant u_n$ pour tout n. m s'appelle un **minorant**.
- Une suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $M \geqslant u_n$ pour tout n. M s'appelle un **majorant**.
- Une suite **bornée** est une suite à la fois majorée et minorée : il existe deux réels m et M tels que pour tout n :

$$m \leqslant u_n \leqslant M$$

Exemple 5.5

La suite u définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est bornée :

$$\forall\, n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

☞ *Exercice 2.*

Méthode

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut également montrer qu'elle est bornée par récurrence.

Exemple 5.6

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer que, pour tout n, $u_n \leqslant 2$.

Solution

Soit (P_n) la propriété définie pour tout n par P_n : "$u_n \leqslant 2$".

- **initialisation** : $u_0 = 1 \leqslant 2$. P_0 est donc vraie.

- **hérédité** : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain n. Alors
$$u_n \leqslant 2 \Rightarrow u_n + 2 \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \leqslant \sqrt{4} \text{ car la fonction racine est croissante sur } \mathbb{R}^+$$
Donc $u_{n+1} \leqslant 2$: la propriété est héréditaire.
- **conclusion** : la propriété est donc vraie pour tout n : $\forall\, n,\ u_n \leqslant 2$. La suite u est donc majorée par 2.

☞ *Exercices 3, 4 et 5.*

III. Suites arithmétiques et géométriques

1. Suites arithmétiques

Définition 5.4.

Une **suite arithmétique** est une suite (u_n) définie par une formule de récurrence de la forme
$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\, n, u_{n+1} = u_n + a \text{ où } a \in \mathbb{R} \end{cases}$$
Le réel a est appelé **raison** de la suite (u_n), et u_0 est le **premier terme**.

Exemple 5.7

La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + 2$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Théorème 5.5.

Soit u une suite arithmétique, de premier terme u_0 et de raison a. Alors, pour tout entier n,
$$u_n = u_0 + na.$$

Démonstration

Soit P_n la proposition "$u_n = u_0 + na$" définie pour tout entier n.

- Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $u_0 = u_0 + 0 \times a$: P_0 est donc vraie.
- Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n. Alors, on a
$$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{déf de } u} u_n + a \underbrace{=}_{\text{HR}} (u_0 + na) + a = u_0 + (n+1)a$$
P_{n+1} est donc vraie.
- La proposition P_n, d'après le principe de récurrence, est donc vraie pour tout n.

On peut également démontrer ce théorème par téléscopage.

Remarque

Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison a, on a également
$$\forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p + (n-p)a$$

Exemple 5.8

Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -3. Alors, pour tout entier n, $u_n = 2 - 3n$.

Théorème 5.6.

Soit u une suite arithmétique, de raison a. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$. Alors,
$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2} = (\text{nb de terme}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Démonstration

Soit $\mathrm{S} = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$. D'une part

$$\mathrm{S} = u_p + (u_p + a) + (u_p + 2a) + \cdots + (u_p + (n-p)a)$$

et d'autre part

$$\mathrm{S} = u_n + (u_n - a) + (u_n - 2a) + \cdots + (u_n - (n-p)a)$$

En sommant les deux égalités,

$$2\mathrm{S} = (u_p + u_n) + (u_p + u_n) + \cdots + (u_p + u_n)$$

Avec $n - p + 1$ termes. On a donc $2\mathrm{S} = (n-p+1)(u_p + u_n)$, ce qui donne le résultat.
On aurait pu également le démontrer par récurrence sur n.

Exemple 5.9 (Classique)

En s'intéressant à la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1, on a

$$1 + 2 + \cdots + n = n\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Suites géométriques

Définition 5.5.

Une **suite géométrique** est une suite (u_n) définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\, n, u_{n+1} = q \times u_n \text{ où } q \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n), et u_0 est le **premier terme**.

Exemple 5.10

La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Théorème 5.7.

Soit u une suite géométrique, de premier terme u_0 et de raison q. Alors, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Démonstration

Soit P_n la proposition "$u_n = u_0 \times q^n$" définie pour tout entier n.

- Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $u_0 = u_0 q^0$: P_0 est donc vraie.
- Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n. Alors, on a

$$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{dèf de } u} q \times u_n \underbrace{=}_{\text{HR}} q \times (u_0 \times q^n) = u_0 \times q^{n+1}$$

  P_{n+1} est donc vraie.
- La proposition P_n, d'après le principe de récurrence, est donc vraie pour tout n.

Remarque

Si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, on a également

$$\forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple 5.11
Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -3. Alors, pour tout entier n, $u_n = 2 \times (-3)^n$.

Théorème 5.8.
Soit u une suite géométrique, de raison $q \neq 1$. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$. Alors,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{u_p - q u_n}{1-q} = \frac{\text{1er terme} - \text{terme à suivre}}{1 - \text{raison}}$$

Démonstration
Soit p un entier fixé. Soit P_n la proposition "$u_p + \cdots + u_n = \frac{u_p - q u_n}{1-q}$" définie pour tout entier $n \geqslant p$.

- Initialisation : $\frac{u_p - q u_p}{1-q} = u_p \frac{1-q}{1-q} = u_p$: P_p est donc vraie.
- Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour un certain entier $n \geqslant p$. Alors

$$u_p + \cdots + u_n + u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{HR}} \frac{u_p - q u_n}{1-q} + u_{n+1} = \frac{u_p - q u_n + u_{n+1} - q u_{n+1}}{1-q} \underbrace{=}_{\text{dèf de } u} \frac{u_p - q u_{n+1}}{1-q}$$

  P_{n+1} est donc vraie.
- D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout $n \geqslant p$.

Exemple 5.12 (Classique)
En s'intéressant à la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q, on a

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q q^n}{1-q} = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

☞ *Exercice 6.*

IV. Suites arithmético-géométrique

1. Définition

Définition 5.6.
Une suite **arithmético-géométrique** est une suite u définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\, n,\ u_{n+1} = a u_n + b, \quad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Remarque
Si $b = 0$, la suite u est une suite géométrique de raison a. Si $a = 1$, la suite u est une suite arithmétique de raison b.

Exemple 5.13
La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - 1$ est une suite arithmético-géométrique.

☞ *Exercices 6 et 7.*

2. Etude d'une suite arithmético-géométrique

Théorème 5.9.
Soit u une suite arithmético-géométrique vérifiant, pour tout n, $u_{n+1} = a u_n + b$ avec $a \neq 1$.

Soit ℓ l'unique réel vérifiant $\ell = a\ell + b$ (c'est-à-dire $\ell = \frac{b}{1-a}$).
Alors, la suite (v_n), définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique, de raison a.

Démonstration

En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. On a, en soustrayant membre à membre :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & = & a u_n & + \quad b \\ \ell & = & a\ell & + \quad b \\ \hline u_{n+1} - \ell & = & a(u_n - \ell) & \end{array}$$

c'est-à-dire $v_{n+1} = a v_n$ pour tout n.

Méthode

Pour étudier une suite arithmético-géométrique, on procédera ainsi :

- On cherche le réel ℓ vérifiant $\ell = a\ell + b$
- On introduit la suite $v = u - \ell$ et on montre qu'elle est géométrique.
- On en déduit l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exemple 5.14

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Solution

- On cherche le réel ℓ vérifiant $\ell = 2\ell - 3 \Leftrightarrow \ell = 3$.
- On pose v la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 3$. On a alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 = 2u_n - 6 = 2(v_n + 3) - 6 = 2v_n$$

  La suite v est donc géométrique, de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -2$.
- On a donc, pour tout entier n, $v_n = v_0 \times 2^n = -2 \times 2^n = -2^{n+1}$. En revenant à la suite u :

$$\forall\ n,\ u_n = -2^{n+1} + 3$$

Pour la deuxième étape, on peut également écrire que $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $l = 2l - 3$ et on soustrait : $u_{n+1} - l = 2(u_n - l)$ et donc $v_{n+1} = 2v_n$.

V. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

1. Définition

Définition 5.7.

Une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** est une suite u définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ et } u_1 \text{ sont donnés} \\ \forall\ n,\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n, \quad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Remarque

Si $b = 0$, la suite u est une suite géométrique de raison a.

Exemple 5.15

La suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

2. Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

L'idée est de chercher des suites géométriques solutions de la récurrence.

Théorème 5.10.

Soit u une suite récurrente linéaire d'ordre 2, vérifiant pour tout n, $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$. Alors, la suite géométrique (ℓ^n) $(\ell \neq 0)$ est solution de la récurrence si, et seulement si, $\ell^2 = a\ell + b$.

Démonstration

Si on a, pour tout n, $\ell^{n+2} = a\ell^{n+1} + b\ell^n$, puisque $\ell \neq 0$, en divisant par ℓ^n on obtient $\ell^2 = a\ell = b$. La réciproque est également vraie.

Théorème 5.11.

Soit u une suite récurrente linéaire d'ordre 2, vérifiant pour tout n, $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$. On pose (E) l'équation $X^2 = aX + b$, appelée **équation caractéristique**.

- Si l'équation (E) possède deux solutions distinctes q_1 et q_2, alors il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout n,
$$u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$$
- Si l'équation (E) possède une racine double q_0, alors il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout n,
$$u_n = (\lambda n + \mu) q_0^n$$

Remarque

On utilise les valeurs de u_0 et u_1 pour déterminer les deux nombres réels λ et μ.

Méthode

Pour déterminer l'expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux :

- On pose l'équation caractéristique (E).
- On détermine les solutions de l'équation caractéristique.
- Une fois la (ou les) solution(s) trouvée(s), on écrit u_n sous la forme $\lambda q_1^n + \mu q_2^n$ ou $(\lambda n + \mu) q_0^n$, et on utilise les deux premiers termes pour obtenir un système nous donnant λ et μ

Exemple 5.16

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Solution

- Soit (E) l'équation $X^2 = -X + 2$. Les solutions sont 1 et -2.
- Il existe donc deux réels λ et μ vérifiant, pour tout n,
$$u_n = \lambda \times 1^n + \mu(-2)^n = \lambda + \mu(-2)^n$$
- En utilisant u_0 et u_1, on a donc
$$\left\{\begin{array}{lllll} 0 & = & \lambda & + & \mu \\ 3 & = & \lambda & + & (-2\mu) \end{array}\right.$$
ce qui donne $\mu = -1$ et $\lambda = 1$.
- Conclusion : pour tout entier n, on a
$$u_n = 1 - (-2)^n$$

☞ *Exercices 8, 9, 10, 11 et 12.*

Exercices

Généralités sur les suites

5

Exercices

Sens de variation, majoration, minoration

●○○ **Exercice 1 Variations** (20 min.)

- Soit u la suite définie pour tout n par $u_n = \frac{n-1}{n+2}$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- Etudier le sens de variation des suites $\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$,$\left(\frac{2^n}{n}\right)$ et $\left(\frac{n}{2n-1}\right)$

●○○ **Exercice 2 Majoration, minoration** (10 min.)

Déterminer si les suites suivantes sont majorées, minorées, ou bornées.

- La suite u définie par $u_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$.
- La suite v définie par $v_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

Méthode
On peut calculer les premiers termes pour avoir une idée d'un majorant M ou minorant m. On calcule ensuite $u_n - \mathrm{M}$ ou $u_n - m$ et on étudie le signe de cette différence.

Suites et récurrence

●○○ **Exercice 3 Suite récurrente I** (15 min.)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.

●○○ **Exercice 4 Suite récurrente II** (20 min.)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que
$$\forall\, n,\ u_n > n^2$$
3. Conjecturer, puis démontrer, une expression de u_n en fonction de n.

●○○ **Exercice 5 Suite récurrente III** (15 min.)

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ \forall\, n,\ u_{n+1} &= \sqrt{4u_n - 3} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout n, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Suites arithmétiques et géométriques

●○○ Exercice 6 Justifications (10 min.)

Les suites suivantes sont elles arithmétiques ? géométriques ?

1. La suite u définie pour tout n par $u_n = 3n + 5$.
2. La suite v définie pour tout n par $v_n = \frac{n+1}{n^2+1}$.
3. La suite w définie pour tout n par $w_n = 3 \times 2^n$.

Méthode

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on calcule $u_{n+1} - u_n$. Pour montrer qu'elle est géométrique, on part de u_{n+1} pour essayer de montrer qu'elle s'écrit $q\,u_n$.
Pour montrer qu'une suite n'est ni arithmétique, ni géométrique, on calcule les premiers termes et on les utilise pour le montrer.

●○○ Exercice 7 Calculs (10 min.)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Sachant que $r = 2$, et $u_4 = 30$, déterminer u_0 et u_8. Déterminer $u_0 + u_1 + \cdots + u_8$.
- Sachant que $u_4 = 35$ et $u_2 = 15$, déterminer r et u_0. Déterminer $u_0 + u_1 + \cdots + u_4$.
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. Sachant que $u_2 = 5$ et $u_3 = 7$, déterminer q et u_4.

Suites arithmético-géométrique et récurrente linéaire d'ordre 2

●○○ Exercice 8 Expressions en fonction de n (30 min.)

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour les suites suivantes :

1. $u_0 = 4$ et $\forall\ n,\ u_{n+1} = 2u_n - 3$
2. $u_0 = -2$ et $\forall\ n,\ u_{n+1} + 3u_n = 1$
3. $u_0 = -1$ et $\forall\ n,\ u_{n+1} + u_n = 2u_n - 4$.
4. $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall\ n,\ u_{n+2} = -2u_{n+1} + 15u_n$
5. $u_0 = 2,\ u_1 = 4$ et $\forall\ n,\ u_{n+2} = 8u_{n+1} - 16u_n$

Exercices bilans

●○○ Exercice 9 Exercice bilan I (20 min.)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par $u_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$$

1. Démontrer que si $u_{n+1} = 1$ alors $u_n = 1$. En déduire que pour tout n, $u_n \neq 1$.
2. On pose pour tout entier n, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique, puis exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

●○○ Exercice 10 Exercice bilan II (30 min.)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$$

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Démontrer que si $u_{n+1} = -2$ alors $u_n = -2$. En déduire que pour tout n,
$$u_n \neq -2$$
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leqslant u_n \leqslant 3$$

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier n par
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$
   (a) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie pour tout n.
   (b) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Quelle est sa raison ?
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n. Que vaut u_{10} ?

●●○ Exercice 11 Exercice bilan III (30 min.)

On consdière les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$$u_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ v_n = \frac{2}{u_n} \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Calculer v_0 ; u_1 ; v_1 ; u_2 ; v_2. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.
2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$
4. Montrer que pour tout n, $u_n \geqslant v_n$.
5. Montrer que (u_n) est décroissante, et (v_n) est croissante.
6. Montrer que pour tout n, $u_n - v_n \leqslant 1$, et en déduire que $(u_n - v_n)^2 \leqslant u_n - v_n$.
7. Montrer que pour tout n,
$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$
   En déduire que pour tout n, $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$.

●●○ Exercice 12 Exercice bilan IV (30 min.)

Soit u la suite vérifiant la relation
$$\forall\ n, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n} \text{ avec } u_0 = 1, u_1 = 2$$

1. Démontrer que pour tout entier n, $u_n > 0$. On considère alors la suite w définie pour tout n par $w_n = \ln(u_n)$.
2. Montrer que la suite w suit une récurrence linéaire d'ordre 2. Expliciter alors le terme général de la suite w. En déduire celui de la suite u.

Corrigés

Généralités sur les suites

Corrigés des exercices

Exercice 1

- Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1-1}{n+1+2}-\frac{n-1}{n+2}=\frac{n}{n+3}-\frac{n-1}{n+2}=\frac{n(n+2)-(n-1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}=\frac{3}{(n+3)(n+2)}$$

Puisque pour tout entier naturel n, $n+2>0$ et $n+3>0$, on en déduit que pour tout n, $u_{n+1}-u_n>0$.
Bilan : la suite (u_n) est strictement croissante.

- Notons les suites respectivement v, w et z. De la même manière, pour tout entier $n\geqslant 1$:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{(n+1)^2+1}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}=\frac{n^2+n-1}{n(n+1)}$$

Pour tout $n\geqslant 1$, on a $n-1\geqslant 0$ et donc $n-1+n^2\geqslant 0$ (car $n^2\geqslant 0$). Ainsi

$$\forall\, n\geqslant 1,\ v_{n+1}-v_n\geqslant 0$$

Bilan : la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Pour tout $n\geqslant 1$, on a

$$w_{n+1}-w_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^n}{n}=\frac{2^{n+1}n-2^n(n+1)}{n(n+1)}=\frac{2^n(n-1)}{n(n+1)}$$

Pour $n\geqslant 1$, on a $2^n>0$, $n-1\geqslant 0$ et $n(n+1)>0$. Par quotient, pour tout entier $n\geqslant 1$, $w_{n+1}-w_n\geqslant 0$.
Bilan : la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Pour tout entier n, on a

$$z_{n+1}-z_n=\frac{n+1}{2(n+1)-1}-\frac{n}{2n-1}=\frac{(n+1)(2n-1)-n(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{-1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on a $2n-1>0$ et $2n+1>0$ donc par quotient,

$$\forall\, n\geqslant 1,\ z_{n+1}-z_n<0$$

Bilan : la suite (z_n) est strictement décroissante à partir du rang 1.

Exercice 2

- Pour tout entier n, on a $n+2>0$ et $2n+1>0$ donc par quotient,

$$\forall\, n,\ u_n>0$$

Il semblerait qu'elle soit majorée par 2. Calculons u_n-2 :

$$\forall\, n,\ u_n-2=\frac{n+2}{2n+1}-2=\frac{n+2-2(2n+1)}{2n+1}=\frac{-n}{2n+1}$$

Pour tout entier n, $-n\leqslant 0$ et $2n+1>0$ donc $u_n-2\leqslant 0$.
Bilan : $\forall\, n,\ 0<u_n\leqslant 2$.
Remarque : on peut aussi montrer que pour tout entier n, $u_n\geqslant \frac{1}{2}$.

- Pour tout entier $n>0$, on a $n^2+2>0$ et donc

$$\forall\, n\geqslant 1,\ v_n>0$$

Constatons également que pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$v_n=\frac{n^2+2}{n}=\frac{n^2}{n}+\frac{2}{n}=n+\frac{2}{n}\geqslant n$$

car $\frac{2}{n}>0$.
Or la suite w définie pour tout n par $w_n=n$ n'est pas majorée. Par comparaison, la suite v n'est pas majorée.
Bilan : v est minorée par 0 mais n'est pas majorée.

Exercice 3

- Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$0 \leqslant u_n \leqslant 2$".

◦ Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 2$. La proposition P_0 est donc vraie.

◦ Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Mais alors

$$2 \leqslant 2 + u_n \leqslant 4$$

soit, en appliquant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2 + u_n} \leqslant \sqrt{4}$$

c'est-à-dire

$$0 \leqslant \sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.

Bilan : $\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

- Soit Q la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$u_n \leqslant u_{n+1}$".

◦ Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{3}$. On a donc $1 < \sqrt{3}$: la proposition Q_0 est donc vraie.

◦ Supposons la proposition Q_n vraie pour un certain entier n. Montrons que Q_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Mais alors

$$2 + u_n \leqslant 2 + u_{n+1}$$

soit, en appliquant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{2 + u_n} \leqslant \sqrt{2 + u_{n+1}}$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$

La proposition Q_{n+1} est donc vraie

D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout entier n.

Bilan : la suite (u_n) est croissante.

Exercice 4

- Constatons que pour tout entier n, on a

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 2n + 3) - u_n = 2n + 3$$

et $2n + 3 > 0$ pour tout entier n.

Bilan : la suite (u_n) est strictement croissante.

- Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n > n^2$".

◦ Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $1 > 0^2$. La proposition P_0 est donc vraie.

◦ Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $u_n > n^2$. Mais alors

$$u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$$

soit,

$$u_{n+1} > (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.

Bilan : $\forall\ n,\ u_n > n^2$.

- Après calcul des premières valeurs, il semblerait que $u_n = (n+1)^2$. Montrons-le par récurrence.

Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n = (n+1)^2$".

◦ Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $1 = (0+1)^2$. La proposition P_0 est donc vraie.

◦ Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $u_n = (n+1)^2$. Mais alors

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = \underbrace{(n+1)^2}_{\text{H.R.}} + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.

Bilan : $\forall\ n,\ u_n = (n+1)^2$.

Exercice 5

• Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$1 \leqslant u_n \leqslant 3$".
∘ Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $1 \leqslant 2 \leqslant 3$. La proposition P_0 est donc vraie.
∘ Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$. Mais alors $4 \leqslant 4u_n \leqslant 12$ puis $1 \leqslant 4u_n - 3 \leqslant 9$ soit, en appliquant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{4u_n - 3} \leqslant \sqrt{9}$$

c'est-à-dire

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : $\forall\ n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 3$.
• Soit Q la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$u_n \leqslant u_{n+1}$".
∘ Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{7}$. On a donc $2 < \sqrt{7}$: la proposition Q_0 est donc vraie.
∘ Supposons la proposition Q_n vraie pour un certain entier n. Montrons que Q_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Mais alors

$$4u_n - 3 \leqslant 4u_{n+1} - 3$$

soit, en appliquant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{4u_n - 3} \leqslant \sqrt{4u_{n+1} - 3}$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$

La proposition Q_{n+1} est donc vraie
D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : la suite (u_n) est croissante.

Exercice 6

• Remarquons que, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 3$. La suite (u_n) est donc arithmétique, de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.
• On a $v_0 = 1$, $v_1 = 1$ et $v_2 = \frac{3}{5}$. On remarque alors que

$$v_1 - v_0 = 0 \text{ et } v_2 - v_1 = -\frac{2}{5} \neq v_1 - v_0$$

La suite v n'est donc pas arithmétique.
De même, on a

$$\frac{v_1}{v_0} = 1 \text{ et } \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{5} \neq \frac{v_1}{v_0}$$

La suite v n'est pas géométrique.
• Remarquons que, pour tout entier n, $w_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 2 \times 3 \times 2^n = 2 \times w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique, de raison 2 et de premier terme $w_0 = 3$.

Exercice 7

> ***Méthode***
> On utilise les propriétés d'une suite arithmétique et géométrique, dont l'écriture en fonction de n.

• On a $u_0 = u_4 + (0-4)r = 30 - 8 = 22$. De même, $u_8 = u_4 + (8-4)r = 30 + 8 = 38$. Enfin, d'après la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$u_0 + \cdots + u_8 = 9 \times \frac{u_0 + u_8}{2} = 9 \times 30 = 270$$

• De même, on a $u_4 = u_2 + (4-2)r$, c'est-à-dire $35 = 15 + 2r$, ce qui donne $r = 10$. On a alors

$$u_0 = u_2 + (0-2)r = 15 - 20 = -5$$

et enfin

$$u_0 + \cdots + u_4 = 5 \times \frac{u_0 + u_4}{2} = 5 \times 15 = 75$$

- (v_n) étant géométrique, on a $v_3 = q v_2$, soit $q = \frac{v_3}{v_2} = \frac{7}{5}$. Mais alors,
$$u_4 = q u_3 = \frac{7}{5} \times 7 = \frac{49}{5}$$

Exercice 8

1. La suite u est arithmético-géométrique. En introduisant x tel que $x = 2x - 3$, c'est-à-dire $x = 3$, et en posant v la suite définie par $v_n = u_n - 3$, on en déduit que la suite (v_n) est géométrique, de raison 2 et de premier terme $v_0 = 1$. Ainsi,
$$\boxed{\forall\ n,\ v_n = 2^n \text{ et } u_n = 2^n + 3}$$
2. La suite u vérifie $u_{n+1} = -3u_n + 1$ et est donc arithmético-géométrique. En notant le réel l vérifiant $l = -3l + 1$, c'est-à-dire $l = \frac{1}{4}$, et en introduisant la suite v définie par $v_n = u_n - \frac{1}{4}$, on en déduit que la suite v est géométrique, de raison -3 et de premier terme $v_0 = -\frac{9}{4}$. Ainsi,
$$\boxed{\forall\ n,\ v_n = -\frac{9}{4}(-3)^n \text{ et } u_n = -\frac{9}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}}$$
3. La suite u vérifie $u_{n+1} = u_n - 4$ et est donc arithmétique, de raison -4 et de premier terme $u_0 = -1$. Ainsi,
$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = -1 - 4n}$$
4. u est récurrente linéaire d'ordre 2. En introduisant (E) l'équation caractéristique $\mathrm{X}^2 = -2\mathrm{X} + 15$, de racines -5 et 3. Ainsi, il existe a et b tels que, pour tout n, $u_n = a(-5)^n + b3^n$. En utilisant $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, on obtient le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 1 \\ -5a & + & 3b & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{8} \\ b & = & \frac{7}{8} \end{array}\right.$$
Ainsi,
$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = \frac{1}{8}(-5)^n + \frac{7}{8}3^n}$$
5. De la même manière, u est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $\mathrm{X}^2 = 8\mathrm{X} - 16$, qui admet comme unique racine 4. Ainsi, il existe deux réels a et b tels que, pour tout n, $u_n = (an + b)4^n$. En utilisant u_0 et u_1, on obtient le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 0 & + & b & = & 2 \\ (a & + & b)4 & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & 2 \end{array}\right.$$
Ainsi,
$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = (-n + 2)4^n}$$

Exercice 9

1. Si on a $u_{n+1} = 1$, alors $\dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3} = 1$, c'est-à-dire $5u_n - 1 = u_n + 3$, soit $4u_n = 4 \Leftrightarrow u_n = 1$.
Supposons alors par l'absurde qu'il existe un entier n tel que $u_n = 1$. D'après ce qui précède, on a alors $u_{n-1} = 1$, puis $u_{n-2} = 1$, et ainsi, $u_0 = 1$. Or, $u_0 = 2$, c'est donc absurde.
Bilan : $\forall\ n,\ u_n \neq 1$.
2. Remarquons tout d'abord que la suite v est bien définie, puisque $u_n \neq 1$. Pour montrer que v est arithmétique, calculons $v_{n+1} - v_n$ pour tout entier n :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{5u_n - 1}{u_n + 3} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$$
soit
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{5u_n - 1 - (u_n + 3)}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3}{4u_n - 4} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3 - 4}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{4}$$
Ainsi, la suite v est arithmétique, de raison $\frac{1}{4}$, et de premier terme $v_0 = 1$. Ainsi,
$$\forall\ n,\ v_n = 1 + \frac{n}{4}$$
3. Pour tout n, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$, donc $u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$, soit $u_n = 1 + \frac{1}{v_n}$. Ainsi,
$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{n}{4}} = 1 + \frac{4}{4 + n} = \frac{8 + n}{4 + n}}$$

Exercice 10

1. On a $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{4}{3}$. On constate alors que $u_1 - u_0 = -\frac{5}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{5}{6} \neq u_1 - u_0$. Donc u n'est pas arithmétique. De même,

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{6} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{3} \neq \frac{u_1}{u_0}$$

Ainsi, la suite u n'est pas géométrique.
2. Si $u_{n+1} = -2$, alors $\frac{2}{1+u_n} = -2$, c'est-à-dire $2 = -2(1+u_n)$ et donc $4 = -2u_n \Leftrightarrow u_n = -2$.
Supposons alors par l'absurde qu'il existe un entier n tel que $u_n = -2$. D'après ce qui précède, on a alors $u_{n-1} = -2$, puis $u_{n-2} = -2$, et ainsi, $u_0 = -2$. Or, $u_0 = 3$, c'est donc absurde.
Bilan : $\forall\ n,\ u_n \neq -2$.
3. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$0 \leqslant u_n \leqslant 3$".
∘ Pour $n = 0$, $u_0 = 3$ et $0 \leqslant 3 \leqslant 3$. La proposition P_0 est donc vraie.
∘ Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$. Mais alors $1 \leqslant 1 + u_n \leqslant 4$ soit, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{2}{1} \geqslant \frac{2}{1+u_n} \geqslant \frac{2}{4}$$

c'est-à-dire

$$3 \geqslant 2 \geqslant u_{n+1} \geqslant \frac{1}{2} \geqslant 0$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : $\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
4. (a) D'après la question 2, on sait que pour tout n, $u_n \neq -2$, et donc $u_n + 2 \neq 0$. La suite (v_n) est donc bien définie.
(b) On a $v_0 = \frac{2}{5}$, $v_1 = -\frac{1}{5}$ et $v_2 = \frac{1}{10}$. Ainsi, la suite v semble géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Démontrons-le : pour tout entier n, on a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2}{1+u_n} - 1}{\frac{2}{1+u_n} + 2} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}}$$

et donc

$$v_{n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n}\,\frac{1+u_n}{4+2u_n} = \frac{-(u_n - 1)}{2(u_n + 2)} = -\frac{1}{2}\,\frac{u_n - 1}{u_n + 2} = -\frac{1}{2} v_n$$

Ainsi, la suite v est géométrique, de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{2}{5}$.
(c) On a donc, pour tout entier n,

$$v_n = \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(d) Puisque $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$, on a alors

$$v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \text{ soit } u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n \text{ et donc } u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1} = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$$

Bilan :

$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = \frac{1 + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{5 \times 2^n + 5 \times (-1)^n}{5 \times 2^n - 2 \times (-1)^n}}$$

Exercice 11

1. Rapidement on a $v_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$, $v_1 = \frac{4}{3}$, $u_2 = \frac{17}{12}$ et $v_2 = \frac{24}{17}$.
2. Faisons une récurrence liée. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$".
• Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_0 \leqslant 2$. Ainsi, P_0 est vraie.
• Supposons P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est également vraie. Par hypothèse de récurrence, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$ et en additionnant ces deux inégalités

$$2 \leqslant u_n + v_n \leqslant 4 \text{ soit } 1 \leqslant \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant 2$$

donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. En appliquant la fonction inverse, qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$1 \geqslant \frac{1}{u_{n+1}} \geqslant \frac{1}{2} \text{ et donc } 2 \geqslant \frac{2}{u_{n+1}} \geqslant 1$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n, et donc pour tout entier n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.

3. Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{\frac{u_n+v_n}{2}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{4}{u_n + v_n}$$

et donc

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 8}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 8}{2(u_n + v_n)}$$

Or $v_n = \frac{2}{u_n}$ donc $u_n v_n = 2$. Donc $8 = 4u_n v_n$. Ainsi,

$$u_{n+2} - v_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

4. Puisque, pour tout entier n, $u_n \geqslant 1 > 0$ et $v_n \geqslant 1 > 0$, on a $2(u_n + v_n) > 0$ et donc, par quotient, $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$. Puisqu'on a également $u_0 - v_0 = 1 \geqslant 0$, on en déduit :

$$\forall\ n,\ u_n \geqslant v_n$$

5. Constatons que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{2}$$

D'après le résultat précédent, on en déduit donc que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier n. Donc (u_n) est décroissante.

Enfin, puisque $0 < u_{n+1} \leqslant u_n$, en appliquant la fonction inverse qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{u_{n+1}} \geqslant \frac{1}{u_n} \text{ soit } v_{n+1} \geqslant v_n$$

Ainsi, ceci étant vrai pour tout entier n, la suite (v_n) est croissante.

6. Notons, pour tout entier n, $w_n = u_n - v_n$. On a alors, pour tout entier n,

$$w_{n+1} - w_n = \underbrace{u_{n+1} - u_n}_{\leqslant 0} - \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\geqslant 0} \leqslant 0$$

La suite (w_n) est donc décroissante. Ainsi, pour tout entier n,

$$w_n \leqslant w_0 = 1$$

On a donc, d'après ce qui précède et la question 4., pour tout entier n,

$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant 1$$

Or, quand $x \in [0;1]$, on a $x^2 \leqslant x$, donc

$$\forall\ n,\ (u_n - v_n)^2 \leqslant u_n - v_n$$

7. Pour tout entier n, on a

$$2 \leqslant u_n + v_n \leqslant 4 \text{ et donc } 4 \leqslant 2(u_n + v_n) \leqslant 8$$

soit, en appliquant la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{2(u_n + v_n)} \geqslant \frac{1}{8}$$

Enfin, puisque $(u_n - v_n)^2 \geqslant 0$,

$$\frac{(u_n - v_n)^2}{4} \geqslant \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geqslant \frac{(u_n - v_n)^2}{8}$$

En utilisant le résultat de la question 6, on obtient finalement que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)^2 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$

Soit alors P la proposition définie, pour tout entier n, par P_n : "$u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$".

- Pour $n = 0$, on a $u_0 - v_0 = 1$ et $\frac{1}{4^0} = 1$. Donc $u_0 - v_0 \leqslant \frac{1}{4^0}$ et P_0 est vraie.
- Supposons que P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après ce qui précède, on a

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$

Par hypothèse de récurrence, $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$. Donc

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n, et donc pour tout entier n, $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$.

Exercice 12

1. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "u_n existe et $u_n > 0$". Démontrons P par récurrence double.
• Initialisation : pour $n=0$, u_0 existe bien et $u_0 = 1 > 0$. De même, u_1 existe et $u_1 = 2 > 0$. Donc P_0 et P_1 sont vraies.
• Hérédité : supposons les propositions P_n et P_{n+1} vraies pour un certain entier n. Montrons que P_{n+2} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$. Par produit $u_n u_{n+1} > 0$. Ainsi u_{n+2} existe bien et $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} > 0$. Donc P_{n+2} est vraie.
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n, et donc $u_n > 0$ pour tout entier n.
2. w est bien définie d'après ce qui précède. Constatons alors que, pour tout entier n,

$$w_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln\left(\sqrt{u_n u_{n+1}}\right)$$

Donc, pour tout entier n

$$w_{n+2} = \frac{1}{2}\ln(u_n u_{n+1}) = \frac{1}{2}(\ln(u_n) + \ln(u_{n+1})) = \frac{1}{2}(w_n + w_{n+1})$$

Donc (w_n) est une suite récurrent linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est

$$X^2 = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$$

de racines 1 et $-\frac{1}{2}$. Ainsi, il existe deux réels a et b tels que, pour tout entier n, $w_n = a + b\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Puisque $w_0 = \ln(u_0) = 0$ et $w_1 = \ln(u_1) = \ln(2)$, on en déduit

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 0 \\ a & - & \frac{1}{2}b & = & \ln(2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & \frac{2}{3}\ln(2) \\ b & = & -\frac{2}{3}\ln(2) \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout entier n,

$$w_n = \frac{2}{3}\ln(2) - \frac{2}{3}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

et donc

$$u_n = e^{w_n} = e^{\frac{2}{3}\ln(2) - \frac{2}{3}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

ce qui donne, finalement

$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = e^{\frac{2}{3}\ln(2)} e^{-\frac{2}{3}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}}$$

6

Chapitre

Probabilités sur un ensemble fini

Résumé

Nous allons dans ce chapitre revoir les notions de base sur les probabilités, vues depuis la classe de troisième, en les rendant plus rigoureuses. Nous revenons également les probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales.

> *« Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ? »*

Henri Poincaré (1854 – 1912)

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les généralités sur les probabilités :

- Déterminer des probabilités en situation d'équiprobabilité .... ☐
- Utiliser la formule du crible de Poincaré .... ☐
- Justifier qu'une famille est un système complet d'événements .... ☐
- Utiliser les formules des probabilités composées et des probabilités totales .... ☐
- Utiliser les formules de Bayes .... ☐
- Démontrer que deux événements sont indépendants .... ☐
- Utiliser la mutuelle indépendance d'une famille d'événements .... ☐

② Concernant les variables aléatoires :

- Déterminer le support et la loi de probabilités d'une variable aléatoire .... ☐
- Calculer espérance et variance d'une variable aléatoire .... ☐

I. Espace probabilisé fini

1. Espace probabilisable

Définition 6.1.

Soit Ω un ensemble fini, et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. On dit que $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable**. Les éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$ sont appelés **événements**. Les événements $\{\omega\}$ (pour $\omega \in \Omega$) sont appelés **événements élémentaires**.

Remarque

$\mathscr{P}(\Omega)$ vérifie les propriétés suivantes, que nous reverrons plus tard :

- $\Omega \in \mathscr{P}(\Omega)$
- $\forall\, A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \bar{A} \in \mathscr{P}(\Omega)$
- $\forall, A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega), A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$.

Remarque

L'événement $\varnothing$ est appelé **événement impossible**, et l'événement Ω l'**événement certain**.

Définition 6.2.

Deux événements A et B de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

2. Loi de probabilité

Définition 6.3.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;1]$ vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour tous événements incompatibles A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Remarque

Le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé fini**, et pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A)$ s'appelle la **probabilité** de l'événement A.

Propriété 6.1.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et A, B deux événements. Alors, on a :

- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Ainsi, $\mathbb{P}(\varnothing) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$.
- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$.
- Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Démonstration

- Par définition, A et $\bar{A}$ sont incompatibles, et $A \cup \bar{A} = \Omega$. Donc par définition
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$$
- $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles, et $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$. Par définition,
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$
- Si $A \subset B$, on peut écrire $B = A \cup (B \cap \bar{A})$. Les événements A et $B \cap \bar{A}$ étant incompatibles, par définition
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap \bar{A})) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) \geqslant \mathbb{P}(A)$$

- On constate que $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$. Puisque A et $B \cap \bar{A}$ sont incompatibles, par définition
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap \bar{A})) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) \underbrace{=}_{\text{d'après pt 2}} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Propriété 6.2. Crible de Poincaré

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Si $A_1, \cdots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles ($k \geqslant 1$), on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$
Et si A, B et C sont trois événements quelconques, on a
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Démonstration

Ce résultat se démontre par récurrence sur n.

Remarque

Il existe un crible de Poincaré plus général : pour tous événements $(A_1, \cdots, A_n)$, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) \cdots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

3. Loi équiprobable

Définition 6.4.

Dans le cas où toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'elles sont **équiprobables**, ou que la loi de probabilité $\mathbb{P}$ est **uniforme**.
Si $\Omega = \{x_1; \cdots; x_n\}$, alors la probabilité de chaque issue est
$$p = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$$

Théorème 6.3.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini en situation d'équiprobabilité. Alors la probabilité d'un événement A est donnée par
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exercice 6.1

On lance un dé à 12 faces bien équilibré. On note A l'événement “obtenir un multiple de 3” et B l'événement “obtenir un multiple de 4”. Déterminer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Solution

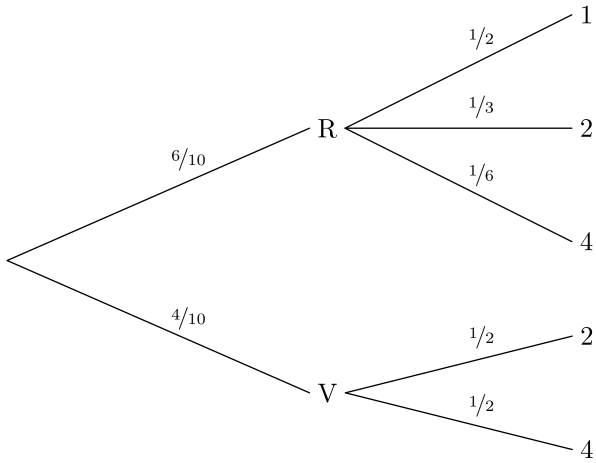
Puisque le dé est bien équilibré, la loi de probabilité est uniforme. Ainsi, $\Omega = [\![1; 12]\!]$ et $\text{card}(\Omega) = 12$.
Puisque $A = \{3; 6; 9; 12\}$ et $B = \{4; 8; 12\}$, on a
$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

☞ *Exercice 1.*

II. Probabilités conditionnelles

1. Exemple

Dans un sac, on possède 10 jetons : 6 jetons rouges, numérotés $1, 1, 1, 2, 2, 4$ et quatre jetons verts, numérotés $2, 2, 4, 4$. On tire au hasard un jeton du sac.
On note R l'événement “obtenir un jeton rouge”, V l'événement “obtenir un jeton vert”, 1 l'événement “obtenir un jeton 1”, ...
Cette expérience peut être représentée par un **arbre pondéré** :



De cet arbre, on peut lire ainsi que $\mathbb{P}(R) = \frac{6}{10}$, $\mathbb{P}(V) = \frac{4}{10}$.
La branche $-R-2$ indique que l'on a obtenu un jeton rouge **et** numéroté 2.

Propriété 6.4.

- Loi des noeuds : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Ainsi, la probabilité de $R \cap 2$ est égale à

$$\mathbb{P}(R \cap 2) = \frac{6}{10} \times \frac{1}{3} = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(2)$$

2. Probabilités conditionnelles

Définition 6.5.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit A un événement de probabilité non nulle. Alors, l'application $\mathbb{P}_A$ définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par

$$\forall\, B \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ appelée **probabilité sachant** A.

Remarque

$\mathbb{P}_A(B)$ est également notée $\mathbb{P}(B|A)$. Puisque $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, toutes les propriétés des probabilités s'appliquent à $\mathbb{P}_A$.

Exemple 6.2

Dans l'exemple précédent, $\mathbb{P}_V(2) = \frac{1}{2}$.

Remarque
Dans la suite du cours, et plus généralement tout au long de l'année, on essaiera de se passer des arbres. D'une part, parce qu'il est plus important de comprendre les formules sous-jacentes ; et d'autre part parce que, souvent, les expériences aléatoires que l'on fera ne se modéliseront pas facilement avec un arbre.

3. Formule des probabilités composées

Théorème 6.5. Probabilités composées

On utilise souvent les probabilités conditionnelles pour déterminer la probabilité de l'intersection : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$.
On peut d'ailleurs généraliser cette formule : pour tous événements $A_1, \cdots, A_n$, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exemple 6.3
Toujours dans l'exemple précédent, $\mathbb{P}(R \cap 4) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(4) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$.

Remarque
Cette formule est très importante. C'est celle qu'on utilisera souvent pour déterminer la probabilité d'une intersection.

4. Formule de Bayes

Théorème 6.6. Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}_B(A) \text{ et } \mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}_B(A)}$$

Démonstration
En effet,

$$\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(B)$$

Exemple 6.4
Dans l'exemple du début, la probabilité, sachant qu'on a eu un jeton 2, que celui-ci soit vert, vaut

$$\mathbb{P}_2(V) = \frac{\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(2)}\mathbb{P}_V(2) = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{4}{10}}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

III. Probabilités totales

1. Système complet d'événements

Définition 6.6.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $(A_1, \cdots, A_n)$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un **système complet d'événements** si

- les événements $A_1, \cdots, A_n$ sont deux à deux incompatibles ($\forall\, i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$).
- $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Exemple 6.5
On lance un dé à 6 faces, et on note A :"obtenir un nombre pair", et B :"obtenir un nombre impair". Alors $\Omega = [\![1,6]\!]$, $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \emptyset$. Donc (A, B) forme un système complet d'événements.

Remarque
Si A est un événement de $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, alors $(A, \overline{A})$ est un système complet de deux événements.

2. Formules des probabilités totales

Théorème 6.7.
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \cdots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω, tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Alors, pour tout événement B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Démonstration
On peut écrire

$$B = B \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B \cap A_k$$

Or les événements $B \cap A_k$ sont des événements deux à deux incompatibles, puisque les A_k le sont. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

Propriété 6.8.
Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

Exemple 6.6
Dans l'exemple de début, (R, V) est un système complet d'événements. La probabilité de l'événement 2 vaut donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2) &= \mathbb{P}(R \cap 2) + \mathbb{P}(V \cap 2) \\ &= \mathbb{P}_R(2) \times \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}_V(2) \times \mathbb{P}(V) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

☞ *Exercices 3 et 6.*

IV. Indépendance de deux évènements

1. Indépendance de deux événements

Définition 6.7.
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exemple 6.7
Dans l'exemple du II., les événements V et R sont indépendants.

Propriété 6.9.

Si A et B sont des événements de probabilité non nulle, il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- A et B sont indépendants.
- $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$

Théorème 6.10.

Soient deux évènements indépendants A et B. Alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.

Démonstration

Puisque A et B sont indépendants, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Or, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

On a donc $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)$.

2. Indépendance d'une famille d'événements

Définition 6.8.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements.

- On dit que $A_1, \cdots, A_n$ sont **deux à deux indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!], i \neq j,\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

- On dit que $A_1, \cdots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si

$$\forall I \subset [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

En particulier, $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n)$.

Théorème 6.11.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements mutuellement indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$. Soit $B_1, \cdots, B_n$ des événements tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$. Alors les événements $B_1, \cdots, B_n$ sont encore mutuellement indépendants.

☞ *Exercices 7 et 8.*

V. Variables aléatoires - Rappels

Ceci n'est qu'un rappel de première et terminale. Nous définirons en détail la notion de variable aléatoire plus tard dans l'année.

1. Définitions

Définition 6.9.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On appelle **variable aléatoire** sur Ω toute application X définie sur Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$. $X(\Omega)$ est appelé le **support** de la variable aléatoire X.
Si on note $X(\Omega) = \{x_1; \cdots; x_n\}$, on appelle **loi de probabilité de la variable aléatoire** X, l'application qui à tout élément x_i fait correspondre la probabilité de l'événement "X prend la valeur x_i", que l'on note $\mathbb{P}(X = x_i)$.

Remarque

- L'événement $(X = x_i)$ est composé des issues pour lesquelles la variable aléatoire X prend la valeur x_i.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est donner l'ensemble des probabilités $\mathbb{P}(X = x_1), \cdots, \mathbb{P}(X = x_n)$ (sous la forme d'un tableau par exemple).

Exercice 6.8

On lance un dé équilibré. On gagne 1 euro si on tombe sur 1 ou 6, et on perd 1 euro sinon. Déterminer le support et la loi de probabilité de la variable aléatoire représentant le gain.

Solution

En notant X le gain, alors les valeurs possibles de X sont 1 et -1. On a donc

$$(X = 1) = \{1;6\} \text{ et } (X = -1) = \{2;3;4;5\}$$

et donc $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

2. Paramètres d'une variable aléatoire

Définition 6.10.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire. On note $X(\Omega) = \{x_1; \cdots; x_n\}$.

- On appelle **espérance mathématique** de X le nombre réel

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \times \mathbb{P}(X = x_1) + \cdots + x_n \times \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathbb{P}(X = x_i)$$

- On appelle **variance** de X le nombre réel positif

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = (x_1 - \mathbb{E}(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x_1) + \cdots + (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x_i)$$

- On appelle **écart-type** de X le nombre réel positif $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(X)}$.

Proposition 6.12.

Soient a et b deux réels, et X une variable aléatoire. Alors

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(aX + b) = a^2\mathbb{V}\text{ar}(X)$$

Exercice 6.9

Déterminer espérance et variance de la variable aléatoire définie dans l'exercice 8.

Solution

Par définition, on a

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + (-1) \times \mathbb{P}(X = -1) = 1 \times \frac{1}{3} - 1 \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

De même, on a :

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = (1 - \mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X = 1) + (-1 - \mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X = -1) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(-1 + \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{16}{27} + \frac{8}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

☞ *Exercices 2, 4 et 5.*

Exercices

Probabilités sur un ensemble fini

Exercices

Probabilités générales

●○○ Exercice 1 Probabilités générales (10 min.)

Jean et Jeanne sont deux fous de mathématiques, qui possèdent un dé à 10 faces, numérotées de 0 à 9, légèrement truqué. Le dé suit ainsi la loi de probabilité suivante :

issue	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - A : "le dé tombe sur un chiffre impair".
   - B : "le dé tombe sur le chiffre 1, 4, 7, ou 9"
   - C : "le dé tombe sur un chiffre inférieur ou égal à 4".
2. Déterminer la probabilité des évènements $A \cup B$, $B \cap C$ et $A \cap C$.

●○○ Exercice 2 Variables aléatoires générales (10 min.)

Jean propose à Jeanne de lancer le dé, et de jouer au jeu suivant : Jeanne gagne 3 euros si le dé tombe sur le chiffre 0, elle gagne 7 euros si le dé tombe sur le chiffre 9, elle gagne 1 euro si le dé tombe sur le chiffre 1 ou 8, elle perd 2 euros si le dé tombe sur le chiffre 2 ou 6, elle perd 1 euro si le dé tombe sur le chiffre 4 ou 5, et elle perd 5 euros si le dé tombe sur le chiffre 3 ou 7. On note X la variable aléatoire donnant le gain de Jeanne.

1. Déterminer le support et la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Le jeu est-il équitable ?

Probabilités condtionnelles et exercices bilans

●○○ Exercice 3 Probabilités et suites I (15 min.)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
4. Déterminer l'expression de p_n puis déterminer la limite de la suite (p_n).

●○○ Exercice 4 Variable aléatoire - calculatrice autorisée (pour une fois) (15 min.)

Le coût de production d'un objet est de 950 euros. Cet objet peut présenter le défaut A, le défaut B, ou les deux défauts en même temps.

La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabriquant avec les coûts suivants : 100 euros pour le défaut A, et 150 euros pour le défaut B.

On admet que 90% des objets produits n'ont aucun défaut, 4% ont le seul défaut A, 2% ont le seul défaut B, et les autres ont les deux défauts A et B.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est à dire le coût de production augmenté du coût de réparation éventuel. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et l'écart-type de cette variable aléatoire. Que représente $\mathbb{E}(X)$ pour l'usine.
3. On admet que tous les objets produits sont vendus. L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 euros chaque objet produit ?

●●○ Exercice 5 Variable aléatoire et fonction I (15 min.)

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs différentes : rouge, blanc et vert. Un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe. Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

- Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 euros.
- Si le secteur repéré est blanc, le joueur perd 12 euros.
- Si le secteur repéré est vert, il lance une seconde fois la roue :
  - si le secteur repéré est rouge, il gagne 8 euros.
  - si le secteur repéré est blanc, il perd 2 euros.
  - si le secteur repéré est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.

La roue se compose de trois secteurs rouges, de quatre secteurs blancs, et de n secteurs verts ($n \geqslant 1$). Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_n.
2. Calculer l'espérance mathématique de X_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de la fonction numérique f, définie sur $[0;+\infty[$ par
$$f(x) = \frac{x}{(x+7)^2}$$
4. En déduire pour quelle valeur de l'entier n l'espérance mathématique de X_n est maximale. Quelle est la valeur correspondante de $E(X_n)$?

●○○ Exercice 6 Probabilités et suites II (15 min.)

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   (a) A : « les 2^e et 3^e sondages sont positifs » ;
   (b) B : « les 2^e et 3^e sondages sont négatifs ».
2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^e sondage soit positif.
3. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
4. Déterminer l'expression de p_n et en déduire la limite de la suite (p_n).

Indépendance

●○○ Exercice 7 Indépendance I (5 min.)

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches. Une urne U_2 contient cinq boules noires, et cinq boules blanches. On choisit une urne au hasard (et de façon équiprobable), et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie. On note :

- B_1 l'évènement "obtenir une boule blanche au premier tirage"
- B_2 l'évènement "obtenir une boule blanche au deuxième tirage"

Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

●○○ Exercice 8 Indépendance II (10 min.)

Lorsqu'on choisit une moto aléatoirement dans une fabrique, elle peut présenter deux défauts : le pot d'échappement est mal fixé, ou le guidon n'est pas aligné.
On note A l'évènement : "le pot d'échappement est mal fixé" et B l'évènement : "le guidon n'est pas aligné". On suppose que $\mathbb{P}(A) = 0,1$ et $\mathbb{P}(B) = 0,2$, et que les évènements A et B sont indépendants.
Déterminer la probabilité que la moto ne présente aucun défaut (on dira qu'elle est fonctionnelle).

Corrigés

Probabilités sur un ensemble fini

Corrigés des exercices

Exercice 1

Cet exercice est sans difficulté majeure.

1. Puisqu'on a $A = \{1;3;5;7;9\}$, $B = \{1;4;7:9\}$ et $C = \{0;1;2;3;4\}$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{29}{48} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(C) = \frac{7}{16}$$

2. De même, $A \cup B = \{1;3;4;5;7;9\}$, $B \cap C = \{1;4\}$ et $A \cap C = \{1;3\}$. Donc,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{11}{16} \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{5}{24} \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{3}{16}$$

Exercice 2

1. $X(\Omega) = \{3;7;1;-2;-1;-5\}$. On peut représenter la loi de probabilité avec le tableau suivant :

x_i	-5	-2	-1	1	3	7
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{11}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{10}{48}$	$\frac{10}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$

On peut vérifier que la somme des probabilités fait bien 1.

2. On en déduit l'espérance suivante

$$\mathbb{E}(X) = -5\frac{11}{48} - 2\frac{7}{48} - \frac{10}{48} + \frac{10}{48} + 3\frac{1}{12} + 7\frac{1}{8} = -\frac{15}{48} = -\frac{5}{16}$$

L'espérance étant strictement négative, le jeu est défavorable.

Exercice 3

1. $(G_1, \overline{G_1})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_2 = \mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(G_1 \cap G_2) + \mathbb{P}(\overline{G_1} \cap G_2)$$

Donc

$$p_2 = 0,1 \times 0,8 + (1 - 0,1) \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62$$

2. On cherche $\mathbb{P}_{G_2}(\overline{G_1})$. Ainsi

$$\mathbb{P}_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{\mathbb{P}(G_2 \cap \overline{G_1})}{\mathbb{P}(G_2)} = \frac{0,9 \times 0,6}{0,62} = \frac{27}{31}$$

3. Soit n un entier naturel non nul. $(G_n, \overline{G_n})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(G_{n+1}) = \mathbb{P}(G_n \cap G_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$$

soit

$$p_{n+1} = p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 = 0,2p_n + 0,6$$

et donc

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}}$$

4. La suite (p_n) est arithmético-géométrique. On pose la suite v définie pour tout entier n par

$$v_n = p_n - \frac{3}{4}$$

Alors, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4}$$

donc

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}\left(v_n + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{20} = \frac{1}{5}v_n$$

Ainsi, la suite v est géométrique, de premier terme $v_1 = p_1 - \frac{3}{4} = -0,65$ et de raison $\frac{1}{5}$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a donc

$$v_n = -0,65\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

et donc

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ p_n = -0,65\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}}$$

Puisque $-1 < \frac{3}{4} < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{4}}$$

Exercice 4

1. Sans difficulté, on a $X(\Omega) = \{950; 1050; 1100; 1200\}$, et

$$\mathbb{P}(X = 950) = 0,90 \quad \mathbb{P}(X = 1050) = 0,04 \quad \mathbb{P}(X = 1100) = 0,02 \quad \mathbb{P}(X = 1200) = 0,04$$

2. On a

$$\mathbb{E}(X) = 950 \times 0,90 + 1050 \times 0,04 + 1100 \times 0,02 + 1200 \times 0,04 = 967$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = (950-967)^2 \times 0,90 + (1050-967)^2 \times 0,04 + (1100-967)^2 \times 0,02 + (1200-967)^2 \times 0,04 = 3061$$

soit

$$\sigma(X) = \sqrt{3061} \approx 55,33$$

$\mathbb{E}(X)$ représente le prix de revient d'un objet.

3. En moyenne, un objet revient à 967 €. En le vendant 960 €, on peut estimer que l'usine va être déficitaire.

Exercice 5

1. Constatons que $X_n(\Omega) = \{-12; -2; 0; 8; 16\}$. Notons R_1 (respectivement B_1, V_1) l'événement “obtenir le secteur rouge (resp. bleu, vert) au premier lancer” et R_2 (respectivement B_2, V_2) l'événement “obtenir le secteur rouge (resp. bleu, vert) au deuxième lancer”.
Par construction de la roue, on a, pour $i = 1$ ou 2 :

$$\mathbb{P}(R_i) = \frac{3}{7+n} \qquad \mathbb{P}(B_i) = \frac{4}{7+n} \qquad \mathbb{P}(V_i) = \frac{n}{7+n}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(X_n = 16) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{3}{7+n} \qquad \mathbb{P}(X_n = -12) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{4}{7+n}$$

Enfin, d'après la formule des probabilités composées, et indépendance des événements V_1 et R_2, V_1 et B_2 ainsi que V_1 et V_2 :

$$\mathbb{P}(X_n = 8) = \mathbb{P}(V_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(R_2) = \frac{n}{7+n}\frac{3}{7+n} = \frac{3n}{(7+n)^2}$$

$$\mathbb{P}(X_n = -2) = \mathbb{P}(V_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(B_2) = \frac{n}{7+n}\frac{4}{7+n} = \frac{4n}{(7+n)^2}$$

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(V_1 \cap V_2) = \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(V_2) = \frac{n}{7+n}\frac{n}{7+n} = \frac{n^2}{(7+n)^2}$$

2. Par définition :

$$\mathbb{E}(X_n) = 16\mathbb{P}(X_n = 16) - 12\mathbb{P}(X_n = -12) + 8\mathbb{P}(X_n = 8) - 2\mathbb{P}(X_n = -2) + 0\mathbb{P}(X_n = 0)$$

soit

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{16 \times 3}{7+n} - \frac{12 \times 4}{7+n} + \frac{8 \times 3n}{(7+n)^2} - \frac{2 \times 4n}{(7+n)^2} + 0$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{16n}{(7+n)^2}}$$

3. f est une fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ (fraction rationnelle) et pour tout $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = \frac{(x+7)^2 - x(2(x+7))}{(x+7)^4} = \frac{7-x}{(x+7)^3}$$

Puisque $(x+7)^3 > 0$ sur $[0;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $7-x$. On obtient alors le tableau de signe et de variations suivant :

x	0		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{28}$	$\searrow$	

4. D'après l'étude précédente, puisque $\mathbb{E}(X_n) = 16f(n)$, l'espérance est maximale lorsque $n = 7$.

Exercice 6

Remarquons tout d'abord que $p_1 = 1$. Donc $\mathbb{P}(V_2) = 0,6$ et $\mathbb{P}(\overline{V_2}) = 1 - \mathbb{P}(V_2) = 0,4$.

1. D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(V_2 \cap V_3) = \mathbb{P}(V_2) \cap \mathbb{P}_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$$

$$\mathbb{P}(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) = \mathbb{P}(\overline{V_2})\mathbb{P}_{\overline{V_2}}(V_3) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$$

2. $(V_2, \overline{V_2})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales

$$p_3 = \mathbb{P}(V_3) = \mathbb{P}(V_2 \cap V_3) + \mathbb{P}(\overline{V_2} \cap V_3)$$

ainsi

$$p_3 = \mathbb{P}(V_2)\mathbb{P}_{V_2}(V_3) + \mathbb{P}(\overline{V_2})\mathbb{P}_{\overline{V_2}}(V_3) = 0,36 + 0,4 \times 0,1 = 0,40$$

3. Soit $n \geqslant 1$. $(V_n, \overline{V_n})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(V_{n+1}) = \mathbb{P}(V_n \cap V_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{V_n} \cap V_{n+1})$$

et d'après la formule des probabilités composées

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(V_n)\mathbb{P}_{V_n}(V_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{V_n})(V_{n+1}) = p_n \times 0,6 + (1-p_n) \times 0,1 = 0,5p_n + 0,1$$

4. La suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique. Par l'étude classique, en introduisant la suite v définie pour tout $n \geqslant 1$ par $v_n = p_n - 0,2$, on montre que la suite v est géométrique, de premier terme $v_1 = p_1 - 0,2 = 0,8$ et de raison $0,5$. Ainsi,

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad v_n = 0,8(0,5)^{n-1} \text{ et } p_n = 0,8(0,5)^{n-1} + 0,2$$

Puisque $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,5)^{n-1} = 0$, et par somme

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 0,2}$$

Exercice 7

On note A_1 (respectivement A_2) l'événement "choisir l'urne U_1 (resp. U_2)". (A_1, A_2) forme un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap B_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

De même, par indépendance des tirages :

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(A_2 \cap B_2) = \frac{3}{5}$$

Enfin,

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(A_2 \cap B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{74}{200} = \frac{37}{100}$$

Constatons, pour terminer, que

$$\mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2) = \frac{9}{25} \neq \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$$

Ainsi, les événements ne sont pas indépendants.

Exercice 8

Notons F l'événement "la moto est fonctionnelle". On constate que

$$\overline{F} = A \cup B$$

Or

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Puisque A et B sont indépendants, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. Donc

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,1 \times 0,2 = 0,28$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(F) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,72}$$

Chapitre 7

Convergence d'une suite

Résumé

Nous allons généraliser la notion de limite, qui a été vue en classe de Terminale. Nous introduirons des méthodes pour déterminer les limites et des théorèmes permettant de montrer l'existence de limites.

> *« Quand je regardais le tableau, j'éprouvais la même convergence en un seul et unique point : un bref instant touché par le soleil qui existait maintenant et pour toujours. C'est fortuitement que je remarquais ma chaîne à la cheville de l'oiseau, ou que je songeais combien la vie de cette petite créature, battant brièvement des ailes puis toujours forcée, sans espoir, d'atterrir au même endroit, avait dû être cruelle. »*

Donna Tartt (1963-) – *Le Chardonneret*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les limites :
- Connaître la définition mathématique des limites . . . . ☐
- Savoir déterminer des limites en utilisant les théorèmes (somme, produit, quotient) . . . . ☐
- Savoir utiliser le théorème d'encadrement et les théorèmes de comparaison . . . . ☐
- Connaître les croissances comparées . . . . ☐
- Savoir appliquer le théorème de la limite monotone . . . . ☐

② Savoir reconnaître les suites adjacentes . . . . ☐

③ Savoir démontrer qu'un suite est négligeable devant une autre . . . . ☐

④ Savoir démontrer que deux suites sont équivalentes . . . . ☐

I. Généralités

1. Limite finie

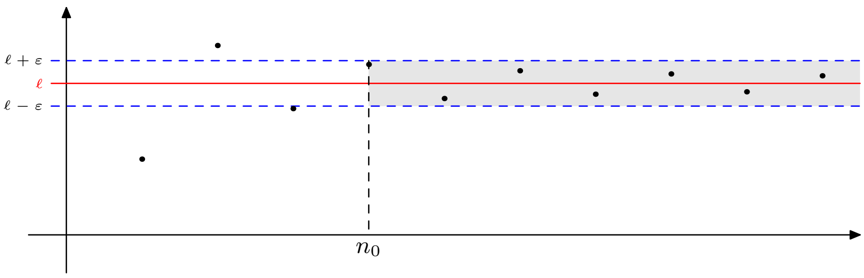
Définition 7.1.

Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel. Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** ℓ, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Mathématiquement, (u_n) a pour limite ℓ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$



Exemple 7.1

La suite u définie pour tout n par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0 :

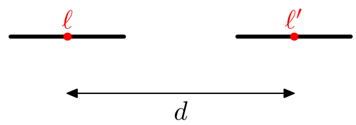
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Propriété 7.1.

Si une suite (u_n) a une limite finie, celle-ci est **unique**.

Démonstration

On suppose que (u_n) converge vers ℓ et ℓ' et que $\ell \neq \ell'$. Donc la distance entre ℓ et ℓ' est non nulle. On la note d, et on s'intéresse aux deux intervalles $]\ell - \frac{d}{4}; \ell + \frac{d}{4}[$ et $]\ell' - \frac{d}{4}; \ell' + \frac{d}{4}[$. Par définition de la convergence, tous les termes de la suite sont dans ces deux intervalles à partir d'un certain rang. Or :



les deux intervalles sont disjoints, ce qui est absurde.

2. Limite infinie

Définition 7.2.

Soit (u_n) une suite.

- Si tout intervalle de la forme $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** $+\infty$, et on note

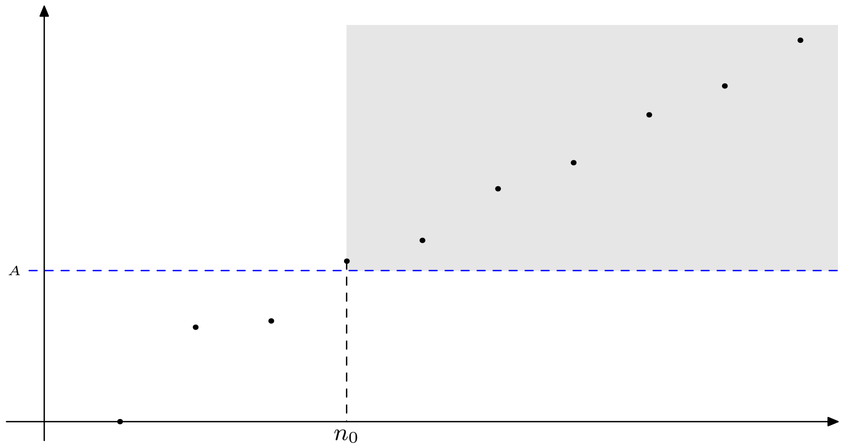
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

- Si tout intervalle de la forme $]-\infty, a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** $-\infty$, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Mathématiquement, (u_n) a pour limite $+\infty$ si et seulement si

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > A$$



Exemple 7.2

La suite u définie pour tout n par $u_n = n$ a pour limite $+\infty$, et la suite v définie pour tout n par $v_n = -n^2$ a pour limite $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$$

Algorithme 7.2.

Si une suite **croissante** (u_n) a pour limite $+\infty$, on peut utiliser l'algorithme suivant pour déterminer le plus petit entier n vérifiant $u_n > A$ (où A est un réel positif quelconque) :

Algorithme 1 : SEUIL

Entrées : Saisir A (nombre positif)
Initialisation :
$n \leftarrow 0$
$U \leftarrow u_0$
Tant que $U \leqslant A$
  $n \leftarrow n+1$
  $U \leftarrow u_n$
FinTantque
Sorties : Afficher n

En Scilab, pour la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n,\ u_{n+1} = 1 + u_n^2 \end{cases}$$

on obtient :

Scilab 7.3. Seuil pour une suite croissante

```
// Résumé : programme déterminant le premier entier n tel que
// un > a, où a est un réel donné et u une suite de limite +oo

n=0;
u=1;
// Valeur de seuil
seuil=100;

while(u<=seuil)
  // On n'a pas dépassé le seuil.
```



```
  // On passe au rang suivant
  n=n+1;
  // On calcule le terme suivant de la suite
  u=1+u^2;
end

// Ainsi, n contient le premier rang à partir duquel u_n > seuil
```

3. Suite convergente

Définition 7.3.

On dit qu'une suite est **convergente** si elle possède une limite finie. On dit qu'elle est **divergente** si elle possède une limite infinie.

4. Suite sans limite

Remarque

Certaines suites ne possèdent aucune limite, que ce soit finie ou infinie.

Exemple 7.3

La suite $((-1)^n)$ prend la valeur 1 aux termes pairs, et -1 aux termes impairs. Elle ne peut donc ni converger, ni diverger : elle ne possède donc pas de limite.

II. Théorèmes sur les limites

1. Théorème de comparaison

Théorème 7.4.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Si, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration

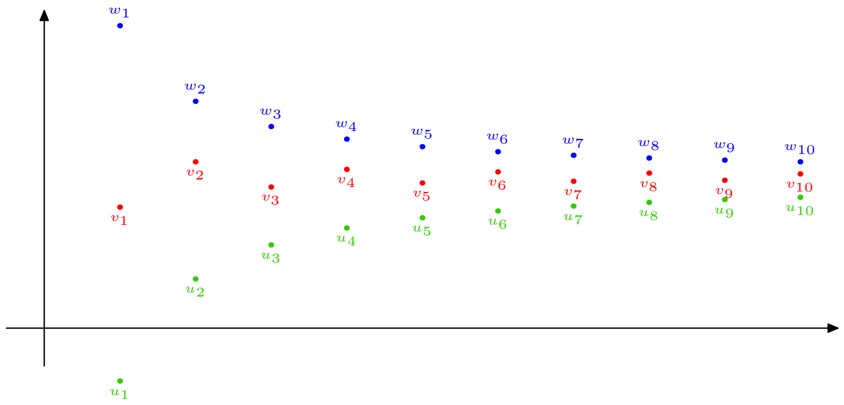
Supposons au contraire que $\ell > \ell'$. En notant d la distance (non nulle) entre ℓ et ℓ', cela signifie qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite (u_n) se trouve dans l'intervalle $]\ell - \frac{d}{4}; \ell + \frac{d}{4}[$. Or, $v_n \geqslant u_n$, donc, à partir d'un certain rang $v_n \geqslant \ell - \frac{d}{4}$. Donc l'intervalle $]\ell' - \frac{d}{4}; \ell' + \frac{d}{4}[$ ne contient aucun élément de la suite (v_n) à partir d'un certain rang : absurde.

2. Théorème d'encadrement

Théorème 7.5. Théorème d'encadrement

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites. On suppose que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$. Alors, (v_n) converge et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$



Remarque
Ce théorème est également appelé théorème des gendarmes.

Démonstration
Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.
Par définition de la limite, il existe un rang n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, u_n soit dans I. De même, il existe un rang n_2 tel que, pour $n \geqslant n_2$, w_n soit dans I.
Mais alors, pour tout n plus grand que n_1 **et** n_2, $u_n \in \mathrm{I}$ et $w_n \in \mathrm{I}$. Or, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et puisque I est un intervalle, on en déduit que pour tout n plus grand que n_1 et n_2, $v_n \in \mathrm{I}$.
Ceci étant vrai pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, on en déduit bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Méthode
Pour déterminer la limite d'une suite où $(-1)^n$ apparait, on appliquera (quasi) systématiquement le théorème d'encadrement.

Exemple 7.4
Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n > 0$ par
$$u_n = \frac{(-1)^n + 2}{n}$$

Solution
Pour tout $n \neq 0$, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $1 \leqslant (-1)^n + 2 \leqslant 3$ et puisque $n > 0$, on a
$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n + 2}{n} \leqslant \frac{3}{n}$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$. Par le théorème d'encadrement, la limite de (u_n) existe et
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n + 2}{n} = 0$$

Théorème 7.6.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ un réel. On suppose que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Démonstration
Application du théorème d'encadrement.

Exemple 7.5

On constate que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi, d'après le théorème précédent, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et a pour limite 0.

Théorème 7.7. Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- Si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration

Démontrons le premier point. Soit A un réel strictement positif quelconque. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $v_n \in [a;+\infty[$. Or, puisque pour tout n, $u_n \geqslant v_n$, on a également $u_n \in [a;+\infty[$ pour $n \geqslant n_0$.
Par définition de la limite infinie, cela signifie donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3. Convergence des suites monotones

Théorème 7.8. Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante majorée converge. Toute suite décroissante minorée converge.

Démonstration

Théorème admis.

Théorème 7.9.

Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante non majorée. La suite étant non majorée, quel que soit le réel a, on peut trouver un terme u_N de la suite strictement supérieur à a. On a donc $u_N > a$.
Or, la suite u étant croissante, on a, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N > a$. Tous les termes de la suite u sont donc dans l'intervalle $]a;+\infty[$ à partir d'un certain rang. Ceci étant vrai pour tout a, par définition, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Exemple 7.6

La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ est croissante, non majorée : sa limite est $+\infty$.
La suite v définie pour tout $n > 0$ par $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante, majorée (par 1) : elle converge donc.

Théorème 7.10.

Soit (u_n) une suite **croissante** de limite ℓ. Alors, pour tout entier n, on a $u_n \leqslant \ell$.

Démonstration

Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$. Notons $r = u_{n_0} - \ell > 0$. Par croissance de la suite u, on a donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$. Mais alors, l'intervalle $]\ell - r; \ell + r[$ ne contient aucun terme de la suite à partir de n_0. Cela contredit le fait que la suite u converge vers ℓ : ceci est absurde.

☞ *Exercices 7 et 8.*

III. Opération sur les limites

1. Limites usuelles

Théorème 7.11.

On dispose des limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty \ (p \in \mathbb{N}^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \ (p \in \mathbb{N}^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} |n| = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty \ (\alpha \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0 \ (\alpha \in \mathbb{R}_-^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

2. Limite de $u_n + v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Exercice 7.7

Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n}$.

Solution

En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$.

3. Limite de $u_n \times v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell.\ell'$	signe(ℓ').∞	-signe(ℓ').∞
$+\infty$	signe(ℓ).∞	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	-signe(ℓ).∞	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

On retiendra qu'on applique la règle des signes pour déterminer le signe du résultat.

Exercice 7.8

Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^n$.

Solution

En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n=+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^n=+\infty$.

4. Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) n'est pas nulle

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'\neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	signe$(\ell').\infty$	-signe$(\ell').\infty$
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

Exercice 7.9

Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}-1}$.

Solution

Par somme, on a les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} 2-\frac{1}{n}=2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}-1=-1$$

Par quotient, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}-1}=-2$$

5. Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) est nulle

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	0	$l\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	signe$(l).\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	-signe$(l).\infty$	$-\infty$	$+\infty$

6. Limite de (q^n)

Théorème 7.12.

Soit q un nombre réel. On s'intéresse à la suite (q^n).

- Si $q>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.
- Si $-1<q<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.
- Si $q=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n=1$.
- Si $q\leqslant -1$, la suite (q^n) ne possède pas de limite.

Démonstration

Tout part de l'inégalité de Bernoulli, qui se démontre à l'aide d'une récurrence : pour tout $x>0$, et pour tout entier n, on a

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx$$

- Si $q>1$, on peut écrire $q=1+x$ avec $x=q-1>0$. D'après l'inégalité de Bernoulli

  $$q^n\geqslant 1+nx=1+n(q-1)$$

  Or, puisque $q-1>0$, on a

  $$\lim_{n\to+\infty} 1+n(q-1)=+\infty$$

Par théorème d'encadrement,
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

- Si $q=1$, la suite (q^n) est la suite constante égale à 1. Elle converge donc vers 1.
- Si $-1<q<1$, posons $\mathrm{Q} = \frac{1}{|q|} > 1$. Alors, d'après ce qui précède
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Q}^n = +\infty$$
Or, on a
$$0 \leqslant |q|^n = \left(\frac{1}{\mathrm{Q}}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{Q}^n}$$
Par théorème d'encadrement, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Q}^n = +\infty$ on a
$$\lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0 \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$
- Si $q=-1$, la suite $(-1)^n$ vaut 1 pour les termes pairs, et -1 pour les termes impairs. Elle ne peut donc converger.
- Si $q<-1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = +\infty$. Donc la suite $(|q|^n)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut. Or, la suite (q^n) prend des valeurs positives pour les termes pairs, et négatives pour les termes impairs. Elle ne peut donc pas avoir de limite.

Méthode

Pour déterminer la limite d'une suite composée de puissances, on met les plus grandes puissances en facteur, et on utilise le résultat précédent.

Exercice 7.10

Soit u la suite définie pour tout entier n par
$$u_n = \frac{3^n + 4^n}{3\times 4^n + 2^n}$$
Déterminer la limite de la suite u.

Solution

Pour tout entier n, on a
$$u_n = \frac{4^n\left(1+\frac{3^n}{4^n}\right)}{4^n\left(3+\frac{2^n}{4^n}\right)} = \frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{4}\right)^n}$$
Puisque $-1<\frac{3}{4}<1$ et $-1<\frac{2}{4}<1$, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^n = 0$$
Par somme et quotient, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

☞ *Exercices 1, 2 et 3.*

7. Croissances comparées

Théorème 7.13. Croissances comparées

Pour tous réels a et b strictement positifs :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n^a} = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{\ln^b(n)} = +\infty$$

...

et de manière générale, pour $q>1$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{q^n}{n^a}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{q^n}=+\infty$$

Remarque

On note souvent de la manière suivante (avec $q>1$ et $a>0$) :

$$\ln^b(n) << n^a << q^n << n!$$

On donnera une notation rigoureuse à la fin de ce chapitre.

Démonstration

Voir chapitre Limite de fonctions.

Exemple 7.11

On a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n}=0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$$

Exercice 7.12

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\ln(n)}{n+1}$.

Solution

On constate que, pour tout $n>0$:

$$\frac{n+\ln(n)}{n+1}=\frac{n\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1+\frac{\ln(n)}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$. Par somme, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}1+\frac{\ln(n)}{n}=1$. On a également $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}1+\frac{1}{n}=1$. Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\ln(n)}{n+1}=1$$

☞ *Exercices 4 et 5.*

IV. Suites adjacentes

Définition 7.4.

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n-u_n=0$.

Exemple 7.13

Les suites u et v définies pour tout $n\geqslant 1$ par $u_n=-\frac{1}{n}$ et $v_n=\frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Solution

En effet, la suite u est croissante et v est décroissante : pour tout n,

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= -\frac{1}{n+1}-\left(-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{-n+(n+1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \\ v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} \\ &= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Enfin, pour tout n,

$$v_n-u_n = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Théorème 7.14.

Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes, et elles ont la même limite.

Démonstration

On montre que la définition des suites adjacentes entraîne que, pour tout n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$: en effet, la suite (v_n-u_n) est décroissante par construction, et de limite 0 : cela implique que tous les termes de la suite (v_n-u_n) sont positifs.

La suite (u_n) est donc croissante majorée : elle converge, vers une limite que l'on note ℓ. De même, la suite (v_n) est décroissante minorée : elle converge, vers ℓ'. Or, par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-u_n=0$. Par opération sur les limites, cela implique $\ell-\ell'=0$, soit $\ell=\ell'$.

Méthode

Pour montrer que deux suites sont adjacentes, on montre qu'une est croissante, l'autre est décroissante et que la différence des deux tend vers 0.

Exercice 7.14

Soient u et v deux suites définies pour tout $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$$

Montrer que u et v sont adjacentes.

Solution

Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc la suite (u_n) est croissante. De même

$$v_{n+1}-v_n = u_{n+1}+\frac{1}{(n+1).(n+1)!}-\left(u_n+\frac{1}{nn!}\right) = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1).(n+1)!}-\frac{1}{nn!}$$

Après mise au même dénominateur

$$v_{n+1}-v_n = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1).(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1).(n+1)!} < 0$$

donc la suite (v_n) est décroissante. Enfin $v_n-u_n=\frac{1}{n.n!}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n.n!} = 0 \quad \text{par quotient}$$

Bilan : les suites u et v sont bien adjacentes.

Remarque
Etant adjacentes, elles convergent, et ont la même limite. On peut montrer que leur limite commune est e.

☞ *Exercices 9 et 15.*

V. Comparaison de suites

L'idée de cette section est d'introduire des méthodes de comparaison de suites, permettant de déduire certains résultats sur les limites.

1. Négligeabilité

Définition 7.5.

Soient u et v deux suites, v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que u est négligeable par rapport à v au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On note alors $u_n = o_{+\infty}(v_n)$, ou plus simplement $u_n = o(v_n)$, et on lit "u est un petit o de v au voisinage de $+\infty$".

Exemple 7.15
On a $n = o(n^2)$.

Solution
En effet, $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Propriété 7.15. Opérations sur la négligeabilité

Soient u, v et w trois suites non nulles à partir d'un certain rang.

① (Multiplication par un réel) Si $u_n = o(v_n)$ alors pour tout réel k, $ku_n = o(v_n)$.

② (Quotient) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$ et $\frac{u_n}{w_n} = o\left(\frac{v_n}{w_n}\right)$.

③ (Transitivité) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.

④ (Somme) Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n + w_n = o(v_n)$.

Remarque
Attention : pour la somme, il faut que les suites soient négligeables par rapport à une même suite.

Exercice 7.16
Montrer que $\mathrm{e}^{-n} = o(n^4)$ et que $\ln(n) - 2n^2 = o(n^4)$.

Solution
Remarquons que

$$\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n^4} = \frac{1}{\mathrm{e}^n n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{par quotient.}$$

Enfin, $\ln(n) = o(n^4)$ et $n^2 = o(n^4)$ (par croissances comparées). Par somme, $\ln(n) - 2n^2 = o(n^4)$.

Remarque
Une suite vérifiant $u = o(1)$ est une suite qui tend vers 0.

Proposition 7.16. Croissances comparées

On peut écrire les croissances comparées ainsi : si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$n^\alpha = o(\mathrm{e}^n), \qquad (\ln n)^\alpha = o(n^\beta), \qquad \text{si } \alpha < \beta, \quad n^\alpha = o(n^\beta), \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^n = o(n!)$$

De manière générale, si $1 < q < p$:

$$n^\alpha = o(q^n), \quad q^n = o(p^n) \quad \text{et} \quad q^n = o(n!)$$

2. Équivalence

Définition 7.6.

Soient u et v deux suites, v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que u et v sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ si

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

Exercice 7.17
Montrer que $n^2 + n \sim n^2$.

Solution
En effet, pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{n^2+n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Remarque
On dispose d'une autre définition : u et v sont équivalentes si et seulement si

$$u_n = v_n + o_{+\infty}(v_n)$$

En effet,

$$\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Conséquence 7.17.

Soient deux suites u et v équivalentes. Alors

- Si u converge vers ℓ, v converge également vers ℓ.
- Si u est de signe constant à partir d'un certain rang, v est également de signe constant et de même signe à partir d'un certain rang.

Propriété 7.18. Opérations sur les équivalents

Soient u, v, w et x quatre suites non nulles à partir d'un certain rang.

① (Compatibilité avec la multiplication) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $u_n w_n \sim v_n x_n$.

② (Compatibilité avec le quotient) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{x_n}$.

③ (Compatibilité avec les puissances) Si les suites u et v sont strictement positives, et telles que $u_n \sim v_n$, alors pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, $u_n^p \sim v_n^p$.

Démonstration

Les preuves se font en utilisant la définition. Par exemple, remarquons que

$$\frac{u_n w_n}{v_n x_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{w_n}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Remarque

⚠ Attention : en général, on ne peut ni ajouter, ni soustraire des équivalents.

Exercice 7.18

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)+n^4}{1-n^4}$$

Solution

Puisque $\ln(n) = o(n^4)$, on a $\ln(n)+n^4 \sim n^4$. De même, $1-n^4 \sim -n^4$. Par quotient

$$\frac{\ln(n)+n^4}{1-n^4} \sim \frac{n^4}{-n^4} = -1$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)+n^4}{1-n^4} = -1$$

Proposition 7.19. Formule de Stirling

On dispose d'un équivalent de $n!$:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Remarque

On retrouve, grâce à ce résultat, que $q^n = o(n!)$.

☞ *Exercice 6.*

Exercices

Convergence d'une suite

7

Exercices

Premières limites

●○○ **Exercice 1 Limites de somme** (10 min.)

Déterminer la limite (si elle existe) des suites (u_n) définies par

1. $u_n = 2^n - \dfrac{1}{n^2}$
2. $u_n = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1$
3. $u_n = 3n^5 - 2n^{-3}$

●○○ **Exercice 2 Limites d'un produit** (10 min.)

Déterminer la limite (si elle existe) des suites (u_n) définies par

1. $u_n = 2^n \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$
2. $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times \left(1 - \dfrac{5}{n^4}\right)$
3. $u_n = n^3 \times \left(2 + \left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right)$

●○○ **Exercice 3 Limites d'un quotient** (10 min.)

Déterminer la limite (si elle existe) des suites (u_n) définies par

1. $u_n = \dfrac{(5/6)^n - 7}{5n^2}$
2. $u_n = \dfrac{-2n - 7}{(1/2)^n}$
3. $u_n = \dfrac{(5/6)^n - 7}{5n^{-2} + 1}$

●○○ **Exercice 4 Limites d'un polynôme ou de fraction rationnelle** (10 min.)

Déterminer la limite (si elle existe) de chacune des suites (u_n) définies par

1. $u_n = -2n^5 + n^4 - 7n^3 + 8n + 2$
2. $u_n = \dfrac{-2n - 7}{n^2 + 2n - 6}$
3. $u_n = 3n + 1 + \dfrac{-3}{n^2 + 1}$

Limites générales

●○○ **Exercice 5 Limites** (15 min.)

Déterminer les limites des suites suivantes (sans utiliser les équivalents ou négligeabilités).

1. $u_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1$
2. $u_n = \dfrac{2n + 1}{1 - 4n}$
3. $u_n = \dfrac{2n^2 + 1}{n - 1}$
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n + 4}{n^2}$
5. $u_n = \dfrac{2(-1)^{n^3+1}}{n + 2}$
6. $u_n = 3n^3 + 4n^2 + 2n - 1$
7. $u_n = \dfrac{-3n + 1}{2 - 3n}$
8. $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 1}{2n + 1}$
9. $u_n = \dfrac{2^n + 4^n - 5^n}{3^n + 2 \times 5^n}$
10. $u_n = \dfrac{2 \times 3^n - 4^n}{7^n - 1}$

●○○ **Exercice 6 Limites - le retour** (15 min.)

Traiter les limites de l'exercice 5 en utilisant les négligeabilités et équivalences (sauf limites 4 et 5).

Suites monotones

●○○ Exercice 7 Monotonie et limite I (20 min.)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad u_2 = 1$$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$ puis donner la monotonie de la suite (u_n).
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \dfrac{n}{2(n-1)}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

●○○ Exercice 8 Monotonie et limite II (20 min.)

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 0$. En déduire la monotonie de (u_n). Que peut-on en conclure ?
2. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0,\ u_{n+1} \leqslant \dfrac{2u_n}{5}$.
3. En déduire que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n u_0$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

Suites adjacentes

●○○ Exercice 9 Suites adjacentes I (15 min.)

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies, pour $n \geqslant 1$, par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on conclure ?

Suite, monotonie et point fixe

●○○ Exercice 10 Suites et point fixe I (30 min.)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$.

1. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Montrer que si $x \in [0;1]$, alors $f(x) \in [0;1]$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in [0;1]$.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $]-1;+\infty[$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

●○○ Exercice 11 Suites et point fixe II (30 min.)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + 3$; ainsi que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 2,5$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2. Montrer que l'intervalle $[2,3]$ est stable par f.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in [2;3]$.
4. Étudier le signe de $f(x) - x$.
5. Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
6. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente puis déterminer sa limite.

Suites et limites

●○○ Exercice 12 Exercice bilan I (15 min.)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leqslant u_n \leqslant 3$$
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout n par
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$
   (a) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie pour tout n.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire la limite de (u_n).

●○○ Exercice 13 Exercice bilan II (15 min.)

On considère les suites u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier n, $w_n > 0$
   (d) Déterminer la limite de la suite (w_n).
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante, et que la suite (v_n) est décroissante.
3. En déduire que les suites (u_n) est (v_n) sont adjacentes, et qu'elles ont la même limite que l'on notera ℓ dans la suite du problème.
4. Soit t la suite définie pour tout entier naturel par $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   (a) Montrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) Déterminer alors la valeur de ℓ.

●○○ Exercice 14 Exercice bilan III (15 min.)

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 20$, $v_0 = 1$ et
$$u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 5v_n}{6}$$

1. Pour tout entier n, on pose $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique, à termes positifs.
   (b) Déterminer la limite de (w_n), et exprimer w_n en fonction de n.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. Pour tout entier n, on pose $t_n = 5u_n + 24v_n$.
   (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, et déterminer la limite de (u_n) et (v_n).

●○○ Exercice 15 Suites adjacentes II (20 min.)

On définit la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$, pour $n \geqslant 1$, par : $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que (h_n) est croissante. On note ℓ la limite, finie ou infinie, de (h_n). Justifier son existence.
2. Montrer que $h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = +\infty$.

Corrigés

Convergence d'une suite

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. Puisque $2>1$, $2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De plus $\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n - \frac{1}{n^2} = +\infty$$

2. On a $\frac{5}{3}>1$. Donc $\left(\frac{5}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De plus, $-1<\frac{1}{2}<1$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = +\infty$$

3. Enfin, on remarque que $n^{-3} = \frac{1}{n^3}$. Donc $2n^{-3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, $3n^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} 3n^5 - 2n^{-3} = +\infty$$

Exercice 2

1. Remarquons que $2>1$ et $\frac{5}{3}>1$. Donc $2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\left(\frac{5}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n \times \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$$

2. Puisque $-1<\frac{2}{3}<1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, $\frac{5}{n^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par somme

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{5}{n^4} = 1$$

On en déduit alors, par quotient, que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(1 - \frac{5}{n^4}\right) = 0$$

3. On a $-1<\frac{5}{6}<1$, donc $\left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} 2 + \left(\frac{5}{6}\right)^n = 2$$

De plus, $n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par produit

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \times \left(2 + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = +\infty$$

Exercice 3

1. Puisque $-1<\frac{5}{6}<1$, $\left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n - 7 = -7$$

De plus, $5n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(5/6)^n - 7}{5n^2} = 0$$

2. Puisque $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, par produit, $-2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Par somme

$$\lim_{n\to+\infty} -2n-7 = -\infty$$

De plus, $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ (0^+ car pour tout n, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$). Par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n-7}{(1/2)^n} = -\infty$$

3. Puisque $-1 < \frac{5}{6} < 1$, $(5/6)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme

$$\lim_{n\to+\infty} (5/6)^n - 7 = -7$$

De plus, $n^{-2} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par somme

$$\lim_{n\to+\infty} 5n^{-2} + 1 = 1$$

Par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(5/6)^n - 7}{5n^{-2}+1} = -7$$

Exercice 4

On utilise la mise en facteur pour lever l'indétermination.

1. On met n^5 en facteur :

$$\begin{aligned} u_n &= n^5\left(-2 + \frac{n^4}{n^5} - \frac{7n^3}{n^5} + \frac{8n}{n^5} + \frac{2}{n^5}\right) \\ &= n^5\left(-2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2} + \frac{8}{n^4} + \frac{2}{n^5}\right) \end{aligned}$$

Par somme, on a

$$\lim_{n\to+\infty} -2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2} + \frac{8}{n^4} + \frac{2}{n^5} = -2$$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2. De même :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n\left(-2-\frac{7}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}-\frac{6}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(-2-\frac{7}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}-\frac{6}{n}\right)} \end{aligned}$$

Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} -2 - \frac{7}{n} = -2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n} = 1$$

Puisque $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, par produit

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n}\right) = +\infty$$

Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Enfin, $n^2 + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ par somme. Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{n^2+1} = 0$$

De plus, $3n + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par somme. On conclut donc par somme que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 5

1. Pour tout entier $n \neq 0$,

$$u_n = n^3\left(-1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, par somme on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} -1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} = -1$$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$. Par produit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Autre possibilité : d'après la règle du terme de plus haut degré,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$$

2. Pour tout entier $n \neq 0$,

$$u_n = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-4\right)} = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}-4\right)}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, par somme et produit

$$\lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 4 = -4$$

Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

3. Même méthode que précédemment. Pour $n \neq 0$, on a

$$u_n = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = n\frac{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, par somme et produit

$$\lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n^2} = 2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

Par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

Enfin, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, par produit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

4. **Réflexe** : lorsqu'il y a $(-1)^n$, on pense directement au théorème d'encadrement.
Pour tout n, on a

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$$

Donc pour tout $n \neq 0$

$$3 \leqslant (-1)^n + 4 \leqslant 5$$

et donc

$$\frac{3}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{n^2} \text{ car } n^2 > 0.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) converge, et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

5. Même réflexe que précédemment. Pour tout entier n,

$$-1 \leqslant (-1)^{n^3+1} \leqslant 1$$

donc

$$\frac{-2}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n+2} \text{ (car } n+2 > 0)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n+2} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) convege, et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

6. Pour $n \neq 0$, on a

$$u_n = n^3\left(3 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)$$

Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3} = 3$$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$. Par produit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

7. Pour tout $n \neq 0$, on a

$$u_n = \frac{n\left(-3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{2}{n}-3\right)} = \frac{\left(-3+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n}-3\right)}$$

Par somme et produit,

$$\lim_{n\to+\infty} -3 + \frac{1}{n} = -3 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} - 3 = -3$$

Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-3}{-3} = 1$$

8. Pour tout $n \neq 0$,

$$u_n = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = n\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}$$

Par somme et produit

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$$

Par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

9. **Réflexe** : lorsque l'on a des puissances ainsi, on met en facteur la plus grande puissance, et on se ramène à des suites de la forme (q^n). Ici, pour tout entier n, on a

$$u_n = \frac{5^n\left(\frac{2^n}{5^n}+\frac{4^n}{5^n}-1\right)}{5^n\left(\frac{3^n}{5^n}+2\right)} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+2}$$

Puisque $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $-1 < \frac{4}{5} < 1$ et $-1 < \frac{3}{5} < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n - 1 = -1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2 = 2$$

Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1}{2}$$

10. Pour tout entier n,

$$u_n = \frac{4^n\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right)}{7^n\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)} = \left(\frac{4}{7}\right)^n\frac{2\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^n)}$$

Puisque $-1 < \frac{4}{7} < 1$, $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et $-1 < \frac{1}{7} < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$$

Par somme, produit et quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^n)} = \frac{-1}{1} = -1$$

et par produit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Exercice 6

On utilise les propriétés des équivalents et petit o. Ainsi,

1. $u_n \underset{+\infty}{\sim} -n^3$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{-4n} = -\frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{1}{2}$.
3. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n^2}{n} = 2n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
6. On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} 3n^3$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
7. De même, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-3n}{-3n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
8. On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
9. Ici, en utilisant les comparaisons, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-5^n}{2\times 5^n} = -\frac{1}{2}$ et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$
10. Enfin, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-4^n}{7^n} = -\left(\frac{4}{7}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car $-1 < \frac{4}{7} < 1$) et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 7

1. Soit P la proposition définie pour tout entier $n \geqslant 2$ par P_n :"$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".

Initialisation : pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et donc $0 \leqslant u_2 \leqslant 1$: P_2 est vraie.
Héréditié : supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$ fixé, et montrons que P_{n+1} est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Mais alors :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 &\Longrightarrow 0 \leqslant u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \leqslant 1 - \frac{1}{n^2} && \text{car } 1 - \frac{1}{n^2} > 0 \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 && \text{car } \frac{1}{n^2} > 0 \text{ donc } 1 - \frac{1}{n^2} < 1 \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie et la proposition est héréditaire.
D'après le principe de récurrence, on en déduit que la proposition P_n est vraie pour tout $n \geqslant 2$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1}$$

Déterminons la monotonie. Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - u_n \\ &= u_n - \frac{1}{n^2}u_n - u_n = -\frac{1}{n^2}u_n \end{aligned}$$

Or, d'après ce qui précède, $u_n \geqslant 0$ et $-\frac{1}{n^2} < 0$. Par quotient, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 2$, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante}}$.

2. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que (u_n) converge.

3. Soit Q la proposition définie pour tout entier $n \geqslant 2$ par Q_n :"$u_n = \frac{n}{2(n-1)}$".

Initialisation : pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et $\frac{n}{2(n-1)} = \frac{2}{2\times 1} = 1$. Ainsi, Q_2 est vraie.
Hérédité : supposons que la proposition Q_n est vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$ fixé, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = \frac{n}{2(n-1)}$. Mais alors, en utilisant la définition :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{n}{2(n-1)}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n}{2(n-1)}\,\frac{n^2-1}{n^2} \\ &= \frac{n}{2(n-1)}\,\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2(n+1-1)} \end{aligned}$$

ainsi, Q_{n+1} est vraie et la proposition est héréditaire.
D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout $n \geqslant 2$, et donc

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{n}{2(n-1)}.}$$

Mais alors
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$
Ainsi,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$$

Exercice 8

1. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n :"$u_n \geqslant 0$".

Initialisation : pour $n=0$, $u_0 \geqslant 0$ par hypothèse donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé, et démontrons que P_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, on a donc $u_n \geqslant 0$. Mais alors :
$$1+5u_n \geqslant 1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2u_n^2 \geqslant 0$$
donc par quotient, $\dfrac{2u_n^2}{1+5u_n} \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 0$: P_{n+1} est donc vraie et la proposition est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que la proposition P_n est vraie pour tout entier n, c'est-à-dire
$$\boxed{\forall\, n, \quad u_n \geqslant 0}$$
Déterminons alors la monotonie de u. Soit n un entier. On a :
$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{2u_n^2}{1+5u_n} - u_n \\
&= \frac{2u_n^2}{1+5u_n} - \frac{u_n(1+5u_n)}{1+5u_n} \\
&= \frac{2u_n^2-(u_n+5u_n^2)}{1+5u_n} \\
&= \frac{-u_n-3u_n^2}{1+5u_n}
\end{aligned}$$
D'après l'étude précédente, puisque $u_n \geqslant 0$, alors $-u_n \leqslant 0$. De plus, $-3u_n^2 \leqslant 0$; par somme, $-u_n-3u_n^2 \leqslant 0$. Le dénominateur est quant à lui positif :$1+5u_n \geqslant 0$. Par quotient
$$u_{n+1}-u_n \leqslant 0$$
Ceci étant vrai pour tout entier n, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

La suite est donc décroissante, minorée : d'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite (u_n) converge.

2. Fixons un entier n. On constate que $1+5u_n \geqslant 5u_n$. Puisque $u_n \geqslant 0$ et que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que
$$\frac{1}{1+5u_n} \leqslant \frac{1}{5u_n}$$
Mais alors, puisque $2u_n^2 \geqslant 0$, on en déduit par produit que
$$\frac{2u_n^2}{1+5u_n} \leqslant \frac{2u_n^2}{5u_n} = \frac{2u_n}{5}$$

3. Soit Q la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$".

Initialisation : pour $n=0$, on constate que $\left(\frac{2}{5}\right)^0 u_0 = u_0$: la proposition Q_0 est donc vraie.

Hérédité : supposons la proposition Q_n vraie pour un certian entier n fixé, et démontrons que Q_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, on a donc
$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$$
En utilisant la question 2, on a alors :
$$\begin{aligned}
u_{n+1} &\leqslant \frac{2u_n}{5} \\
&\leqslant \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n u_0 \text{ par H.R.} \\
&\leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} u_0
\end{aligned}$$

Ainsi, Q_{n+1} est vraie et la proposition est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que Q_n est vraie pour tout entier n, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n u_9}$$

En utilisant la question 1, on a plus précisément, pour tout n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$$

Constatons que, puisque $-1 < \frac{2}{5} < 1$, alors $\left(\frac{2}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit donc que

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Exercice 9

Démontrons que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et que $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

La suite u est donc croissante. De même, soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

La suite v est donc décroissante. Enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Les suites u et v sont donc adjacentes. Par théorème, elles sont donc convergente et ont la même limite.

> **Remarque**
> Leur limite commune est $\frac{\pi^2}{6}$, mais la démonstration n'est pas aisée.

Exercice 10

1. La fonction f est définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$. Pour tout $x > -1$, on a

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - x1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Pour tout réel $x > 1$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	$+$	$+$
Variations de f	‖	0 ↗	$\frac{1}{2}$ ↗	

Par croissance de f sur $]-1;+\infty[$, on constate alors que si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors

$$0 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) = \frac{1}{2} \leqslant 1.$$

> **Remarque**
> On dit que l'invervalle $[0;1]$ est **stable** par f.

2. Soit P la proposition définie pour tout entier naturel n par P_n : "$u_n \in [0;1]$".
Initialisation : pour $n = 0$, on constate que $u_0 = 1 \in [0;1]$: P_0 est vraie.
Hérédité : supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé. On a alors, par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0;1]$. Mais alors, d'après la question 1, $f(u_n) \in [0;1]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0;1]$. Ainsi, P_{n+1} est vraie et la proposition est héréditaire.
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout n, et ainsi

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0;1]$$

3. Soit $x \in]-1;+\infty[$. On a

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x}{x+1} - x \\ &= \frac{x - x(x+1)}{x+1} = \frac{-x^2}{x+1} \end{aligned}$$

Puisque $x \in]-1;+\infty[$, $x+1 > 0$ et $-x^2 < 0$. Ainsi, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f(x) - x < 0$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2, $u_n \in [0;1]$. On peut donc appliquer la résultat précédent à $x = u_n \in]-1;+\infty[$ et on obtient $f(u_n) - u_n < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n < 0$. Ceci étant valable pour tout entier n, on en déduit que la suite (u_n) est (strictement) décroissante.
5. D'après la question 4, la suite (u_n) est décroissante. Mais d'après la question 2, elle est bornée, et donc minorée (par 0). D'après le théorème de la limite monotone, on peut donc dire que la suite (u_n) converge.
6. La suite (u_n) converge. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. D'après ce qui précède, $\ell \geqslant 0$. Mais alors, par somme et quotient de limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_n+1} = \frac{\ell}{\ell+1}$$

De plus, ℓ est également la limite de la suite (u_{n+1}). En utilisant la relation de définition et en passant à la limite, on en déduit

$$\ell = \frac{\ell}{\ell+1}$$

c'est-à-dire $\ell(\ell+1) = \ell$, soit encore $\ell^2 = 0$, et finalement $\ell = 0$.
Bilan : la suite (u_n) converge verss 0.

> **Remarque**
> Le raisonnement précédent, qu'on précisera plus tard dans l'année, s'appelle le **théorème du point fixe** et dit (sous condition sur f) que si $u_{n+1} = f(u_n)$ et que la suite (u_n) converge, alors la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire est un **point fixe** de f.

Exercice 11

1. Pour tout réel x, on constate que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x^2-3x)+3 \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)+3 \\ &= \frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{8}+3 \\ &= \frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{8} \end{aligned}$$

2. On utilise la relation de la question 1. Soit $x\in[2;3]$. Alors

$$\begin{aligned} 2\leqslant x\leqslant 3 &\Longrightarrow \frac{1}{2}\leqslant x-\frac{3}{2}\leqslant\frac{3}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{4}\leqslant\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\leqslant\frac{9}{4} \text{ car la fonction racine est croissante sur } \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{8}\leqslant\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\leqslant\frac{9}{8} \\ &\Longrightarrow 2=\frac{16}{8}\leqslant\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{8}\leqslant\frac{24}{8}=3 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $x\in[2;3]$, $f(x)\in[2;3]$: l'intervalle $[2;3]$ est stable par f.

3. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n\in[2;3]$".

Initialisation : pour $n=0$, $u_0=2,5\in[2;3]$: P_0 est vraie.

Hérédité : supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé, et démontrons que P_{n+1} est vraie. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $u_0\in[2;3]$. Or, on a montré à la question 2 que l'intervalle $[2;3]$ est stable par f. Donc, puisque $u_n\in[2;3]$, $f(u_n)\in[2;3]$, c'est-à-dire $u_{n+1}\in[2;3]$: la proposition P_{n+1} est donc vraie et la propriété est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n\in[2;3]}$$

4. Fixons un réel x. On a alors

$$\begin{aligned} f(x)-x &= \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+3-x \\ &= \frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3 \end{aligned}$$

On dresse le tableau de signe de ce trinôme du second degré : le discriminant vaut $\Delta=\frac{1}{4}$ et les racines sont donc $x_1=2$ et $x_2=3$. On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. On utilise les questions 3 et 4. Pour tout entier n, $u_n\in[2;3]$. Or, on vient de voir que si $x\in[2;3]$, $f(x)-x\leqslant 0$. Ainsi, pour tout entier n, $f(u_n)-u_n\leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$: la $\boxed{\text{suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$.

6. D'après la question 5, la suite (u_n) est décroissante. D'après la question 2, elle est minorée par 2. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.
Notons ℓ sa limite. Par somme et produit, on a

$$\frac{1}{2}u_n^2-\frac{3}{2}u_n+3\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}\ell^2-\frac{3}{2}\ell+3$$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$. En utilisant la définition de la suite u, on a

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2-\frac{3}{2}u_n+3$$

et par passage à la limite

$$\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \frac{3}{2}\ell + 3$$

c'est-à-dire $\frac{1}{2}\ell^2 - \frac{5}{2}\ell + 3 = 0$, équation déja résolue dans la question 4, et qui admet comme solutions 2 et 3. Or, la suite (u_n) est décroissante, et $u_0 = 2,5$; elle ne peut donc pas converger vers 3. On en déduit finalement que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$$

Exercice 12

1. Soit P_n la proposition définie pour tout entier n par "$0 \leqslant u_n \leqslant 3$".
- Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 3$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$: P_0 est vraie.
- Hérédité : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie :

$$\begin{array}{rll} & 0 \leqslant u_n \leqslant 3 & \\ \text{donc} & 1 \leqslant u_n + 1 \leqslant 4 & \\ \text{et donc} & \frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{u_n+1} \geqslant \frac{1}{4} & \text{car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{ainsi} & 2 \geqslant u_{n+1} \geqslant \frac{1}{2} & \text{soit } 3 \geqslant u_n \geqslant 0 \end{array}$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie.
Bilan : d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
2.
(a) Puisque pour tout entier n, $0 \leqslant u_n$ alors $u_n + 2 \geqslant 2 \neq 0$. Ainsi (v_n) est bien définie.
(b) Montrons que la suite (v_n) est géométrique :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2}{1+u_n} - 1}{\frac{2}{1+u_n} + 2} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = \frac{-1}{2}v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique, de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{2}{5}$.
(c) On a donc, pour tout entier n, $v_n = \dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
3. Puisque pour tout entier n, on a $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$, alors

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1}$$

Ainsi, pour tout entier n,

$$u_n = \frac{-1 - \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

Puisque $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, par théorème, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Par somme et quotient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1}{-1} = 1$$

Exercice 13

1.
(a) Pour tout entier n, on a

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 9v_n - (4u_n + 8v_n)}{12} = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{w_n}{12}$$

La suite (w_n) est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 12 - 1 = 11$.
(b) Ainsi, pour tout entier n, on a $w_n = 11\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.
(c) Puisque $11 > 0$ et $\frac{1}{12} > 0$, pour tout entier n, $w_n > 0$.
(d) Puisque $-1 < \dfrac{1}{12} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$. Par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

2. Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\frac{2v_n-2u_n}{3}=\frac{2w_n}{3}$$

Puisque pour tout entier n, $w_n>0$, alors $u_{n+1}-u_n>0$: la suite u est bien croissante.
De même,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\frac{u_n-v_n}{4}=\frac{-w_n}{4}$$

Ainsi, puisque pour tout n, $w_n>0$, alors $v_{n+1}-v_n<0$: la suite v est décroissante.
3. D'après les questions 1d) et 2, on vient de démontrer que la suite u est croissante, v est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$. Les suites u et v sont bien adjacentes.
Par théorème, les deux suites adjacentes convergent, et convergent vers la même limite que l'on note ℓ.
4.
(a) Pour tout n, on a

$$t_{n+1}=3u_{n+1}+8v_{n+1}=u_n+2v_n+2(u_n+3v_n)=3u_n+8v_n=t_n$$

La suite (t_n) est donc constante.
(b) La suite étant constante, pour tout entier n, $t_n=t_0=99$. Par somme et produit, puisque ℓ désigne la limite de (u_n) et (v_n), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} t_n=3\ell+8\ell=11\ell$$

Ainsi, puisque la suite (t_n) est constante, on a $11\ell=99$ et donc $\ell=9$.
Bilan :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n=9}$$

Exercice 14

1.
(a) Pour tout entier n, on a

$$w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}-\frac{u_n+5v_n}{6}=\frac{6u_n+24v_n-(5u_n+25v_n)}{30}=\frac{u_n-v_n}{30}=\frac{w_n}{30}$$

La suite (w_n) est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{30}$ et de premier terme $w_0=u_0-v_0=20-1=19$. Puisque $w_0>0$ et $\frac{1}{30}>0$, la suite (w_n) est donc à terme strictement positifs.
(b) Ainsi, pour tout entier n, on a

$$w_n=19\left(\frac{1}{30}\right)^n$$

Puisque $-1<\dfrac{1}{30}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{30}\right)^n=0$. Par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n=0$$

2. Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+4v_n}{5}-u_n=\frac{4v_n-4u_n}{5}=-\frac{4w_n}{5}$$

Puisque pour tout entier n, $w_n>0$, alors $u_{n+1}-u_n<0$: la suite u est bien décroissante.
De même,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+5v_n}{6}-v_n=\frac{u_n-v_n}{6}=\frac{w_n}{6}$$

Ainsi, puisque pour tout n, $w_n>0$, alors $v_{n+1}-v_n>0$: la suite v est croissante.
3. D'après les questions 1b) et 2, on vient de démontrer que la suite u est décroissante, v est croissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$. Les suites u et v sont bien adjacentes.
Par théorème, les deux suites adjacentes convergent, et convergent vers la même limite que l'on note ℓ.
4.
(a) Pour tout n, on a

$$t_{n+1}=5u_{n+1}+24v_{n+1}=u_n+4v_n+4(u_n+5v_n)=5u_n+24v_n=t_n$$

La suite (t_n) est donc constante.

(b) La suite étant constante, pour tout entier n, $t_n = t_0 = 124$. Par somme et produit, puisque ℓ désigne la limite de (u_n) et (v_n), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 5\ell + 24\ell = 29\ell$$

Ainsi, puisque la suite (t_n) est constante, on a $29\ell = 124$ et donc $\ell = \frac{124}{29}$.
Bilan :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{124}{29}}$$

Enfin, puisque $u_n - v_n = w_n$ et $5u_n + 24v_n = t_n$, on obtient après résolution et pour tout entier n, que

$$u_n = \frac{t_n + 24w_n}{29} = \frac{124 + 456\left(\frac{1}{30}\right)^n}{29} \text{ et } v_n = \frac{t_n - 5w_n}{29} = \frac{124 - 95\left(\frac{1}{30}\right)^n}{29}$$

Exercice 15

Chapitre 8

Systèmes linéaires

Résumé

L'objectif de ce chapitre est d'introduire rigoureusement la notion de système linéaire, déjà vue lors des années antérieures. On y voit, entre autre, la méthode de résolution du pivot de Gauss.

> *« Pour comprendre un système, il faut… s'en extraire. »*
>
> Bernard Werber (1961 –). *L'empire des anges*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir résoudre un système simple par substitution . . . . □

② Savoir appliquer la méthode du pivot de Gauss-Jordan pour transformer un système en un système triangulaire . . . . □

③ Résoudre un système ayant une infinité de solutions avec un (ou plusieurs) paramètres . . . . □

④ Savoir déterminer le rang d'un système . . . . □

⑤ Savoir résoudre un système ayant un paramètre . . . . □

I. Définitions et propriétés

1. Définitions

Définition 8.1.

Soient n et p deux nombres entiers non nuls. On appelle **système d'équations linéaires** de n équations à p inconnus (ou système n fois p, $n \times p$) un système de la forme

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

où les $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et les $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des nombres réels, et $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des inconnues.

Le nombres a_{ij} est le **coefficient** de la $j^{\text{ème}}$ inconnue x_j dans la $i^{\text{ème}}$ équations (L_i).

Remarque

Si $n = p$ on dit que le système (S) est **carré d'ordre** n.

Exemple 8.1

Le système

$$(S_1)\quad \left\{\begin{array}{cccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 1 & (L_1) \\ 3x_1 & + & x_2 & = & -2 & (L_2) \end{array}\right.$$

est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues. C'est ainsi un système carré d'ordre 2.

Le système

$$(S_2)\quad \left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 & (L_1) \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 3 & (L_2) \end{array}\right.$$

est un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues.

2. Propriétés

Définition 8.2.

Soit

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

- **Résoudre** le système (S), c'est trouver toutes les p-listes $(x_1, \dots, x_p)$ de réels vérifiant les n équations $(L_1, \dots, L_n)$.
- On dit qu'un système est **incompatible** s'il n'admet pas de solution.

Remarque

Dans le cas où $p < n$, il y a plus d'équations que d'inconnues. Soit certaines équations sont redondantes (et on peut donc les supprimer), soit le système est incompatible.
Dans la suite, on ne s'intéressera qu'au cas $n \leqslant p$.

Définition 8.3.

Deux systèmes (S) et (S′) sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions. On notera $(S) \sim (S')$ pour signifier que (S) et (S′) sont équivalents, plutôt que $(S) \Longleftrightarrow (S')$.

Exemple 8.2

Les systèmes $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ sont équivalents.

Définition 8.4.

Soit

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Le système (S) est dit **homogène** (ou **sans second membre**) si $b_1 = \ldots = b_n = 0$. Dans ce cas, la p-liste $(0, \ldots, 0)$ est toujours solution de (S).

On appelle **système homogène associé** à (S) le système obtenu à partir de (S) en remplaçant tous les nombres b_i par 0.

Exemple 8.3

Le système homogène associé à (S) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ est (S_0) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$.

3. Résolution par substitution

Méthode

La méthode par résolution consiste à écrire une des inconnues (par exemple x_1) en fonction des autres $(x_2, x_3, \ldots)$, puis à remplacer cette inconnue x_1 dans toutes les autres équations en fonction de $x_2, x_3, \ldots$. Cette méthode est efficace lorsqu'il y a peu d'inconnues ou d'équations.

Exemple 8.4

Résoudre le système suivant :

$$(S_1) \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 & (L_1) \\ -3x_1 + x_2 = 2 & (L_2) \end{cases}$$

Solution

En utilisant (L_2), on peut exprimer x_2 en fonction de x_1 : $x_2 = 3x_1 + 2$. On remplace alors cette égalité dans (L_1) pour en déduire la valeur de x_1. On obtiendra enfin la valeur de x_2 :

$$\begin{aligned} (S_1) \quad & \sim \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_2 = 3x_1 + 2 \end{cases} \\ & \sim \begin{cases} 2x_1 - 3(3x_1 + 2) = 1 \\ x_2 = 3x_1 + 2 \end{cases} \\ & \sim \begin{cases} -7x_1 = 7 \\ x_2 = 3x_1 + 2 \end{cases} \\ & \sim \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, le système admet une unique solution : $\{(-1; -1)\}$.

4. Systèmes triangulaires

Les système triangulaires sont les plus simples des systèmes, puisqu'ils se résolvent très facilement.

Définition 8.5.

On dit qu'un système (S) $n \times p$ est **triangulaire** si

$$\forall\, i \in \{1;\dots;n\}, \forall\, j \in \{1;\dots;p\}\ \ i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

Ainsi, si $n < p$, le système est de la forme

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{ccccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & (\mathrm{L}_1) \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & (\mathrm{L}_2) \\ & & & & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & & & a_{nn}x_n & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n & (\mathrm{L}_n) \end{array} \right.$$

Si $n = p$, on a alors le système suivant :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{cccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 & (\mathrm{L}_1) \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_n & (\mathrm{L}_2) \\ & & & & & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n & (\mathrm{L}_n) \end{array} \right.$$

Les coefficients diagonaux $a_{11}, \dots, a_{nn}$ sont appelés les **pivots** du système.

Remarque

Lorsque $n = p$ et que tous les pivots a_{ii} (pour $i \in \{1;\dots;n\}$) sont non nuls, le système se résout par substitutions successives, de (L_n) à (L_1). Il y a alors une **unique n-liste solution**.

Méthode

Dans le cas $n < p$, il y a une (ou plusieurs) inconnue(s) en trop. On choisit alors ces inconnues comme inconnues auxiliaire, et on résout comme pour la cas $n = p$.

Exemple 8.5

Résoudre le système suivant :

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & -1 \\ & & 2y & - & 4z & = & 2 \end{array} \right.$$

Solution

Il y a 3 inconnues, pour deux équations. Exprimons x et y en fonction de z :

$$(\mathrm{S}) \quad \sim \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & -1-3z \\ & & 2y & = & 2+4z \end{array} \right. \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{ll} x = & -\frac{1}{2}z \\ y = & 1+2z \end{array} \right. \quad z \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \left\{ \left(-\dfrac{1}{2}z ; 1+2z ; z \right),\ z \in \mathbb{R} \right\}$.

Remarque

Bien évidemment, si on choisit une autre inconnue auxiliaire, le résultat ne sera pas sous la même forme, mais désignera bien le même ensemble de solutions.

II. Pivot de Gauss-Jordan

1. Exemple

On souhaite résoudre le système suivant

$$(\mathrm{S})\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 & \mathrm{L}_1\\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & 2 & \mathrm{L}_2\\ -x & + & y & + & 3z & = & 1 & \mathrm{L}_3\end{array}\right.$$

Pour faire cela, on va utiliser différentes opérations dites élémentaires, qui transforment le système (S) en un système équivalent, mais triangulaire cette fois-ci. Il ne restera alors plus qu'à résoudre le système triangulaire associé.

Ici :

$$\begin{array}{rl}(\mathrm{S}) & \sim \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 & \mathrm{L}_1 \text{ ligne pivot}\\ & - & 6y & - & 2z & = & 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1\\ & & 3y & + & 5z & = & 2 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1\end{array}\right.\\ & \sim \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 & \mathrm{L}_1\\ & - & 6y & - & 2z & = & 0 & \mathrm{L}_2 \text{ ligne pivot}\\ & & & & 8z & = & 4 & \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2\end{array}\right.\end{array}$$

On obtient ainsi un système triangulaire, qu'on résout :

$$(\mathrm{S})\quad \sim \left\{\begin{array}{rr} x = & \frac{1}{3}\\ y = & -\frac{1}{6}\\ z = & \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Ainsi, la solution de (S) est $\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2. Opérations élémentaires

Définition 8.6.

Soit (S) un système $n \times p$. On appelle **opération élémentaire** l'une des trois opérations suivantes :

- $\mathrm{L}_i \longleftrightarrow \mathrm{L}_j$: **échange** de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i et de la $j^{\text{ème}}$ ligne L_j.
- $\mathrm{L}_i \leftarrow a\mathrm{L}_i$ où $a \neq 0$: on **remplace** la $i^{\text{ème}}$ ligne par elle même **multipliée** par un nombre non nul a.
  Utilité : lorsqu'on a des fractions dans la ligne L_i, cela permet d'enlever les dénominateurs.
- $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + b\mathrm{L}_j$ où b est quelconque : on **remplace** la $i^{\text{ème}}$ ligne par la **somme** d'elle même et d'un multiple d'une autre ligne.
  Utilité : permet d'éliminer une inconnue.

Remarque

En combinant la deuxième et la troisième opérations élémentaires, on obtient l'opération $\mathrm{L}_i \leftarrow a\mathrm{L}_i + b\mathrm{L}_j$ où a est non nul, et b est quelconque.

Théorème 8.1.

Tout système obtenu à partir d'un système (S) en transformant l'une de ses équations par une opération élémentaire est équivalent à (S), et a donc le même ensemble de solutions.

Remarque

Ainsi, en combinant différentes opérations élémentaires, on ne change pas l'ensemble de solutions du système.

3. Pivot de Gauss-Jordan

Méthode

En utilisant les opérations élémentaires comme dans l'exemple, on va résoudre un système (S) par la méthode du pivot de Gauss-Jordan :

1. On élimine successivement des inconnues via les opérations élémentaires, pour transformer le système initial en un système triangulaire ;
2. On résout le système triangulaire par substitutions.

Exemple 8.6

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss. Le nombre de solutions est indiqué.

- (Une unique solution)

$$(S_1)\quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & (L_1)\\ 3x + y + 2z = 1 & (L_2)\\ 2x + 3y + z = 0 & (L_3)\end{cases}$$

- (Une infinité de solution)

$$(S_2)\quad \begin{cases} -y + 2z + 3t = 0 & (L_1)\\ 2x + 2y - z = 0 & (L_2)\\ 3x - y + 2z - 2t = 0 & (L_3)\\ 5x + y + z - 2t = 0 & (L_4)\end{cases}$$

- (Aucune solution)

$$(S_3)\quad \begin{cases} -y + 2z + 3t = 0 & (L_1)\\ 2x + 2y - z = 0 & (L_2)\\ 3x - y + 2z - 2t = 0 & (L_3)\\ 5x + y + z - 2t = 1 & (L_4)\end{cases}$$

Solution

On utilise la méthode du Pivot de Gauss, en n'oubliant pas d'indiquer les opérations effectuées.

- On applique les opérations élémentaires pour obtenir un système triangulaire :

$$(S_1)\ \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & L_1 \text{ ligne pivot}\\ -5y - 7z = -5 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1\\ -y - 5z = -4 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & L_1\\ -5y - 7z = -5 & L_2 \text{ ligne pivot}\\ -18z = -15 & L_3 \leftarrow 5L_3 - L_2\end{cases}$$

Le système est triangulaire avec tous ses pivots non nuls : on remonte celui-ci pour trouver une unique solution.

$$(S_1)\ \sim \begin{cases} x = -\frac{1}{6}\\ y = -\frac{1}{6}\\ z = \frac{5}{6}\end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)\right\}}$$

- On n'hésite pas à échanger des lignes pour avoir une ligne pivot pratique.

$$(S_2) \sim \left\{\begin{array}{rrrrcll} 2x & +2y & -z & & = & 0 & L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ & -y & +2z & +3t & = & 0 & \\ 3x & -y & +2z & -2t & = & 0 & \\ 5x & +y & +z & -2t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rrrrcll} 2x & +2y & -z & & = & 0 & L_1 \text{ ligne pivot} \\ & -y & +2z & +3t & = & 0 & L_2 \\ & -8y & +7z & -4t & = & 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \\ & -8y & +7z & -4t & = & 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1 \end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes sont les mêmes. On en élimine une, et on continue la méthode du pivot de Gauss. On peut ajouter une ligne pour rappeler l'inconnue auxiliaire (ici, la ligne L_4), mais ce n'est pas nécessaire :

$$(S_2) \sim \left\{\begin{array}{rrrrcll} 2x & +2y & -z & & = & 0 & L_1 \\ & -y & +2z & +3t & = & 0 & L_2 \text{ ligne pivot} \\ & & -9z & -28t & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2 \\ & & & t & = & t & L_4 \end{array}\right.$$

On obtient un système triangulaire, qu'on résout en utilisant une variable auxiliaire (par exemple ici, t) :

$$(S_2) \sim \left\{\begin{array}{rl} x = & \frac{15}{9}t \\ y = & -\frac{29}{9}t \\ z = & -\frac{28}{9}t \\ t = & t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{5}{3}t; -\frac{29}{9}t; -\frac{28}{9}t; t\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}}$$

- Le système est le même que précédemment, excepté la dernière ligne. Par les deux mêmes opérations, on obtient :

$$(S_3) \sim \left\{\begin{array}{rrrrcll} 2x & +2y & -z & & = & 0 & L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ & -y & +2z & +3t & = & 0 & \\ 3x & -y & +2z & -2t & = & 0 & \\ 5x & +y & +z & -2t & = & 1 & \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rrrrcll} 2x & +2y & -z & & = & 0 & L_1 \text{ ligne pivot} \\ & -y & +2z & +3t & = & 0 & L_2 \\ & -8y & +7z & -4t & = & 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \\ & -8y & +7z & -4t & = & 2 & L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1 \end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes étant incompatibles, le système est incompatible. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{S} = \varnothing}$$

Remarque

Un système linéaire admet :

- soit aucune solution (il est donc incompatible) ;
- soit une unique solution ;
- soit une infinité de solutions (quand il y a une (ou des) inconnues auxiliaires)

4. Rang d'un système

Définition 8.7.

Soit (S) un système. On appelle **rang** d'un système, que l'on note rg(S), le nombre de pivot non nul qu'on obtient après avoir appliqué la méthode du pivot de Gauss, ou encore le nombre d'équations non nulles.

Exemple 8.7

Soit (S) le système $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$. Appliquons la méthode du pivot :

$$(S) \sim \begin{cases} x + 2y + z = 0 & L_1 \text{ ligne pivot} \\ \quad - 5y - 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad 5y + 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + z = 0 & L_1 \\ \quad - 5y - 3z = 0 & L_2 \text{ ligne pivot} \\ \quad 0z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Le système est triangulaire, et il y a 2 pivots non nuls (ou 2 équations non nulles). Ainsi, le rang de (S) est de 2.

III. Systèmes de Cramer

1. Définition

Définition 8.8.

Un système carré d'ordre n est dit **de Cramer** s'il possède une unique n-liste solution.

Conséquence 8.2.

Un système homogène (S) de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si son unique solution est la n-liste $(0, 0, \ldots, 0)$.

2. Systèmes de Cramer et pivot de Gauss

Théorème 8.3.

Un système (S) carré d'ordre n est de Cramer si et seulement si la méthode du pivot de Gauss fait apparaitre n pivots successifs non-nuls.

Exemple 8.8

Montrer que le système suivant est de Cramer

$$(S) \quad \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Solution
En appliquant la méthode du pivot de Gauss :

$$
\begin{aligned}
(S) \quad & \sim \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & y & - & 2z & = & 0 \\
 & - & 3y & + & 5z & = & 0 \\
 & - & y & + & 2z & = & 0
\end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
& \sim \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & y & - & 2z & = & 0 \\
 & - & y & + & 2z & = & 0 \\
 & - & 3y & + & 5z & = & 0
\end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_3 \longleftrightarrow L_2 \\ \\ \end{array} \\
& \sim \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & y & - & 2z & = & 0 \\
 & - & y & + & 2z & = & 0 \\
 & & & - & z & = & 0
\end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}
\end{aligned}
$$

On a ainsi fait apparaitre les pivots $1, -1$ et -1 qui sont tous les trois non nuls : le système (S) est bien de Cramer.

3. Système de Cramer et système homogène associé

Théorème 8.4.
Un système (S) est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est aussi de Cramer.

Démonstration
En effet, le choix des pivots dans la méthode des pivots de Gauss ne dépend pas du second membre.

Méthode
Pour montrer qu'un système quelconque est de Cramer, il suffit donc de montrer que son système homogène associé l'est, ce qui est plus simple.

Exercices

Systèmes linéaires

8

Exercices

●○○ Exercice 1 Systèmes (30 min.)

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 7x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & & & + & 2z & = & -1 \\ x & - & y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -3x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & - & 3z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & - & 3t & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_6)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & 3y & & & - & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & + & 2t & = & 0 \\ & & 5y & + & 2z & & & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

●○○ Exercice 2 Systèmes avec variable (20 min.)

Résoudre les systèmes suivants, en fonction de a, b, c et d :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ x & - & y & - & z & = & b \\ -3x & + & y & + & 3z & = & c \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 3y & - & 2z & = & a \\ -4x & + & 4y & + & 3z & = & b \\ 2x & - & 2y & - & z & = & c \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 3z & = & a \\ 3x & + & y & - & 5z & = & b \\ 4x & + & 2y & - & z & = & c \\ x & & & - & 7z & = & d \end{array}\right.$$

●○○ Exercice 3 Systèmes à paramètre (10 min.)

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de λ les systèmes suivants sont de Cramer. Résoudre alors les systèmes.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcl} (2-\lambda)x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & + & (2-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x & - & y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & (2-\lambda)y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & (-3-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (2-\lambda)x & & & + & 4z & = & 0 \\ 3x & - & (4+\lambda)y & + & 12z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & (5-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (3-\lambda)x & - & 2y & & & = & 0 \\ 2x & - & \lambda y & - & 4z & = & 0 \\ & & y & - & (3+\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Corrigés

Systèmes linéaires

Corrigés des exercices

Exercice 1

On utilise la méthode du pivot de Gauss sur chacun des 6 systèmes. Lorsqu'un système va avoir une infinité de solutions, on utilise une (ou plusieurs) inconnue(s) auxiliaire(s). En général, on prendra les inconnues dans l'ordre inverse (par exemple, si les inconnues sont x_1, x_2, x_3, x_4, on essaiera de prendre dans l'ordre x_4, puis x_3,...). On obtient ici :

- Une unique solution pour S_1 : $\mathscr{S} = \{(1;-1;-1)\}$.
- Une unique solution pour S_2 : $\mathscr{S} = \{(-4;5;-3)\}$
- Une infinité de solution pour S_3, par exemple

$$\mathscr{S} = \{(1-z;1+z;z), z \in \mathbb{R}\}$$

Remarque : on peut obtenir d'autres réponses possibles selon la variable auxiliaire que l'on prend.

- Aucune solution pour S_4, qui est en effet incompatible : $\mathscr{S} = \emptyset$.
- Une unique solution pour S_5 qui est un système homogène et de Cramer : $\mathscr{S} = \{(0;0;0;0)\}$.
- Une infinité de solution pour S_6, par exemple

$$\mathscr{S} = \left\{\left(-\frac{6}{5}z - t; -\frac{2}{5}z; z; t\right), (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 2

On applique également la méthode du pivot de Gauss. La seule difficulté ici repose sur les lettres inconnues, qui compliquent les calculs. Il est cependant important de savoir résoudre un tel système, que l'on reverra en fin d'année dans les applications linéaires. On obtient ici :

- Une unique solution pour S_1 :

$$\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{a+b}{2}; \frac{-3b-c}{2}; \frac{a+2b+c}{2}\right)\right\}$$

- **Attention** : ici, selon les valeurs de a, b et c, les résultats sont différents. Il faut donc traiter **tous** les cas par **disjonction de cas**. Ainsi :
  - Si $c \neq 2a+b$, le système est incompatible : $\mathscr{S} = \emptyset$.
  - Si $c = 2a+b$, le système possède une infinité de solutions, par exemple

$$\mathscr{S} = \left\{\left(3c+b+2y; y; 2c+b\right),\ y \in \mathbb{R}\right\}$$

- On doit également traiter par disjonction de cas :
  - Si $a+b \neq c+d$, le système est incompatible : $\mathscr{S} = \emptyset$.
  - Si $a+b = c+d$, le système possède une unique solution :

$$\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{5d+7c-14a}{5}; \frac{27a-10d-11c}{5}; \frac{c-2a}{5}\right)\right\}$$

Exercice 3

Méthode

Pour déterminer si un système à paramètre est de Cramer ou non, on applique la méthode du pivot de Gauss, en essayant de ne mettre le paramètre que sur le dernier pivot. On utilise ensuite le résultat classique : un système est de Cramer si et seulement si ses pivots sont tous non nuls.

- Pour (S_1), on a

$$(S_1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & + & (2-\lambda)y & = & 0 \\ & & \left(9-(2-\lambda)^2\right)y & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, (S_1) est de Cramer si et seulement si $9-(2-\lambda)^2 \neq 0$. Or $9-(2-\lambda)^2 = (3-(2-\lambda))(3+(2-\lambda) = (1+\lambda)(5-\lambda)$. Donc (S_1) est de Cramer si et seulement si

$$\boxed{\lambda \notin \{-1;5\}}$$

- Pour (S_2), on a

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & (-3-\lambda)z & = & 0 \\ & - & \lambda y & - & \lambda z & = & 0 \\ & & & & (\lambda^2-1)z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, (S_2) est de Cramer si et seulement si $-\lambda \neq 0$ et $\lambda^2-1 \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 1$. Donc (S_2) est de Cramer si et seulement si

$$\boxed{\lambda \notin \{-1;0;1\}}$$

- Pour (S_3), on a

$$(S_3) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & (5-\lambda)z & = & 0 \\ & & (2-\lambda)y & + & (-3+3\lambda)z & = & 0 \\ & & & & (\lambda-\lambda^2)z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, (S_3) est de Cramer si et seulement si $2-\lambda \neq 0$ et $\lambda-\lambda^2 \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$. Donc (S_3) est de Cramer si et seulement si

$$\boxed{\lambda \notin \{0;1;2\}}$$

- Pour (S_4), on a

$$(S_4) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & \lambda y & - & 4z & = & 0 \\ & & y & - & (3+\lambda)z & = & 0 \\ & & & & (\lambda(\lambda^2-1))z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, (S_4) est de Cramer si et seulement si $\lambda(\lambda^2-1) \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 0$. Donc (S_4) est de Cramer si et seulement si

$$\boxed{\lambda \notin \{-1;0;1\}}$$

Chapitre 9

Dénombrement

Résumé

On introduit des notions de base sur le dénombrement : cardinal, liste, combinaison et nombres combinatoires.

> *« Il n'y a donc qu'à débrouiller le revenu de chacun, et le mettre en évidence, afin de voir comment il doit être taxé.*
> *Ce que je dois dire à cet égard suppose un dénombrement exact de toutes les personnes qui habitent le royaume. »*

Sébastien Le Prestre de Vauban (1633 – 1707). *Les Oisivetés de Monsieur de Vauban*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître les formules liées au cardinal d'un ensemble . . . . □
② Connaître la différence entre une permutation, une liste sans répétition et une liste avec répétition . □
③ Savoir dénombrer les différents ensembles précédents . . . . □
④ Connaître la définition d'une combinaison . . . . □
⑤ Savoir l'expression du nombre de combinaison $\binom{n}{p}$ . . . . □
⑥ Connaître les formules liées aux nombres de combinaisons . . . . □
⑦ Connaître la formule du binôme de Newton et savoir la démontrer . . . . □

I. Cardinaux

Définition 9.1.

Un ensemble E est dit **fini** s'il est soit vide, soit composé d'un nombre fini d'éléments distincts $e_1, \cdots, e_n$.
Dans ce cas, on appelle n son **cardinal** (i.e. son nombre d'éléments), que l'on note $|E|$ ou $\text{card}(E)$.
Par convention, $\text{card}(\varnothing) = 0$.

Remarque

Faire du dénombrement, c'est déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble, sans avoir à connaître la liste des éléments de E.

Propriété 9.1.

Soient E et A deux ensembles, tels que $A \subset E$ et E est un ensemble fini. Alors

- A est également fini;
- $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(E)$.

Si, de plus, $\text{card}(A) = \text{card}(E)$, alors $A = E$

Remarque

⚠ Si $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ sans avoir $A \subset E$ on ne peut pas conclure! Par exemple $A = \{1, 2\}$, $E = \{2, 3\}$. Alors $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ mais $A \neq E$

Théorème 9.2. Formule du Crible de Poincaré

- Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors
$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$
- Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors
$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$$
- Soient $A_1, \cdots, A_n$ des sous-ensembles d'un ensemble fini E deux à deux disjoints. Alors
$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(A_k)$$

Proposition 9.3.

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. On note $A \backslash B$ l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B.
Alors
$$\text{card}(A \backslash B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$$

Démonstration

Remarquons que les ensembles $A \backslash B$ et $A \cap B$ sont disjoints, de réunion A. D'après le théorème précédent
$$\text{card}(A) = \text{card}\left((A \cap B) \cup (A \backslash B)\right) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \backslash B)$$

Proposition 9.4.

Soient E et F deux ensembles finis. Alors
$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

Démonstration

On note n le cardinal de E et p celui de F. $E \times F$ est constitué des couples $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$. Pour chaque élément x de E, il y a p couples possibles (un couple par élément de F). Puisqu'il y a n éléments dans E, on a donc

$$\underbrace{p+\cdots+p}_{n \text{ fois}} = np \text{ éléments dans } E \times F$$

☞ *Exercices 1 et 2.*

II. Dénombrement

Dans cette partie, nous allons considérer des listes et des ensembles.

Définition 9.2.

On appelle **liste** de p éléments d'un ensemble E une suite ordonnée de p éléments.

Exemple 9.1

Ainsi, les listes $(1;2;3)$ et $(1;3;2)$ sont deux listes distinctes, et les ensembles $\{1;2;3\}$ et $\{1;3;2\}$ sont identiques.

1. Permutation

Définition 9.3.

Soit E un ensemble non vide à n éléments. On appelle **permutation** de E une liste des n éléments de E.

Exemple 9.2

Si $E = \{a; b; c\}$, alors $(a; c; b)$ et $(b; a; c)$ sont deux permutations de E.

Définition 9.4.

On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des permutations de l'ensemble E. En particulier, on note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1;\cdots;n\}$.

Théorème 9.5.

Le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments, $n \geqslant 1$, est égal à

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Démonstration

Supposons qu'on dispose de n cases, numérotées de 1 à n. Dans la case numéro 1, on peut mettre un des n éléments de E. Une fois la case 1 remplie, il ne reste que $n-1$ éléments à choisir. On en prend un qu'on met dans la case 2. Il ne reste alors que $n-2$ éléments. Et on réitère.

Exercice 9.3

On dispose de 4 personnes , à disposer sur 4 chaises. Combien y a-t-il de possibilités ?

Solution

On doit placer 4 personnes sur 4 chaises. Il faut donc faire une permutation de ces 4 personnes. Il y a donc

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ possibilités}$$

2. Liste sans répétitions de p éléments de E

Définition 9.5.

Une **liste sans répétitions** (ou **arrangement**) de p éléments de E est une liste de p éléments de E deux à deux distincts ($1 \leqslant p \leqslant n$).

Théorème 9.6.

Soit E un ensemble à n éléments, $n \geqslant 1$ et p un entier $1 \leqslant p \leqslant n$. Le nombre de listes sans répétitions de p éléments de E est égal à

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration

On utilise le même raisonnement avec les cases, sauf qu'au lieu de mettre les n éléments de E, on n'en met que p, en utilisant p cases.

Exercice 9.4

Une association ayant 20 membres souhaite élire leur bureau, composé d'un président, d'un vice-président et d'un trésorier. Combien de bureaux est-il possible de composer ?

Solution

Dans cet exercice, l'ordre est important (on ne choisit pas 3 personnes parmi les 20, on choisit très exactement un président, un vice-président et un trésorier parmi les 20). Quand l'ordre compte, on parle donc d'arrangement.

Ici, on veut donc des listes de 3 éléments d'un ensemble à 20 éléments. Il y en a donc

$$A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840 \text{ bureaux possibles}$$

Exercice 9.5

Toujours dans la même association, il y a 12 hommes et 8 femmes. On impose que le trésorier soit une femme. Combien y a-t-il de bureaux possibles ?

Solution

Le poste de trésorier est une femme. Il faut donc choisir une femme parmi les 8, soit 8 possibilités.

Pour les deux autres postes, comme ce qui précède, on a $A_{19}^2 = 19 \times 18 = 342$ bureaux possibles (sachant que la personne trésorière n'aura pas d'autres postes). Cela donne donc

$$8 \times A_{19}^2 = 2736 \text{ bureaux possibles}$$

3. Liste avec répétitions de p éléments de E

Théorème 9.7.

Soit $p \geqslant 1$. Il y a n^p listes avec répétitions de p éléments de E.

Démonstration

En effet, si on possède p cases, on peut mettre dans chacune des cases l'un des n éléments de E.

Exercice 9.6

Dans une classe de 30 élèves, on décide que chaque jour pendant 3 jours, une personne va nettoyer le tableau, sachant qu'une personne ayant déjà été de corvée peut y retourner. Combien y a-t-il de possibilités ?

Solution

Il faut donc choisir 3 élèves, avec répétition. Il y a donc

$$30^3 = 27000 \text{ possibilités}$$

III. Combinaisons

1. Définition

Définition 9.6.

Soit E un ensemble à n éléments, et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une **combinaison** de p éléments de E est un sous-ensemble (ou une partie) de E qui contient p éléments.

Exemple 9.7

Si $\mathrm{E} = \{a; b; c\}$ et $p = 2$, les combinaisons de deux éléments de E sont les parties $\{a; b\}, \{a; c\}$ et $\{b; c\}$.

Notation

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$ et on lit "p parmi n". On note aussi C_n^p.

Exemple 9.8

D'après l'exemple précédent, $\binom{3}{2} = 3$.

Remarque

Pour tout entier n, on obtient rapidement :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

☞ *Exercice 3.*

2. Nombre de combinaisons

Théorème 9.8.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Pour $p > n$, on a $\binom{n}{p} = 0$.

Démonstration

- Pour $p = 0$, il n'existe qu'une seule partie sans élément : la partie vide. Donc

$$\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0!(n-0)!}$$

- Supposons $p>0$. Prenons une partie F de p éléments de E. On constate qu'il y a $p!$ permutations de F, et une permutation de F est une liste sans répétition de p éléments.
Si on fait de même avec toutes les parties de E à p éléments, on va décrire toutes les listes sans répétition de p éléments, et une seule fois (deux parties distinctes de E vont engendrer des listes distinctes nécessairement). On a donc

$$\text{(nb de partie à } p \text{ éléments de E)} \times p! = \text{nb de listes sans répétition de } p \text{ éléments}$$

soit

$$\binom{n}{p} \times p! = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 9.9

Le nombre de partie à 4 éléments d'un ensemble à 21 éléments est

$$\binom{21}{4} = \frac{21!}{4!(21-4)!} = 5985$$

Exercice 9.10

Dans une association de 12 hommes et 8 femmes, on crée un comité Hygiène et Sécurité, composé de 3 personnes.

- Combien y a-t-il de comités possibles ?
- Combien y a-t-il de comités sachant qu'une des personnes doit être une femme ?

Solution

- Il nous faut choisir (sans ordre) 3 personnes parmi 20. Il y a donc

$$\binom{20}{3} = 1140 \text{ comités possibles}$$

- On veut au moins une femme.

⚠ Il n'y a pas $\binom{8}{1}\binom{19}{2}$ comités possibles avec au moins une femme, car en comptant ainsi, certains comités sont comptés plusieurs fois !

Notons A l'ensemble des comités ayant au moins une femme, B l'ensemble des comités n'ayant que des hommes, et C l'ensemble de tous les comités possibles. Alors $A \cup B = C$ et $A \cap B = \varnothing$. Or

$$\text{card}(B) = \binom{12}{3} = 220 \text{ comités}$$

$$\text{card}(C) = \binom{20}{3} = 1140 \text{ comités}$$

Donc

$$\text{card}(A) = \text{card}(C) - \text{card}(B) = 920 \text{ comités}$$

Méthode

Dans un exercice, il faut déterminer en premier lieu si on va devoir utiliser les listes sans répétition, avec répétition ou les combinaisons. On retiendra que :

- si on s'intéresse à un choix ordonné (par exemple, un classement à un jeu, ou bien le choix de différents postes dans une association), on utilisera les *listes*, sans répétition (cas général où une personne ne peut pas être à deux endroits en même temps), ou avec répétition (si au contraire on l'accepte).
- si on s'intéresse à la sélection **simultanée** (donc on ne tient pas compte de l'ordre), on utilisera *les combinaisons*.

☞ *Exercices 4, 5, 6 et 7.*

IV. Formules

1. Formules de base

Théorème 9.9.

Pour tous naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

(*Formule du triangle de Pascal*) Pour tous naturels n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$ on a

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration

- En effet,

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

- On a

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$$

En mettant au dénominateur commun $p!(n-p)!$, on a alors

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!\left[p+(n-p)\right]}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}\end{aligned}$$

Remarque

La deuxième formule nous permet d'obtenir tous les nombres combinatoires de proche en proche, dans le **Triangle de Pascal** :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Proposition 9.10.

Pour tout entier n strictement positif, et tout entier k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration

On a, en effet :

$$n\binom{n-1}{k-1} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

soit

$$n\binom{n-1}{k-1} = \frac{k \times n!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k\binom{n}{k}$$

2. Formule de Vandermonde

Une première formule intéressante liant les nombres combinatoires est la formule de Vandermonde, formule que l'on va démontrer de manière purement combinatoire.

Théorème 9.11. Formule de Vandermonde

Soient m et n deux entiers strictement positifs. Pour tout entier k tel que $k \leqslant m$ et $k \leqslant n$, on a

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

Démonstration

On dispose de n jetons blancs, et m jetons noirs, tous indiscernables au toucher. On tire simultanément k jetons et on note E l'ensemble des tirages possibles.
Par définition de E, on a

$$\text{card}(\text{E}) = \binom{m+n}{k}$$

Notons alors E_j (pour j entier entre 0 et k) l'ensemble des tirages de k jetons ayant j jetons noirs. Puisqu'il y a j jetons noirs, il y a $k-j$ jetons blancs dans E_j. Ainsi

$$\text{card}(\text{E}_j) = \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

Constatons enfin que, par définition, $\text{E} = \bigcup_{j=1}^{k} \text{E}_j$ et les E_j sont deux-à-deux disjoints. Ainsi,

$$\text{card}(\text{E}) = \sum_{j=0}^{k} \text{card}(\text{E}_j)$$

ce qui donne

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

La formule de Vandermonde, nommée d'après **Alexandre-Théophile Vandermonde**, est utilisée en probabilité pour déterminer l'espérance d'une loi particulière, appelée loi **hypergéométrique**.

Exercice 9.11

En utilisant la formule de Vandermonde, déterminer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{j}^2$.

Solution

En appliquant la formule de Vandermonde au cas particulier $k = m = n$, on obtient

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j}$$

Or, $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$. Donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$$

3. Formule du binôme de Newton

Une autre formule est une relation importante qui servira avec les matrices.

Théorème 9.12. Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres réels a et b, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

soit

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration

Soit P_n la proposition “$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$” définie pour tout entier $n \geqslant 1$ (*le résultat est également vrai pour* $n=0$).

- Pour $n=1$ le résultat est vrai car $(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0}a + \binom{0}{1}b$.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$, et calculons $(a+b)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\ &= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \cdots + \binom{n}{p}a^{n-p+1}b^p + \cdots + \binom{n}{n}ab^n \\ &\qquad + \binom{n}{0}a^n b + \cdots + \binom{n}{p-1}a^{n-p+1}b^p + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}\end{aligned}$$

Or pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ (formule du triangle de Pascal), donc

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{p}a^{n-p+1}b^p + \cdots \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

ce qui donne le résultat annoncé, puisque $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$.

Exercice 9.12

Calculer

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Solution

- Prenons $a=b=1$ et appliquons la formule du binôme de Newton :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Donc $A_n = (1+1)^n = 2^n$.

- Prenons $a = 2$ et $b = 1$ et appliquons la formule du binôme de Newton :

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Donc $\mathrm{B}_n = (1+2)^n = 3^n$.

☞ *Exercice 8.*

Exercices

Dénombrement

9

Exercices

Dénombrement

●○○ **Exercice 1 Dénombrement** (10 min.)

On possède un jeu de 32 cartes. On note A l'ensemble "les deux cartes tirées sont rouges", B l'ensemble "les deux cartes tirées sont un valet et un dix" et C l'ensemble "les deux cartes tirées sont un personnage".
Que représente $\overline{A}, A \cap B \cap \overline{C}$ et $(A \cap B) \cap C$?
Ecrire à l'aide des ensembles A, B et C les ensembles F : "les deux cartes tirées sont des personnages et ne sont pas toutes les deux rouges", et G : "on obtient au plus un personnage rouge".

●○○ **Exercice 2 Dénombrement** (5 min.)

Parmi 40 étudiants, 8 connaissent le portugais, 15 le chinois, et 9 le russe. D'autres part, 4 parlent chinois et russe, 5 chinois et portugais, 2 russe et portugais et 2 parlent les 3 langues. Combien d'étudiants ne connaissent aucune de ces trois langues ?

●○○ **Exercice 3 Arrangement et combinaison** (5 min.)

Soit $E = \{1; 2; 3; 4\}$. Ecrire

1. Les combinaisons de 3 éléments de E.
2. Les arrangements de 3 éléments de E.

●○○ **Exercice 4 Dénombrement** (5 min.)

Au menu d'un restaurant, il y a 3 entrées 2 plats et 4 desserts possibles. Combien de menus (une entrée, un plat, un dessert) sont possibles ?

●○○ **Exercice 5 Anagramme** (10 min.)

Un anagramme est un mot (ou une succession de lettres) formés des mêmes lettres, dans un ordre différent. Combien d'anagrammes peut on former avec le mot GLACE ? le mot ELEVE ?

●○○ **Exercice 6 Anagramme** (10 min.)

Un sac possède 5 paires de chaussettes noires, 2 paires de chaussettes vertes et 3 paires de chaussettes rouges. On choisit au hasard deux chaussettes simultanément.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ? de résultats possibles ?
2. Combien de tirages amènent deux chaussettes vertes ? deux chaussettes de même couleur ?

●○○ **Exercice 7 Anagramme** (10 min.)

Sept personnes sont debout, et on possède trois chaises. De combien de manière peut on asseoir les gens ? On dispose ensuite de trois chaises et deux bancs d'une place. Même question, en considérant qu'un banc et une chaise sont deux objets différents.

●○○ **Exercice 8 Formule du binôme** (10 min.)

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$$

Dénombrement en probabilité

●●○ Exercice 9 Tirage sans remise, tirage avec remise (15 min.)

Une urne contient 9 boules distinctes et indiscernables au toucher : 2 boules rouges, 3 boules vertes et 4 boules blanches. On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité
   (a) D'obtenir au moins une boule rouge.
   (b) D'obtenir des boules de la même couleur.
   (c) D'obtenir une boule rouge et une boule verte.
3. Reprendre les questions précédentes dans le cas d'un tirage simultané, et dans le cas d'un tirage successif avec remise.

●○○ Exercice 10 Des cartes (10 min.)

On tire, au hasard, 3 cartes dans un jeu de 32 cartes classique.

1. Quel est l'univers ? Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 cartes de même hauteur ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 cartes exactement de la même couleur ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 ou 3 cartes de même couleur ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un coeur ou un roi ?

●●○ Exercice 11 Paradoxe des anniversaires (10 min.)

On considère une classe de 25 élèves. On suppose qu'aucun élève n'est né un 29 février et que, pour chaque élève, tous les autres jours de l'année ont la même probabilité d'être le jour de son anniversaire. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour ?

●●● Exercice 12 Un peu de reflexion (10 min.)

On dispose d'une urne disposant de n boules blanches et n boules noires. On tire deux par deux, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité que l'on tire deux boules de chaque couleur à chaque tirage ?

Corrigés

Dénombrement

Corrigés des exercices

Exercice 1

En français, $\overline{A}$ représente l'ensemble “au moins une des deux cartes n'est pas rouge”, $A \cap B \cap \overline{C}$ représente l'ensemble “les deux cartes sont rouges, sont un valet et un dix et au moins un des deux n'est pas un personnage”, ce qui se simplifie en “les deux cartes sont un valet rouge et un dix rouge”. Enfin $A \cap B \cap C$ est l'ensemble vide : en effet, il est impossible que les deux cartes soient un valet et un dix, et en même temps, deux personnages.
À l'aide des ensembles A, B et C, on a

$$F = C \cap \overline{A} \text{ et } G = \underbrace{A \cap \overline{C}}_{\text{si les deux sont rouges, on a au plus un personnage}} \cup \overline{A}$$

Exercice 2

Notons P l'ensemble des élèves parlant portugais, C ceux parlant chinois, et R ceux parlant russe. Notons A l'ensemble des élèves ne parlant aucunes des trois langues. Alors $\overline{A}$ désigne l'ensemble des élèves parlant au moins une langue. Ainsi

$$\overline{A} = P \cup C \cup R$$

Par la formule du crible de Poincaré, on a

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(P) + \text{card}(C) + \text{card}(R) - \text{card}(P \cap C) - \text{card}(P \cap R) - \text{card}(R \cap C) + \text{card}(P \cap C \cap R)$$

soit, d'après l'énoncé

$$\text{card}(\overline{A}) = 8 + 15 + 9 - 5 - 2 - 4 + 2 = 23$$

Il y a donc $40 - 23 = 17$ élèves ne parlant aucune langue.

Exercice 3

1. Les combinaisons de 3 éléments sont les sous-ensembles de E composés de 3 éléments. Il y en a 4 :

$$\{1;2;3\},\ \{1;2;4\},\ \{1;3;4\},\ \{2;3;4\}$$

2. Les arrangements de 3 éléments sont les listes ordonnées de E composés de 3 éléments. Il y en a 24 :

$$\begin{gathered}
(1;2;3),(1;3;2),(2;1;3),(2;3;1),(3;1;2),(3;2;1)\\
(1;2;4),(1;4;2),(2;1;4),(2;4;1),(4;1;2),(4;2;1)\\
(1;3;4),(1;4;3),(3;1;4),(3;4;1),(4;1;3),(4;3;1)\\
(2;3;4),(2;4;3),(3;2;4),(3;4;2),(4;2;3),(4;3;2)
\end{gathered}$$

Exercice 4

Pour composer un menu, il faut choisir une entrée parmi les 3, un plat parmi les 2 et un dessert parmi les 4. Il y a donc

$$\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{4}{1} = 3 \times 2 \times 4 = 24 \text{ menus possibles.}$$

Exercice 5

GLACE est composé de 5 lettres distinctes. Il faut placer 5 lettres distinctes à 5 places : il s'agit donc d'une permutation de l'ensemble des lettres $\{G, L, A, C, E\}$. Il y a donc $5! = 120$ anagrammes possibles.

Pour le mot ELEVE, il y a 3 lettres E et 2 autres lettres. On place d'abord les 3 lettres sur 5 places possibles. Il reste alors 2 lettres à poser dans les 2 places restantes. Cela donne donc

$$\binom{5}{3} \times 2 = 20 \text{ anagrammes possibles.}$$

Exercice 6

1. Il y a $\binom{20}{2}$ tirages possibles, mais pas $\binom{20}{2}$ résultats possibles. En effet, on compte dans ce dénombrement plusieurs fois le tirage "(rouge,rouge)" par exemple.
Il y a en réalité 6 résultats possibles : (noire, noire), (noire, rouge), (noire, verte), (rouge, verte), (rouge, rouge) et (verte, verte).
2. On tire deux chaussettes. Pour avoir deux chaussettes vertes, il faut donc choisir les deux chaussettes vertes parmi les 4 présentes dans le sac : il y a donc $\binom{4}{2} = 6$ tirages.
Pour avoir deux chaussettes rouges, il faut tirer deux chaussettes rouges parmi les 6 chaussettes rouges : il y a donc $\binom{6}{2} = 15$ tirages.
Enfin, pour avoir deux chaussettes noires, il y a de la même manière $\binom{10}{2} = 45$ tirages.
Il y a donc au total $6 + 15 + 45 = 66$ tirages amenant deux chaussettes de la même couleur.

Exercice 7

Dans cet exercice, tout dépend si on tient compte de l'ordre des chaises, ou non.

- Si non :

Dans le premier cas, on dispose de 7 personnes à placer sur 3 chaises. Il faut donc choisir 3 personnes pour les 3 chaises, soit $\binom{7}{3} = 35$ placements possibles.
Dans le deuxième cas, on place trois personnes sur les 7 sur les chaises, et 2 personnes parmi les 4 restants, soit

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} = 210 \text{ placements.}$$

- Si oui :

Dans le premier cas, il y a 7 possibilités pour la première chaise, 6 pour la deuxième, et 5 pour la troisième, soit $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ placements possibles.
Dans le deuxième cas, il y a 7 possibilités pour la première chaise, 6 pour la seconde, 5 pour la troisième, 4 pour le premier banc et 3 pour le deuxième banc. Soit un total de $A_7^3 \times A_4^2 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$ placements possibles.

Exercice 8

Dans tous les cas, on utilise la formule du binôme de Newton avec des réels bien choisis :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$1 = 1^n = ((1-x)+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} x^k$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Exercice 9

1. On tire au hasard, successivement et sans remise 2 boules. Puisqu'on tire successivement, l'ordre a son importance. Ainsi, l'univers de cette expérience est (en notant "B_1" pour "boule rouge au premier tirage", ...) :

$$\Omega = \{(R_1,R_2),(R_1,V_2),(V_1,R_2),(V_1,V_2),(R_1,B_2),(B_1,R_2),(B_1,B_2),(V_1,B_2),(B_1,V_2)\}$$

2. (a) Notons A l'événement "obtenir au moins une boule rouge". Alors $\bar{A}$ représente l'évènement "ne pas obtenir de boule rouge". Ainsi

$$\bar{A} = \{(V_1,V_2),(V_1,B_2),(B_1,V_2),(B_1,B_2)\}$$

et donc

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(V_1,V_2)+\mathbb{P}(V_1,B_2)+\mathbb{P}(B_1,V_2)+\mathbb{P}(B_1,B_2) = \frac{3}{9}\frac{2}{8}+\frac{3}{9}\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\frac{3}{8}+\frac{4}{9}\frac{3}{8} = \frac{42}{72} = \frac{7}{12}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(A) = 1-\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{5}{12}$.

(b) Notons C l'événement "obtenir deux boules de la même couleur'. Alors

$$C = \{(V_1,V_2),(B_1,B_2),(R_1,R_2)\}$$

et donc

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(V_1,V_2)+\mathbb{P}(B_1,B_2)+\mathbb{P}(R_1,R_2) = \frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{4}{9}\frac{3}{8}+\frac{2}{9}\frac{1}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

(c) Enfin, notons D l'événement "obtenir une boule rouge et une boule verte". Alors

$$D = \{(R_1,V_2),(V_1,R_2)\}$$

et donc

$$\mathbb{P}(D) = \frac{2}{9}\frac{3}{8}+\frac{3}{9}\frac{2}{8} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

3. Dans le cas où le tirage est simultanée, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi, l'univers est (où R désigne l'événement "obtenir une boule rouge")

$$\Omega = \{(R,R),(R,V),(R,B),(B,B),(B,V),(V,V)\}$$

En gardant les même notations :

$$\bar{A} = \{(V,V),(V,B),(B,B)\}$$

Remarquons alors que $\mathbb{P}(V,V) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}}$ car on choisit deux boules vertes parmi les 3 boules vertes, sans ordre. Donc $\mathbb{P}(V,V) = \frac{1}{12}$. En raisonnant de même, on a

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{1}{12}+\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}+\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{12}+\frac{12}{36}+\frac{1}{6} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Et donc $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{12}$ De même, on trouve

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}}+\frac{\binom{2}{2}}{\binom{9}{2}}+\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

et

$$\mathbb{P}(D) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

4. Dans le cas où on tire avec remise, l'univers est le même que sans remise :

$$\Omega = \{(R_1,R_2),(R_1,V_2),(V_1,R_2),(V_1,V_2),(R_1,B_2),(B_1,R_2),(B_1,B_2),(V_1,B_2),(B_1,V_2)\}$$

Seules changent les probabilités, car on est avec remise :

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(V_1,V_2)+\mathbb{P}(V_1,B_2)+\mathbb{P}(B_1,V_2)+\mathbb{P}(B_1,B_2) = \frac{3}{9}\frac{3}{9}+\frac{3}{9}\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\frac{3}{9}+\frac{4}{9}\frac{4}{9} = \frac{49}{81}$$

et donc $\mathbb{P}(A) = \frac{32}{81}$.

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(V_1,V_2)+\mathbb{P}(B_1,B_2)+\mathbb{P}(R_1,R_2) = \frac{3}{9}\times\frac{3}{9}+\frac{4}{9}\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\frac{2}{9} = \frac{29}{81}$$

$$\mathbb{P}(D) = \frac{2}{9}\frac{3}{9}+\frac{3}{9}\frac{2}{9} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$$

Exercice 10

1. L'univers est constitué de tous les sous-ensembles (l'ordre ne compte pas) possibles de trois cartes (par exemple, {roi de coeur, 7 de pique, 9 de carreau}). On choisit 3 cartes simultanément parmi 32 cartes, il y a donc

$$\text{card}(\Omega) = \binom{32}{3} = 4960 \text{ tirages possibles.}$$

2. On peut choisir 3 cartes 7, 3 cartes 8, ... , ou 3 as. Pour chacun de ces 8 choix, nous avons $\binom{4}{3}$ possibilités. Il y a donc

$$\underbrace{8}_{\text{nb de hauteur}} \times \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{3 cartes dans cette hauteur}} = 32 \text{ tirages possibles.}$$

Donc, la probabilité de l'événement A : "obtenir trois cartes de la même hauteur" est

$$\mathbb{P}(A) = \frac{32}{4960} = \frac{1}{155}$$

3. On veut exactement 2 cartes de la même couleur. On veut donc soit exactement 2 piques, 2 trèfles, 2 carreaux ou 2 coeurs.
Pour chacune de ces couleurs, il faut donc choisir 2 cartes de la même couleur, et la troisième d'une couleur différente. Donc pour chacune de ces 4 couleurs, on a

$$\underbrace{\binom{8}{2}}_{\text{2 de même couleurs}} \times \underbrace{\binom{24}{1}}_{\text{1 autre couleur}} = 672$$

Donc la probabilité de l'événement B : "obtenir exactement 2 cartes de la même couleur" vaut

$$\mathbb{P}(B) = \frac{4 \times \binom{8}{2} \times \binom{24}{1}}{4960} = \frac{2688}{4960} = \frac{84}{155}$$

4. L'événement C : "obtenir 2 ou 3 cartes de même couleur" peut s'écrire

$$C = B \cup D$$

avec D : "obtenir 3 cartes de la même couleur".
Par le même raisonnement qu'en 2., on a

$$\mathbb{P}(D) = \frac{\underbrace{4}_{\text{nb de couleur}} \times \underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{3 cartes de même couleur}}}{4960} = \frac{32}{4960} = \frac{1}{155}$$

Puisque $C = B \cup D$ et que B et D sont incompatibles, on a

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D) = \frac{84}{155} + \frac{1}{155} = \frac{85}{155} = \frac{17}{31}$$

5. Notons E l'événement "avoir au moins un coeur ou un roi". Alors l'événement contraire $\overline{E}$ est l'événement "n'avoir aucun coeur et aucun roi". Il y a 32 cartes, dont $32 - 8 - 3 = 21$ cartes sans coeur ni roi (attention au roi de coeur !). Ainsi, il faut choisir, pour $\overline{E}$ dans coeur parmi ces 21 cartes. Donc

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = \frac{\binom{21}{3}}{4960} = \frac{1330}{4960}$$

Et donc

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{1330}{4960} = \frac{3630}{4960}$$

Exercice 11

Pour simplifier, on note de 1 à 365 les jours, et on considère que tous les jours ont la même probabilité d'apparaitre. On note A l'événement "au moins deux élèves sont nés le même jour". On va déterminer $\mathbb{P}(\overline{A})$. $\overline{A}$ est donc l'événement "les élèves sont tous nés des jours différents".
L'univers Ω qui nous intéresse est constitué de l'ensemble des 25 jours de naissances des élèves. On a

$$\operatorname{card}(\Omega) = 365^{25}$$

L'événement $\overline{A}$ est constitué des listes de 25 jours deux à deux distincts. Par définition,

$$\operatorname{card}(\overline{A}) = A_{365}^{25}$$

Donc, par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{A_{365}^{25}}{365^{25}}$$

On trouve $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \approx 0,568699704$.

Remarque

Ce résultat est appelé *paradoxe des anniversaires*. A partir de 23 élèves, la probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour est supérieure à $\frac{1}{2}$, ce qui est contre l'intuition. A partir de 57 élèves, cette probabilité est supérieure à $0,99$.

Exercice 12

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note A_i l'événement "on tire une boule blanche et une boule noire au i^{me} lancer". On note E la probabilité recherchée. D'après la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Au tirage $i < n$, il reste $2n-2i$ boules, $n-i$ blanches, et $n-i$ noires. Ainsi, par équiprobabilité des tirages

$$\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots A_{i-1}}(A_i) = \frac{\binom{n-i}{1}\times\binom{n-i}{1}}{\binom{2n-2i}{2}} = \frac{(n-i)(n-i)}{\frac{(2n-2i)(2n-2i-1)}{2}} = \frac{2(n-i)(n-i)}{2(n-i)(2n-2i-1)} = \frac{n-i}{2n-2i-1}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(E) = \prod_{i=1}^{n} \frac{n-i}{2n-2i-1} = \frac{n!}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}$$

ce qui s'écrit

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \frac{n!^2 2^n}{(2n)!} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}}$$

10

Chapitre

Matrices

Résumé

On introduit la notion de matrices, qui nous servira plus tard dans l'année. On voit également le lien avec les systèmes linéaires. On étudiera enfin la méthode de Gauss-Jordan pour l'inversibilité d'une matrice.

> *« Il y a des temps pour toutes choses ; et les temps sont les matrices de toutes choses. Ils ne suivent donc pas une seule voie, mais empruntent des milliers de chemins. »*

Paracelse (1493 – 1541)

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir calculer avec les matrices (sommes, produits, transposés) . . . . ☐

② Connaître définition et propriétés des matrices inversibles . . . . ☐

③ Savoir déterminer le rang d'une matrice . . . . ☐

④ Savoir faire le lien entre système et matrice associée . . . . ☐

⑤ Savoir déterminer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice...

- par récurrence, en conjecturant l'allure générale . . . . ☐
- par la formule du binôme de Newton . . . . ☐
- par diagonalisation, lorsque celle-ci est donnée . . . . ☐

I. Matrices

1. Définition

Définition 10.1.

Soient n et p deux entiers non nuls. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients réels un tableau rectangulaire de nombres réels comportant n lignes et p colonnes.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \Big\} n \text{ lignes}$$

En général, lorsque A est une matrice à n lignes et p colonnes, le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne se note $a_{i,j}$. On écrit alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Notation

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels est noté $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Définition 10.2.

- On appelle **matrice ligne** $\begin{pmatrix} . & . & . \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.
- On appelle **matrice colonne** $\begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- On appelle **matrice nulle** de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $0_{n,p}$ (ou 0 quand il n'y a pas d'ambiguïté), la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls.

2. L'algèbre des matrices

a. Addition de matrices

Définition 10.3.

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **somme** de la matrice A et de la matrice B la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée A+B définie par

$$A + B = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \text{ où } \forall\ i \in [\![1,n]\!],\ \forall\ j \in [\![1,p]\!],\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Exemple 10.1

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b. Multiplication par un réel

Définition 10.4.

Soient $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un nombre réel. On appelle **produit** de la matrice A par le réel λ la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée λA, définie par

$$\lambda A=(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \text{ où } \forall\ i\in[\![1,n]\!],\ \forall\ j\in[\![1,p]\!],\ c_{i,j}=\lambda a_{i,j}$$

Exemple 10.2

Si $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\\1&0\end{pmatrix}$ alors $2A=\begin{pmatrix}2&4\\4&-2\\2&0\end{pmatrix}$

c. Premières propriétés

Propriété 10.1.

Soient A, B et C trois éléments de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et λ,μ deux nombres réels.

- $A+B=B+A$ (commutativité de l'addition).
- $0+A=A+0=A$ (0 est le neutre de l'addition)
- $A+(-A)=(-A)+A=A-A=0$ ($-A$ est l'opposé de la matrice A.)
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$, $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ et $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A=\lambda\mu A$ (distributivités)

Remarque

Les différentes propriétés précédentes font de l'ensemble $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, muni de l'addition et la multiplication par un réel, un **espace vectoriel**. Nous y reviendrons plus tard dans l'année.

Remarque

On peut manipuler, pour ces opérations, ainsi les matrices comme les nombres réels. Par exemple, l'équation $X+A=B$ d'inconnue la matrice X, admet comme unique solution $X=B-A$. De même, l'équation $2X=A$ d'inconnue la matrice X admet comme unique solution $X=\frac{1}{2}A$.

d. Produit matriciel

Définition 10.5.

Soient $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant m}}$ une matrice $\mathfrak{M}_{p,m}(\mathbb{R})$. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B la matrice de $\mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, notée $A\times B$ ou AB, définie par

$$AB=(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} \text{ où } \forall\ i\in[\![1,n]\!],\ \forall\ j\in[\![1,m]\!],\ c_{i,j}=a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}+\cdots+a_{i,p}b_{p,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}$$

Par exemple :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}\end{array}$$

Remarque

⚠ • Pour multiplier deux matrices, il faut qu'elles soient compatibles : lorsque l'on calcule AB il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

⚠ • La multiplication des matrices n'est pas **commutative** : en général, $AB \neq BA$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

⚠ • Contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{R}$, on peut avoir $AB = 0$ sans pour autant que A et B soient nuls. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ n'est pas **intègre**.

Exemple 10.3

Soient $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } BA=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété 10.2.

Soient A, B, C trois matrices (que l'on considère compatibles pour les multiplications envisagées), et λ un réel.

- $A(BC) = (AB)C = ABC$ (associativité de la multiplication)
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$
-] $(A+B)C = AC+BC$ et $C(A+B) = CA+CB$ (distributivités)

☞ *Exercice 1.*

e. Transposition

Définition 10.6.

Soit $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **transposée** de la matrice A la matrice de $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, notée ${}^tA$ ou A^T, définie par

$${}^tA=(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}} \text{ où } \forall\, i\in[\![1,p]\!],\ \forall\, j\in[\![1,n]\!],\ c_{i,j}=a_{j,i}$$

Ainsi, la matrice ${}^tA$ est la matrice obtenue à partir de A par symétrie, en échangeant les lignes et les colonnes.

Exemple 10.4

Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Propriété 10.3.

Soient A et B deux matrices (que l'on considère compatibles pour les multiplications envisagées) et λ un réel.

- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$.
- ${}^t({}^tA) = A$ et ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$.

II. Matrices carrées

1. Définitions

a. Matrices carrées

Définition 10.7.

Une **matrice carrée** d'ordre n est une matrice à n lignes et à n colonnes. On notera $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, plutôt que $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. De même, on notera 0_n la matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 10.5

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Définition 10.8.

Si $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice carrée, on appelle **diagonale** de A les coefficients $(a_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Exemple 10.6

Dans l'exemple précédent, la diagonale est $(1,-3)$.

b. Matrices diagonales et triangulaires

Définition 10.9.

- Une **matrice diagonale** d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n où tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement ceux de la diagonale :
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
- La **matrice identité** de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, notée I_n, est la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale :
$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Une **matrice triangulaire supérieure** $(a_{i,j})$ est une matrice telle que
$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \forall\, j \in [\![1,n]\!], i > j \implies a_{i,j} = 0$$
Ainsi, elle est de la forme
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
- Une **matrice triangulaire inférieure** $(a_{i,j})$ est une matrice telle que
$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \forall\, j \in [\![1,n]\!], i < j \implies a_{i,j} = 0$$

…

Ainsi, elle est de la forme
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & a_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque

La matrice identité I_n est **neutre** pour la multiplication : quelle que soit la matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a $AI_n = I_nA = A$.

c. Matrices symétriques

Définition 10.10.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice carrée.

- A est dite **symétrique** si
$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$$
Ainsi, une matrice est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$.
- A est dite **antisymétrique** si ${}^tA = -A$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre n symétriques, et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre n antisymétiques.

Exemple 10.7

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique.

2. Puissances d'une matrice carrée

a. Définition de la puissance d'une matrice

Si A et B sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on peut alors calculer AB et BA (elles sont compatibles) et le produit est encore dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On peut alors définir la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice.

Définition 10.11.

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Soit k un entier. On définit A^k de la manière suivante :

- Si $k = 0$, $A^0 = I_n$.
- Si $k > 0$, $A^k = \underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{k \text{ fois}}$.

Propriété 10.4.

Par définition, pour tout matrice $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et pour tous entiers p et q, $A^p\times A^q = A^{p+q}$.

♡

Remarque

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n diagonales, alors le produit AB est facile à calculer ; en effet, si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1} \times b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \times b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ainsi, si A est une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$, alors pour tout entier p, on a

$$A^p = \begin{pmatrix} a_{1,1}^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^p \end{pmatrix}$$

b. Formule du binôme de Newton

Attention

Puisque la multiplication des matrices n'est pas commutative, on n'a pas $(AB)^k = A^k B^k$. En effet, $(AB)^k = (AB)(AB)\cdots(AB)$ et il faut que $AB = BA$ pour pouvoir obtenir $A^k B^k$.

Cela arrive cependant dans certains cas, ce qui permet de simplifier certains calculs :

Définition 10.12.

Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B **commutent** si $AB = BA$.

Exemple 10.8

La matrice I_n commutent avec toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, $AI_n = I_n A = A$.

Théorème 10.5. Formule du binôme de Newton

Soient deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Alors, pour tout entier n, on a

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

L'utilité principale de la formule du binôme des matrices est de pouvoir calculer la puissance de certaines matrices de manière « rapide ».

c. Méthodes de calculs

Méthode (Calcul de puissance avec la formule du binôme)

Pour calculer A^p, on peut parfois utiliser la formule du binôme de Newton, en décomposant A sous la forme $I_n + B$ avec B une matrice dont les puissances sont faciles à calculer.

Exemple 10.9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier n.

Solution

On constate que $A = I_3 + B$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^2 = 0$. Puisque I_3 et B commutent (*car* I_3 *commute avec toutes les matrices*), on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \underbrace{\binom{n}{2} B^2 + \cdots + \binom{n}{n} B^n}_{=0}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$A^n = I_3 + nB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

résultat qui est également vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

☞ *Exercice 4.*

Méthode (Calcul de puissance par récurrence)

Pour calculer A^p, on peut également essayer de calculer les premières puissances, puis en déduire le résultat par récurrence sur p.

Exemple 10.10

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier n.

Solution

On constate que

$$A^0 = I_2 \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit alors P_n la proposition définie pour tout entier n par

$$P_n : A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que l'on démontre par récurrence sur n :

- Initialisation : puisque $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, P_0 est vraie.
- Hérédité : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n fixé. Montrons alors P_{n+1} :

$$A^{n+1} = A^n \times A \underbrace{=}_{\text{par H.R.}} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie.

On a ainsi démontré par récurrence que

$$\forall\, n \geqslant 0,\ \mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ *Exercices 2 et 3.*

III. Matrices inversibles

1. Définition

Définition 10.13.

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$$

Dans ce cas, B est appelée **matrice inverse** de A, et est notée $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$.

Notation

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrée d'ordre n inversibles.

Exemple 10.11

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible. En effet,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$$

Remarque

La matrice I_n est inversible et $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$. En effet, $\mathrm{I}_n\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$.

2. Propriétés

Propriété 10.6.

Soient A et B deux matrices carrées de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{A}^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}$.
- Si A et B sont inversibles, alors AB est également inversible, et on a $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.

Démonstration

Pour le premier point, on a en effet $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_n$ donc A^{-1} est inversible et son inverse est A.
Pour le second point, on a $\mathrm{AB}(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}) = \mathrm{A}\mathrm{I}_n\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_n$ et $(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1})\mathrm{AB} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{I}_n\mathrm{B} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{B} = \mathrm{I}_n$. Donc AB est inversible et son inverse est $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.

Pour démontrer qu'une matrice n'est pas inversible, on peut utiliser le théorème suivant :

Théorème 10.7.

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle. S'il existe une matrice $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\mathrm{AB} = 0_n$ alors A n'est pas inversible.

Démonstration

Faisons un raisonnement par l'absurde, et supposons que A soit inversible, d'inverse A^{-1}. Alors

$$\mathrm{AB} = 0_n \Rightarrow \mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AB}) = \mathrm{O}_n \Rightarrow \mathrm{B} = 0_n$$

ce qui est absurde, puisque B n'est pas nulle.

Remarque

Si A et B sont toutes les deux non nulles, telles que $AB = 0_n$ alors ni A ni B ne sont inversibles.

3. Règles de calcul

Propriété 10.8.

Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et $C \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors

$$AC = B \Leftrightarrow A = BC^{-1} \qquad CA = B \Leftrightarrow A = C^{-1}B$$
$$AC = BC \Leftrightarrow A = B \qquad CA = CB \Leftrightarrow A = B$$

⚠ **Attention**

Cela n'est valable que si C est inversible ! Ce n'est pas forcément vrai si C n'est pas inversible. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AC = BC$ et pourtant $A \neq B$.

Pour démontrer qu'une matrice est inversible, il est suffisant de démontrer qu'elle est inversible d'un seul côté :

Théorème 10.9.

- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible, d'inverse B.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible, d'inverse B.

Ainsi, il n'est pas nécessaire de vérifier $AB = I_n$ ET $BA = I_n$. Seul un des sens est nécessaire.

▶ ***Méthode***

Pour montrer qu'une matrice A est inversible, on peut chercher une matrice B telle que $AB = I_n$. On pourra conclure que A est inversible, et que $A^{-1} = B$.

Exemple 10.12

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note également $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A(I_2 + B)$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Solution

1. On constate que
$$A(I_2 + B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$
2. D'après ce qui précède, A est inversible, et $A^{-1} = I_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☞ *Exercices 5, 6 et 7.*

4. Ensemble $GL_2(\mathbb{R})$

L'inverse d'une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est facile à obtenir :

Théorème 10.10.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Le réel $ad - bc$ est appelé **déterminant** de la matrice A et est noté det(A).

Démonstration

Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On suppose que $A \neq 0$ et donc $B \neq 0$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$

- Si $ad - bc = 0$, alors $AB = 0_2$. Puisque $B \neq 0$, d'après un résultat précédent, A ne peut pas être inversible.
- Si $ad - bc \neq 0$, alors $A \times \left(\frac{1}{ad-bc}B\right) = I_2$. D'après un résultat précédent, A est donc inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple 10.13

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et inversible et déterminer son inverse.

Solution

Son déterminant vaut $\det(A) = 1 - 2 = -1$. Il est non nul, donc A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

IV. Systèmes linéaires et matrices

1. Ecriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 10.14

On s'intéresse au système

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ -x & - & 2y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Notons alors $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$(S) \Longleftrightarrow AX = Y$$

La matrice A est appelée **matrice associée** au système (S). Résoudre le système (S), c'est donc trouver le vecteur colonne X.

Définition 10.14. Matrice associée à un système

Soit (S) un système $n \times p$ de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

On appelle **matrice associée** à (S) la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le système (S) s'écrit alors $AX = Y$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

2. Inverse d'une matrice et système

Théorème 10.11.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne. Le système (S) $AX = B$ admet une unique solution si, et seulement si, la matrice A est inversible.
Dans ce cas, $X = A^{-1}B$.

Remarque

Ainsi, pour résoudre un système (S), on peut introduire la matrice associée et résoudre une équation matricielle $AX = B$. Cela permet en général de simplifier les notations.

☞ *Exercice 11.*

Conséquence 10.12.

Une matrice triangulaire supérieure A est inversible si et seulement si tous les termes de la diagonale sont non nuls.

Démonstration

En effet, un système triangulaire est de Cramer si et seulement si tous ses pivots sont non nuls.

Méthode

Pour montrer qu'une matrice A est, ou n'est pas inversible, sans calculer son inverse, on résout matriciellement l'équation $AX = 0$ en appliquant la méthode du pivot de Gauss. Si on obtient une diagonale sans terme nul, la matrice sera inversible. On peut simplifier les écritures en écrivant $(A|0)$ pour ne pas s'encombrer des inconnues.

Exemple 10.15

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Solution

On résout :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c}\text{ligne pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c}\text{ligne pivot} \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2\end{array}$$

Puisqu'un des termes sur la diagonale est nul, la matrice A n'est pas inversible.
Pour B :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Les termes sur la diagonale étant non nuls, la matrice B est bien inversible.

Méthode

Pour déterminer l'inverse d'une matrice, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss, mais en simplifiant les écritures. On écrit $(M|I_n)$ et on cherche à remplacer, par des opérations sur les lignes, M par I_n. A la place du I_n de départ, on aura alors M^{-1}.

Exemple 10.16

Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution

On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, et son inverse est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ *Exercices 8, 9 et 10.*

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Cette méthode de détermination de l'inverse d'une matrice est appelée **réduction de Gauss-Jordan**, en hommage à *Carl Friedrich Gauss* et *Wilhelm Jordan*, mais était connue des Chinois au 1er siècle de notre ère, sous le nom *Fang cheng* dans *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*.

Définition 10.15.

On appelle **rang** d'une matrice A, et on note rg(A) le rang du système associée $AX = 0$, où X représente le vecteur colonne des inconnues, c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles après réduction de Gauss-Jordan.

Propriété 10.13.

On dispose des propriétés suivantes :

- $\text{rg}(A) = 0$ si et seulement si la la matrice est nulle.
- $\text{rg}(A) = 1$ si et seulement si toutes les colonnes de A sont colinéaires.
- Si la matrice A est carrée d'ordre n, $\text{rg}(A) = n$ si et seulement si la matrice est inversible.

Exercices

Matrices

10

Exercices

Calcul matriciel

●○○ **Exercice 1 Produit matriciel** (10 min.)

Calculer les produits suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Puissances

●○○ **Exercice 2 Puissances et récurrence** (20 min.)

Dans chacun des cas suivants, calculer A^n pour tout entier naturel n.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

▶ ***Méthode***

Pour déterminer A^n, on peut chercher une périodicité des puissances, c'est-à-dire un entier p tel que $A^p = A$ ou $A^p = I_n$.

●○○ **Exercice 3 Puissances et nilpotence** (15 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A peut s'écrire sous la forme $I_3 + J$ où J est une matrice à déterminer.
2. Calculer J^2 et J^3. En déduire l'expression pour tout entier n de A^n en fonction de I_3, J et n.

●●○ **Exercice 4 Puissances et binôme de Newton** (15 min.)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A sous la forme $\alpha I_3 + \beta J$, où α et β sont deux réels.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout entier n.

Inversibilité

●○○ **Exercice 5 Inversibilité et polynôme annulateur** (10 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En déduire $-A^3+2A^2+4A-8I_3$.
3. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

●○○ Exercice 6 Inversibilité et polynôme annulateur II (10 min.)

Soit A la matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

●○○ Exercice 7 Inversibilité et polynôme annulateur III (15 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. En déduire que A n'est pas inversible.
3. Calculer $(I_3-A)(I_3+A+A^2)$. En déduire que I_3-A est inversible, et déterminer son inverse.
4. De la même manière, montrer que I_3+A est inversible, et déterminer son inverse.

●○○ Exercice 8 Inversibilité par calcul (10 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que cette matrice est inversible et calculer son inverse.

●○○ Exercice 9 Inversibilité par calcul II (20 min.)

Déterminer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

●○○ Exercice 10 Inversibilité par calcul III (10 min.)

Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Systèmes et matrice

●○○ Exercice 11 Système et matrice (15 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le système linéaire :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} y + z & = & 1 \\ x + z & = & 2 \\ x + y & = & 3 \end{array} \right.$$

Suites et matrices

●●○ Exercice 12 Suites et puissances (20 min.)

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A+2I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que pour tout n, il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_nA + v_nI_3$. On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1} et u_n, et entre v_{n+1} et v_n.
3. On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$. Reconnaître les suites α et β. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, puis A^n pour tout n.

●○○ Exercice 13 Suite et matrice - I (30 min.)

On considère les deux suites réels (u_n) et (v_n) définie par u_0, v_0 et pour tout n,

$$u_{n+1} = 6u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + 4v_n$$

En introduisant une matrice A bien choisie vérifiant

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

démontrer successivement que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, puis $A = 5I_2 + J$ avec $J^2 = 0$. Déterminer alors A^n, puis l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

●●○ Exercice 14 Suite et matrice - II (20 min.)

On considère la suite u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et pour tout n,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Que vaut $D = P^{-1}AP$? En déduire D^n.
2. Montrer que pour tout n, $D^n = P^{-1}A^nP$. En déduire les coefficients de A^n.
3. Pour tout n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que pour tout n, $X_{n+1} = AX_n$. En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0.
   (b) Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Pour aller plus loin

●○○ Exercice 15 Exercice ouvert (10 min.)

Trouver toutes les matrices M diagonales d'ordre 3 telles que

$$M^3 + 2M^2 - M - 2 = 0$$

●○○ Exercice 16 Valeurs propres (15 min.)

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel λ la matrice $A - \lambda I_2$ n'est elle pas inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices colonnes X telles que $AX = \lambda X$ lorsque λ prend les valeurs trouvées au 1.

Remarque : les λ trouvés s'appellent les valeurs propres de la matrice, et les vecteurs colonnes trouvés au 2 les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres.

Corrigés

Matrices

Corrigés des exercices

Exercice 1

Après calcul, on obtient

$$A=\begin{pmatrix}4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad C=\begin{pmatrix}-7 & 15\\ -10 & 22\end{pmatrix}$$

Exercice 2

On calcule les premières puissances de A et on constate que

$$A^2=-I_2,\ A^3=-A \text{ et } A^4=I_2$$

Ainsi, $A^5=A$, $A^6=-I, \cdots$ donc on a une périodicité :

- Si $n=4k$ ($k\in\mathbb{N}$), alors
$$A^n=A^{4k}=(A^4)^k=I_2^k=I_2$$
- Si $n=4k+1$ ($k\in\mathbb{N}$), alors
$$A^n=A^{4k+1}=A^{4k}.A=I_2.A=A$$
- Si $n=4k+2$ ($k\in\mathbb{N}$), alors
$$A^n=A^{4k+2}=A^{4k}.A^2=I_2.A^2=A^2=-I_2$$
- Si $n=4k+3$ ($k\in\mathbb{N}$), alors
$$A^n=A^{4k+3}=A^{4k}.A^3=I_2.A^3=A^3=-A$$

Pour B, on constate que

$$B^2=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}=2B$$

Puis $B^3=B^2.B=(2B).B=2B^2=4B=2^{3-1}$, $B^4=B^3.B=(4B).B=4B^2=8B=2^{4-1}B$. On peut donc supposer que, pour tout $n\geqslant 1$, $B^n=2^{n-1}B$, que l'on démontre par récurrence.
Soit P_n la proposition définie pour tout entier $n\geqslant 1$ par "$B^n=2^{n-1}B$".

- **Initialisation** : pour $n=1$, $B^1=B$ et $2^{1-1}B=2^0B=B$. Donc P_1 est vraie.
- **Hérédité** : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier $n\geqslant 1$, et montrons P_{n+1}.

Par hypothèse de récurrence, $B^n=2^{n-1}B$. Mais alors,

$$B^{n+1}=B^n.B\underbrace{=}_{\text{H.R.}}2^{n-1}B.B=2^{n-1}B^2=2^{n-1}.2B=2^n.B=2^{n+1-1}B$$

P_{n+1} est donc vraie.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier $n\geqslant 1$:

$$\forall\, n\geqslant 1,\ B^n=2^{n-1}B \text{ et } B^0=I_3$$

Exercice 3

1. On constate que $A = I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On remarque que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0_3$. On va donc utiliser la formule du binôme de Newton, pour $n \geqslant 3$.

I_3 et J commutent, donc pour tout $n \geqslant 3$:

$$A^n = (I_3 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 + \underbrace{\binom{n}{3} J^3 + \cdots + \binom{n}{n} J^n}_{=0_3 \text{ car } J^3 = 0_3}$$

Ainsi,

$$\forall\, n \geqslant 3,\ A^n = 1.I_3 + n.J + \frac{n(n-1)}{2} J^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que cette écrite est valide pour $n = 0, n = 1$ et également $n = 2$. Donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1. On constate que $A = 3J - 2I$.
2. Calculons les puissances de J :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$$

Ainsi, par un raisonnement par récurrence, on peut montrer que pour tout n, $J^n = 3^{n-1} J$.
Puisque I_3 et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ A^n = (3J - 2I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3J)^k (-2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k J^k \times (-2)^{n-k}$$

Or $J^k = 3^{k-1} J$ pour $k \geqslant 1$ donc

$$\forall\, n \geqslant 1,\ A^n = (-2)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k 3^{k-1} J \times (-2)^{n-k} = (-2)^n I_3 + J.\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k-1} (-2)^{n-k}$$

Pour calculer la somme, on va se ramener à la formule du binôme de Newton pour les réels :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k-1} (-2)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{9^k}{3} (-2)^{n-k} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 9^k (-2)^{n-k} = \frac{1}{3}((9-2)^n - (-2)^n) = \frac{1}{3}(7^n - (-2)^n)$$

Bilan : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $A^n = (-2)^n I_3 + \frac{7^n - (-2)^n}{3} J$, écriture également valable pour $n = 0$.

Exercice 5

1. Après calculs, on obtient

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 12 & 4 & -6 \\ 16 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

2. En calculant, on otient que $-A^3 + 2A^2 + 4A - 8I_3 = 0$.
3. D'après ce qui précède, on peut écrire que $-A^3 + 2A^2 + 4A = 8I_3$. On réécrit :

$$A \times \left(-A^2 + 2A + 4I_3\right) = 8I_3 \iff A \times \left(-\frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}I_3\right) = I_3$$

Ainsi, A est inversible, et son inverse est

$$\mathrm{A}^{-1} = -\frac{1}{8}\mathrm{A}^2 + \frac{1}{4}\mathrm{A} + \frac{1}{2}\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Constatons que

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} = 9\mathrm{A} - 18\mathrm{I}_3$$

Ainsi,

$$\frac{1}{-18}(\mathrm{A}^2 - 9\mathrm{A}) = \mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\mathrm{I}_3 - \frac{1}{18}\mathrm{A}\right) = \mathrm{I}_3$$

Donc, A est inversible, et

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{2}\mathrm{I}_3 - \frac{1}{18}\mathrm{A}$$

Exercice 7

1. On constate que $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}^3 = 0_3$.

2. Puisque $\mathrm{A}^3 = 0_3$ on peut écrire $\mathrm{A}.\mathrm{A}^2 = 0_3$. Par théorème, A est un diviseur de 0 et ne peut donc pas être inversible.

3. On développe (I_3 et A commutent) :

$$(\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})(\mathrm{I}_3 + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2) = \mathrm{I}_3 - \mathrm{A}^3 = \mathrm{I}_3$$

puisque $\mathrm{A}^3 = 0_3$. Ainsi, en notant $\mathrm{B} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2$, on peut écrire $(\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{I}_3$. Par théorème, $\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}$ est donc inversible, et son inverse est $\mathrm{B} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2$.

4. Par tâtonnement, on trouve que

$$(\mathrm{I}_3 + \mathrm{A})(\mathrm{I}_3 - \mathrm{A} + \mathrm{A}^2) = \mathrm{I}_3 + \mathrm{A}^3 = \mathrm{I}_3$$

Par théorème, $\mathrm{I}_3 + \mathrm{A}$ est également inversible, et son inverse est $\mathrm{I}_3 - \mathrm{A} + \mathrm{A}^2$.

> **Remarque**
> Il existe des identités remarquables assez générales, qui sont celles qu'on utilise ici :
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a^n - b^n - (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k$$
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}\right) = (a+b)\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^{2n-k}b^k$$

Exercice 8

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \text{ligne pivot} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow 3\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \end{array}$$

On obtient une matrice triangulaire dont les pivots sont tous non nuls ; on en déduit que A est inversible. On continue la méthode pour obtenir la matrice inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 - 3L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On en déduit que A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 9

On utilise la méthode classique : on écrit $(A|I_3)$ et on applique les opérations du pivot de Gauss pour écrire $(I_3|B)$. Alors, $B = A^{-1}$.

$$(S) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{L.P.} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$(S) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{L.P.} \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{array}$$

Les pivots étant tous non nuls, la matrice est inversible. On applique alors les opérations de la méthode du pivot de Gauss pour remontrer et obtenir I_3 à gauche :

$$(S) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{13} & \frac{7}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{13} & \frac{8}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{13} & \frac{7}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{array}\right)$$

Ainsi, A est inversible, et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{8}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{11}{13} & \frac{7}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{10}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -11 & 7 & 5 \\ 10 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice B, elle est déjà triangulaire supérieure avec des pivots tous non nuls, elle est donc inversible. On remonte avec la méthode du pivot de Gauss et on obtient

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

On applique la méthode du pivot de Gauss jusqu'à obtenir les pivots. Remarquons ici qu'on ne demande pas de calculer l'inverse si elle est inversible Ainsi

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \longleftrightarrow L_3 \\ \\ L_3 \longleftrightarrow L_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{L.P.} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{L.P.} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

Remarquons que $2-a-a^2$ s'annule si et seulement si $a=1$ ou $a=-2$ et $a-1$ s'annule si $a=1$.
Bilan : si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, les pivots sont non nuls et la matrice est donc inversible. Si $a=1$ ou $a=-2$, la matrice n'est pas inversible.

Exercice 11

1. Deux méthodes : on applique la méthode du pivot de Gauss à la matrice A; ou bien (et c'est plus simple ici), puisqu'on nous donne la matrice inverse, on vérifie qu'elle convient. Soit $C = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
On constate alors que

$$A \times C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, A est inversible, et son inverse est $A^{-1} = C$.
2. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On constate que le système (S) peut s'écrire de manière équivalente

$$(S) \quad AX = B$$

Puisque A est inversible, c'est équivalent à $X = A^{-1}B$. Ainsi, le système (S) admet une unique solution :

$$X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le triple $(2,1,0)$ est l'unique solution du système.

Exercice 12

1. On constate que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$. Ainsi

$$A^2 - A = 2I_3 \Leftrightarrow A(A - I_3) = 2I_3 \Leftrightarrow A \times \left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) = I_3$$

Donc, A est inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Montrons par récurrence sur n la proposition P_n définie pour tout entier n par P_n : “il existe u_n, v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$”.
• Initialisation : pour $n=0$, on constate que $A^0 = I_3 = 0A + 1I_3$. Ainsi, P_0 est vraie, avec $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.
• Hérédité : on suppose que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n. Montrons alors que P_{n+1} est vraie.
Ainsi, par hypothèse de récurrence, il existe u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$. Mais alors

$$A^{n+1} = A^n A = (u_n A + v_n I_3)A = u_n A^2 + v_n A = u_n(A + 2I_3) + v_n A = (u_n + v_n)A + 2u_n I_3$$

Ainsi, A^{n+1} s'écrit bien $u_{n+1}A+v_{n+1}I_3$, avec

$$u_{n+1}=u_n+v_n \text{ et } v_{n+1}=2u_n$$

P_{n+1} est donc vraie;
D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout n : A^n s'écrit $u_nA+v_nI_3$ avec

$$u_0=0,\ v_0=1,\ \forall\ n,\ u_{n+1}=u_n+v_n \text{ et } v_{n+1}=2u_n$$

3. Pour tout entier n, on constate que

$$\alpha_{n+1}=2u_{n+1}+v_{n+1}=2(u_n+v_n)+2u_n=4u_n+2v_n=2\alpha_n$$

$$\beta_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=u_n+v_n-2u_n=v_n-u_n=-\beta_n$$

Ainsi, α est une suite géométrique, de raison 2 et de premier terme $\alpha_0=1$, et β est une suite géométrique de raison (-1) et de premier terme $\beta_0=-1$. Donc

$$\forall\ n,\ \alpha_n=2^n \text{ et } \beta_n=-(-1)^n=(-1)^{n+1}$$

Mais alors, puisque

$$u_n=\frac{\alpha_n+\beta_n}{3} \text{ et } v_n=\frac{\alpha_n-2\beta_n}{3}$$

on en déduit donc

$$\forall\ n,\ u_n=\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3} \text{ et } v_n=\frac{2^n-2(-1)^{n+1}}{3}$$

et donc

$$\boxed{\forall\ n\in\mathbb{N},\ A^n=\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}A+\frac{2^n-2(-1)^{n+1}}{3}I_3}$$

Exercice 13

Constatons que $\begin{pmatrix} u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\end{pmatrix}$ avec $A=\begin{pmatrix} 6 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

Montrons alors par récurrence sur n la proposition définie pour tout entier n par "$\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\end{pmatrix}$".

- **Initialisation** : pour $n=0$, on a bien $\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\end{pmatrix}=A^0\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\end{pmatrix}$. P_0 est donc vraie.
- **Hérédité** : supposons que la proposition P_n soit vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. On a montré précédemment que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\end{pmatrix}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{pmatrix} u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\end{pmatrix}=A.A^n\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\end{pmatrix}=A^{n+1}\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\end{pmatrix}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on a donc montré que pour tout n, $\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\end{pmatrix}$.

Il nous reste donc à calculer A^n pour tout entier n pour pouvoir conclure. Or, on constate que $A=5I_2+J$ avec $J=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ avec $J^2=0_2$. D'après la formule du binôme de Newton (puisque I_2 et J commutent), pour tout $n\geqslant 2$, on a donc

$$A^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(5I_2)^{n-k}J^k=\binom{n}{0}5^nI_2+\binom{n}{1}5^{n-1}J+\underbrace{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(5I_2)^{n-k}J^k}_{=0_2}$$

Donc

$$A^n=5^nI_2+n5^{n-1}J=\begin{pmatrix} 5^n+n5^{n-1} & -n5^{n-1}\\ n5^{n-1} & 5^n-n5^{n-1}\end{pmatrix}$$

égalité également vraie pour $n=0$ et $n=1$. Enfin, puisque pour tout entier n, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, on en déduit finalement que

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = (5^n + n5^{n-1})u_0 - n5^{n-1}v_0 \text{ et } v_n = n5^{n-1}u_0 + (5^n - n5^{n-1})v_0}$$

Exercice 14

1. On applique la méthode du pivot de Gauss tel qu'habituellement :

$$(\mathrm{P}|\mathrm{I}_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Les termes diagonaux sont tous non nuls, donc la matrice P est inversible, et

$$(\mathrm{P}|\mathrm{I}_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Ainsi, $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Après calcul, on obtient alors

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D étant diagonale, on en déduit donc que

$$\forall\, n,\ \mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

2. Montrons par récurrence sur n la proposition P_n définie pour tout entier n par P_n : "$\mathrm{D}^n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P}$".

• Initialisation : pour $n=0$, on a $\mathrm{D}^0 = \mathrm{I}_3$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^0\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{I}_3\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} = \mathrm{I}_3$. Donc P_0 est vraie.

• Hérédité : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie.

On constate que $\mathrm{D}^{n+1} = \mathrm{D}^n\mathrm{D} \underbrace{=}_{\text{H.R.}} \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P}\mathrm{D}$. Or $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$. Donc

$$\mathrm{D}^{n+1} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n \underbrace{\mathrm{P}\mathrm{P}^{-1}}_{=\mathrm{I}_3}\mathrm{A}\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{A}\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^{n+1}\mathrm{P}$$

P_{n+1} est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout n, et donc $\forall\, n,\ \mathrm{D}^n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P}$. Mais alors

$$\forall\, n,\ \mathrm{A}^n = \mathrm{P}\mathrm{D}^n\mathrm{P}^{-1}$$

On connait P, P^{-1} et D^n. On en déduit donc A^n :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} \frac{-3+(-1)^n+2^{n+3}}{6} & \frac{3-3(-1)^n}{6} & \frac{6+2(-1)^n-2^{n+3}}{6} \\ \frac{-3-(-1)^n+2^{n+2}}{6} & \frac{3+3(-1)^n}{6} & \frac{6-2(-1)^n-2^{n+2}}{6} \\ \frac{-3+(-1)^n+2^{n+1}}{6} & \frac{3-3(-1)^n}{6} & \frac{6+2(-1)^n-2^{n+1}}{6} \end{pmatrix}}$$

3. (a) Constatons que

$$\mathrm{A}\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{X}_{n+1}$$

Mais alors, on peut montrer par récurrence sur n que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$$

Soit Q_n la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$".

• Initialisation : pour $n=0$, $\mathrm{A}^0\mathrm{X}_0 = \mathrm{I}_3\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_0$. Donc la proposition Q_0 est vraie.

- Hérédité : supposons que la proposition Q_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que Q_{n+1} est vraie.

On vient de voir que $X_{n+1} = AX_n$. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = A^{n+1}X_0$$

La proposition Q_{n+1} est donc vraie.
D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est donc vraie pour tout n, et $\forall\ n,\ X_n = A^n X_0$.
(b) Puisque $X_n = A^n X_0$, et qu'à la question 2., nous avons déterminé A^n, on peut en déduire ainsi que

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{-3+(-1)^n+2^{n+1}}{6}u_2 + \frac{3-3(-1)^n}{6}u_1 + \frac{6+2(-1)^n-2^{n+1}}{6}u_0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3-(-1)^n-2^{n+1}}{6} + \frac{3-3(-1)^n}{6} + 2\frac{6+2(-1)^n-2^{n+1}}{6} = 3-2^n}$$

Remarque

Cet exercice est très classique. Il utilise ce que l'on appelle la diagonalisation de la matrice A (en écrivant $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale) pour calculer les puissances n^{me} de la matrice A, et en déduire un résultat sur une suite. Les récurrences présentes dans cet exercice sont à savoir faire et refaire rapidement.

Exercice 15

On cherche une matrice solution diagonale, qu'on écrit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Alors, M est solution si et seulement si

$$M^3+2M^2-M-2=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^3+2a^2-a-2 & 0 & 0 \\ 0 & b^3+2b^2-b-2 & 0 \\ 0 & 0 & c^3+2c^2-c-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, M est solution si et seulement si a, b et c sont racines du polynôme $P(X) = X^3+2X^2-X-2$. Après étude, on trouve que les racines de P sont $1, -1$ et -2.
Bilan : M est solution si et seulement si M $(a,b,c) \in \{1;-1;-2\}^3$, ce qui fait un total de 27 matrices solutions.

Exercice 16

Notons $A_\lambda = A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

1. A_λ n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul. Or,

$$\det(A_\lambda) = (2-\lambda)^2 - 3^2 = (2-\lambda-3)(2-\lambda+3) = (-1-\lambda)(5-\lambda)$$

Ainsi A_λ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda = -1$ ou $\lambda = 5$.

2. Il nous reste donc à résoudre les systèmes $AX = -X$ et $AX = 5X$.

$$AX = -X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & -x \\ 3x & + & 2y & = & -y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 3x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & + & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient les mêmes lignes. Ainsi, on obtient comme solution

$$\mathcal{S}_{-1} = \left\{\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$AX = 5X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 5x \\ 3x & + & 2y & = & 5y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} -3x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & - & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient les mêmes lignes (au signe près). Ainsi, on a les solutions :

$$\mathcal{S}_5 = \left\{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R}\right\}$$

11

Chapitre

Limites de fonctions

Résumé

On étend dans ce chapitre la notion de limite de suite au cas plus général des limites de fonctions. Cela permettra de commencer les études de fonctions, en étudiant le comportement asymptotique de celles-ci.

> *« Celui qui reconnaît consciemment ses limites est le plus proche de la perfection. »*

Johann Wolfgang von Goethe (1749 – 1832). *Sentences en prose*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition des limites :
- Connaître les limites usuelles et les croissances comparées . . . . ☐
- Savoir utiliser les théorèmes d'addition, multiplication, quotient de limites . . . . ☐
- Savoir calculer la limite d'une composée de fonction . . . . ☐
- Reconnaître les limites liées au taux d'accroissement . . . . ☐

② Savoir lever les indéterminations classiques :
- polynômes et fractions rationnelles . . . . ☐
- fonctions avec des radicaux . . . . ☐
- les cas "∞/∞" ou "$0/0$" . . . . ☐

③ Savoir appliquer les théorèmes d'existence de limites (théorème d'encadrement, de comparaison) . ☐

④ Savoir déterminer le comportement asymptotique d'une fonction (limites, asymptotes) . . . . ☐

I. Quelques définitions

Avant de commencer ce chapitre, nous allons introduire deux objets que l'on utilisera naturellement : la notion de voisinage, et de restriction d'une fonction.

1. Voisinage

Définition 11.1. Voisinage

Soit a un élément de $\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$. On dit que I est un **voisinage** de a dans $\mathbb{R}$ si :

- Cas $a\in\mathbb{R}$: il existe $\varepsilon>0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset \mathrm{I}$.
- Cas $a=+\infty$: il existe $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$ tel que $]\mathrm{A}, +\infty[\subset \mathrm{I}$.
- Cas $a=-\infty$: il existe $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$ tel que $]-\infty, \mathrm{A}[\subset \mathrm{I}$.

Ainsi, un voisinage de a est un domaine qui contient un intervalle ouvert autour de a.

Exemple 11.1

Notons $\mathrm{I}=]1,2]$. Alors I est un voisinage de $1,5$ et $1,25$. En revanche, il n'est pas un voisinage de 3, ni de 2.

Solution

En effet, $]1,25;1,75[\subset\mathrm{I}$ et $]1,1;1,35[\subset\mathrm{I}$. En revanche, quel que soit $\varepsilon>0$, $]3-\varepsilon,3+\varepsilon[\cap\mathrm{I}=\varnothing$ donc il ne peut pas être un voisinage de 3. De même, $]2-\varepsilon,2+\varepsilon[\cap\mathrm{I}=]2-\varepsilon,2]$ et donc $]2-\varepsilon,2+\varepsilon[\not\subset\mathrm{I}$.

Remarque

Par abus de langage, dans la suite du cours, lorsqu'on dit qu'une propriété est vraie « au voisinage de a », cela signifiera qu'elle est vraie sur un intervalle qui est un voisinage de a.

2. Restriction

Définition 11.2. Restiction

Soit $f:\mathrm{E}\longrightarrow\mathrm{F}$ une fonction et $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$. On appelle **restriction** de f à A la fonction, notée $f_{|\mathrm{A}}$, définie par :

$$\begin{aligned} f_{|\mathrm{A}}:\mathrm{A}&\longrightarrow\mathrm{F}\\ x&\longmapsto f(x)\end{aligned}$$

Exemple 11.2

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2-1$. La restriction de f à $\mathbb{R}^+$ est la fonction :

$$\begin{aligned} f_{|\mathbb{R}^+}:\mathbb{R}^+&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto x^2-1\end{aligned}$$

Remarque

Restreindre une fonction permet de ne l'étudier que sur un sous-ensemble de son domaine de définition (par exemple, parce qu'elle est paire ou impaire).

II. Limites à l'infini

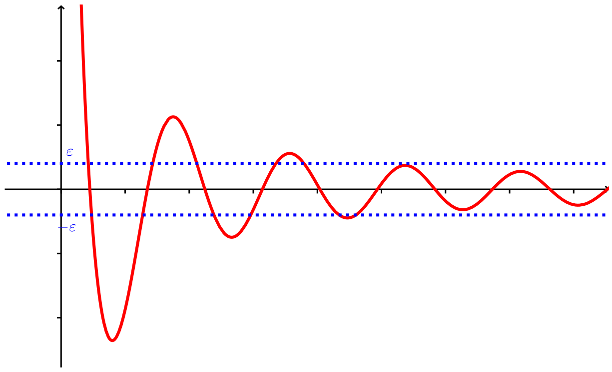
1. Limites nulles

Définition 11.3.

Si, pour tout $\varepsilon>0$ (aussi petit qu'on veut), la fonction f est comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ (c'est-à-dire $|f(x)|\leqslant\varepsilon$) ...

lorsque x est suffisamment grand , on dit que f **a pour limite** 0 quand x tend vers $+\infty$. On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = 0 \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$



Remarque
Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M,\ \forall\, x, x > M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Remarque
On définit de même $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$:

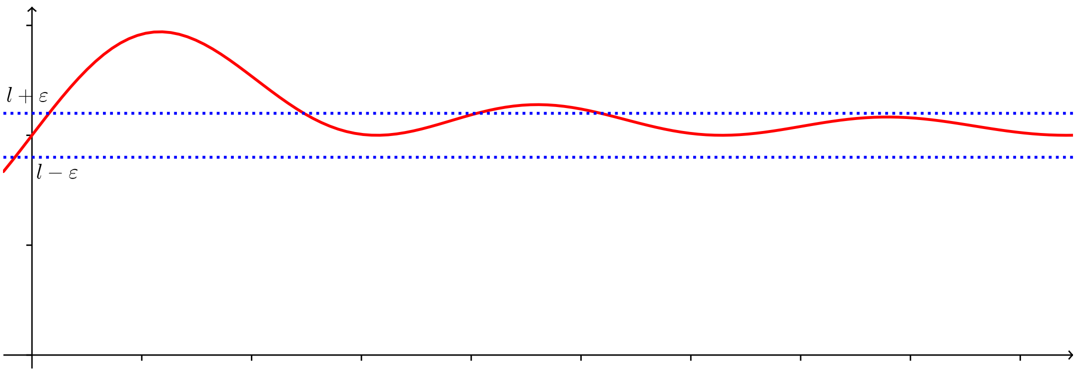
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M,\ \forall\, x, x < M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Exemple 11.3
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

2. Limites finies : $\ell \in \mathbb{R}$

Définition 11.4.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f **a pour limite** ℓ quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) si $f(x) - \ell$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).



Remarque

Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M,\ \forall\, x, x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

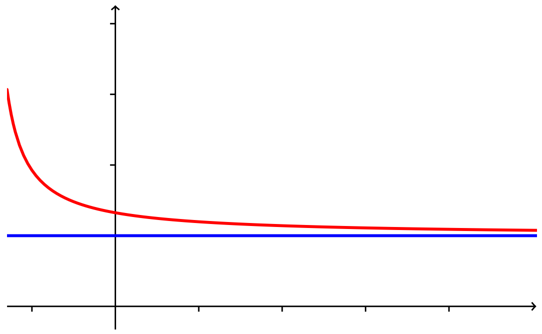
Cette définition rigoureuse est due à **Karl Weierstrass**, considéré comme le « père de l'analyse moderne », même si **Bernard Bolzano** avait déjà défini la notion de limite, certes de manière moins rigoureuse..

Exemple 11.4

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2$

Définition 11.5. Asymptote horizontale

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (où $\ell \in \mathbb{R}$). Alors, la droite d'équation $y = \ell$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (même chose en $-\infty$).



On dispose ici d'une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.

Remarque

Pour étudier la position de la courbe de f par rapport à l'asymptote $y = \ell$, on étudie le signe de $f(x) - \ell$.

- Si $f(x) - \ell \geqslant 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote.
- Si $f(x) - \ell \leqslant 0$, la courbe est en dessous de son asymptote.

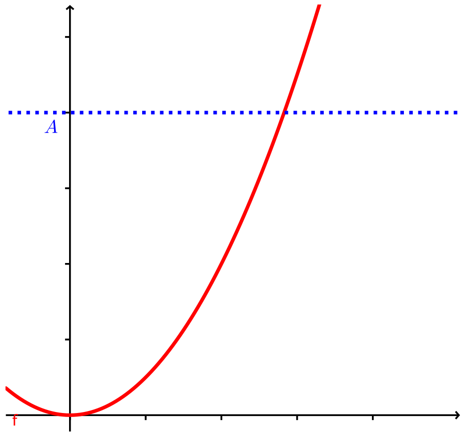
3. Limites infinies

Définition 11.6.

Si, pour tout nombre A (aussi grand qu'on veut), $f(x)$ est toujours supérieur ou égal à A dès que x est suffisamment grand, on dit que f **a pour limite** $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$



> **Remarque**
> Mathématiquement, on écrit donc
> $$\forall \mathrm{A}>0,\ \exists \mathrm{M},\ \forall x, x>\mathrm{M} \Rightarrow f(x)>\mathrm{A}$$

> **Remarque**
> On définit de même $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

III. Limites en $a \in \mathbb{R}$

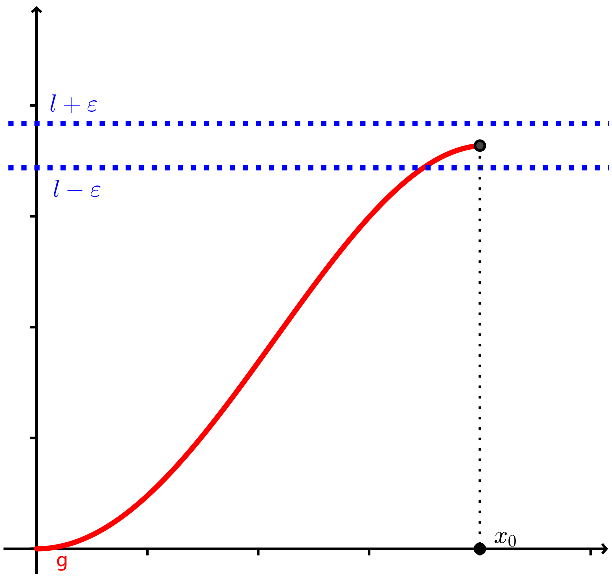
Ici, on s'intéresse au comportement d'une fonction f quand x tend vers $a \in \mathbb{R}$.

1. Limite réelle en un point

Définition 11.7.

Soient x_0 et ℓ deux réels.
Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès lors que x est proche de x_0, on dit que f **a pour limite** ℓ quand x tend vers x_0. On note

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f=\ell \quad \text{ou encore} \quad f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}\ell$$



Remarque
Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Remarque
Il y a unicité de la limite. On peut donc bien parler de la limite en x_0.

Exemple 11.5
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Soit $x_0 = 2$. Montrer que, quand x tend vers x_0, $f(x)$ va tendre vers $5 = f(2)$.

Solution
On peut le démontrer rigoureusement :

$$|f(x) - 5| = |2x + 1 - 5| = |2x - 4| = 2|x - 2|$$

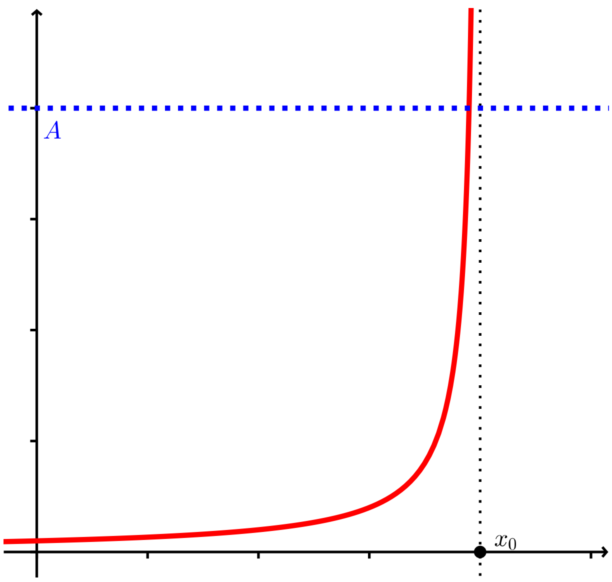
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors $|f(x) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$. On pose alors $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.

2. Limite infinie en un point

Définition 11.8.

Soit x_0 un réel.
Si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès lors que x est proche de x_0, on dit que f **a pour limite** $+\infty$ quand x tend vers x_0. On note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = +\infty \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$$



Remarque
Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\, A > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

Remarque
Il y a unicité de la limite. On peut donc bien parler de la limite en x_0.

On définit également $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ de la même manière.

3. Limite à gauche et à droite

Définition 11.9.

Soit x_0 un réel.

- Si on s'intéresse à la limite en x_0 de f, en imposant $x < x_0$, on parle de la **limite à gauche** en x_0, et on note $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$.
- Si on s'intéresse à la limite en x_0 de f, en imposant $x > x_0$, on parle de la **limite à droite** en x_0, et on note $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$.

Remarque

Une fonction peut avoir des limites à gauche et à droite en x_0 différentes ! Par exemple

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Proposition 11.1.

Soit f une fonction et x_0 un réel. Alors f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet des limites à gauche et à droite en x_0 et que ces limites sont les mêmes.
Dans ce cas,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Exemple 11.6

Ainsi, la fonction inverse n'admet pas de limite en 0, puisque ses limites à droite et à gauche en 0 sont différentes.

Méthode

On est souvent amené à étudier des limites à droite et à gauche lorsque la fonction est définie de deux manières différentes selon les intervalles.

Exemple 11.7

Etudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Solution

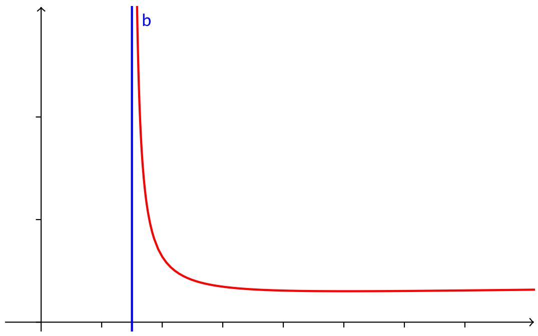
On remarque que :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 = f(0)$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$

Puisque les limites à droite et à gauche sont égales, on en déduit que f admet une limite en 0, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Définition 11.10. Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{x\to a^+ (\text{ou } a^-)} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe de f.



IV. Théorèmes d'existence et de comparaison

1. Fonctions monotones

Les fonctions monotones possèdent des propriétés intéressantes concernant les limites :

Théorème 11.2.

Soit f une fonction monotone sur un segment $[a, b]$. Alors f admet des limites à gauche et à droite en tout point.

Théorème 11.3.

Soit f une fonction monotone sur $\mathrm{I} =]a, b[$.
- Si f est croissante et majorée sur I, alors f admet une limite finie en b^-.
- Si f est croissante et minorée sur I, alors f admet une limite finie en a^+.
- Si f est décroissante et minorée sur I, alors f admet une limite finie en b^-.
- Si f est décroissante et majorée sur I, alors f admet une limite finie en a^+.

Remarque

Si f est croissante sur $\mathrm{I} =]a, b[$ mais non majorée sur I, alors f admet une limite en b^- qui vaut $+\infty$.
De manière générale, une fonction monotone sur $]a, b[$ admet toujours des limites en a^+ et en b^-, finie ou infinie.

2. Limites et inégalités

Théorème 11.4.

Soit I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$. Soient f et g deux fonctions définies sur I, sauf éventuellement en x_0, mais possédant une limite en x_0. Alors, si pour tout x de $\mathrm{I}\backslash\{x_0\}$, $f(x) \geqslant g(x)$, on a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim_{x\to x_0} g(x)$$

En particulier, si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \neq x_0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant 0$.

Remarque

⚠ Attention : le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes. Si $f(x) > g(x)$ pour tout $x \neq x_0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Par exemple, pour tout x, $1 + \frac{1}{x} > 1$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 1$.

3. Théorème d'encadrement

Théorème 11.5. Théorème d'encadrement ou théorème « des gendarmes »

Soit I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$. Soient f, g, h trois fonctions définies sur I sauf éventuellement en x_0. Si, pour ···

tout x de $\mathrm{I}\setminus\{x_0\}$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si f et h ont la même limite ℓ en x_0, alors la limite de g en x_0 existe, et

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$$

Démonstration

Admis. Idée de démonstration dans le chapitre sur les suites.

Exemple 11.8

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{[x]}{x}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

Solution

On a, pour tout x de $]0, +\infty[$, $x - 1 \leqslant [x] \leqslant x$, donc, en divisant par $x > 0$,

$$\frac{x-1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x}{x} = 1$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$, on en déduit donc, par encadrement, que la limite de g en $+\infty$ existe, et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

Théorème 11.6. Conséquence du théorème d'encadrement

Soit I un intervalle, $x_0 \in \mathrm{I}$ et ℓ un réel. Soient f et g deux fonctions définies sur I sauf éventuellement en x_0. Si, pour tout réel $x \in \mathrm{I}\setminus\{x_0\}$ on a $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Démonstration

C'est une conséquence directe du théorème d'encadrement, puisque $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$ est équivalent à $\ell - g(x) \leqslant f(x) \leqslant \ell + g(x)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème d'encadrement.

4. Comparaison à l'infini

Théorème 11.7. Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathrm{I} =]a, +\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$). Si pour tout x de I :

- $f(x) \geqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(x) \leqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Démonstration

Soit M un réel. Par définition, à partir d'un certain réel b, on a $g(x) > \mathrm{M}$. Or $f(x) \geqslant g(x)$, donc $f(x) > \mathrm{M}$ pour tout $x \geqslant b$: par définition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple 11.9

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{[x]+1}{\sqrt{x}}$.

Solution

Pour tout réel x, on a $[x] \leqslant x \leqslant [x]+1$. Ainsi, pour tout réel $x>0$ (puisque $\sqrt{x}>0$) on a

$$\frac{x}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{[x]+1}{\sqrt{x}}$$

soit

$$\sqrt{x} \leqslant \frac{[x]+1}{\sqrt{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, par comparaison,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]+1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

5. Asymptote oblique

Définition 11.11. Asymptote oblique

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère donné. Soit (d) une droite d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. On dit que la droite (d) est une **asymptote oblique** à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$$

Exemple 11.10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Solution

En effet, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) - x = \frac{x^2+1}{x} - x = \frac{1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Ainsi la droite d'équation $y = x$ est bien asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

V. Opérations sur les limites et limites usuelles

1. Opérations sur les limites

On suppose connues les limites de deux fonctions f et g.

a. Limite de $f+g$

$\lim g$ / $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Exemple 11.11

$$\lim_{x\to+\infty} (x+\sqrt{x}) = +\infty$$

Solution
En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\sqrt{x}) = +\infty$.

b. Limite de $f \times g$

$\lim g$ / $\lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell.\ell'$	signe(ℓ').∞	-signe(ℓ').∞
$+\infty$	signe(ℓ).∞	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	-signe(ℓ).∞	$-\infty$	$+\infty$

Remarque
Si $\ell = 0$ (et/ou $\ell' = 0$), seul le résultat $\lim(fg) = \ell.\ell' = 0$ est déterminé. Toutes les autres limites (du type "$0 \times \infty$") sont **indéterminées**.

Exemple 11.12

$$\lim_{x\to+\infty} (x\sqrt{x}) = +\infty \qquad \lim_{x\to0} 3x\mathrm{e}^x = 0$$

Solution
En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x\sqrt{x}) = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to0} 3x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$. Par produit, $\lim\limits_{x\to0} 3x\mathrm{e}^x = 0$.

c. Limite de $\frac{f}{g}$

$\lim g$ / $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	signe(ℓ').∞	-signe(ℓ').∞
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

Si $\lim g = 0$, il faut tout d'abord préciser si $\lim g = 0^+$ (g tend vers 0 en restant positif) ou si $\lim g = 0^-$, et on applique :

$\lim g$ / $\lim f$	0	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	signe(ℓ).∞	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	-signe(ℓ).∞	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 11.13

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

Solution
En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$ par somme, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$.
De même, $\lim\limits_{x\to0^+} x^2+1 = 1$ par somme et $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$.

☞ *Exercice 1.*

2. Limite d'une fonction composée

Théorème 11.8.

Soient f, g, h trois fonctions telles que $f = g \circ h$ sur un intervalle I. Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

Démonstration

Admis.

Méthode

Pour déterminer la limite d'une fonction composée $f(x) = g(h(x))$ en x_0 :

- On pose $\mathrm{X} = h(x)$.
- On détermine la limite b de X en x_0.
- On détermine la limite c de g en b, et on conclut : la limite de f en x_0 vaut c.

Exemple 11.14

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Solution

- On pose $\mathrm{X} = x^2 - x + 1$. On a

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{X} = +\infty$$

- On a

$$\lim_{\mathrm{X} \to +\infty} \sqrt{\mathrm{X}} = +\infty$$

Par composée, on a donc

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$$

Exercice 11.15

Montrer que $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} \dfrac{1}{\sqrt{3x - 1}} = +\infty$.

Solution

Posons $\mathrm{X} = 3x - 1$. Alors :

- On a $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} 3x - 1 = 0^+$.
- De plus, $\lim\limits_{\mathrm{X} \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{X}}} = +\infty$ par quotient.

Par composée,

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{3x - 1}} = +\infty$$

☞ *Exercice 2.*

3. Limites usuelles

a. Limites classiques

On dispose d'un ensemble de limites usuelles.

Proposition 11.9. Fonctions usuelles

$$\text{Pour tout entier } n\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\text{Pour tout entier } n\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to-\infty} x^n=+\infty \text{ si } n \text{ est pair, } -\infty \text{ sinon.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$$

$$\lim_{x\to0}\ln(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty \quad \lim_{x\to-\infty}[x]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}|x|=\lim_{x\to-\infty}|x|=+\infty$$

Proposition 11.10. Fonctions puissances

$$\text{Pour tout } \alpha>0,\quad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to0}x^\alpha=0$$

$$\text{Pour tout } \alpha<0,\quad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha=0 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to0}x^\alpha=+\infty$$

$$\text{Pour tout } a>1,\quad \lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\infty}a^x=0$$

$$\text{Pour tout } a \text{ tel que } 0<a<1\quad \lim_{x\to+\infty}a^x=0 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to-\infty}a^x=-\infty$$

b. Croissances comparées

Théorème 11.11. Croissances comparées

Pour tout $\alpha>0$, et $q>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha}=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\ln^q(x)}=+\infty$$

Conséquence 11.12.

Par passage à l'inverse,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x}=0 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^q(x)}{x^\alpha}=0$$

Théorème 11.13. Conséquence des croissances comparées

Pour tout $\alpha>0$,

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln(x)=0$$

Démonstration

Posons $\mathrm{X}=\frac{1}{x}$. Alors $\lim_{x\to0^+}\mathrm{X}=+\infty$ et $\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln(x)=\lim_{\mathrm{X}\to+\infty}-\frac{\ln(\mathrm{X})}{\mathrm{X}^\alpha}=0$ d'après ce qui précède.

Théorème 11.14.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\lim_{x\to-\infty}x^n\mathrm{e}^x=0$$

Démonstration

Se démontre de la même manière que précédemment (en posant $\mathrm{X}=-x$).

Méthode

Pour utiliser les croissances comparées, il faut souvent faire un changement de variable pour s'y ramener.

Exemple 11.16

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$.

Solution

On pose $X = 2x$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{(X/2)^3} = \lim_{X\to+\infty} 2^3 \frac{e^X}{X^3} = +\infty \text{ par croissance comparée.}$$

☞ *Exercice 4.*

4. Autres limites

Théorème 11.15. Taux d'accroissement

On dispose des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

Démonstration

Nous verrons la démonstration de ces limites dans le chapitre dédié à la Dérivation.

Exemple 11.17

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x^3}$.

Solution

On remarque que, pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x^3} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{x^2}$$

Or

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Par produit,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^3} = +\infty$$

5. Quelques indéterminations classiques

a. Polynômes et fractions rationnelles

Méthode (Règle du plus haut degré)

En $+\infty$ ou en $-\infty$, il y a une méthode classique dite du terme du plus haut degré.

- Si $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ est un polynôme, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$.

- Si $g : x \mapsto \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} \cdots + b_0}$ est une fraction rationnelle, alors

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$$

Exemple 11.18

Soient $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ et $g : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x^2-3x+1}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

Solution

D'après la règle du terme du plus haut degré,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

De même,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Remarque

⚠ Cette méthode ne s'applique qu'aux limites en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Racines

Méthode (Quantité conjuguée)

Lorsqu'une fonction contient des radicaux, on utilise la quantité conjuguée.

Exemple 11.19

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution

On constate que la limite en $+\infty$ de f est indéterminée. Alors,

$$f(x) = (\sqrt{x^2+1} - x)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

et donc, par composée et quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

c. « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ »

Méthode

Dans les cas « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ », on commence par mettre au numérateur et au dénominateur le terme prépondérant (en utilisant les croissances comparées).

Exemple 11.20

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{e^x - 1}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution

Alors

$$\frac{x+1}{e^x-1}=\frac{x}{e^x}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}}$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}}=1 \text{ par quotient}$$

Par produit $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

☞ *Exercice 3.*

VI. Etude des limites d'une fonction

1. 1ère étape : limites

Lorsqu'on se donne une fonction, on commencera toujours par déterminer ses limites au borne de l'intervalle de définition :

- Si f est définie sur $\mathbb{R}$, on déterminera $\lim_{x\to+\infty} f$ et $\lim_{x\to-\infty} f$.
- Si f est définie sur $]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$, il faut déterminer 4 limites : en $+\infty$, $-\infty$, a^+ et a^-.

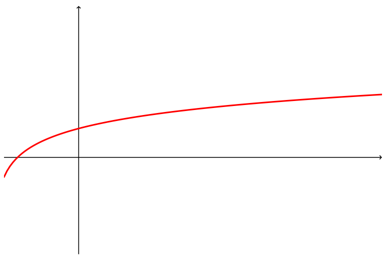
On notera directement les asymptotes horizontales (limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$) et les asymptotes verticales (limite infinie en a^+ ou a^-).

2. 2ème étape : branches infinies

Si les limites en $+\infty$ et/ou $-\infty$ sont infinies, on cherche une éventuelle asymptote oblique. Pour cela on détermine

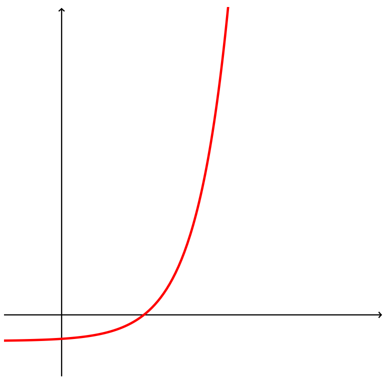
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

- Si cette limite est nulle, on dit que la courbe de f possède une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses** en $+\infty$.



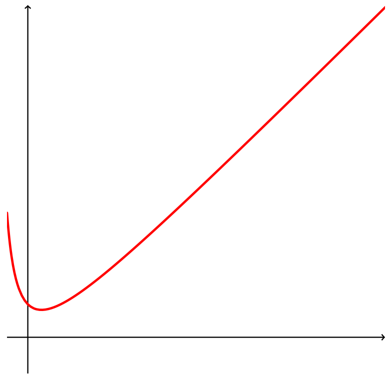
L'exemple classique est la fonction logarithme népérien.

- Si cette limite est infinie, on dit que la courbe de f possède une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** en $+\infty$.

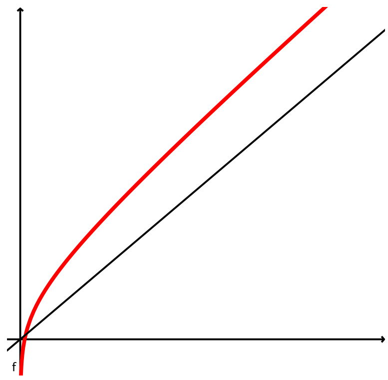


L'exemple classique est la fonction exponentielle.

- Si cette limite est un nombre réel a, on dit que la courbe de f admet une direction asymptotique d'équation $y = ax$. Il reste alors à calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.
  - Si cette limite est un réel b, la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe de f en $+\infty$.



  - Si cette limite est infinie, on dit que la courbe de f possède une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.



(bien sûr, tout ceci est valable en $-\infty$.)

☞ *Exercice 7.*

VII. Caractérisation séquentielle

Connaître la limite d'une fonction peut permettre, dans certains cas, de déterminer la limite d'une suite.

Théorème 11.16. Caractérisation séquentielle de la limite

Soit I un intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, et (u_n) une suite. On suppose que (u_n) converge vers $\ell \in \mathrm{I}$ ou à une extrémité de I, et que $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = a$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = a$$

Exemple 11.21

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et u la suite définie pour tout n par $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n+1}} = 1$$

Exercice 11.22

Déterminer, de la même manière,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

Solution

On pose $f : x \mapsto \ln(x)$ et pour tout n, $u_n = \frac{n}{n^2+1}$. On a rapidement

$$u_n \sim \frac{n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$. On en déduit donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = -\infty$$

Exercices

Limites de fonctions

11

Exercices

Limites simples

●○○ **Exercice 1 Limites de somme, produit, quotient** (30 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+\dfrac{1}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}+x$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^5-2x^{-3}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\times(2+x)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\times\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}+1}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x-1}{\frac{1}{x}}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1}{x^{-2}+1}$

●○○ **Exercice 2 Limites de composée** (30 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2-7x+1}{-2x+4}\right)^3$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{2x^2-x-1}{-x^2+1}\right|$

●○○ **Exercice 3 *Melting pot*** (30 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x^2+1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3x-\dfrac{1}{2x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x^2-2x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3+1}{x^2-1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{2x+1}{x}$
7. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{3x^2+2x+1}{x-2}$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$
9. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{-2x-3}{\sqrt{x-3}}$

●○○ **Exercice 4 Croissances comparées et encadrement** (30 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}^x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}^x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^5)^x}{(5^x)^5}$
4. $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{(x^5)^x}{(5^x)^5}$
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1+x^2}{2^x}$
6. $\lim\limits_{x\to0^+} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}}$
10. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x-1}$
11. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x+1}{x^2\ln(x)}$
12. $\lim\limits_{x\to0^+} (1+x)^{\ln(x)}$

Limites de fonctions

●○○ Exercice 5 Fonction (5 min.)

Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

●●○ Exercice 6 Fonctions et partie entière (10 min.)

1. Montrer que, pour tout réel x,
$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2-(x-[x])} \leqslant 1$$
2. Déterminer alors
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-(x-[x])}$$

Comportement asymptotique

●○○ Exercice 7 Fonctions (20 min.)

Déterminer le domaine de définition, les limites aux bornes et le comportement asymptotique aux bornes des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 2\sqrt{x}+14 \qquad g : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad h : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad i : x \mapsto \frac{x^2+2x+2}{x-1}$$

Corrigés

Limites de fonctions

Corrigés des exercices

Exercice 1

Les trois première se traitent par somme, les trois suivantes par produit, et enfin les trois dernières par quotient.

1. Puisque $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}$, par somme, $\lim_{x\to-\infty} x^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$.
2. De même, $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et par somme, $\sqrt{x} + x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
3. Enfin, $x^5 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et $x^{-3} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. Par somme, $\lim_{x\to-\infty} 3x^5 - 2x^{-3} = -\infty$.
4. On a $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} 2 + x = -\infty$, par produit, $\lim_{x\to-\infty} x^2(2+x) = -\infty$.
5. De même, $x^3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} x^3 = +\infty$ et $1 - \frac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ par somme. Par produit,
$$x^3\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$
6. Enfin, par somme, on a
$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{x^2} = 2$$
Par produit, $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(2 + \frac{1}{x^2}\right) = 2$.
7. Par somme, $\frac{1}{x} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. De plus, $x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Par quotient, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{x^2} = 0$.
8. De même, $-x - 1 \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^-$. Par quotient,
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x-1}{\frac{1}{x}} = -\infty.$$
9. Enfin, par somme, $\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$ et $x^{-2} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Par quotient,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{x^{-2}+1} = -1.$$

Exercice 2

Exercice 3

Pour les polynômes ou fractions rationnelles en $+\infty$ ou $-\infty$, on utilise la règle du terme de plus haut degré. Ainsi,

1. $\lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ d'après la règle du terme de plus haut degré.
2. $\lim_{x\to-\infty} 2x + 1 = -\infty$ donc par quotient $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x+1} = 0$. Enfin, par la règle du terme de plus haut degré,
$$\lim_{x\to-\infty} x^2 + 3x = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$
Par somme, $\lim_{x\to-\infty} x^2 + 3x - \frac{1}{2x+1} = +\infty$
3. Par la règle du terme de plus haut degré,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4. De même,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+1}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

5. La limite étant indéterminée, même en factorisant, on utilise la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$

En posant $\mathrm{X}=x+1$, on constate que $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{X}=+\infty$ et $\lim_{\mathrm{X}\to+\infty}\sqrt{\mathrm{X}}=+\infty$. Ainsi, par composée, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$. Par somme, on en déduit donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=+\infty$$

6. On constate que $\lim_{x\to0^-}2x+1=1$ et $\lim_{x\to0^-}x=0^-$. Par quotient,

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{2x+1}{x}=-\infty$$

7. De même, $\lim_{x\to2^+}3x^2+2x+1=17$ et $\lim_{x\to2^+}x-2=0^+$. Par quotient,

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{3x^2+2x+1}{x-2}=+\infty$$

8. On constate que $\lim_{x\to2^-}x^2-5x+6=0$. On a donc une indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». Au numérateur, nous avons un trinôme du second degré dont 2 est donc une racine. Après factorisation, on obtient $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Ainsi,

$$\frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}=\frac{x-3}{x-2}$$

en utilisant la parité de la fonction carrée. Ainsi, puisque $\lim_{x\to2^-}x-3=-1$ et $\lim_{x\to2^-}x-2=0^-$, par quotient

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}=+\infty$$

9. On constate que $\lim_{x\to3^+}-2x-3=-9$ et $\lim_{x\to3^+}\sqrt{x-3}=0^+$ car la fonction racine est toujours positive. Par quotient,

$$\lim_{\substack{x\to3\\x>3}}\frac{-2x-3}{\sqrt{x-3}}=-\infty$$

Exercice 4

⚠ **Remarque**

La méthode du terme de plus haut degré ne s'applique que sur des polynômes ou des fractions rationnelles. Si des fonctions du type exponentielle ou logarithme sont présentes, il faut utiliser les croissances comparées en factorisant par la fonction qui est la plus importante.

1. On constate que

$$\frac{\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}^x}}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ et par quotient, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x}=0$. Par somme et quotient,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}^x-1}=1$$

2. En $-\infty$, il n'y a pas d'indétermination ! $\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ donc par somme, $\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x-x=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x-1=-1$. Par quotient,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}^x-1}=-\infty$$

3. Quand on a des fonctions puissances, la seule méthode acceptable est de repasser à la notation exponentielle.

$$\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5} = \frac{e^{x\ln(x^5)}}{e^{5\ln(5^x)}} = \frac{e^{5x\ln(x)}}{e^{5\ln(e^{x\ln(5)})}} = \frac{e^{5x\ln(x)}}{e^{5x\ln(5)}} = e^{5x(\ln(x)-\ln(5))}$$

On peut également utiliser les propriétés des fonctions puissances, dans le cas où $x>0$:

$$\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5} = \frac{x^{5x}}{5^{5x}} = \left(\frac{x}{5}\right)^{5x} = e^{5x(\ln(x)-\ln(5))}$$

On pose $X = 5x(\ln(x)-\ln(5))$.

◇ En 0^+ : puisque $X = 5x\ln(x) - 5x\ln(5)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} X = 0$ par somme et croissance comparée. Puisque $\lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$, par composée

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x^5)^x}{(5^x)^5} = 1$$

◇ En $+\infty$: puisque $X = 5x(\ln(x)-\ln(5))$, $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ par produit. Puisque $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, par composée

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5)^x}{(5^x)^5} = +\infty$$

5. Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+x^2 = 1$ et par composée, $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln(2)} = 1$. Par quotient,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^2}{2^x} = 1$$

6. Quand il faut calculer une limite avec la partie entière, on passera souvent par le théorème d'encadrement.

$$\text{Pour tout } x>0,\ \frac{1}{x} - 1 \leqslant \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$$

En multipliant par $x>0$,

$$\text{Pour tout } x>0,\ 1-x \leqslant x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-x = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$, par encadrement, la limite existe et

$$\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

7. Avant d'envisager la quantité conjuguée, on peut essayer de factoriser, ici par $\sqrt{x}$:

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}+1\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

En posant $X = 1+\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $Y = 1+\frac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} X = \lim\limits_{x\to+\infty} Y = 1$. Puisque $\lim\limits_{X\to 1}\sqrt{X} = 1$, par composée,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

Par quotient, on en déduit donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = 2$$

8. On constate que

$$\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}} = \frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{x^{1/4}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/4} = 0^+$, par quotient

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}} = -\infty$$

9. En utilisant la même écriture que précédemment, et par croissance comparée, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}} = 0$$

10. Pour tout réel $x>0$, on a
$$\frac{\sqrt{x}}{e^x-1}=\frac{\sqrt{x}}{x}\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{x}{e^x-1}$$
Puisque $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, par quotient et produit, on a
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{e^x-1}=+\infty$$
11. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x)=0^-$ (car $x^2>0$ et $\ln(x)<0$). Puisque $\lim\limits_{x\to 0} x+1=1$, par quotient, on a
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^2\ln(x)}=-\infty$$
12. Pour tout réel $x>0$, on a
$$(1+x)^{\ln(x)}=e^{\ln(x)\ln(1+x)}=e^{x\ln(x)\frac{\ln(1+x)}{x}}$$
Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$ (croissance comparée), et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, par produit
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)\frac{\ln(1+x)}{x}=0$$
et par composée,
$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln(x)}=1$$

Exercice 5

Pour déterminer la limite en 0 d'une fonction f, on calcule la limite en 0^- et en 0^+.
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 0=0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=0 \text{ par croissance comparée}$$
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$. Ainsi, f admet une limite en 0, et
$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

Exercice 6

1. Pour tout x, on a $[x]\leqslant x\leqslant [x]+1$, donc $0\leqslant x-[x]\leqslant 1$. On a alors :
$$-1\leqslant -(x-[x])\leqslant 0$$
$$\text{puis } 1\leqslant 2-(x-[x])\leqslant 2$$
$$\text{soit } \frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2-(x-[x])}\leqslant 1 \text{ par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*$$
2. On utilise le résultat précédent, pour $x>0$ et on mutliplie par x : on obtient
$$\frac{x}{2}\leqslant\frac{x}{2-(x-[x])}\leqslant x$$
Or $\frac{x}{2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$. Par comparaison :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-(x-[x])}=+\infty$$

Exercice 7

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ (fonction racine). Par somme, on a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 14 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Puisque la limite en $+\infty$ est infinie, on déterminer le comportement asymptotique :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2\sqrt{x}+14}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{14}{x}$$

Par somme, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Ainsi, la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

- Puisque pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on a $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > 0$: la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x, on a

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-2x})} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$$

Par composée, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$. Par somme et quotient

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

La courbe de g admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
De même, on a pour tout x,

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x}-1)}{\mathrm{e}^{-2x}(\mathrm{e}^{2x}+1)} = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$$

Par composée, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$. Par somme et quotient

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$

La courbe de g admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $-\infty$.

- Rapidement : h est définie sur $\mathbb{R}^*$, on obtient par somme

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

La droite d'équation $y = 0$ est donc asymptote horizontale à la courbe de h au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
En 0, on écrit $h(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Alors, par quotient et sans difficulté :

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$$

- i est définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. En 1, par quotient :

$$\lim_{x\to 1^-} i(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} i(x) = +\infty$$

Par règle des termes du plus haut degré, on a respectivement

$$\lim_{x\to+\infty} i(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{i(x)}{x} = 1$$

Enfin,

$$\lim_{x\to+\infty} i(x) - x = 3$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x+3$ est asymptote oblique à la courbe de i au voisinage de $+\infty$. On obtient la même asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

12

Chapitre

Continuité

Résumé

On définit rigoureusement la notion déjà vue l'année dernière de continuité. C'est l'occasion de revoir le théorème des valeurs intermédiaires, et un corollaire important - le théorème de la bijection.

> « *Une certaine continuité dans le désespoir peut engendrer la joie.* »
>
> Albert Camus (1913 – 1960). *Noces*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant la continuité :
- Savoir montrer qu'une fonction est continue en un point ☐
- Savoir prolonger de manière continue une fonction en un point ☐
- Savoir utiliser la continuité pour déterminer la limite d'une suite récurrente ☐

② Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer l'existence d'une solution à une équation du type $f(x) = a$ ☐

③ Savoir utiliser le théorème de la bijection pour montrer qu'une fonction est bijective, et étudier le sens de variations d'une fonction réciproque ☐

I. Généralités

1. Continuité en un point, sur un intervalle

Définition 12.1. Continuité en un point

Soit f une fonction, et I un **intervalle** inclus dans l'ensemble de définition de f.

- On dit que la fonction f est **continue à droite en un point** a de I si f admet une limite à droite en a, qui est égale à $f(a)$:
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$
- On dit que la fonction f est **continue à gauche en un point** a de I si f admet une limite à gauche en a, qui est égale à $f(a)$:
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$
- On dit que la fonction f est **continue en un point** a de I si f admet une limite en a, qui est égale à $f(a)$:
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Remarque

Ainsi, f est continue en a si et seulement si
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Définition 12.2. Continuité sur un intervalle

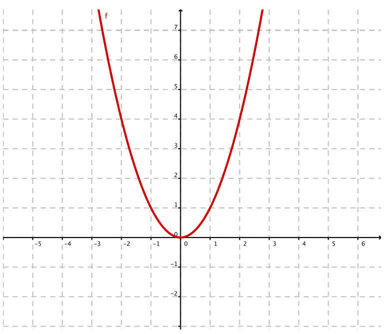
Soit f une fonction, et I un **intervalle** inclus dans l'ensemble de définition de f.
On dit que f est **continue sur l'intervalle I** si elle est continue en tout point de I.

Remarque (Somme, produit, quotient, composée)

Il résulte des théorèmes sur les limites que la **somme**, le **produit**, le **quotient** (là où il est défini) et la **composée** de deux fonctions continues est continue.

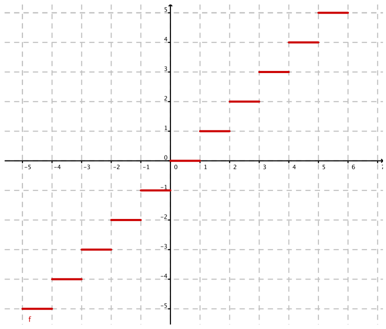
Exemple 12.1

La fonction carré est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.



Exemple 12.2

La fonction **partie entière** n'est pas continue en $0, 1, 2, \ldots$:



2. Continuité à droite et à gauche, et continuité

Un résultat vu sur les limites nous permet d'en déduire une propriété importante :

Propriété 12.1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a un point intérieur à I (c'est-à-dire que a n'est pas une borne de I).
f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction définie par morceaux est continue en un réel a, on calcule les limites à droite et à gauche en ce réel, et on montre que les deux limites valent $f(a)$.

Exemple 12.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

Solution

On a $f(0)=1$. Constatons alors que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x+1=1=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-0}=1=f(0)$$

Ainsi, f est continue à droite et à gauche en 0. Elle est donc continue en 0.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Karl Weierstrass (encore lui) donna vers 1850 la première définition de la continuité d'une fonction. C'est également lui qui donna les définitions rigoureuses de la dérivée, que l'on verra plus tard.

3. Continuité des fonctions usuelles

Proposition 12.2.

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carré est continue sur $[0;+\infty[$.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

...

- Les fonctions puissances $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Les fonctions puissances $x \mapsto x^a$ $(a \in \mathbb{R})$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Admis. On verra dans un chapitre ultérieure qu'une fonction dérivable est continue, ce qui nous permet de conclure rapidement.

4. Prolongement par continuité

Définition 12.3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf en un réel a. On suppose que f est continue sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, et qu'il existe un réel l tel que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.
On dit qu'on peut **prolonger par continuité** la fonction f en posant $f(a) = \ell$. On définit ainsi une nouvelle fonction, définie sur I, qui est continue sur I et coïncide avec f sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

Exemple 12.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\ln(x)$. Montrer que l'on peut prolonger par continuité f en 0.

Solution

On constate que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Ainsi, on peut prolonger par continuité f en 0 en posant $f(0) = 0$.

Remarque

Rigoureusement, on doit définir une nouvelle fonction $\tilde{f}$ qui est égale à f sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, et telle que $\tilde{f}(a) = \ell$. En pratique, on confondra toujours $\tilde{f}$ et f.

☞ *Exercices 1, 2, 3, 4 et 5.*

5. Tableau de variations et convention

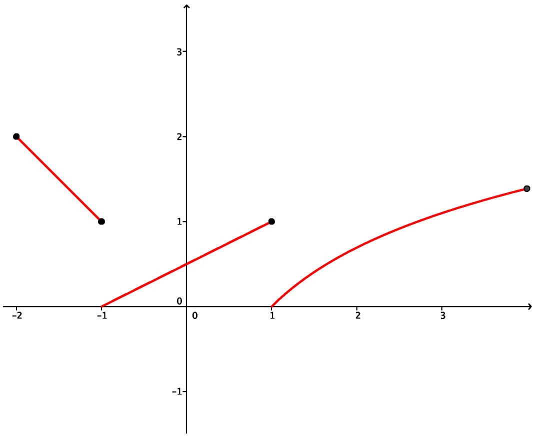
Remarque

Dans un tableau de variation, on convient que les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

6. Continuité par morceaux

Définition 12.4.

Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur le segment $[a, b]$ s'il existe une **subdivision** $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ (c'est-à-dire un découpage du segment $[a; b]$) telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.



Exemple 12.5
La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. En effet, sur tout segment de la forme $]n;n+1[$ (où $n \in \mathbb{Z}$) le fonction est continue (car constante), et prolongeable par continuité en n et $n+1$.

II. Fonctions continues et résolution d'équation

1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 12.3. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et à valeurs réelles. Alors l'image $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

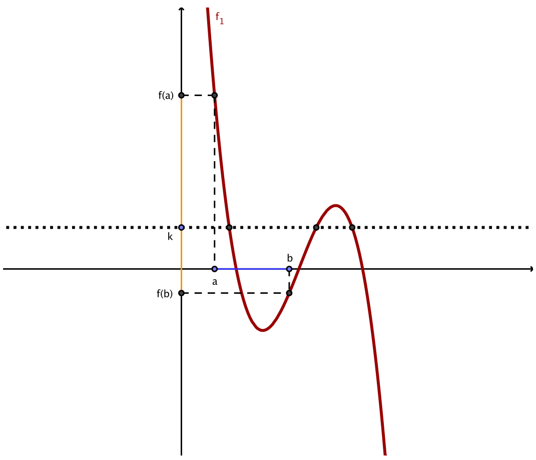
Remarque

On a mieux : si I est un segment, $f(\mathrm{I})$ est également un segment. Ainsi, si I est un segment $[a;b]$, le maximum et le minimum sont atteints : il existe deux réels u et v de I tels que $f(u) = \max\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)$ et $f(v) = \min\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)$.

On utilisera la variante plus explicite suivante :

Théorème 12.4. Théorème des valeurs intermédiaires II

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel k pris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c de l'intervalle $[a;b]$, tel que $f(c) = k$.



Démonstration

Théorème admis.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Bernard Bolzano donna en 1817 la première démonstration analytique de ce théorème. **Weierstrass** en donna une autre plus tard, vers 1850.

2. Théorème de la bijection

Dans le cas d'une fonction continue strictement monotone sur un segment, on dispose d'un énoncé plus précis :

Théorème 12.5. Théorème de la bijection

Soit f une fonction **continue strictement monotone** sur l'intervalle $\mathrm{I} = [a; b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une **unique solution** dans $[a; b]$.

Démonstration

Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. f étant une fonction continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c tel que $f(c) = k$. Supposons la fonction strictement croissante (le cas décroissant se montre de la même manière). Alors :

- Pour tout $x > c$, on a $f(x) > f(c) = k$ donc il n'y a aucun réel $x > c$ vérifiant $f(x) = k$.
- Pour tout $x < c$, on a $f(x) < f(c) = k$ donc il n'y a aucun réel $x < c$ vérifiant $f(x) = k$.

Donc le réel c est le seul.

On dispose de la version suivante, qui sera celle là plus souvent utilisée :

Théorème 12.6. Théorème de la bijection II

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors f est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$.

Méthode

On utilise le théorème de la bijection (ou *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*) pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution à une équation. On vérifiera bien toutes les hypothèses : continuité, stricte monotonie, et déterminer l'intervalle image.

Exemple 12.6

On suppose que la fonction f est continue, et que ses variations sont décrites dans le tableau suivant :

x	0		5
$f(x)$	-3	$\nearrow$	4

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0; 5]$.

Solution

- f est continue sur $[0, 5]$;
- f est strictement croissante sur $[0, 5]$.

D'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $[0, 5]$ sur $f([0, 5]) = [-3, 4]$. Or $0 \in [-3, 4]$;

doncl'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0;5]$.

3. Extension à un intervalle non borné

Le théorème précédent peut être étendu dans le cas d'un intervalle I quelconque.

Théorème 12.7.

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Alors l'image de I par f est encore un intervalle, J, et f établit une bijection de I dans J.

Exemple 12.7

Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $]a;b]$, alors pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim_{x\to a^+} f(x); f(b)\right]$, l'équation $f(x) = k$ possède une unique solution dans $]a;b]$.

Exercice 12.8

Prouver que l'équation (E) : $x\sqrt{x} = 1 - x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Solution

On se ramène à une écriture $f(x) = k$: $x + x\sqrt{x} = 1$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x + x\sqrt{x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée vaut

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante, et continue sur $]0;+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, elle établit donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur

$$f(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty}, f(x)\right[=]0,+\infty[$$

qui contient 1.
L'équation $f(x) = 1$ possède donc une unique solution sur $]0;+\infty[$.

4. Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

Dans le cas d'une fonction continue, et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signe contraire, on peut déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ par **dichotomie** : on découpe au fur et à mesure l'intervalle en 2 pour pouvoir cibler la solution.

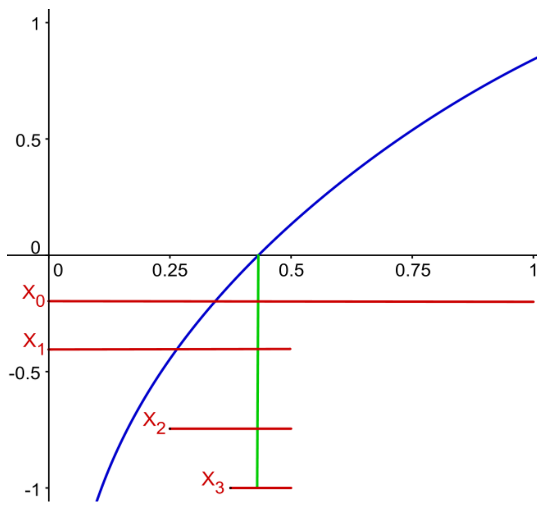


Image disponible sur Wikipédia

COMPLÉMENT CULTUREL

Le mot dichotomie vient du grec *dikha* (*en deux*), et *tomein* (*couper*), c'est à dire “couper en deux”.

Algorithme 12.8.

Dans cet algorithme, e représente la précision de la valeur approchée.

Algorithme 2 : DICHOTOMIE

Entrées : Saisir a, b et e
Tant que $b-a \geqslant e$
  $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$
  si $f(a)\times f(m) \leqslant 0$ **alors**
    $b \leftarrow m$
  sinon
    $a \leftarrow m$
  fin
FinTantque
Sorties : Afficher a et b

En Scilab, cela donne (à condition que la fonction f ait été définie, dans le cas f croissante) la fonction suivante, où $[x; y]$ désigne l'intervalle de recherche de départ, et `eps` la précision :

Scilab 12.9. Algorithme de dichotomie ♡

```
// Résumé : fonction appliquant l'algorithme de dichotomie dans le cas où la fonction
// f est définie et croissante sur l'intervalle de départ [x;y].
// On cherche avec une précision eps.

function [a,b] = dicho (x,y, eps)
a=x
b=y
while(b-a>eps) do
    m=(a+b)/2
    if f(a)*f(m) <= 0 then
        b=m
    else
        a=m
    end
end
endfunction
```

5. Continuité et sens de variation de f^{-1}

Théorème 12.10.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \rightarrow \mathrm{I}$ est continue sur $f(\mathrm{I})$, strictement monotone et de même monotonie que la fonction f.

Démonstration

Supposons f strictement croissante (le raisonnement est le même dans le cas décroissant). Soient x et y deux éléments de $f(\mathrm{I})$ tels que $x<y$. Puisqu'ils sont dans $f(\mathrm{I})$, il existe a et b dans I tels que $x=f(a)$ et $y=f(b)$.
Puisque f est strictement croissante, $x=f(a)<f(b)=y \Rightarrow a<b$. Or, $a=f^{-1}(x)$ et $b=f^{-1}(y)$. On a donc montré

$$\forall (x,y)\in (f(\mathrm{I}))^2,\ \ x<y \Rightarrow f^{-1}(x)<f^{-1}(y)$$

f^{-1} est donc strictement croissante.
Etant strictement monotone, elle admet des limites à droite et à gauche en tout point de $f(\mathrm{I})$. Supposons qu'il existe $y\in f(\mathrm{I})$ tel que les limites à droite et à gauche de f^{-1} en y soient différentes. En repassant par

f, par continuité de f, les limites à droite et à gauche en $f^{-1}(y)$ sont donc différentes, ce qui est absurde, puisque f est continue sur I.

☞ *Exercices 6 et 7.*

6. Suites récurrentes et continuité

La continuité va nous permettre de simplifier l'étude des suites récurrentes, mais également de pouvoir déterminer les limites des suites récurrentes convergentes.

a. Intervalle stable

Démonstration

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$. On dit que J est un intervalle **stable** de f si $f(\mathrm{J}) \subset \mathrm{J}$, c'est-à-dire si

$$\forall\, x \in \mathrm{J}, \quad f(x) \in \mathrm{J}$$

Exemple 12.9

Par exemple, l'intervalle $[0,1]$ est un intervalle stable de la fonction carrée. En effet, pour tout $x \in [0,1]$, on a $x^2 \in [0,1]$.

Méthode

Pour démontrer qu'un intervalle I est stable, on dispose de deux méthodes classique :

1. Si I est un intervalle du type $\mathrm{I} = [a;b]$, on part de $a \leqslant x \leqslant b$ et on essaie de raisonner par implication pour démontrer que $a \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.
2. Sinon, on étudie les variations de f, et en utilisant les monotonies de f et l'éventuelle continuité, on conclut.

Exercice 12.10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout x par $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$. Montrer que $[-1;2]$ est un intervalle stable de f.

Solution

f est un trinôme du second degré. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Sur $[-1;2]$, f est croissante. On a $f(-1) = -1$ et $f(2) = 2$. Par croissance et continuité de f, on en déduit que $f([-1;2]) = [-1;2]$.

Sans la continuité, mais uniquement avec la monotonie, on en déduit que $f([-1;2]) \subset [-1;2]$, ce qui est souvent suffisant.

Les intervalles stables sont très pratiques pour l'étude des suites récurrentes :

Théorème 12.11.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ et soit u la suite définie par $u_0 \in \mathrm{I}$ et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si $u_0 \in \mathrm{J}$ et J est un intervalle stable de f, alors pour tout n, $u_n \in \mathrm{J}$.

Démonstration

Cela se montre rapidement par récurrence. Soit P la proposition définie pour tout n par $\mathrm{P}_n : u_n \in \mathrm{J}$.

- Pour $n = 0$, par hypothèse, $u_0 \in \mathrm{J}$ donc P_0 est vraie.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie.
  Par hypothèse de récurrence, $u_n \in \mathrm{J}$. Or J est un intervalle stable de f, donc $f(u_n) \in \mathrm{J}$. Or, par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$ et donc $u_{n+1} \in \mathrm{J}$ et donc P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout n, et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathrm{J}$$

Remarque

Cela permet ainsi de montrer qu'une suite récurrente est bornée, en cherchant un intervalle stable de la fonction sous-jacente.

Exercice 12.11

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$. Montrer que pour tout n, $u_n \in [-1;2]$.

Solution

On a montré dans l'exercice 12.10 que l'intervalle $[-1;2]$ est stable par f. Puisque $u_0 = 1 \in [-1;2]$, d'après le théorème précédent, on a bien que pour tout n, $u_n \in [-1;2]$

Remarque

En pratique, cette dernière récurrence sera systématiquement à rédiger, mais appliquée au contexte de l'exercice.

b. Théorème du point fixe

La continuité va permettre de déterminer la limite d'une suite définie sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, lorsque f est continue.

Théorème 12.12.

Soit f une fonction continue, et ℓ un réel. Soit (u_n) une suite convergente, de limite ℓ. Alors la suite $(f(u_n))$ converge également, et a pour limite $f(\ell)$.

Remarque

Si f n'est pas continue en x_0 mais si la fonction f a pour limite ℓ en x_0, alors quelle que soit la suite (u_n) de limite x_0, $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Théorème 12.13. Théorème du point fixe

Soit f une fonction continue, et u une suite définie par u_0 donné, et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite u est convergente, alors par passage à la limite, en notant ℓ la limite de u, on en déduit que la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$: c'est donc un **point fixe** de la fonction f.

Méthode

Le théorème précédent permet souvent de déterminer la limite d'une suite définie par récurrence lorsqu'elle est convergente.

Exercice 12.12

Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Montrer que la suite u est croissante, et que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. En déduire que la suite u converge, et déterminer sa limite.

Solution

1. Méthode classique : on montre par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   Pour tout entier n, soit P_n la proposition définie par "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: P_0 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie.
     On a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc
     $$\sqrt{0} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant 1$$
     et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: P_{n+1} est donc vraie : la propriété est héréditaire.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n :
     $$\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

   Pour tout entier n, soit Q_n la proposition définie par "$u_n \leqslant u_{n+1}$".
   Remarque : on aurait pu, aussi, montrer que $[0;1]$ est un intervalle stable de la fonction racine, puis de démontrer rapidement par récurrence que pour tout n, $u_n \in [0;1]$.
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > u_0$. $u_0 \leqslant u_1$: Q_0 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la propriété Q_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
     On a $u_n \leqslant u_{n+1}$. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc
     $$\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{u_{n+1}}$$
     et donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$: Q_{n+1} est donc vraie : la propriété est héréditaire.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout entier n :
     $$\forall\ n,\ u_n \leqslant u_{n+1}$$
     La suite u est donc croissante.

   Remarque : on aurait également pu démontrer, par récurrence, les deux propositions en une seule, en démontrant "$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$".
2. La suite u est donc croissante et majorée. D'après le théorème de convergence monotone, celle-ci converge. Notons ℓ sa limite. Puisque la fonction racine est continue sur $]0;+\infty[$, on en déduit par passage à la limite que que $\ell = \sqrt{\ell}$, c'est à dire $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Or, puisqu'elle est croissante,
   $$\text{Pour tout } n, u_n \geqslant u_0 = \frac{1}{2}$$
   La limite est donc 1.

☞ *Exercice 9*

Exercices

Continuité

12

Exercices

Continuité

●○○ **Exercice 1 Continuité - I** (10 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\ln(x)$ pour $x > 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

●○○ **Exercice 2 Continuité - II** (10 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$, et $f(x) = e^x$ pour $x \geqslant 0$. La fonction f est-elle continue ?

●○○ **Exercice 3 Continuité - III** (10 min.)

Etudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto x - [x]$ en 0.

●○○ **Exercice 4 Continuité - IV** (10 min.)

Peut-on prolonger la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ en 0 ? en 1 ?

●○○ **Exercice 5 Prlongement par continuité II** (10 min.)

On considère la fonction f définie sur $[-1, 0[\cup]0, +\infty[$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $[-1, +\infty[$.

TVI

●○○ **Exercice 6 Théorème de la bijection** (10 min.)

Montrer que la fonction f définie sur $\mathrm{I} =]-2, +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$ établit une bijection de I sur un intervalle à déterminer. En déduire le tableau de variations, puis préciser sa réciproque.

●○○ **Exercice 7 TVI, fonction réciproque et suite** (30 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle à préciser.
3. Établir le tableau de variations de la fonction réciproque f^{-1} de f.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution. On note u_n cette solution.
5. Étudier les variations et la limite de (u_n).

Continuité et suites récurrentes

●○○ **Exercice 8 Intervalle stable et suite** (15 min.)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{5}{6} + \frac{1}{x^2+5}$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'intervalle $[0;2]$ est stable par f.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in [0;2]$.
3. (u_n) est-elle monotone ?
4. Quelles sont les limites possibles de (u_n) ?

●●○ Exercice 9 EDHEC (30 min.)

Soit $n \geqslant 3$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variations de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions. En notant u_n la plus petite, et v_n la plus grande, vérifier que $\forall\ n \geqslant 3, 0 < u_n < n < v_n$.
3. Quelle est la limite de la suite v ?
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $1 < u_n < e$.
5. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
6. Montrer que la suite u est convergente, puis en encadrant $\ln(u_n)$, déterminer sa limite.

●●○ Exercice 10 EML E 2015 (40 min.)

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Etude d'une fontion

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.
2. Etablir que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 e^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie II : Etude d'une suite

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
4. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Pour aller plus loin

●●○ Exercice 11 Continuité et point fixe (10 min.)

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f([0;1]) \subset [0;1]$. En posant $g : x \mapsto f(x) - x$, montrer que la fonction f admet au moins un point fixe.

●●○ Exercice 12 Continuité et égalité (10 min.)

Soit $n > 0$ et $a_1, \cdots a_n$ des réels deux à deux distincts de $[0;1]$. Soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$$

Calculer $f_n(0) + f_n(1)$, et en déduire qu'il existe au moins un réel u de $[0;1]$ tel que $f_n(u) = \frac{1}{2}$.

Corrigés

Continuité

Corrigés des exercices

Exercice 1

Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est continue comme produit de deux fonctions continues. De plus

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Puisque $f(0) = 0$, f est donc continue en 0.
Bilan : f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2

Sur R_-^*, f est continue (car constante). Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est continue car la fonction exponentielle l'est. Le problème se situe donc en 0. Or

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = f(0) = 1$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$: la fonction f n'est donc pas continue en 0, et n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Pour étudier la continuité de la fonction f en 0, il faut déterminer la limite de f en 0^- et en 0^+.

- Pour tout réel $x \in]-1;0[$, $[x] = -1$, donc $f(x) = x-(-1) = x+1$. On a donc

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x+1 = 1$$

- Pour tout réel $x \in]0;1[$, $[x] = 0$, donc $f(x) = x-0 = x$. On a donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$: la fonction f n'est pas continue en 0.

Exercice 4

La fonction f est définie sur $]0;1[$. Pour la prolonger par continuité en 0 ou en 1, il faut déterminer ses limites aux bornes.

- Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, par quotient

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

On peut donc prolonger par continuité la fonction f en 0, en posant $f(0) = 0$.

- Puisque $\ln(1) = 0$ et que pour tout réel $x \in]0;1[$, $\ln(x) < 0$, par quotient

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

On ne peut donc pas prolonger par continuité la fonction f en 1.

Exercice 5

La fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est définie et continue sur $[-1,+\infty[$ par composée. Par somme et quotient, on en déduit que f est bien continue sur $[-1,0[\cup]0,+\infty[$.

Déterminons sa limite en 0. Écrite sous cette forme, elle est inderterminée. Utilisons la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}^2 - 1^2}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \\ &= \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \end{aligned}$$

Quand x tend vers 0, $x+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et par composée

$$\sqrt{x+1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sqrt{1} = 1$$

Finalement, par somme et quotient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. On peut donc prolonger la fonction f en 0 par continuité, en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 6

f est définie et dérivable sur I, par somme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Ainsi, pour tout $x > -2$, $f'(x) > 0$. De plus, par somme et quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	
variations de f	$-\infty$ ↗	2

La fonction f est donc :

- continue sur I (comme somme et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas; ou alors, en anticipant sur un prochain chapitre, parce qu'elle est dérivable);
- strictement croissante sur I (car sa dérivée est strictement positive sur I).

Le théorème de la bijection nous garantit que f établit une bijection de I sur $f(\mathrm{I}) =]-\infty, 2[$.
Le même théorème garantit que f^{-1} est continue, et de même monotonie; son tableau de variations est :

x	$-\infty$	2
variations de f^{-1}	0 ↗	$+\infty$

Ici, on peut expliciter la bijection réciproque. Soit $x \in \mathrm{I}$ et $y \in]-\infty, 2[$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x+2} = y \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} = 2 - y \\ &\Leftrightarrow x + 2 = \frac{1}{2-y} \text{ valide car } y < 2 \\ &\Leftrightarrow x = -2 + \frac{1}{2-y} \end{aligned}$$

On a obtenu l'expression de f^{-1} :

$$\forall\, x \in]-\infty, 2[, \quad f^{-1}(x) = -2 + \frac{1}{2-x}$$

Exercice 7

1. La fonction f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $f' : x \longmapsto 3x^2 + 2x + 1$. Son discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 = -8 < 0$. Ainsi, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$. De plus, d'après la règle du terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

et $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} f(0) = -1$ par continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.
On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	
variations de f	-1 $\nearrow$	$+\infty$

2. L'application f est continue sur $\mathbb{R}^+$, et strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, f est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+) = [-1, +\infty[$.
3. Le théorème de la bijection nous garantit également que f^{-1} est continue sur $[-1, +\infty[$ et de même monotonie que f. On obtient le tableau de variations suivant :

x	-1	$+\infty$
variations de f^{-1}	0 $\nearrow$	$+\infty$

4. f étant bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[-1, +\infty[$, pour tout $n \geqslant 1$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.
5. En utilisant f^{-1}, on peut écrire $x_n = f^{-1}(n)$. Le tableau de variations nous garantit alors deux choses :
- f^{-1} étant strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, on en déduit que la suite (x_n) est également strictement croissante.
- Puisque $f^{-1}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, par définition séquentielle de la limite, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$$

Exercice 8

1. Puisque $x^2 + 5 > 0$ pour tout réel x, f est définie et dérivable comme somme et quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. On a alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+5)^2}$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $-2x$. Par quotient, rapidement, on a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{5}{6}$$

On obtient donc le tableau suivant, sachant que $f(0) = \frac{5}{6} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$\frac{5}{6}$	$\nearrow$	$\frac{31}{30}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}$

On remarque que sur $[0,2]$, f est décroissante. De plus, $f(0) = \frac{31}{30} \in [0,2]$ et $f(2) = \frac{5}{6} + \frac{1}{9} = \frac{13}{18} \in [0,2]$. Par décroissance de f, on en déduit que $f([0,2]) \subset [0,2]$ et $[0,2]$ est un intervalle stable de f.

2. Récurrence classique. Pour l'hérédité, puisque $u_n \in [0,2]$ et que $[0,2]$ est stable par f, alors $f(u_n) \in [0,2]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0,2]$.

3. On constate que $u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{31}{30} > 0 = u_0$. Puisque u_0 et u_1 sont dans $[0,2]$, et que sur cet intervalle, f est strictement décroissante, alors :

$$u_1 > u_0 \implies f(u_1) < f(u_0) \text{ soit } u_2 < u_1$$

Ainsi, la suite n'est ni croissante, ni décroissante.

4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Toute limite ℓ de u vérifiera le théorème du point fixe, c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\Leftrightarrow \frac{5}{6} + \frac{1}{\ell^2+5} = \ell \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{6}(\ell^2+5) + 1 = \ell(\ell^2+5) \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{6}\ell^2 + \frac{25}{6} + 1 = \ell^3 + 5\ell \\ &\Leftrightarrow \ell^3 - \frac{5}{6}\ell^2 + 5\ell - \frac{31}{6} \end{aligned}$$

1 est une racine de $\ell^3 - \frac{5}{6}\ell^2 + 5\ell - \frac{31}{6}$. On obtient, après factorisation

$$\ell^3 - \frac{5}{6}\ell^2 + 5\ell - \frac{31}{6} = (\ell - 1)\left(\ell^2 + \frac{1}{6}\ell + \frac{31}{6}\right)$$

Le trinôme du second degré qui apparait n'a pas de racine (son discriminant vaut $\Delta = \frac{-743}{36} < 0$).
On a donc montré que $f(\ell) = \ell$ si et seulement si $\ell = 1$. La seule limite possible est 1.

⚠ **Attention**
Ce n'est pas parce qu'on a qu'une seule limite qu'on est sûr que la suite converge vers 1. Il faut d'abord montrer la convergence !

Exercice 9

1. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (*on y reviendra dans un prochain chapitre*) et sa dérivée est donnée par

$$\forall\, x > 0,\; f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$$

Puisque $x > 0$, on constate que le numérateur est positif sur $[n, +\infty[$ et négatif sur $]0, n]$. La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $]0, n]$ puis strictement croissante sur $[n, +\infty[$. De plus

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - n\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty \text{ par croissance comparée}$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f_n(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$n - \ln(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Pour $n \geqslant 3$, $n - n\ln(n) = n(1 - \ln(n)) < 0$. Ainsi, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement décroissante sur $]0; n]$ et strictement croissante sur $[n; +\infty[$. De plus,

$$f_n(]0; n]) =]n - n\ln(n); +\infty[\text{ et } f_n([n; +\infty[) =]n - n\ln(n); +\infty[\text{ avec } 0 \in]n - n\ln(n); +\infty[$$

D'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]0; n]$, que l'on note u_n, et une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $[n; +\infty[$, que l'on note v_n. Ainsi,

$$0 < u_n \leqslant n \leqslant v_n$$

Or, $f_n(n) = n - n\ln(n) \neq 0$ pour tout $n \geqslant 3$. Ainsi

$$0 < u_n < n < v_n$$

3. Puisque, pour tout $n \geqslant 3$, $n < v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, par théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

4. Pour $n \geqslant 3$, on a $1 \in]0; n[$ et $e \in]0; n[$. De plus,

$$f_n(1) = 1 - n\ln(1) = 1 > 0 \text{ et } f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0 \text{ si } n \geqslant 3$$

Par stricte décroissance de f_n sur $]0; n[$, on en déduit donc

$$f(e) < f_n(u_n) < f(1) \Rightarrow 1 < u_n < e$$

5. Par définition de u_{n+1}, on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. Ainsi,

$$u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$$

Ainsi,

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) = (n+1)\ln(u_{n+1}) - n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$$

D'après la question précédente, $1 < u_{n+1} < e$ donc $\ln(u_{n+1}) > 0$. Donc

$$f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$$

Par stricte décroissance de f_n sur $]0; n]$, on en déduit donc que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 3.
6. La suite u étant décroissante à partir du rang 3, et minorée par 1 d'après la question 3., elle converge donc par le théorème de convergence monotone. On sait que

$$f_n(u_n) = u_n - n\ln(u_n) = 0 \Leftrightarrow \ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$$

Puisque $1 < u_n < e$, on obtient $0 < \frac{u_n}{n} < \frac{e}{n}$. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n} = 0$$

d'après le théorème d'encadrementn, la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge, et sa limite vaut 0. Or, $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$. Donc $(\ln(u_n))$ converge également vers 0. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(u_n)} = 1$$

Exercice 10

Exercice 11

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. g est continue comme somme de deux fonctions continue. De plus :

- $g(0) = f(0) \geqslant 0$ car $f([0;1]) \subset [0;1]$.
- $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car pour tout réel $x \in [0;1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant f(x) - 1 \leqslant 0$.

Ainsi, g est continue, $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0;1]$, que l'on note α. Ainsi, $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$: f admet au moins un point fixe.

Exercice 12

Puisque, pour tout entier k entre 1 et n, $a_k \in [0;1]$, on a $|a_k| = a_k$ et $|1 - a_k| = 1 - a_k$. Ainsi,

$$f_n(0) + f_n(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|-a_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|1-a_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |1-a_k|) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k + 1 - a_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{1}{n}\times n = 1$$

Ainsi, $f_n(0) = 1 - f_n(1)$. Ainsi, si $f_n(0) \leqslant \frac{1}{2}$, nécessairement $f_n(1) = 1 - f_n(0) \geqslant \frac{1}{2}$. Réciproquement, si $f_n(0) \geqslant \frac{1}{2}$ alors $f_n(1) = 1 - f_n(0) \leqslant \frac{1}{2}$. Dans tous les cas, l'un des deux est inférieur à $\frac{1}{2}$ et l'autre est supérieur à $\frac{1}{2}$. La fonction f étant continue sur $[0;1]$, comme somme de fonctions continues, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel u tel que $f(u) = \frac{1}{2}$.

13

Chapitre

Calcul différentiel

Résumé

Dans ce chapitre, on (re)définit rigoureusement la notion de nombre dérivé et de fonction dérivée. On utilise ensuite celle-ci pour l'étude de fonctions (variation, convexité), et pour obtenir de jolis résultats (inégalité des accroissements finis, inégalité de convexité).

> *« Sans doute les infinis et les infiniment petits que nous concevons sont-ils imaginaires, mais aptes à déterminer des choses réelles, comme le font généralement du reste les racines imaginaires. Ils se trouvent dans les régions idéales, dont les choses sont régies comme par des lois, même si elles ne se trouvent pas dans les parties de la matière. »*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) – *Lettre à Jean Bernoulli (1698)*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de dérivabilité :
- Savoir montrer qu'une fonction est dérivable en un point en utilisant le taux d'accroissement . . . . □
- Savoir utiliser la dérivabilité à droite et à gauche pour démontrer une dérivabilité . . . . □
- Savoir déterminer l'équation d'une tangente à une courbe en un point . . . . □

② Savoir utiliser les formules de dérivation :
- connaître les dérivées des fonctions usuelles . . . . □
- savoir déterminer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, ou d'une composée . . □
- savoir déterminer la dérivée en un point d'une fonction réciproque . . . . □

③ Savoir utiliser le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ pour montrer qu'une fonction est dérivable en un point □

④ Concernant les applications :
- savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis . . . . □
- connaître le lien entre signe de la dérivée et monotonie d'une fonction . . . . □
- savoir déterminer la convexité d'une application . . . . □
- savoir utiliser la convexité pour en déduire des inégalités . . . . □

⑤ Savoir étudier complètement une fonction (tableau de variations, comportement asymptotique) . . . □

I. Dérivabilité en un point

1. Définition

Définition 13.1.

Soient $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est **dérivable** en x_0 si la fonction

$$\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

appelée **taux d'accroissement** de f en x_0, admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en x_0, et est notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Remarque

En posant $h = x - x_0$, et sous réserve d'existence, on a également

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Méthode

Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en x_0, on détermine le taux d'accroissement

$$\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et on cherche sa limite en x_0. Si la limite est finie et vaut a, la fonction f est dérivable en x_0, et $f'(x_0) = a$.

Exemple 13.1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrer que f est dérivable en 1.

Solution

Déterminer le taux d'accroissement :

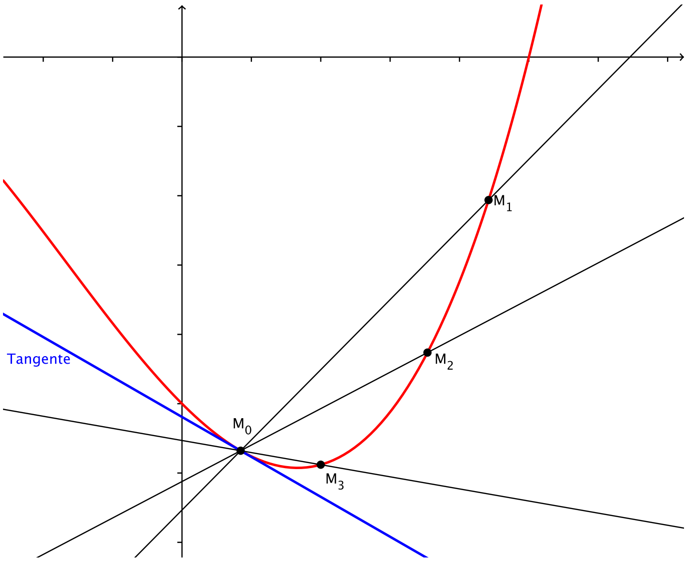
$$\tau_1(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \xrightarrow[x \to 1]{} 2$$

Donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = 2$.

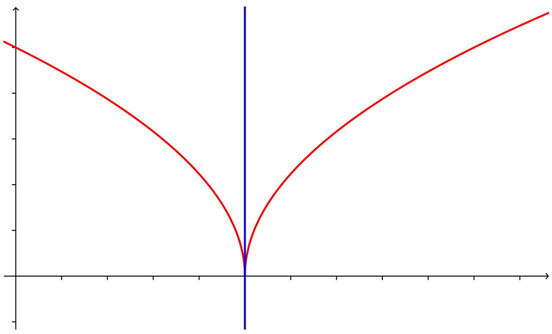
2. Interprétation géométrique

Si on note M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et M le point de coordonnées $(x, f(x))$, alors le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ représente le coefficient directeur de la droite $(\mathrm{M}_0\mathrm{M})$. Ainsi :

- Si f est dérivable en x_0, la famille de droites $(\mathrm{M}_0\mathrm{M})$ admet une position limite lorsque x tend vers x_0 : la droite passant par M_0 et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Cette droite est appelée **tangente** en M_0 à la courbe de f.



- Si la limite du taux d'accroissement est infinie, la courbe de f possède en x_0 une **tangente verticale** au point M_0, d'équation $x = x_0$.



Remarque

Si f est dérivable en x_0, la courbe de f admet donc une tangente en $M_0(x_0, f(x_0))$ d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exemple 13.2

Puisque la fonction carrée est dérivable en $x_0 = 1$, alors sa courbe représentative admet au point $M_0(1,1)$ une tangente, d'équation $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$.

☞ *Exercices 1 et 2*

3. Développement limité d'ordre 1

Supposons la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable au point d'abscisse $x_0 \in I$. Alors, la fonction ε, définie par

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)}{x - x_0}$$

est bien définie au voisinage de x_0, et est de limite nulle.

Définition 13.2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. Alors, au voisinage de x_0, on peut écrire

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

où ε est de limite 0 en x_0.
Cette écriture est appelé **développement limité** à l'ordre 1 en x_0 de la fonction f.

Remarque

Si f est dérivable en x_0, alors elle admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0.
Réciproquement, si f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 de la forme

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec ε de limite nulle en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a$.

Exemple 13.3

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ admet un développement limité en 1 et

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + (x-1)\varepsilon(x) = 1 + 2(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) = \underbrace{2x-1}_{\text{eq. de la tangente}} + (x-1)\varepsilon(x)$$

4. Dérivabilité et continuité

La notion de dérivabilité en un point est plus forte que la continuité. En effet :

Théorème 13.1.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Démonstration

Si f est dérivable en x_0, on peut donc écrire, au voisinage de x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x_0)$$

En faisant tendre x vers x_0, on obtient alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Donc f est bien continue en x_0.

⚠ Attention

Une fonction peut être continue en un point, sans être dérivable. Par exemple, la fonction racine est continue en 0. Pourtant, elle n'est pas dérivable en 0. En effet

$$\tau_0(x) = \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

5. Dérivabilité à droite et à gauche

Puisqu'on dispose de limites à droite et à gauche, on peut également s'intéresser à la dérivabilité à droite et à gauche en un point.

Définition 13.3.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \mathrm{I}$ qui n'est pas à la frontière (*pour pouvoir parler de limite à droite et à gauche*).

- On dit que f est **dérivable à droite** en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite *à droite* en x_0. Dans ce cas, on note

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite ···

à gauche en x_0. Dans ce cas, on note

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

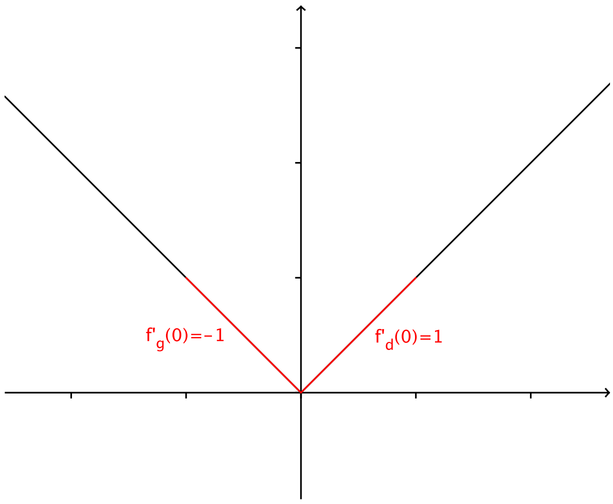
On dispose du même théorème que pour les limites :

Théorème 13.2.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \mathrm{I}$ qui n'est pas à la frontière de I. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 **et** $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Remarque

Une fonction peut être dérivable à droite et à gauche en un point, sans que $f'_d(x_0)$ soit égal à $f'_g(x_0)$. Dans ce cas, la courbe admet des **demi-tangentes**. Par exemple, si $f : x \mapsto |x|$, f admet une dérivée à droite en 0 (qui vaut $f'_d(0) = 1$) et une dérivée à gauche en 0 (qui vaut $f'_g(0) = -1$)).



Les nombres dérivés à droite et à gauche étant distincts, la fonction n'est pas dérivable en 0.

Remarque

Si la fonction f n'admet ni dérivée à droite ni à gauche en x_0, mais que

$$\lim_{x \to (x_0)^{-/+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

alors la courbe de f admet une **demi-tangente verticale** au point d'abscisse x_0.

Exemple 13.4

La fonction racine admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

6. Nombre dérivé et extremum

Théorème 13.3.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$ qui n'est pas à la frontière de I. On suppose que f est dérivable en x_0.
Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration

Supposons que f admette un maximum en x_0. Alors, sur un intervalle J autour de x_0, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Mais alors :

- Pour $x < x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$. Par passage à la limite, puisque f est dérivable en x_0, on a $f'(x_0) = f'_g(x_0) \geqslant 0$.
- Pour $x > x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$. Par passage à la limite, puisque f est dérivable en x_0, on a $f'(x_0) = f'_d(x_0) \leqslant 0$.

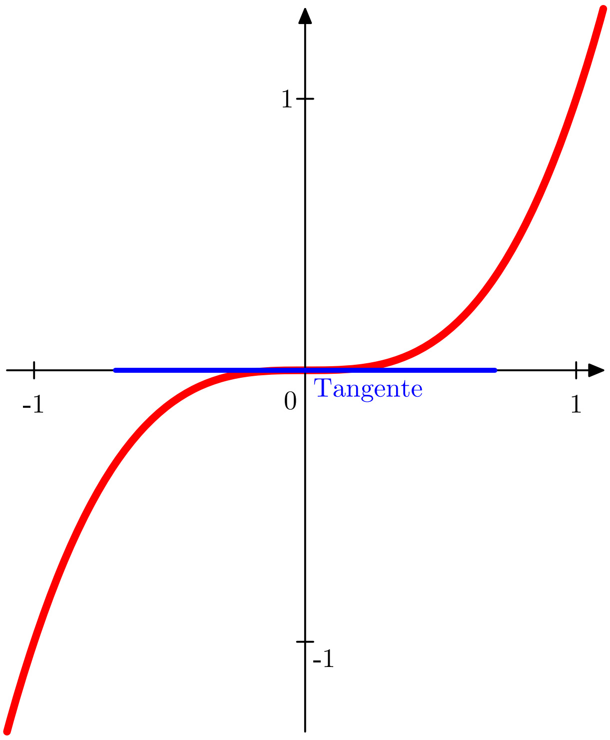
Et donc $f'(x_0) = 0$.

Remarque

Ainsi, si f est dérivable en x_0 et admet un extremum local, alors la tangente y est **horizontale**.

Attention

- La réciproque n'est pas vraie : si $f'(x_0) = 0$, cela n'implique pas nécessairement que f admet un extremum local en x_0. Par exemple, si $f : x \mapsto x^3$, alors $f'(0) = 0$, et pourtant 0 n'est pas un extremum local de f.



- Le théorème précédent n'est valable que pour tout point en dehors de la frontière de I. Ainsi, une fonction peut admettre un extremum local sans pour autant que la dérivée en ce point soit nulle : dans ce cas, elle admet son extremum local en une borne de l'intervalle.

II. Dérivabilité sur un intervalle

1. Fonction dérivée

Définition 13.4.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point de I. Sa fonction dérivée est alors notée $f' : x \mapsto f'(x)$ ou $\frac{df}{dx} : x \mapsto \frac{df}{dx}(x)$.

Notation

On dit que f est de classe $\mathscr{D}^1$ sur I (et on note $f \in \mathscr{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$) si f est **dérivable** sur I.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (et on note $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$) si f est **dérivable** sur I, et si sa **dérivée** f' est

continue sur I.

2. Dérivées des fonctions usuelles

Théorème 13.4.

On dispose des dérivées usuelles suivantes :

$\mathscr{D}_f$	$f(x)=$	dérivable sur	$f'(x)=$
$\mathbb{R}$	x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	x^n $(n<0)$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^{+*}$	x^α $(\alpha\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}$	a^x $(a>0)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$
$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}^{+*}$	$\ln x$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{x}$

Démonstration

Démontrons la première ligne du tableau. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $f : x\mapsto x^n$. Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Notons T le taux d'accroissement en x_0. On a donc

$$\mathrm{T}(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$$

- Premier cas : $x_0=0$. Dans ce cas $\mathrm{T}(x)=x^{n-1}\xrightarrow[x\to x_0]{}0=n\times 0^{n-1}$.
- Deuxième cas : $x_0\neq 0$. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\mathrm{T}(x)=\frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+x^{n-3}x_0^2+\cdots+x_0^{n-1})}{x-x_0}=x^{n-1}+x^{n-2}x_0+x^{n-3}x_0^2+\cdots+x_0^{n-1}$$

Il y a n termes dans la somme, et chaque terme tend vers x_0^{n-1} lorsque x tend vers x_0. Donc

$$\lim_{x\to x_0}\mathrm{T}(x)=n\times x_0^{n-1}$$

3. Opérations sur les dérivées

Théorème 13.5.

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :

1. $f+g$ et λf sont dérivables en x_0, et on a $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$ et $(\lambda f)'(x_0)=\lambda f'(x_0)$ (*linéarité de la dérivation*)
2. $f\times g$ est dérivable en x_0, et on a
$$(f\times g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$
3. Si g ne s'annule pas en x_0, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0, et on a
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Remarque

Ainsi, si f et g sont dérivables sur I, on a $(f+g)' = f'+g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$, $(f\times g)' = f'g + fg'$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Démonstration

Montrons le deuxième point. Notons T le taux d'accroissement de $f\times g$ en x_0. On a donc

$$\mathrm{T}(x) = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

et donc

$$\mathrm{T}(x) = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Puisque f est dérivable en x_0

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Puisque g est dérivable en x_0, g est continue en x_0. On a donc

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \text{ et } \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$$

Par somme et produit des limites, on a donc

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{T}(x) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Les autres se font de la même manière.

Théorème 13.6.

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ (pour pouvoir composer les fonctions). Si f est dérivable en x_0, et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g\circ f$ est dérivable en x_0, et on a

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Remarque

Ainsi, si f et g sont dérivables respectivement sur I et J, alors $g\circ f$ est dérivable sur I, et on a $(g\circ f)' = g'\circ f \times f'$.

Attention

On fera attention à bien justifier la dérivabilité d'une fonction composée

Exemple 13.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x par $f(x) = \ln(x^2+1)$. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Solution

La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1;+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Proposition 13.7. Composées particulières

Soit u une fonction dérivable sur I.

- Pour tout entier $n > 0$, la fonction u^n est dérivable sur I, et sa dérivée est $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- e^u est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

- Si u est strictement positive sur I, $\sqrt{u}$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si u est strictement positive sur I, u^α est dérivable sur I, et sa dérivée est $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$.
- Si u est strictement positive sur I, $\ln u$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Exemple 13.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

Solution

Puisque $x \mapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

☞ *Exercice 3.*

4. Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 13.8.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une fonction bijective, et soit $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$ sa fonction réciproque. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On suppose que f est dérivable en x_0.

- Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et on a
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$
- Si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et sa courbe représentative possède une tangente verticale en y_0.

Méthode

Pour montrer que f^{-1} est dérivable en réel y_0 :

- On écrit $y_0 = f(x_0)$ (soit $x_0 = f^{-1}(y_0)$) et on montre que f est dérivable en x_0.
- On s'assure que $f'(x_0) \neq 0$.

On peut alors conclure que f^{-1} est dérivable en y_0, et que

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Exercice 13.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0;1[$.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et déterminer sa fonction dérivée.

Solution

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout réel x,
$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par composée,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est a fortiori continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de la bijection, f est bijective de $]0;+\infty[$ sur $f(]0;+\infty[) =]0;1[$.

2. Remarquons que

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \ln(2) \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln(2)} \text{ car x>0}$$

Or f est dérivable en $\sqrt{\ln(2)}$ et

$$f'\left(\sqrt{\ln(2)}\right) = -2\sqrt{\ln(2)}\mathrm{e}^{-(\sqrt{\ln(2)})} = -2\sqrt{\ln(2)}\mathrm{e}^{-\ln(2)} \neq 0$$

Ainsi, f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-2\sqrt{\ln(2)}\mathrm{e}^{-\ln(2)}}$$

3. Soit $y \in]0;1[$. De la même manière,

$$f(x) = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2} = y \Leftrightarrow -x^2 = \ln(y) \Leftrightarrow x = \sqrt{-\ln(y)}$$

(qui a bien un sens car $y \in]0;1[$ donc $-\ln(y) > 0$). Or, f est dérivable en $\sqrt{-\ln(y)}$ et

$$f'\left(\sqrt{-\ln(y)}\right) = -2\sqrt{-\ln(y)}\mathrm{e}^{-(\sqrt{-\ln(y)})} = -2\sqrt{-\ln(y)}\mathrm{e}^{\ln(y)} = -2y\sqrt{-\ln(y)} \neq 0$$

Donc f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et

$$f'(y) = \frac{1}{f'\left(\sqrt{-\ln(y)}\right)} = \frac{1}{-2y\sqrt{-\ln(y)}}$$

Remarque

- Dans l'exercice précédent, on a en réalité montré que

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \sqrt{-\ln(y)}$$

Ainsi $f^{-1} :]0;1[\to \mathbb{R}$ est définie par,

$$\forall\ y \in]0;1[, f^{-1}(y) = \sqrt{-\ln(y)}$$

On peut donc remarquer que f^{-1} est bien dérivable sur $]0;1[$ par composée, et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{-\frac{1}{y}}{2\sqrt{-\ln(y)}}$$

- Si la dérivée f' ne s'annule jamais, la fonction f^{-1} est donc toujours dérivable. Dans l'exercice précédent, f' était toujours strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$

Théorème 13.9. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$

Soit I un intervalle, et $x_0 \in \mathrm{I}$. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- f est continue sur I.
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I}\setminus\{x_0\}$.
- f' admet une limite finie l lorsque x tend vers x_0.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et on a $f'(x_0) = l$.

Remarque

Ce théorème est très fort, puisqu'il permet de conclure que f est dérivable en x_0 sans avoir à étudier la dérivabilité en tant que telle. Il suffit d'étudier la limite de la dérivée.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction définie par morceaux est de classe $\mathscr{C}^1$, on utilisera très souvent le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$:

- on montre que f est continue sur I.
- on montre que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I sauf en un (ou plusieurs) points.
- on montre que f' admet des limites finies aux points où elle n'apparait pas dérivable.

On conclut alors qu'elle est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Exemple 13.8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution

f est bien continue sur $\mathbb{R}$. En effet, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (composée de deux fonctions continues), et par composée,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0)$$

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est donnée pour tout $x \neq 0$ par

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

qui est bien continue sur $\mathbb{R}^*$: f est donc bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Enfin, en posant $X = \frac{1}{x^2}$, on a

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{X\to+\infty} 2X^{3/2}e^{-X} = 0$$

par croissance comparée.
Bilan : d'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a $f'(0) = 0$.

6. Dérivées successives

Définition 13.5.

Soit I un intervalle.

- On dit que f est **deux fois dérivables** si f et f' sont dérivables. Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.
- Plus généralement, on dit que f est n **fois dérivables** ($n \geqslant 1$) si, pour tout entier $p \leqslant n-1$, $f^{(p)}$ est dérivable. On note alors $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Définition 13.6.

Soit I un intervalle. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable, et si pour tout $p \leqslant n$, $f^{(p)}$ est continue.

Remarque

D'après un théorème précédent, pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^n$, il suffit de montrer que f est n fois dérivable, et que sa dérivée n-ième est continue.

Définition 13.7.

Soit I un intervalle. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est indéfiniment dérivable, et si toutes ses dérivées sont continues.

Remarque

Toutes les fonctions usuelles (exponentielle, ln, polynômes) sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

☞ *Exercices 5, 7 et 8.*

III. Application de la dérivation

1. Dérivée nulle sur un intervalle

Théorème 13.10.

Soit I un intervalle fermé, ouvert, ou semi-ouvert de bornes $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Soit $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur I, et dérivable sur $]a;b[$. Alors

$$f \text{ est constante sur I} \Longleftrightarrow \forall\, x\in]a;b[,\ f'(x)=0$$

⚠ **Attention**

Si I n'est pas un intervalle, le résultat est faux! Par exemple, si $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x)=-\pi$ sur $]-\infty;0[$, et $f(x)=\sqrt{2}$ si $x>0$, alors f vérifie les conditions de l'hypothèse, sans pour autant que f soit constante.

Conséquence 13.11.

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et $a\in\mathrm{I}$. On suppose que $f(a)=g(a)$. Alors

$$f'=g' \text{ sur I} \Longleftrightarrow f=g \text{ sur I}$$

2. Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 13.12.

Soit I un intervalle de bornes a et b. Soit $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur $]a;b[$.

- f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si pour tout x de $]a;b[$, $f'(x)\geqslant 0$ (resp. $f'(x)\leqslant 0$)).
- f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si f' est strictement positive sur $]a;b[$ (resp. strictement négative) **sauf éventuellement en un nombre fini de réels** où f' s'annule.

Exemple 13.9

L'exemple classique est celui de la fonction cube : soit $f:x\mapsto x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x)=3x^2$. f' est strictement positive sauf pour $x=0$. D'après le théorème, la fonction f est tout de même strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

▶ ***Méthode***

Pour étudier les variations d'une fonction (quand ce n'est pas une fonction classique) :

- on justifie que la fonction est bien dérivable,
- on déterminer la dérivée de la fonction,
- on détermine le signe de la dérivée, avant de conclure.

Exemple 13.10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Solution

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme, et on a pour tout réel x, $f'(x)=3x^2+3$. Or, pour tout réel x, $f'(x)>0$: ainsi la fonction f est strictement croissante.

☞ *Exercices 14 et 15*

3. Inégalité des accroissements finis

Théorème 13.13. Inégalité des accroissements finis

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a;b]$, et dérivable sur $]a;b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que,

$$\forall\, x \in]a;b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$$

Alors on a

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

ou encore

$$m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \mathrm{M}$$

Démonstration

Démontrons l'une des inégalités, par exemple $f(b)-f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$. Pour cela, on introduit la fonction $g : [a;b] \to \mathbb{R}$, définie pour tout x de $[a;b]$ par $g(x) = f(b) - f(x) - \mathrm{M}(b-x)$. g est dérivable sur $]a;b[$ comme somme de fonctions dérivables, et on a

$$\forall\, x \in]a;b[, g'(x) = -f'(x) + \mathrm{M} \geqslant 0$$

Donc g est croissante sur $[a;b]$. Ainsi, pour tout $x \in [a;b], g(x) \leqslant g(b) = 0$. On a donc bien, en particulier $g(a) \leqslant 0$.

Conséquence 13.14.

Soit f est une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe un réel $\mathrm{C} > 0$ tel que

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ |f'(x)| \leqslant \mathrm{C}$$

Alors

$$\forall\, (a,b) \in \mathrm{I}^2,\ \ |f(b) - f(a)| \leqslant \mathrm{C}|b-a|$$

Méthode

L'inégalité des accroissements finis permet d'obtenir des inégalités intéressantes, en introduisant la bonne fonction.

Exemple 13.11

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [n;n+1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x \in [n;n+1]$ par $f(x) = \ln(x)$. Alors f est dérivable sur $[n;n+1]$, et on a

$$\frac{1}{n+1} \leqslant f'(x) = \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}(n+1-n) \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}(n+1-n) = \frac{1}{n}$$

☞ *Exercices 8 et 9.*

4. Nombre dérivé et extrema locaux

Nous avons vu que si $f'(x) = 0$, cela n'implique pas forcément qu'il y ait un extremum local en x. On dispose cependant du théorème suivant :

Théorème 13.15.

Soit I un intervalle, et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

Exemple 13.12

Dans le cas de la fonction cube, $f'(0) = 0$ mais la dérivée reste positive.

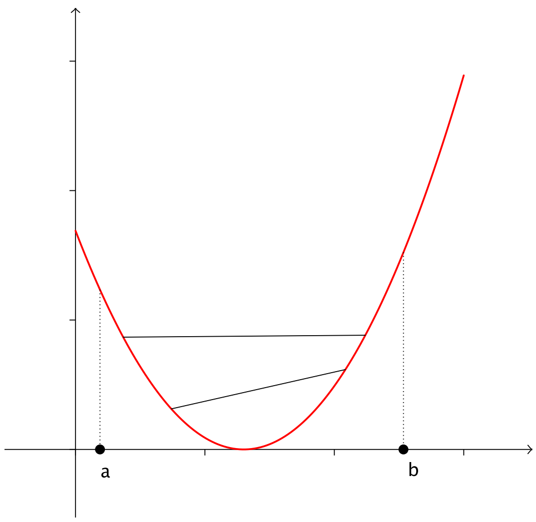
IV. Convexité

1. Définition

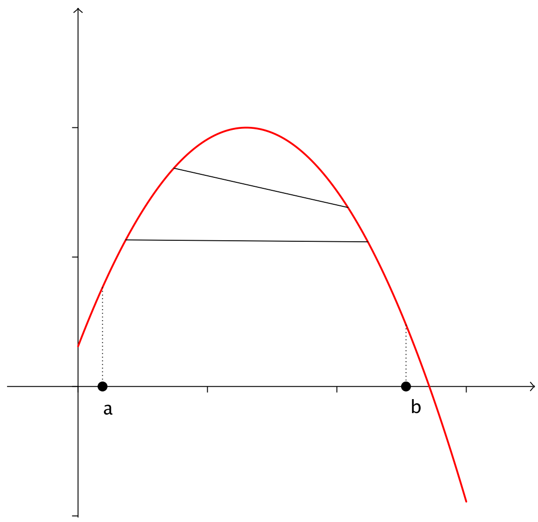
Définition 13.8.

Soit I un intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- On dit que f est **convexe** si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est en dessous de chacune de ses cordes.
- On dit que f est **concave** si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est au dessus de chacune de ses cordes.



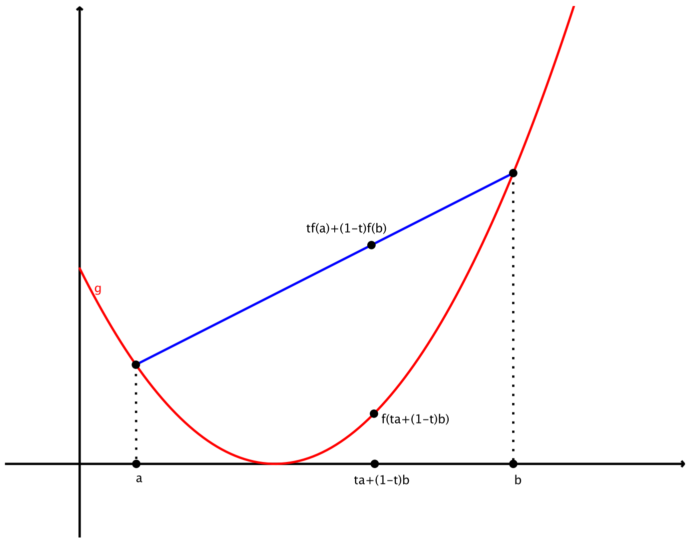
Fonction convexe



Fonction concave

Remarque

Si $\mathrm{I} = [a; b]$, on peut constater que $g(t) = ta + (1-t)b$ parcourt le segment $[a; b]$ si t parcourt $[0; 1]$. De même, $tf(a) + (1-t)f(b)$ parcourt la corde liant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Ainsi, cette définition peut également s'écrire, en traduisant mathématiquement :



Définition 13.9.

Soit I un intervalle, et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est convexe sur I, si, pour tout $a, b \in \mathrm{I}$ tels que $a < b$ on a
$$\forall\ t \in [0;1],\ f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b)$$
- La fonction f est concave sur I, si, pour tout $a, b \in \mathrm{I}$ tels que $a < b$ on a
$$\forall\ t \in [0;1],\ f(ta+(1-t)b) \geqslant tf(a)+(1-t)f(b)$$

Exemple 13.13

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet, soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $t \in [0;1]$. On a
$$f(ta+(1-t)b) = (ta+(1-t)b)^2 = t^2a^2+2t(1-t)ab+(1-t)^2b^2$$
On a alors
$$f(ta+(1-t)b)-(tf(a)+(1-t)f(b)) = t(t-1)a^2+t(1-t)2ab+(1-t)tb^2 = t(t-1)(a-b)^2 \leqslant 0 \text{ puisque } t \in [0;1]$$

2. Convexité, continuité et dérivabilité

Théorème 13.16.

Une fonction convexe sur un intervalle ouvert I est continue, et admet des dérivées à droite et à gauche en tout point.

Démonstration

Résultat admis.

Remarque

Ainsi, par contraposée du théorème précédent, si une fonction n'est pas continue sur un intervalle I, elle ne peut *a fortiori* pas être convexe sur cet intervalle

3. Convexité et dérivée

Théorème 13.17.

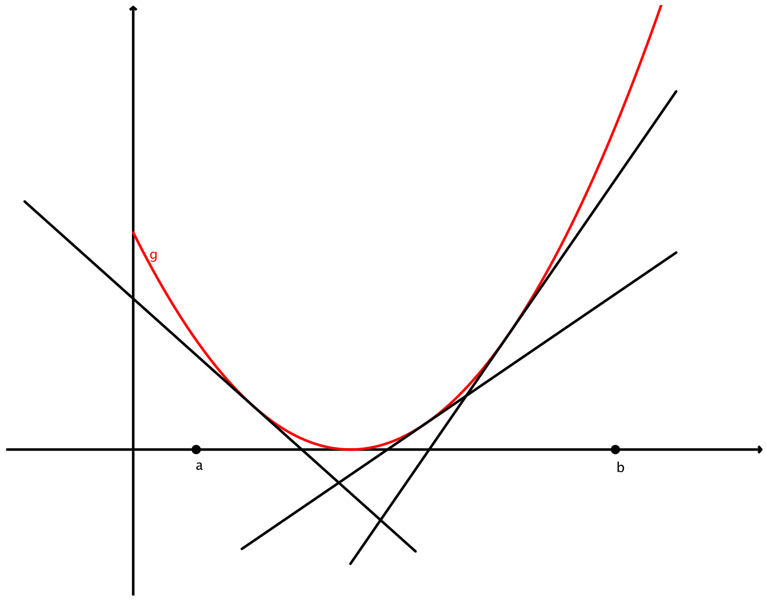
Soit I un intervalle ouvert, et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
Alors f est convexe (respectivement concave) sur I si, et seulement si, f' est croissante (resp. décroissante).

Démonstration
Résultat admis.

Exemple 13.14
- La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet, $\exp' = \exp$ qui est bien une fonction croissante.
- La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_*^+$. En effet, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Inégalité de convexité

Théorème 13.18.
Une fonction dérivable est convexe si et seulement si elle est au dessus de chacune de ses tangentes. Elle est concave si et seulement si elle est en dessous de chacune ses tangentes.



Application 13.15
Comme la fonction exp est convexe, la courbe de la fonction exp est toujours au dessus de ses tangentes. En particulier, elle est au-dessus de la tangente en 0, d'équation $y = x + 1$. Ainsi,

$$\forall\ x,\ e^x \geqslant 1 + x$$

De même, la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1)$ est concave sur $]-1;+\infty[$, donc la courbe de f est toujours en dessous de ses tangentes, et en particulier sa tangente en 0, d'équation $y = x$. Ainsi,

$$\forall\ x \in]-1;+\infty[,\ \ln(x+1) \leqslant x$$

5. Convexité et signe de f''

Théorème 13.19.
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors f est convexe (respectivement concave) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).

Démonstration
Supposons la fonction f deux fois dérivable sur I et convexe. D'après le théorème précédent, la fonction f' est donc croissante. Puisque f' est elle-même dérivable, f' est croissante si et seulement si f'' est

positive.

Exemple 13.16
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 - \ln(x)$. Alors, f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$$

La dérivée seconde étant positive sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

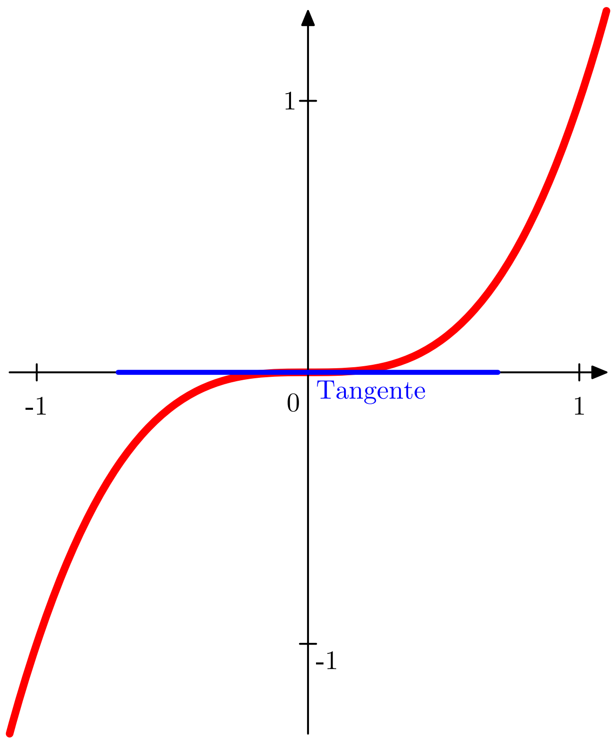
Méthode
Pour montrer qu'une fonction est convexe, ou concave, tout dépend de sa régularité :
- si elle est de classe $\mathscr{C}^2$ (ou, au moins, deux fois dérivable), on calcule sa dérivée seconde, et on s'intéresse à son signe.
- si elle n'est pas deux fois dérivable, mais au moins dérivable, on la dérive et on vérifie le sens de variation de sa dérivée.
- si elle n'est pas dérivable, on part sur la définition de base, ou on se ramène à des fonctions connues.

☞ *Exercices 10 et 11.*

6. Point d'inflexion

Définition 13.10.
Un **point d'inflexion** de la courbe $\mathscr{C}$ est un point où la courbe $\mathscr{C}$ traverse sa tangente en ce point. Lorsque sa courbe franchit un point d'inflexion, la convexité change de sens.

Exemple 13.17
Soit $f : x \mapsto x^3$. Alors la tangente au point d'abscisse 0 coupe la courbe donc 0 est un point d'inflexion.



Théorème 13.20.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Si la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en x_0, alors le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0 est un point d'inflexion.

Attention

Le point d'inflexion peut exister sans que la fonction soit de classe $\mathscr{C}^2$: c'est donc une condition suffisante, mais pas nécessaire.

Méthode

Pour déterminer l'existence potentielle d'un point d'inflexion, si la fonction est de classe $\mathscr{C}^2$:

- on détermine la dérivée seconde de la fonction,
- on dresse le tableau de signe de la dérivée seconde
- on conclut, en cherchant les réels pour lesquels la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

Exemple 13.18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2$. Déterminer les éventuels points d'inflexion de f.

Solution

f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme, et on a

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$$

En dressant le tableau de signe de f'', on constate que la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en -1 et en 1. Ainsi, la courbe de f admet deux points d'inflexion.

Exercice 12.

V. Exercices bilans

Exercice 13.19 (Ecricome 2014)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = e \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, (u_n) existe.
2. Ecrire une fonction Scilab qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.
3. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
4. Etablir que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.
5. Montrer que, pour $x \in]0;+\infty[$, $f'(x)$ peut s'écrire
$$\forall\, x > 0,\ f'(x) = \frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \frac{1}{1+x}}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2}$$
6. En utilisant le résultat $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$ que l'on admettra, montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, et déterminer $f'(0)$.
7. Etablir que
$$\forall\, x \geqslant e-1,\ f(x) \leqslant x \text{ et } (x+1)\ln(x+1) \geqslant x+1$$
En déduire que
$$\forall\, x \geqslant e-1,\ f'(x) \geqslant 0$$

8. Démontrer que
$$\forall\, n,\ \mathrm{e}-1 \leqslant u_n$$
9. Etablir que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.

Solution

1. Pour tout réel $x>0$, $x+1>1$ donc $\ln(x+1)>\ln(1)=0$ par stricte croissance de la fonction ln. Par quotient, $f(x)>0$ si $x>0$. Ainsi, on a $f(]0;+\infty[)\subset]0;+\infty[$.
Montrons alors, par récurrence, la proposition P définie pour tout entier n par P_n : “u_n existe et $u_n>0$”.
   - Pour $n=0$, u_0 est bien défini, et $u_0=1>0$. P_0 est donc vraie.
   - Supposons que la proposition P_n soit vraie pour un certain entier n fixé. Ainsi, par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n>0$. Mais alors, d'après ce qui précède, $f(u_n)$ existe (car $u_n>0$) et $f(u_n)>0$ puisque la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc u_{n+1} existe et $u_{n+1}>0$: P_{n+1} est également vraie.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n : la suite (u_n) est donc bien définie.
2. La suite étant définie par une relation $u_{n+1}=f(u_n)$, on peut utiliser une boucle *for* pour calculer u_N.

```
// Résumé : calcul de u_N dans le cas d'une suite u_(n+1)=f(u_n)
//          avec f:x -> x/ln(1+x)

// Rang voulu :
N = 5

// Valeur de u_0 :
U = exp(1)

// Boucle pour calculer u_N
for i=1:N
    U= U / log(1+U) // Rappel : la fonction ln s'écrit log en Scilab
end

// Affichage de la valeur de u_N
disp("U␣=␣", U)
```

3. f est continue sur $]0;+\infty[$ comme quotient d'un polynôme par une fonction logarithme, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, puisque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, on a, par quotient,
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1=f(0)$$
La fonction f est donc continue en 0.
Bilan : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
4. De même, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ comme quotient d'un polynôme par une fonction logarithme, dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, pour tout réel $x>0$
$$f'(x)=\frac{\ln(1+x)-x\frac{1}{1+x}}{(\ln(1+x))^2}=\frac{(x+1)\ln(x+1)-x}{(x+1)(\ln(x+1))^2}$$
5. Remarquons que, pour tout réel $x>0$
$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{1+x}=\frac{(x+1)\ln(x+1)-x(x+1)+x^2}{x^2(1+x)}=\frac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x^2(x+1)}$$
et donc,
$$f'(x)=\frac{x^2\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{1+x}\right)}{(\ln(1+x))^2}=\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{1+x}}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2}$$
6. En utilisant le résultat admis, par somme,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

et puisque $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, par quotient

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2}$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)$ admet une limite en 0. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

7. Si $x \geqslant \mathrm{e}-1$, alors $1+x \geqslant \mathrm{e}$ et donc, par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x) \geqslant \ln(\mathrm{e}) = 1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors $\dfrac{1}{\ln(1+x)} \leqslant 1$, et puisque $x > 0$,

$$f(x) \leqslant x$$

Enfin, puisque $\ln(x+1) \geqslant 1$ et que $x+1 > 0$, par produit

$$(x+1)\ln(x+1) \geqslant x+1$$

D'après le résultat précédent, on en déduit donc que, si $x \geqslant \mathrm{e}-1$,

$$(x+1)\ln(x+1) - x \geqslant 1 > 0$$

Puisque $x^2(x+1) > 0$, par quotient :

$$\forall\, x \geqslant e-1,\ f'(x) > 0$$

8. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : “$u_n \geqslant e-1$”.
   - Pour $n=0$, $u_0 = \mathrm{e} \geqslant \mathrm{e}-1$. Donc P_0 est vraie.
   - Supposons que la propriété P_n soit vraie pour un certain entier n fixé. Alors, par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant \mathrm{e}-1$. D'après la question précédente, puisque $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\mathrm{e}-1;+\infty[$, f est croissante sur $[\mathrm{e}-1;+\infty[$. Ainsi,

   $$f(\mathrm{e}-1) \leqslant f(u_n)$$

   c'est-à-dire $f(\mathrm{e}-1) \leqslant u_{n+1}$. Or, $f(\mathrm{e}-1) = \mathrm{e}-1$. Donc $\mathrm{e}-1 \leqslant u_{n+1}$ et P_{n+1} est également vraie.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n : la suite (u_n) est donc bien minorée par $\mathrm{e}-1$.

9. Pour tout entier n, $u_n \geqslant \mathrm{e}-1$. D'après la question 7, on a alors

$$f(u_n) \leqslant u_n$$

puisque $f(x) \leqslant x$ si $x \geqslant \mathrm{e}-1$. On obtient donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante, et puisqu'elle minorée (question précédente), elle converge.
Notons ℓ sa limite. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, d'après le théorème du point fixe, ℓ est un point fixe de f, et puisque 0 n'est pas un point fixe (car $f(0) = 1$), ℓ vérifie donc

$$\frac{\ell}{\ln(\ell+1)} = \ell$$

soit $\frac{1}{\ln(\ell+1)} = 1$ (car $\ell \neq 0$), c'est-à-dire $\ell = \mathrm{e}-1$.
Bilan : la suite (u_n) converge vers $\mathrm{e}-1$.

☞ *Exercices 13, 16, 17, 18, 19 et 20*

Exercices

Calcul différentiel

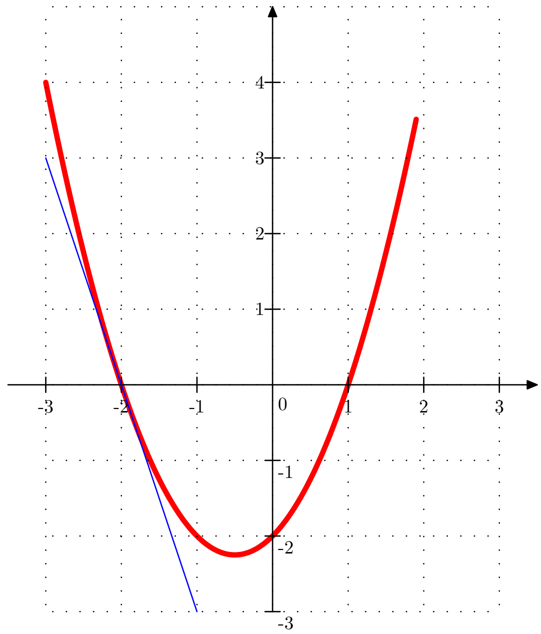
13

Exercices

Exercices de base

●○○ Exercice 1 Dérivée et représentation graphique (10 min.)

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2-4x+5$. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1, puis son équation. Tracer la courbe représentative de g et cette tangente.
2. On considère la fonction f dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Sur ce même dessin est tracée la tangente T à la courbe au point d'abscisse -2 (elle passe par les points $(-2;0)$ et $(-3;3)$). Déterminer $f(-2)$ et $f'(-2)$ à partir du graphique.

●○○ Exercice 2 Limite et dérivabilité (10 min.)

En reconnaissant le calcul d'un nombre dérivée, déterminer :

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1} \qquad \lim_{x\to a}\frac{e^{x^2}-e^{a^2}}{x-a}.$$

●○○ Exercice 3 Dérivée - I (10 min.)

Justifier que les fonctions suivantes sont dérivables sur le domaine I donné, et déterminer la fonction dérivée.

$f(x)=x\sqrt{x}, \quad \mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$
$g(x)=(x^2+x+1)e^x, \quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$
$h_1(x)=\ln(1+x^2)$ et $h(x)=\frac{1}{\ln(1+x^2)}, \quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$
$i(x)=\ln(\ln(x)), \quad \mathrm{I}=]1;+\infty[$

$j(x)=2^x, \quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$
$k(x)=x^{2,3}, \quad \mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$
$l(x)=x^x, \quad \mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$

●○○ **Exercice 4 Parité et dérivée** (5 min.)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.

Dérivabilité

●○○ **Exercice 5 Dérivées et récurrence** (15 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.
Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et montrer que pour tout $x\neq -1$,

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

●○○ **Exercice 6 Dérivées n-ième** (15 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\forall x \mathbb{R}\setminus\{-1;1\},\quad f(x)=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}.$$
2. En déduire la dérivée n-ième de f.

●○○ **Exercice 7 Deux, mais pas trois** (15 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$ si $x\geqslant 0$, et $f(x)=\mathrm{e}^x$ si $x<0$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas 3 fois dérivable.

Accroissements finis

●●○ **Exercice 8 Inégalité des accroissements finis et suite** (20 min.)

Soit k un entier $k\geqslant 2$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[k-1;k]$ à la fonction $f: x\mapsto \frac{-1}{x}$, démontrer que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout $n\geqslant 1$, $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ converge.

●●○ **Exercice 9 Inégalité des accroissements finis et suite - II** (20 min.)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\mathrm{e}^{-x}+1$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0=1 \quad \text{et } \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=h(u_n).$$

1. Étudier les variations de h et montrer que $h([1,2])\subset[1,2]$ (on pourra utiliser $h(1)\approx 1,4$ et $h(2)\approx 1,1$).
2. Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1,2]$ notée α.
3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad 1\leqslant u_n\leqslant 2$.
4. Montrer que, pour tout réel $x\in[1,2]$, $|h'(x)|\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
5. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N},\quad |u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}|u_n-\alpha|$.
6. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$|u_n-\alpha|\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}^n}.$$
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Convexité

●○○ **Exercice 10 Convexité** (5 min.)

Montrer que la fonction $g: x\mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ est convexe.

●○○ **Exercice 11 Inégalité de convexité** (10 min.)

Montrer que pour tout $x\in[0;1]$, $x\leqslant \mathrm{e}^x-1\leqslant x\mathrm{e}$.

●○○ Exercice 12 Convexité et représentation graphique (15 min.)

Soit $f : x \mapsto -x^2 + 3x - \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Etudier la convexité de f et déterminer les points d'inflexion. Déterminer les tangentes horizontales de la courbe représentative de f.

Etude de fonctions

●○○ Exercice 13 Etude de fonctions - I (20 min.)

Soit

$$f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et expliciter f'.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Etudier la convexité, concavité et points d'inflexion de f.
4. Tracer dans un repère orthonormé de la courbe de f, ainsi que la tangente au point d'inflexion.

●○○ Exercice 14 Étude de fonctions - II (30 min.)

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $]-1;+\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$, et expliciter sa dérivée.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$
   On pourra admettre que
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
5. Etudier la fonction g définie par $g(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$ sur $]-1;+\infty[$, et étudier ensuite l'existence de tangente horizontale pour f.
6. Dresser le tableau de variations de f sur $]-1;+\infty[$.
7. Déterminer la nature des branches asymptotiques de f en -1 et en $+\infty$, puis tracer la courbe de f.

●○○ Exercice 15 Étude de fonctions - III (20 min.)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer les branches asymptotiques.

●●○ Exercice 16 Suite, IAF et fonction (30 min.)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 4 + \frac{\ln u_n}{4}.$$

1. Soit $f(x) = 4 + \dfrac{\ln x}{4}$. Étudier la fonction f et montrer que $f([1, e^2]) \subset [1, e^2]$.
2. Étudier les variations de $h(x) = f(x) - x$ sur $[1, e^2]$. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution dans $[1, e^2]$ que l'on notera α.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et appartient à l'intervalle $[1, e^2]$.
4. (a) Montrer que $u_1 \geqslant u_0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   (b) En déduire que (u_n) converge vers α.
5. (a) Montrer que pour tout $x, y \in [1, e^2]$, $|f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{4}|x - y|$.
   (b) En déduire que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
   (c) Donner une majoration de $|u_n - \alpha|$ en fonction de n.
6. Déterminer un entier N tel que $|u_N - \alpha| \leqslant 10^{-9}$.

Sujets de concours

●○○ Exercice 17 Sujet de concours - I (30 min.)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1-x^2\ln(x) & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ en $+\infty$ ainsi que celle de $\frac{\varphi(x)}{x}$ en $+\infty$. Interpréter.
2. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Montrer que φ est dérivable en 0. Donner l'allure de la représentation graphique de φ au voisinage du point d'abscisse 0.
5. Dresser le tableau de variation de φ.
6. On rappelle que $\ln(2)\approx 0,7$. Montrer l'existence d'un unique réel α tel que $\varphi(\alpha)=0$, et justifier que : $\sqrt{2}<\alpha<2$.

●○○ Exercice 18 Sujet de concours - II (30 min.)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \varphi(x)=\ln(x)-\ln(x+1)+\frac{1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaitre les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2)\approx 0,7$ et $\ln(3)\approx 1,1$. Montrer que l'équation $\varphi(x)=1$ possède une unique solution notée α et que
$$\frac{1}{3}<\alpha<\frac{1}{2}$$
6. Proposer un programme en Scilab permettant d'encadrer dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

●○○ Exercice 19 Sujet de concours - III (30 min.)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x)=2\ln\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaitre les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln 2\approx 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que
$$\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0$$
$$\text{avec } 0<\alpha<\frac{1}{2}<\beta$$

●○○ Exercice 20 Sujet de concours - IV (30 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x)=2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, et vérifier que $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Etudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f.
5. Etudier la convexité de f, et montrer que la courbe de f admet un point d'inflexion.
6. On définit la fonction $g:\left[0;\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}$ par $\forall\, x\in\left[0;\frac{1}{2}\right],\ g(x)=2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}$. Montrer que g est bijective de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ dans un intervalle à considérer.

7. Dresser le tableau de variations complet de g^{-1}
8. Démontrer que g est dérivable en tout point de l'intervalle $\left]0; \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\right[$. Est-elle dérivable aux bornes ?
9. Tracer l'allure des fonctions g et g^{-1}.

Corrigés

Calcul différentiel

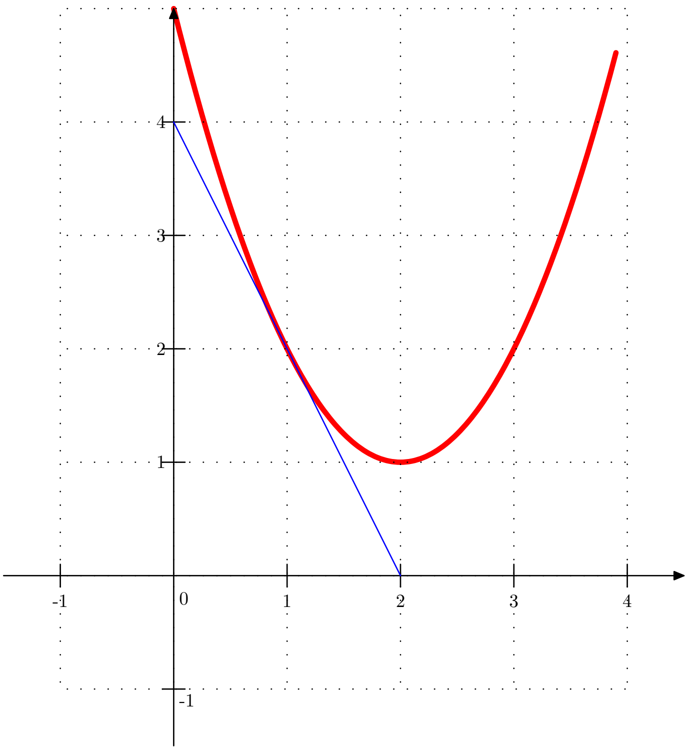
Corrigés des exercices

Exercice 1

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par définition, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est $g'(1) = -2$. Son équation est alors

$$\begin{aligned} y &= g'(1)(x-1) + g(1) \\ &= -2(x-1) + 2 = -2x + 4 \end{aligned}$$

On obtient alors la courbe et la tangente suivante :



2. Graphiquement, $f(-2) = 0$ et $f'(-2)$ est égal au coefficient directeur de la tangente, c'est-à-dire

$$f'(-2) = \frac{3-0}{-3-(-2)} = -3$$

Exercice 2

Dans chacun des cas, on essaie de faire apparaître un taux d'accroissement. Ainsi :

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

où $f : x \mapsto e^x$. f étant dérivable en 1 (car dérivable sur $\mathbb{R}$), on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1} = f'(1) = e}$$

Par le même raisonnement :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{g(x)-g(4)}{x-4} \text{ où } g : x\mapsto \sqrt{x} \text{ est dérivable en 4}\\
&= g'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\boxed{\frac{1}{4}}\\
\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} \text{ avec } h : x\mapsto x^n \text{ est dérivable en 1}\\
&= h'(1)=\boxed{n}\\
\lim_{x\to a}\frac{e^{x^2}-e^{a^2}}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{i(x)-i(a)}{x-a} \text{ où } i : x\mapsto e^{x^2} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\\
&= i'(a)=\boxed{2ae^{a^2}}
\end{aligned}$$

Exercice 3

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de $x\mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $x\mapsto\sqrt{x}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f'(x)=\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3x}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'un polynôme et de la fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x=(x^2+3x+2)e^x$$

Pour tout réel x, $1+x^2\geqslant 1$ et $x\mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction ln étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée, la fonction h_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Par quotient, h est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad h_1'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

puis

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad h'(x)=-\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{(\ln(1+x^2))^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)(\ln(1+x^2))^2}$$

Pour tout $x\in]1;+\infty[$, $\ln(x)>0$. Puisque la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée, la fonction i est également dérivable sur $]1;+\infty[$, et on a

$$\forall\, x>1,\quad i'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}=\frac{1}{x\ln(x)}$$

Par définition, pour tout réel x, $j(x)=e^{x\ln(2)}$. La fonction $x\mapsto x\ln(2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction affine). Par composée avec la fonction exp, dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que j est également dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad j'(x)=\ln(2)e^{x\ln(2)}=\ln(2)2^x$$

De même, pour tout $x>0$, $k(x)=e^{2,3\ln(x)}$. La fonction $x\mapsto 2,3\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée avec la fonction exp, dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\quad ,k'(x)=\frac{2,3}{x}e^{2,3\ln(x)}=\frac{2,3}{x}x^{2,3}=2,3x^{1,3}$$

Enfin, pour tout $x>0$, $l(x)=x^x=e^{x\ln(x)}$. Par produit, $x\mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et par composée avec exp, dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que l est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\quad l'(x)=\left(1\ln(x)+x\frac{1}{x}\right)e^{x\ln(x)}=(\ln(x)+1)x^x$$

Exercice 4

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f' est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
Par parité de f, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(-x)=f(x)$$

On dérive cette expression :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad -f'(-x)=f'(x)$$

et donc, pour tout réel x, $f'(-x)=-f'(x)$: f' est impaire.

Remarque
Ce résultat est plus générale : si f est paire et dérivable, f' est impaire, et si f est impaire et dérivable, f' est paire.

Exercice 5

Vu l'énoncé, on va procéder par récurrence. Soit P la proposition définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par P_n : "f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et pour tout $x \neq -1$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$".

- Pour $n = 1$, f est bien dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

qui est une fonction continue sur $\mathscr{D}_f$. Donc f est $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$: P_1 est vraie.
- Supposons que P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, f est de classe $\mathscr{C}^n$ et pour tout $x \neq -1$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Ainsi, $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, et

$$\forall\, x \neq -1,\ f^{(n+1)}(x) = -(n+1)\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+2}}$$

Cette fonction étant continue sur $\mathscr{D}_f$, f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et pour tout $x \neq -1$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 6

Tout d'abord, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ comme quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas.

1. Méthode classique : on met au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} &= \frac{a(1+x)+b(1-x)}{(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{(a-b)x+(a+b)}{1-x^2}\end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \sim \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}$$

2. On dérive chacun des deux termes séparément (en s'inspirant de l'exercice **??**) et on obtient :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\},\quad f^{(n)}(x) = \frac{\frac{1}{2}(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{\frac{1}{2} n!}{(1+x)^{n+1}}}$$

Exercice 7

f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme polynôme et fonction exponentielle. La difficulté se trouve en 0.

• **Continuité** : on constate que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 + x + \frac{x^2}{2} = 1$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$. Les deux limites étant égales, et valant $f(0)$, la fonction f est continue en 0, et donc f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

• **Caractère** $\mathscr{C}^1$: pour tout $x \in]-\infty;0[$, $f'(x) = 1 + x$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$. On constate alors que

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 + x = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$$

Ainsi, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f étant continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et f' admettant une limite finie en 0, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $f'(0) = 1$.

• **Caractère** $\mathscr{C}^2$: pour tout $x \in]-\infty;0[$, $f''(x) = 1$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) = \mathrm{e}^x$. On constate alors que

$$\lim_{x\to 0^-} f''(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f''(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$$

Ainsi, $\lim_{x\to 0^-} f''(x) = \lim_{x\to 0^+} f''(x)$. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f' étant continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et f'' admettant une limite finie en 0, f' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et $f''(0) = 1$.

• **Dérivée troisième** : étant dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, montrons qu'elle n'est pas dérivable en 0 en déterminant les dérivées à droite et à gauche :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Ainsi, $f_d^{(3)}(0) = 1$ et $f_g^{(3)}(0) = 0$: $f^{(2)}$ n'est donc pas dérivable en 0, et donc f n'est pas trois fois dérivables en 0.

⚠ On constate que $f^{(3)}(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f^{(3)}(x) = \mathrm{e}^x$ pour $x > 0$. Ainsi, $\lim_{x\to 0^-} f^{(3)}(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} f^{(3)}(x) = 1$ qui sont des limites différentes. Mais en faisant cela, on ne montre pas que f n'est pas trois fois dérivables en 0. On montre simplement que la dérivée troisième n'est pas continue en 0, alors que $f^{(3)}(0)$ pourrait tout de même exister.

Exercice 8

La fonction f est dérivable sur $[k-1;k]$ $(k \geqslant 2)$ et pour tout réel $x \in [k-1;k]$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

Puisque f' est décroissante sur $[k-1;k]$, on a, pour tout réel x,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors, pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{k^2}(k-(k-1)) \leqslant f(k) - f(k-1) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}(k-(k-1))$$

soit

$$\frac{1}{k^2} \leqslant f(k) - f(k-1) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}$$

En additionnant ces inégalités pour k entre 2 et n (avec $n \geqslant 2$) :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(k-1) = f(n) - f(1) \text{ par téléscopage}$$

Puisque $f(n) \leqslant 0$ pour tout entier $n \geqslant 2$, on a enfin

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant -f(1) = 1$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$$

Ainsi, la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est majorée. De plus, elle est croissante, car

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (S_n) converge.

> **Remarque**
> La limite de la suite (S_n) est $\frac{\pi^2}{6}$, mais la démonstration est difficile.

Exercice 9

1. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une exponentielle et d'une fonction constante. On a, pour tout réel x

$$h'(x) = -e^{-x} < 0$$

De plus, par composée, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$$

On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
h	$+\infty$ ↘	1

Puisque $h(1) \approx 1,4 \in [1,2]$ et $h(2) \approx 1,1 \in [1,2]$, par décroissance de h, on en déduit que $h([1,2]) \subset [1,2]$.
2.

> **Remarque**
> Pour montrer qu'une équation du type $f(x) = g(x)$ admet une unique solution, on introduit la fonction différence $h = f - g$, et on applique le théorème de la bijection à celle-ci.

Notons f la fonction définie sur $[1,2]$ par $f(x) = h(x) - x$. f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables, et sa dérivée est $h : x \mapsto h'(x) - 1 = -e^{-x} - 1 < 0$.
La fonction f est donc continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[1,2]$. D'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $[1,2]$ sur $f([1,2])$.
Or $f(1) = h(1) - 1 \approx 0,4$ et $f(2) = h(2) - 2 \approx -0,9$. Ainsi, $0 \in f([1,2])$ et l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $[1,2]$, que l'on note α.
L'équation $h(x) = x$ admet une unique solution sur $[1,2]$.
3. On utilise le fait que $[1,2]$ soit stable par h. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : " $u_n \in [1,2]$".
$u_0 = 1 \in [1,2]$ donc P_0 est vraie.
Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie.
Ainsi, $u_n \in [1,2]$. Puisque $[1,2]$ est stable par h, $h(u_n) \in [1,2]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [1,2]$: P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n :

$$\forall\, n, \quad u_n \in [1,2]$$

4. On rappelle que $h : x \mapsto -e^{-x}$. Mais alors :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ donc } & -1 \geqslant -x \geqslant -2 \\ & \text{soit } e^{-1} \geqslant e^{-x} \geqslant e^{-2} \quad \text{car exp est croissante sur } \mathbb{R} \\ & \text{puis } -e^{-1} \leqslant h'(x) \leqslant -e^{-2} \end{aligned}$$

Or $-e^{-2} < 0 < \frac{1}{e}$ et donc

$$\forall\, x \in [1,2], \quad -\frac{1}{e} \leqslant h'(x) \leqslant \frac{1}{e}$$

c'est-à-dire $|h'(x)| \leqslant \frac{1}{e}$.

5. h est continue sur $[1,2]$, dérivable sur $]1,2[$ et pour tout $x \in]1,2[$, $|h'(x)| \leqslant \frac{1}{e}$. D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x,y) \in [1,2]^2, \quad |f(y)-f(x)| \leqslant \frac{1}{e}|y-x|$$

Posons alors $y = u_n \in [1,2]$ (d'après la question 3) et $x = \alpha \in [1,2]$ (d'après la question 2). On a alors

$$|f(u_n)-f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{e}|u_n-\alpha|$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ (d'après question 2), d'où

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{e}|u_n-\alpha|$$

6. Soit Q la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{e^n}$".
Pour $n=0$, $u_0 = 1$ donc $|u_0-\alpha| = \alpha-1 \in [0,1]$ (car $\alpha \in [1,2]$). Ainsi $|u_0-\alpha \leqslant 1 = \frac{1}{e^0}$: Q_0 est vraie.
Supposons la proposition Q_n vraie pour un certain entier n, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{e^n}$. Mais alors

$$\frac{1}{e}|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{e}\frac{1}{e^n} = \frac{1}{e^{n+1}}$$

Mais d'après la question précédente, $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{e}|u_n-\alpha|$, donc

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{e}|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}}$$

Ainsi, Q_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, Q_n est vraie pour tout entier n et donc

$$\forall\, n, \quad |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}}$$

7. Remarquons que $\frac{1}{e^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$$

Exercice 10

Pour tout réel x, $e^x+1>0$ donc la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$. Par composée, elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R},\ g''(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $(1+e^x)^2 > 0$. Par quotient, et pour tout réel x, $g''(x) > 0$.
Bilan : la fonction g est bien convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ (par exemple, parce qu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est elle-même, qui est strictement positive). Elle est donc également convexe sur $[0;1]$.
Étant convexe, sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes, y compris celle en 0. Or, l'équation de la tangente à la courbe d'exp en 0 est donnée par $T_0 : y = \exp'(0)(x-0)+\exp(0) = x+1$. Ainsi,

$$\forall\, x \in [0;1],\ e^x \geqslant x+1 \Leftrightarrow e^x-1 \geqslant x$$

Étant convexe, sa courbe est en dessous de toutes ses cordes, y compris celle passant par le point $(0;e^0)$ et $(1;e^1)$. L'équation de cette corde est

$$C_{01} : y = \frac{e^1-e^0}{1-0}x + e^0 = (e-1)x+1 = ex-x+1$$

Ainsi,

$$\forall\, x \in [0;1],\ e^x \leqslant ex-x+1 \Leftrightarrow e^x-1 \leqslant ex-x \leqslant ex \text{ car } x>0$$

Bilan : on a donc bien

$$\boxed{\forall\, x \in [0;1],\ x \leqslant e^x-1 \leqslant ex}$$

Exercice 12

La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et y est de classe $\mathscr{C}^2$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ (polynôme et logarithme). Ainsi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -2x+3-\frac{1}{x} \text{ et } f''(x) = -2+\frac{1}{x^2} = \frac{-2x^2+1}{x^2} = \frac{(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)}{x^2}$$

Pour tout réel $x>0$, $x^2>0$. On obtient le tableau de signe de f'' suivant :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$1-\sqrt{2}x$		$+$	0	$-$	
$1+\sqrt{2}x$		$+$		$+$	
$f''(x)$	||	$+$	0	$-$	

Bilan : f est convexe sur $\left]0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et est concave sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right[$. De plus, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc la courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Concernant les tangentes horizontales de la courbe de f, il faut déterminer les points d'annulation de la dérivée. Or,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -2x+3-\frac{1}{x} = \frac{-2x^2+3x-1}{x}$$

Donc $f'(x)$ s'annule si et seulement si $-2x^2+3x-1=0$. Notons P : $x \mapsto -2x^2+3x-1$. Le discriminant de P vaut $\Delta = 3^2-4\times(-2)\times(-1) = 1$ donc P admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-3-1}{2\times(-2)} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-3+1}{2\times(-2)} = \frac{1}{2}$$

Puisque x_1 et x_2 sont toutes les deux dans $\mathbb{R}_+^*$, f' s'annule en 1 et en $\frac{1}{2}$.
Bilan : la courbe de f admet deux tangentes horizontales, en $x=1$ et en $x=\frac{1}{2}$.

Exercice 13

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x+1>0$. Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)-(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$$

2. Pour tout réel x, $2\mathrm{e}^x>0$ et $(\mathrm{e}^x+1)^2>0$. Ainsi la dérivée f' est toujours strictement positive. De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \text{ par quotient}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1 \text{ par quotient}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

3. f est également de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{2\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)^2-2\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x))}{(1+\mathrm{e}^x)^4} = \frac{(1+\mathrm{e}^x)(2\mathrm{e}^x-4(\mathrm{e}^x)^2)}{(1+\mathrm{e}^x)^4} = \frac{(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x(2-2\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^4}$$

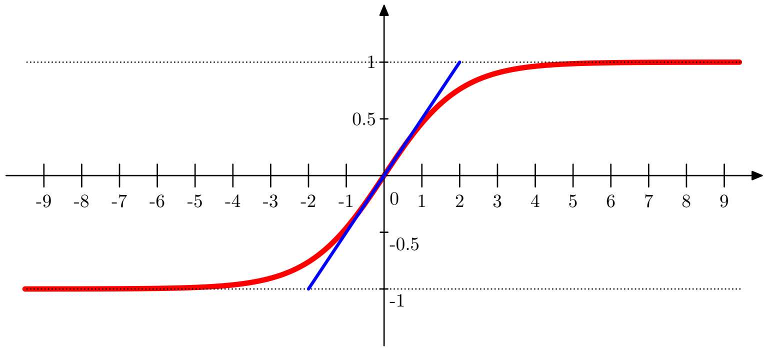
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>0$ et $1+\mathrm{e}^x>0$. De plus,

$$2-2\mathrm{e}^x>0 \Leftrightarrow 2>2\mathrm{e}^x \Leftrightarrow 1>\mathrm{e}^x \Leftrightarrow 0>x \text{ par stricte croissance de ln}$$

On obtient ainsi le tableau de signe suivant pour f'' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Bilan : f est convexe sur $]-\infty, 0[$ et est concave sur $]0;+\infty[$. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $x=0$ donc la courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x=0$.
4.



Exercice 14

1. f est continue sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues. On constate alors que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Ainsi, puisque $f(0)=0$, f est continue en 0.
Bilan : f est bien continue sur $]-1;+\infty[$.
2. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. On a

$$\forall\ x \in]-1;0[\cup[0;+\infty[,\ \ f'(x) = \frac{(1-\frac{1}{1+x})x - (x-\ln(1+x))1}{x^2} = \frac{-\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)}{x^2}$$

3. On souhaite montrer que f' admet une limite quand x tend vers 0. On utilise l'indication en écrivant

$$\forall\ x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{-\frac{x}{x+1}+x-x+\ln(x+1)}{x^2} = \frac{-\frac{x}{x+1}+x}{x^2} + \frac{\ln(x+1)-x}{x^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$, par somme,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2}$$

Ainsi, f est continue sur $]-1;+\infty[$, dérivable sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ et f' admet une limite en 0. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$.
4. f étant dérivable en 0, l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est donnée par

$$\mathrm{T}_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{2}x$$

5. Remarquons déjà que

$$f'(x) = \frac{-\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)}{x^2} = \frac{-x+(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{g(x)}{x^2(x+1)}$$

Donc f' s'annule sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ si et seulement si g s'annule, et f' est du signe de g sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.
g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables, et

$$\forall\ x \in]-1;+\infty[,\ \ g'(x) = \ln(1+x) + (1+x)\frac{1}{1+x} - 1 = \ln(1+x)$$

Ainsi $g'(x) = 0$ si et seulement si $1+x = 1$, -c'est-à-dire si et seulement si $x = 0$ qui n'appartient pas à $]-1;0[\cup]0;+\infty[$. De plus, en $x=0$, $f'(0) \neq 0$.
Bilan : la courbe de f n'admet pas de tangente horizontale.
De plus, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) > 0 \Leftrightarrow 1+x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ ce qui nous donne le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	0	↗	

6. D'après l'étude précédente, f' est du signe de g sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$. D'après les variations de g, g admet un minimum atteint en 0, et valant 0. Ainsi, g est strictement positive sur $]-1;+\infty[$ exceptée en 0, donc f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \ln(1+x) = -\infty$ donc par somme et quotient,

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$$

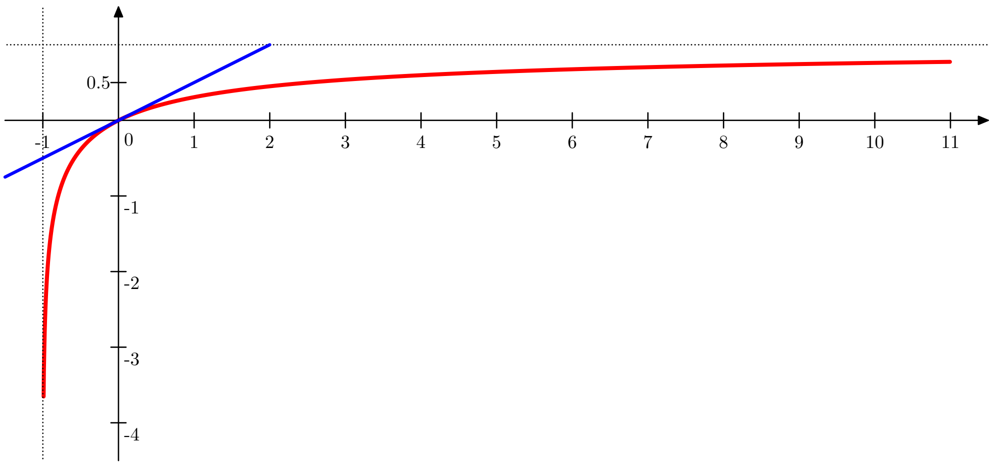
Enfin, pour $x>0$,

$$f(x) = \frac{x - \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, et par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$
On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	1

7. En -1, la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$. En $+\infty$, la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$. On obtient alors la courbe suivante :



Exercice 15

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et pour tout $x \neq 0$:

$$f(-x) = (-x)e^{-\frac{3}{|-x|}} = -xe^{-\frac{3}{|x|}} = -f(x)$$

en utilisant la parité de la fonction valeur absolue.
Bilan : la fonction f est impaire.
2. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues (exponentielle, inverse et valeur absolue).
Constatons enfin que $\lim\limits_{x\to0} -\dfrac{3}{|x|} = -\infty$, donc par composée, $\lim\limits_{x\to0} e^{-\frac{3}{|x|}} = 0$. Par produit,

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$$

La fonction f est donc également continue en 0.
Bilan : f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. ⚠ – Attention à la valeur absolue ! On décomposera toujours $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Pour tout $x>0$, $f(x)=xe^{-\frac{3}{x}}$ et pour tout $x<0$, $f(x)=xe^{-\frac{3}{-x}}=xe^{\frac{3}{x}}$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x>0$,

$$f'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}+x\left(\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x>0$,

$$f'(x)=\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}+x\left(-\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}\left(1-\frac{3}{x}\right)$$

Déterminons la limite de f' quand x tend vers 0 :

- Pour $x>0$, posons $\mathrm{X}=-\frac{3}{x}$. Alors,

$$\lim_{x\to0^+}\mathrm{X}=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\mathrm{X}\to-\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{X}}=0 \text{ ainsi que } \lim_{\mathrm{X}\to-\infty}\mathrm{X}\mathrm{e}^{x}=0 \text{ (croissances comparées)}$$

Par composée,

$$\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+}-\frac{3}{x}\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}=0$$

Par somme, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f'(x)=0$.

- De même, pour $x<0$, posons $\mathrm{X}=\frac{3}{x}$. Alors,

$$\lim_{x\to0^-}\mathrm{X}=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\mathrm{X}\to-\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{X}}=0 \text{ ainsi que } \lim_{\mathrm{X}\to-\infty}\mathrm{X}\mathrm{e}^{x}=0 \text{ (croissances comparées)}$$

Par composée,

$$\lim_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^-}\frac{3}{x}\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}=0$$

Par somme, $\displaystyle\lim_{x\to0^-}f'(x)=0$.
Ainsi, les limites à droite et à gauche étant égales, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to0}f'(x)=0$.
Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée admet une limite finie en 0. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0)=0$.

4. On a vu précédemment que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$ qui est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$. De même, pour tout $x<0$, $f'(x)=\left(1-\dfrac{3}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$ qui est également strictement positif sur $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi, pour tout $x\neq0$, $f'(x)>0$ et $f'(0)=0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, en posant $\mathrm{X}=-\frac{3}{|x|}$

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{X}=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{X}=0 \text{ et } \lim_{\mathrm{X}\to0}\mathrm{e}^{x}=1$$

donc par composée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}}=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}}=1$. Par produit, on en déduit donc que

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

5. Puisque les limites en l'infini sont infinies, il faut étudier le comportement asymptotique. Or, pour tout $x\neq0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}}$. D'après les limites étudiées précédemment, on obtient donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

On s'intéresse donc à $f(x)-x=x\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}}-1\right)$.

- Pour $x>0$, on peut écrire

$$f(x)-x=x(\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}-1)=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}-1}{-\frac{3}{x}}\times(-3)$$

En posant $X = -\frac{3}{x}$, on constate que $\lim_{x \to +\infty} X = 0$ et $\lim_{X \to 0} \frac{e^x - 1}{X} = 1$ (limite du cours). Par composée,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-\frac{3}{x}} - 1}{-\frac{3}{x}} = 1$$

et par produit,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = -3$$

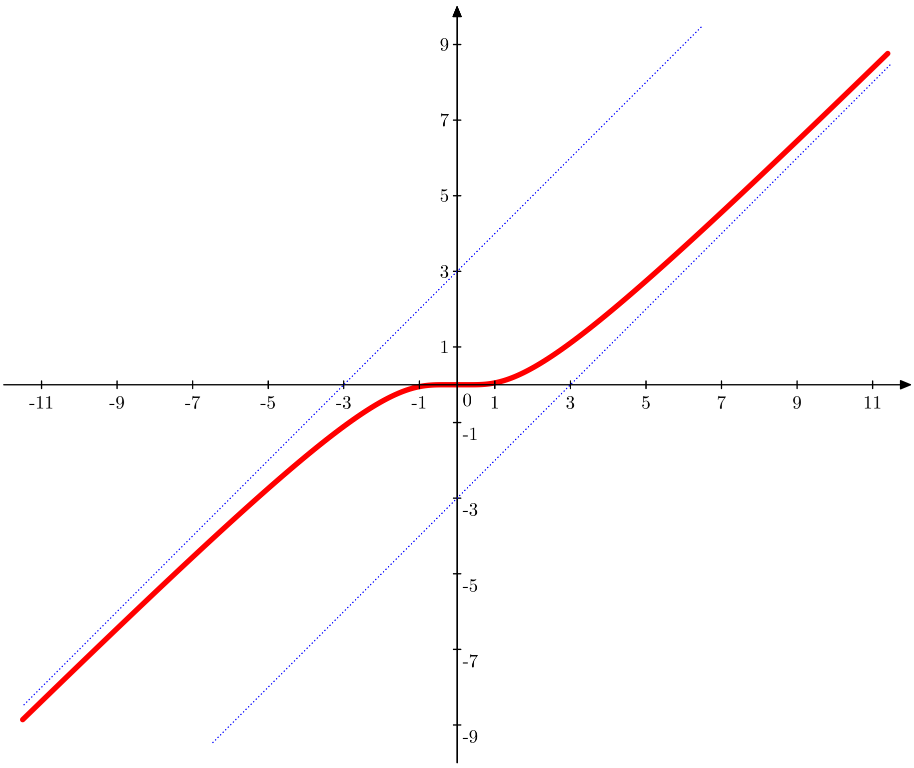
Ainsi, la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
- De la même manière, pour $x < 0$, on peut écrire

$$f(x) - x = x\left(e^{\frac{3}{x}} - 1\right) = \frac{e^{\frac{3}{x}} - 1}{\frac{3}{x}} \times 3$$

et par un même raisonnement

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = 3$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.
On obtient ainsi la courbe représentative suivante :



Exercice 16

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction logarithme) et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{4x} > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $f(1) = 4 \in [1, e^2]$ et $f(e^2) = 4 + \frac{1}{2} = 4,5 \in [1, e^2]$. Par stricte croissance de f, $f([1, e^2]) \subset [1, e^2]$.
2. h est dérivable sur $[1, e^2]$ comme somme de deux fonctions dérivables, et pour tout réel $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{4x} - 1 = \frac{1 - 4x}{4x}$$

Sur $[1, e^2]$, $h'(x) < 0$ et donc h est strictement décroissante sur $[1, e^2]$.
h est continue et strictement décroissante sur $[1, e^2]$. Ainsi, h établit une bijection de $[1, e^2]$ dans $h([1, e^2]) = [4,5 - e^2, 3]$. Or, $0 \in [4,5 - e^2, 3]$. Ainsi, puisque h est bijective, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1, e^2]$.
3. Récurrence classique, l'intervalle $[1, e^2]$ est stable par f.
4.
(a) $u_1 = 4 + \frac{\ln(4)}{4} > 4 = u_0$. Par récurrence ensuite, et puisque f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $u_{n+1} \geqslant u_n$, c'est-à-dire que u est croissante.

(b) (u_n) est croissante, majorée par e^2. D'après le théorème de convergence monotone, u converge. D'après le théorème du point fixe, la fonction f étant continue sur $[1, e^2]$, u converge vers un point fixe de f. Or, d'après la question 2, il y en a un seul.
Donc u converge vers α.

5. (a) Sur $[1, e^2]$:

$$1 \leqslant x \leqslant e^2 \text{ donc } 4 \leqslant 4x \leqslant 4e^2$$

$$\text{soit } \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4x} \geqslant \frac{1}{4e^2} \text{ car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

Ainsi,

$$-\frac{1}{4} < \frac{1}{4e^2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4} \text{ soit } \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{4}$$

f est continue sur $[1, e^2]$, dérivable sur $]1, e^2[$. D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [1, e^2], \quad |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{4}|y - x|$$

(b) On prend $y = u_n \in [1, e^2]$ et $x = \alpha \in [1, e^2]$. Puisque $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, on a

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

(c) On montre alors, par récurrence sur n, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

(d)

6. Il suffit de prendre $\left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| \leqslant 10^{-9}$, c'est-à-dire

$$n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{10^{-9}}{|u_0 - \alpha|}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$$

Exercice 17

1. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln(x) = +\infty$ donc par somme,

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$$

On obtient alors, pour tout $x > 0$, $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{1}{x} - x\ln(x)$, et par produit et somme

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$$

Ainsi, la courbe de φ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$.

2. φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions continues (ln et fonction carrée). De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ donc

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$$

La fonction φ est donc continue en 0.
Bilan : la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables (ln et fonction carrée). Pour tout réel $x > 0$, on a

$$\varphi'(x) = -2x\ln(x) - x^2 \times \frac{1}{x} = -x(2\ln(x) + 1)$$

4. Déterminons le taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{1 - x^2\ln(x) - 1}{x} = -x\ln(x)$$

Par croissance comparée,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = 0$$

Bilan : la fonction φ est dérivable en 0, et $\varphi'(0) = 0$. La courbe de la fonction φ admet donc une (demi) tangente horizontale au point d'abscisse 0.

5. On a démontré que pour tout $x>0$, $\varphi'(x)=-x(2\ln(x)+1)$. Pour tout $x>0$, $-x<0$ et
$$2\ln(x)+1>0 \Leftrightarrow \ln(x)>-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \text{ car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$
On obtient alors le tableau de signes et de variations suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$-x$		$-$		$-$	
$2\ln(x)+1$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	‖ 1	$\nearrow$	$\varphi\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

avec
$$\varphi\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)=1-\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^2\ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)=1+\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

6. Sur $\left[0;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$, φ admet un minimum local qui vaut $1>0$. L'équation $\varphi(x)=0$ n'admet donc pas de solution sur $\left[0;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$.
Sur $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[$, φ est continue, strictement décroissante,et $\varphi\left(\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[\right)=\left]-\infty;1+\frac{1}{2\mathrm{e}}\right]$ et $0\in\left]-\infty;1+\frac{1}{2\mathrm{e}}\right]$ car $1+\frac{1}{2\mathrm{e}}>0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution sur $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[$.
Bilan : l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. De plus,
$$\varphi\left(\sqrt{2}\right)=1-(\sqrt{2})^2\ln(\sqrt{2})=1-2\times\frac{1}{2}\ln(2)=1-\ln(2)\approx 0,3$$
et
$$\varphi(2)=1-2^2\ln(2)=1-4\ln(2)\approx -1,8$$
On a donc $\varphi(\sqrt{2})>\varphi(\alpha)>\varphi(2)$. Par stricte décroissance de φ, on en déduit que $\sqrt{2}<\alpha<2$.

Exercice 18

1. En mettant au même dénominateur,
$$\varphi(x)=\frac{x\ln(x)-x\ln(x+1)+1}{x}$$
Par croissances comparées, $\lim_{x\to 0} x\ln(x)=0$, et par produit, $\lim_{x\to 0} x\ln(x+1)=0$. Par somme, $\lim_{x\to 0} x\ln(x)-x\ln(x+1)+1=1$. Et donc, par quotient,
$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=+\infty$$
Ainsi, la courbe de φ admet une asymptote verticale, d'équation $x=0$.
2. On peut écrire
$$\forall\ x>0,\ \ \varphi(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x}$$
Posons $\mathrm{X}=\frac{x}{x+1}$. On a
$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{X}=1 \text{ et } \lim_{\mathrm{X}\to 1}\ln(\mathrm{X})=0$$
Par composée, $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=0$ et par somme
$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$$
Ainsi, la courbe de φ admet une asymptote horizontale, d'équation $y=0$, au voisinage de $+\infty$.
3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (ln et fonction inverse). On a
$$\forall\ x>0,\ \ \varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2}=\frac{x(x+1)-x^2-(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{-1}{x^2(x+1)}$$
Pour tout $x>0$, $x^2>0$ et $x+1>0$. Ainsi, par quotient,
$$\forall\ x>0,\ \varphi'(x)<0$$
La fonction φ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. D'après ce qui précède, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	
$\varphi(x)$	‖	$+\infty \searrow$	0

5. La fonction φ est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\varphi\,(]0;+\infty[)=]0;+\infty[$ et $1\in]0;+\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x)=1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
On constate que

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)-\ln\left(\frac{1}{3}+1\right)+\frac{1}{1/3}=-\ln(3)-(\ln(4)-\ln(3))+3=3-2\ln(2)\approx 1,6>1$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{1/2}=-\ln(2)-(\ln(3)-\ln(2))+2=2-\ln(3)\approx 0,9<1$$

Ains, $\varphi\left(\frac{1}{3}\right)>\varphi(\alpha)>\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$. Par stricte décroissance de φ, on en déduit que

$$\frac{1}{3}<\alpha<\frac{1}{2}$$

Exercice 19

1. On constate que

$$\varphi(x)=2\ln(x)-2\ln(2)+\frac{1}{x}=\frac{2x\ln(x)-2x\ln(2)+1}{x}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$ donc par somme et produit, $\lim\limits_{x\to 0} 2x\ln(x)-2x\ln(2)+1=1$. Et donc, par quotient,

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=+\infty$$

Ainsi, la courbe de φ admet une asymptote verticale, d'équation $x=0$.
2. Puisque $\varphi(x)=2\ln(x)-2\ln(2)+\frac{1}{x}$, par somme et quotient,

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$$

De plus,

$$\frac{\varphi(x)}{x}=\frac{2\ln(x)}{x}-\frac{2\ln(2)}{x}+\frac{1}{x^2}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=0$. Par somme et quotient,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=0$$

Ainsi, la courbe représentative de la fonction φ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses en $+\infty$.
3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (ln et fonction inverse). On a

$$\forall\, x>0,\ \varphi'(x)=2\frac{1/2}{x/2}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x-1}{x^2}$$

4. $x^2>0$ donc le signe de $\varphi'(x)$ est du signe de $2x-1$. On obtient ainsi le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

avec $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{1/2}=-4\ln(2)+2\approx-0,8$.

5. Sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$, φ est continue (car dérivable) et strictement décroissante. De plus, $\varphi\left(\left]0;\frac{1}{2}\right]\right)=[\varphi(1/2);+\infty[$ et $0\in[\varphi(1/2);+\infty[$ car $\varphi(1/2)<0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution, notée α sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$.
Sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, φ est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus, $\varphi\left(\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\right)=[\varphi(1/2);+\infty[$ et $0\in[\varphi(1/2);+\infty[$ car $\varphi(1/2)<0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution, notée β sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.
Bilan : l'équation $\varphi(x)=0$ admet deux solutions α et β sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $0<\alpha<\frac{1}{2}<\beta$.

Exercice 20

1. Les fonctions $x\mapsto\sqrt{x}$ et $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ (fonctions usuelles). Par produit, f est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{e}}}=\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$$

2. $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est donnée, pour tout $x>0$, par

$$f'(x)=2\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}+2\sqrt{x}(-\mathrm{e}^{-x})$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\forall\, x>0,\ f'(x)=\frac{1-2x}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}}$$

Pour déterminer si f est dérivable en 0, on détermine le taux d'accroissement de f en 0, noté T_0 :

$$\forall\, x>0,\ \mathrm{T}_0(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}}{x}=2\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Remarquons que $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-x}=1$. Par quotient,

$$\lim_{x\to+0^+}\mathrm{T}_0(x)=+\infty$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 0, et la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.
Bilan : f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas en 0.

3. Pour tout $x>0$, on a

$$f(x)=2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}=2\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x}=0$ (par croissance comparée) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, par quotient,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$$

Ainsi, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

4. On a vu que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1-2x}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}$. Puisque $\sqrt{x}>0$, et $\mathrm{e}^{-x}>0$ pour $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $1-2x$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	0

5. f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas ($x\mapsto1-2x$, $x\mapsto\sqrt{x}$ et $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$). Pour tout réel $x>0$, on obtient

$$f''(x)=\frac{(-2)\sqrt{x}-(1-2x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\mathrm{e}^{-x}+\frac{1-2x}{\sqrt{x}}(-\mathrm{e}^{-x})$$

soit, après simplification

$$f''(x)=\frac{2x^2-2x-\frac{1}{2}}{x\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}$$

$x\sqrt{x} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f''(x)$ est du signe de $h : x \mapsto 2x^2 - 4x + \frac{1}{2}$. Le discriminant de h vaut $\Delta = 8$, ainsi h admet deux racines

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{4} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{4} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

On obtient le tableau de signe de f'' suivant :

x	0		$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Bilan : f est concave sur $\left[0; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$, et est convexe sur $\left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$. La courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

6. On constate que g est la restriction de f à l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0; \frac{1}{2}\right]$. D'après l'étude précédente, g est continue sur I, strictement croissante sur I. D'après le théorème de la bijection, g établit une bijection de I sur $g(\mathrm{I}) = \left[0; f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[0; \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\right]$.

7. Par théorème, g^{-1} est continue et de même variation de g. D'après le tableau de f, on obtient le tableau de variations suivant

x	0		$\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$
$g^{-1}(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

8. Pour tout réel $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$, $f'(x) \neq 0$. Par théorème, g^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0; \frac{1}{2}\right[\right) = \left]0; \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\right[$.

- En $x = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$, $g'\left(g^{-1}(x)\right) = g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. D'après un résultat du cours, g^{-1} n'est pas dérivable en $\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$ et la courbe de g^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse $x = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$.
- En $x = 0$, on a vu (question 2) que g n'est pas dérivable en 0 et que la courbe de g admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0. Par symétrie par rapport à l'axe $y = x$, la courbe de g va admettre une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

Remarque

On peut le montrer, en calculant la limite du taux d'accroissement, et **cette méthode est à connaitre**.

$$\lim_{x\to 0} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{g^{-1}(x)}{x}$$

Posons $\mathrm{X} = g^{-1}(x)$, et donc $x = g(\mathrm{X})$. Par continuité de g^{-1} (comme fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone) on a

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{X} = \lim_{x\to 0} g^{-1}(x) = g^{-1}(0) = 0$$

et

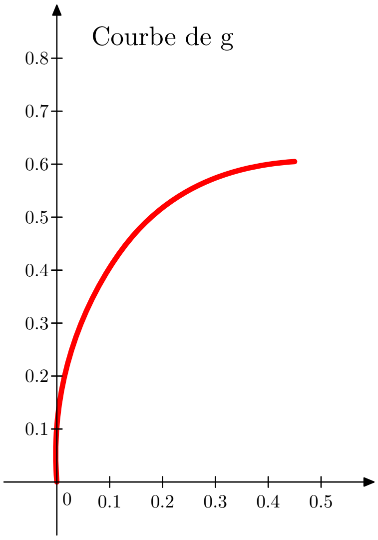
$$\lim_{\mathrm{X}\to 0} \frac{\mathrm{X}}{g(\mathrm{X})} = \lim_{\mathrm{X}\to 0} \frac{1}{\frac{g(\mathrm{X})}{\mathrm{X}}} = 0$$

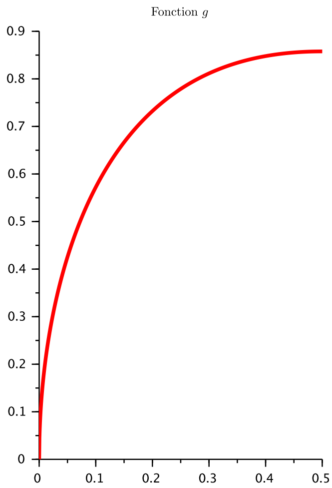
car $\lim\limits_{\mathrm{X}\to 0} \dfrac{g(\mathrm{X})}{\mathrm{X}} = +\infty$ (question 2). Par composée,

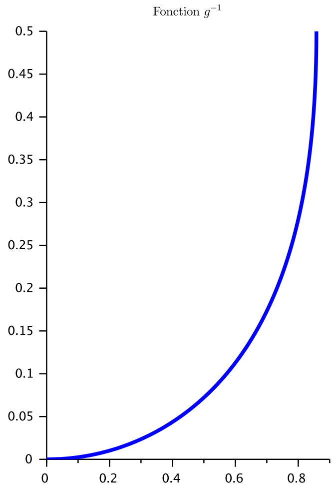
$$\lim_{x\to 0} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 0$$

Donc g^{-1} est dérivable en 0, et $(g^{-1})'(0) = 0$.

- En regroupant tous les résultats précédents, on obtient les graphiques suivants :


Courbe de g
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5


Fonction g
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5


Fonction g^{-1}
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8

14

Chapitre

Espaces vectoriels

Résumé

Ce chapitre est très important et tombe régulièrement au concours. Il est abstrait, mais pas difficile. Il sera enrichi dans un prochain chapitre, et approfondi l'année prochaine.
Il doit être maitrisé dans son ensemble.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels :

- Savoir démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel . . . . ☐
- Savoir montrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs . . . . ☐

② Maitriser la notion de base :

- Savoir montrer qu'une famille est libre . . . . ☐
- Savoir montrer qu'une famille est génératrice . . . . ☐
- Savoir montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel . . . . ☐
- Connaître les bases canoniques des espaces usuels . . . . ☐
- Savoir déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel . . . . ☐

I. Espaces vectoriels

1. Généralités

Définition 14.1.

Soit E un ensemble non vide.

- On dit que la loi $+$ est une **loi de composition interne** sur E si $\forall\,(x,y)\in E^2,\ x+y\in E$.
- On dit que la loi $\cdot$ est une **loi de composition externe** sur E si $\forall\ x\in E, \forall\ \lambda\in\mathbb{R}, \lambda\cdot x\in E$.

Exemple 14.1

L'exemple le plus classique est l'ensemble des matrices $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La loi d'addition de matrices est une loi de composition interne, et la multiplication par un réel est une loi de composition externe.

Définition 14.2.

Soit E un ensemble non vide, muni d'une loi interne, noté $+$, et d'une loi externe, noté $\cdot$. On dit que E est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$ si les lois vérifient les propriétés suivantes :

- (commutativité de $+$) : $\forall\,(x,y)\in E^2, x+y=y+x$.
- (associativité de $+$) : $\forall\,(x,y,z)\in E^3, (x+y)+z=x+(y+z)$
- (neutre pour $+$) : il existe un élément, noté 0_E, tel que $\forall\ x\in E, x+0_E=0_E+x=x$.
- (inverse pour $+$) : pour tout $x\in E$, il existe un élément $y\in E$, tel que $x+y=y+x=0_E$. Cet élément est appelé *opposé* de x, et est noté $-x$.
- (neutre pour $\cdot$) $\forall\ x\in E, 1.x=x$
- (distributivité de $\cdot$) $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}, \forall\,(x,y)\in E^2, \lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$
- (distributivité de $\cdot$) $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall\ x\in E, (\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$
- $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall\ x\in E, \lambda.(\mu.x)=(\lambda\times\mu).x$.

Remarque

Si E est un espace vectoriel, les éléments de E sont alors appelés les **vecteurs**, et les réels sont appelés les **scalaires**. L'élément 0_E est appelé vecteur nul.

Remarque

Les quatre premières propriétés font de $(E,+)$ ce qu'on appelle un **groupe abélien** ou groupe commutatif.

Remarque

Le symbole $\cdot$ de la loi de composition externe est très souvent omis. On notera plus souvent $2x$ plutôt que $2\cdot x$.

Proposition 14.1. Exemple fondamental

Les ensembles $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour $n\geqslant 1$, munis de l'addition de matrices, et de la multiplication par un réel, sont des espaces vectoriels.

Démonstration

En effet, si $A=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ alors

$$A+B=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ \vdots\\ a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1+a_1\\ \vdots\\ b_n+a_n\end{pmatrix}=B+A$$

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}(a_1+b_1)+c_1\\ \vdots\\ (a_n+b_n)+c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+(b_1+c_1)\\ \vdots\\ a_n+(b_n+c_n)\end{pmatrix}=A+(B+C)$$

$$A+0_{n,1}=\begin{pmatrix}a_1+0\\ \vdots\\ a_n+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+a_1\\ \vdots\\ 0+a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=A$$

$$A+(-A)=\begin{pmatrix}a_1+(-a_1)\\ \vdots\\ a_n+(-a_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=0_{n,1}$$

$$1.A=\begin{pmatrix}1.a_1\\ \vdots\\ 1.a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=A$$

$$\lambda.(A+B)=\lambda.\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ \vdots\\ a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda(a_1+b_1)\\ \vdots\\ \lambda(a_n+b_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1+\lambda b_1\\ \vdots\\ \lambda a_n+\lambda b_n\end{pmatrix}=\lambda.\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}+\lambda.\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\lambda.A+\lambda.B$$

$$(\lambda+\mu).A=\begin{pmatrix}(\lambda+\mu)a_1\\ \vdots\\ (\lambda+\mu)a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1+\mu a_1\\ \vdots\\ \lambda a_n+\mu a_n\end{pmatrix}=\lambda.A+\mu.A$$

$$\lambda.(\mu.A)=\lambda.\begin{pmatrix}\mu a_1\\ \vdots\\ \mu a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\mu a_1\\ \vdots\\ \lambda\mu a_n\end{pmatrix}=(\lambda\times\mu).A$$

En première année, nous n'utiliserons que ces espaces vectoriels, dans le cas où $n=1,2,3$ ou 4.

2. Règles de calculs

On se place ici dans un espace vectoriel E.

Proposition 14.2.

Pour tous $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x\in E$, on a

- $\lambda.0_E=0_E$ et $0.x=0_E$
- $(-\lambda).x=\lambda.(-x)=-(\lambda.x)$.
- $x+(-y)=x-y$.

Théorème 14.3.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, et $x\in E$. Alors

$$\lambda.x=0_E \Leftrightarrow x=0_E \quad \text{ou} \quad \lambda=0$$

3. Combinaison linéaire

Soit E un espace vectoriel.

Définition 14.3.

On appelle **famille de vecteurs** de E une n-liste $(e_1,\cdots,e_n)$ d'éléments de E.

Exemple 14.2

Si $A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$, alors (A,B) désigne une famille de deux vecteurs de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Définition 14.4.

Soient $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E. Soit x un vecteur de E. On dit que x est une **combinaison linéaire** de la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ s'il existe des réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$$

Les réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont alors les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Remarque

Il n'y a pas forcément unicité de la combinaison linéaire.

Exemple 14.3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors, $2.A - 3.B = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de A et B.

Méthode

Pour montrer qu'un vecteur x est combinaison linéaire d'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et on résout un système pour déterminer (ou non) les réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$.

Exercice 14.4

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Montrer que X est combinaison linéaire de A et B.

Solution

On écrit $X = \lambda A + \mu B$. On a alors

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 3\mu \\ 2\lambda + \mu \end{pmatrix}$$

On résout alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda & - & 3\mu & = & -5 \\ 2\lambda & + & \mu & = & 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda & - & 3\mu & = & -5 \\ & & 7\mu & = & 14 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & 1 \\ \mu & = & 2 \end{array} \right.$$

Ainsi, $X = A + 2B$.

II. Sous-espace vectoriel

1. Définition

Définition 14.5.

Soit E un espace vectoriel. Soit F un sous ensemble de E non vide. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si les restrictions des lois $+$ et $\cdot$ à F font de F un espace vectoriel.

Exemple 14.5

Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Propriété 14.4.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Alors $0_E \in F$ et F est un espace vectoriel.

Démonstration

Par définition, F est un espace vectoriel. Par propriété, si $x \in \mathrm{F}$ (puisque F est non vide), alors $0.x \in \mathrm{F}$ c'est-à-dire $0_\mathrm{E} \in \mathrm{F}$.

Proposition 14.5.

Soit F un sous ensemble d'un espace vectoriel E. Alors, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $\mathrm{F} \neq \varnothing$
- $\forall (x,y) \in \mathrm{F}^2, x+y \in \mathrm{F}$ (F est stable par addition)
- $\forall\ x \in \mathrm{F}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.x \in \mathrm{F}$ (F est stable par multiplication par un scalaire)

Remarque

- La première propriété se vérifie en général en montrant que le neutre 0_E est dans F.
- Les deux dernières propriétés peuvent être regroupées en une seule :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{F}^2, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.x + y \in \mathrm{F}$$

Méthode

On utilise la proposition précédente pour démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Exercice 14.6

Montrer que $\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Solution

En effet,

- $0_{2,1} \in \mathrm{F}$: il suffit de prendre $t = 0$.
- Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda.\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \lambda a + b \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{F}$$

  en prenant $t = \lambda a + b$.

Théorème 14.6.

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire homogène de n équations à n inconnues. L'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Démonstration

Soit $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice associée au système $\mathscr{S}$. Alors l'ensemble des solutions F du système $(\mathscr{S})$ s'écrit également

$$\mathrm{F} = \left\{ \mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{MX} = 0_{n,1} \right\}$$

avec $0_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\mathrm{F} \subset \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $0_{n,1} \in \mathrm{F}$. En effet, $\mathrm{M}.0_{n,1} = 0_{n,1}$ par définition de la matrice nulle.
- Soient X et Y dans F, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{M}.(\lambda\mathrm{X} + \mathrm{Y}) = \lambda\mathrm{M}.\mathrm{X} + \mathrm{M}.\mathrm{Y} = 0_{n,1} + 0_{n,1} = 0_{n,1}$$

puisque $MX = MY = 0_{n,1}$. Donc $\lambda X + Y \in F$.
F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

☞ *Exercices 1, 2, 3 et 4*

2. Sous-espaces engendrés

On se donne un espace vectoriel E.

Définition 14.6.

Soient $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $(e_1, \cdots, e_p)$, et on note $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$, l'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires de $(e_1, \cdots, e_p)$. Ainsi,

$$x \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) \Leftrightarrow \exists\, (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$$

Exemple 14.7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$\mathrm{Vect}(A) = \{\lambda.A,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Vect(A) est appelée **droite vectorielle**.

Théorème 14.7.

Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 14.8.

Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors

- $\forall\, k \in [\![1, p]\!], e_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$
- $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille $(e_1, \cdots, e_p)$. Ainsi, si F est un sous-espace vectoriel contenant $e_1, \cdots, e_p$, nécessairement,
$\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) \subset F$.
- Si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1})$ et si e_{p+1} est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \cdots, e_p$, alors $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$.
- Si $(a_1, \cdots, a_p)$ sont des réels tous non nuls, et si $F = \mathrm{Vect}(a_1 e_1, \cdots, a_p e_p)$, alors
$F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$.

Exemple 14.8

- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.
- Soient $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Vect}(A, B, C) = \mathrm{Vect}(A, B)$ puisque $C = A + B$.
- Soit F un sous-espace vectoriel contenant les vecteurs A et B précédents. Alors, nécessairement, $\mathrm{Vect}(A, B) \subset F$.

☞ *Exercices 5 et 6*

III. Base d'un espace vectoriel

1. Définition

Définition 14.7.

Soit E un espace vectoriel. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{B}$ est une **base** de E si, pour tout vecteur x de E, il existe une *unique* n-liste $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ de réels tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

Les réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base $\mathscr{B}$

Exemple 14.9

Si $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$, alors tout élément de F s'écrit de manière unique sous la forme $t.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, la famille composée du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de F.

Méthode

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base d'un espace vectoriel E, on prend $x \in E$ et on résout $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = x$. S'il existe une unique solution, alors $(e_1, \cdots, e_p)$ est bien une base de E.

Exemple 14.10

Montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Solution

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On cherche a et b tels que

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On résout le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a & + & b & = & x \\ 2a & + & 3b & = & y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} a & + & b & = & x \\ & & b & = & y-2x \end{array} \right.$$

Le système est de Cramer, donc il possède une unique solution.
Bilan : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est bien une base de de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

☞ *Exercices 9 et 10*

2. Famille libre, famille génératrice

Dans la définition d'une base, il y a deux éléments importants : l'existence d'une combinaison linéaire, et l'unicité de celle-ci. Cela nous amène à définir deux concepts :

Définition 14.8.

Soit E un espace vectoriel. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est **libre** si

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

  Si elle n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.
- On dit que la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est **génératrice** si $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p) = E$.

Remarque

Lorsqu'une famille est libre, cela implique que s'il y a une combinaison linéaire de ses éléments, celle-ci est forcément unique.

En effet, supposons que l'on puisse écrire

$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{k=1}^{p} \mu_i e_i$$

Alors, en soustrayant les deux expressions de x, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0$$

Par définition de la liberté, cela implique que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, c'est-à-dire $\lambda_i = \mu_i$: il y a bien unicité de la décomposition.

Méthode

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre, on écrit $\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_p e_p = 0_E$ et on résout le système. S'il admet comme seule solution $(0, \cdots, 0)$ alors elle est libre, sinon elle est liée.

Exemple 14.11

Montrer que la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est libre.

Solution

On cherche a et b deux réels tels que

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a + 2b \\ a + b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors $a = 0$ puis $b = 0$. Ainsi, la famille est libre.

Remarque (Cas d'une famille de deux vecteurs)

Lorsqu'une famille est composée de deux vecteurs (u, v), celle-ci est liée si et seulement si il existe (α, β) tels que $\alpha u + \beta v = 0$, c'est-à-dire si un des vecteurs s'exprime comme un multiple de l'autre. Ainsi, si on voit rapidement que ce n'est pas le cas, on peut conclure : on signalera que les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Par exemple, dans l'exercice 14.11, les deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires (par exemple, en regardant le 0 en 3e position). Ainsi, la famille est libre.

☞ *Exercices 7 et 8*

Méthode

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est génératrice, on écrit $\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_p e_p = x$ avec $x \in E$ et on résout le système. S'il admet au moins une solution alors elle est génératrice, sinon elle ne l'est pas et on exhibe alors un contre-exemple.

Remarque

- Une famille libre est une famille dans laquelle aucun vecteur ne peut être exprimé comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Ainsi, tout vecteur est « utile » dans la famille.
- Une famille génératrice est une famille qui permet de récupérer, par combinaison linéaire, tout vecteur de E ; en revanche, plusieurs combinaisons linéaires peuvent mener au même vecteur : il n'y a pas forcément unicité de la décomposition.

Théorème 14.9. Lien entre famille libre, génératrice et base

Soit E un espace vectoriel. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base si et seulement si elle est libre et génératrice.

3. Base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Remarque

On s'intéresse à $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Toute matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$A = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les trois matrices $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ permettent de décrire toutes les matrices de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: (e_1, e_2, e_3) représente une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Définition 14.9.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des matrices de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Toute matrice de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$a_1.e_1 + \cdots + a_n.e_n$$

où $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. La famille de vecteurs $(e_1, \cdots, e_n)$ forme une **base**, appelée **base canonique** de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 14.12 (Cas $n = 2, 3, 4$)

- $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
- $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Remarque

Il n'y a pas unicité de la base. Par exemple, dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment également une base.

Définition 14.10.

Vous verrez l'année prochaine que toute base d'un espace vectoriel possède le même nombre d'éléments : ainsi, dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, les bases possèdent 2 vecteurs. On appelle ce nombre la **dimension** de l'espace vectoriel, et on le notera $\dim(E)$.

Exemple 14.13

$\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 2, et plus généralement $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension n.

Méthode

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, on détermine d'abord une base, et on conclut. Pour cela, on essaie de l'expliciter comme un espace vectoriel engendré par une certaine famille de vecteurs. On vérifie ensuite si celle-ci est libre.

Exemple 14.14

Soit $F=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix},\ x+y=0\right\}$. Déterminer la dimension de F.

Solution

Remarquons qu'on peut écrire

$$F=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix},\ y=-x\right\}$$

soit

$$F=\left\{\begin{pmatrix} x\\ -x\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

Ainsi,

$$F=\left\{x\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

et donc $\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}$ est une base de F :

$$F=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}\right)$$

et $\dim(F)=1$.

☞ *Exercices 11 et 12*

Exercices

Espaces vectoriels

14

Exercices

Sous-espaces vectoriels

●○○ **Exercice 1 Sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$** (20 min.)

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 2x+3y=0 \right\}$
3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x^2+y=0 \right\}$

●○○ **Exercice 2 Sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$** (10 min.)

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x+y=0 \text{ et } x-y-2z=0 \right\}$

●○○ **Exercice 3 Des sous-espaces et des matrices** (10 min.)

On se donne $A \in \mathfrak{M}_3$. On note

$$E = \left\{ M \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad AM = 0 \right\} \text{ et } F = \{ M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), \quad AM = MA \}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et que F un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

●○○ **Exercice 4 Des sous-espaces en tout genre** (20 min.)

Déterminer si les sous-ensembles suivant sont des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels usuels.

- $F_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x+y+z=0,\ x-y+z=0 \right\}$.
- $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad 2x+z=0,\ x-y-2z=0,\ y+2z=0 \right\}$.
- $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ a+2b \\ a-b \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Espace vectoriel engendré

●○○ **Exercice 5 Combinaisons linéaires** (10 min.)

On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ sont des combinaisons linéaires de e_1 et e_2. Déterminer $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

●○○ Exercice 6 Egalité de sous-espaces vectoriels (10 min.)

On note $u=\begin{pmatrix}-4\\4\\3\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}-1\\6\\7\end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v)=\mathrm{Vect}(w,x)$.

> ***Méthode***
> Pour montrer une égalité d'espace avec des sous-espaces vectoriels, on procède par double inclusion : si $E\subset F$ et $F\subset E$ alors $E=F$.
> Enfin, rappelons que si $(e_1,\cdots e_n)\in F^n$, alors $\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_n)\subset F$, qui va nous servir ici.

Famille libre, base

●○○ Exercice 7 Libérééééé, ... (10 min.)

La famille (e_1,e_2,e_3) de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est-elle libre, où

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$$

●○○ Exercice 8 Liberté chérie (20 min.)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées. Si elles sont liées, donner une relation de dépendance.

1. $(2,2,1),(1,3,1),(-2,1,3)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

●○○ Exercice 9 Une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (10 min.)

On note $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $e_3=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$. Montrer que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

●○○ Exercice 10 Retour à la base (20 min.)

Déterminer si les familles suivantes forment des bases des espaces vectoriels indiqués.

1. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. $\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

●○○ Exercice 11 Systèmes de générateurs (20 min.)

Pour chacun des espaces suivants, déterminer un système de générateurs, et en déduire que ce sont des sous-espaces vectoriels.

- $F_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad x-y+2z=0\right\}$.
- $F_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad x+y+2z=0,\ 2x-y-z=0\right\}$.
- $F_3=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{2}(\mathbb{R}),\quad x+t=0,\ x+y-z=0\right\}$.

●○○ Exercice 12 Base de sous-espaces vectoriels (10 min.)

Déterminer une base des sous-espaces vectoriels des exercices 1, 2 et 4, ainsi que leur dimension.

Corrigés

Espaces vectoriels

Corrigés des exercices

Exercice 1

- F_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Première méthode : on constate que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F_1$. Ainsi, F_1 ne peut pas être un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Deuxième méthode : on remarque que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_1$ et pourtant $2x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin F_1$.

- F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. En effet, F_2 est non vide, puisque la matrice nulle y est. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux éléments de F_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \end{pmatrix}$$

et

$$2(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y') = \lambda(\underbrace{2x + 3y}_{=0 \text{ car } u \in F_2}) + (\underbrace{2x' + 3y'}_{=0 \text{ car } v \in F_2}) = 0$$

Donc $\lambda u + v \in F_2$.

- F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. En effet, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in F_3$ (car $1^2 - 1 = 0$), et pourtant $2x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \notin F_3$ car $2^2 - 2 = 2 \neq 0$.

Exercice 2

- F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En effet, F_1 est non vide puisque le vecteur nul y est. De plus, soient $u = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ 2x' \\ x' \end{pmatrix}$ deux éléments de F_1, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ 2(\lambda x + x') \\ \lambda x + x' \end{pmatrix}$$

donc $\lambda u + v \in F_1$.

- F_2 est non vide, puisque le vecteur nul y est ($0 + 0 = 0$ et $0 - 0 - 2 \times 0 = 0$). Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de F_2, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix}$$

qui vérifie

$$(\lambda x + x') + (\lambda y + y') = \lambda(\underbrace{x + y}_{=0 \text{ car } u \in F_2}) + \underbrace{x' + y'}_{=0 \text{ car } v \in F_2} = 0$$

$$\text{et } (\lambda x + x') - (\lambda y + y') - 2(\lambda z + z') = \lambda(\underbrace{x - y - 2z}_{=0 \text{ car } u \in F_2}) + (\underbrace{x' - y' - 2z'}_{=0 \text{ car } v \in F_2}) = 0$$

donc $\lambda u + v \in F_2$: F_2 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Tout d'abord, E et F sont non vide, puisque la matrice $0_{3,1}$ vérifie $A0_{3,1} = 0_{3,1}$ et la matrice nulle 0_3 vérifie $0_3 A = A0_3 = 0_3$. Il est à montrer que ces deux ensembles sont stables par combinaisons linéaires.

- Soient $M, N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on constate que

$$A(\lambda M + N) = \lambda \underbrace{AM}_{=0} + \underbrace{AN}_{=0} = 0$$

ainsi, $\lambda M + N \in E$ et E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- De même, soient $M, N \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$(\lambda M + N)A = \lambda \underbrace{MA}_{=AM} + \underbrace{NA}_{=AN} = \lambda AM + AN = A(\lambda M + N)$$

donc $\lambda M + N \in F$ et F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4

- F_1 est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$. On constate que $(0,0,0) \in F_1$: en effet, $0+0+0=0$ et $0-0+0=0$. Donc F_1 n'est pas vide.

Soient alors $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de F_1 et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut écrire

$$\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$$

On constate alors que :

$$(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda(\underbrace{x + y + z}_{=0 \text{ car } u \in F_1}) + (\underbrace{x' + y' + z'}_{=0 \text{ car } v \in F_1}) = 0$$

$$(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda(\underbrace{x - y + z}_{=0 \text{ car } u \in F_1}) + (\underbrace{x' - y' + z'}_{=0 \text{ car } v \in F_1}) = 0$$

Ainsi, $\lambda u + v \in F_1$.
On peut conclure que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- F_2 est un sous-ensemble de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On constate que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F_2$: en effet, $2 \times 0 + 0 = 0$, $0 - 0 - 2 \times 0 = 0$ et $0 + 2 \times 0 = 0$. Donc F_2 n'est pas vide.

Soient alors $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de F_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut écrire

$$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix}$$

On constate alors que :

$$2(\lambda x + x') + (\lambda z + z') = \lambda(\underbrace{2x + z}_{=0 \text{ car } u \in F_2}) + (\underbrace{2x' + z'}_{=0 \text{ car } v \in F_2}) = 0$$

$$(\lambda x + x') - (\lambda y + y') - 2(\lambda z + z') = \lambda(\underbrace{x - y - 2z}_{=0 \text{ car } u \in F_2}) + (\underbrace{x' - y' - 2z'}_{=0 \text{ car } v \in F_2}) = 0$$

$$(\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') = \lambda(\underbrace{y + 2z}_{=0 \text{ car } u \in F_2}) + (\underbrace{y' + 2z'}_{=0 \text{ car } v \in F_2}) = 0$$

Ainsi, $\lambda u + v \in F_2$.
On peut conclure que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- F_3 est un sous-ensemble de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On constate que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F_3$: en effet, en prenant $a = b = 0$, on obtient le vecteur nul. Donc F_3 n'est pas vide.

Soient alors $u = \begin{pmatrix} a+b \\ a+2b \\ a-b \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} a'+b' \\ a'+2b' \\ a'-b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de F_3 (avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}^4$), et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
\lambda u + v &= \lambda \begin{pmatrix} a+b \\ a+2b \\ a-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+b' \\ a'+2b' \\ a'-b' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda b + a' + b' \\ \lambda a + 2\lambda b + a' + 2b' \\ \lambda a - \lambda b + a' - b' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\lambda a + a') + (\lambda b + b') \\ (\lambda a + a') + 2(\lambda b + b') \\ (\lambda a + a') - (\lambda b + b') \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On peut donc écrire $\lambda u + v = \begin{pmatrix} a''+b'' \\ a''+2b'' \\ a''-b'' \end{pmatrix}$ avec $a'' = \lambda a + a'$ et $b'' = \lambda b + b'$: ainsi, $\lambda u + v \in F_3$.

On peut conclure que F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Exercice 5

Cherchons x et y deux réels tels que $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$. Ainsi

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

Après résolution, on obtient $x = 1$ et $y = 2$. Ainsi, $u = e_1 + 2e_2$ est bien combinaison linéaire de e_1 et e_2.

De la même manière, on obtient $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = e_1 - 2e_2$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = 3e_1 - 2e_2$ qui sont donc bien des combinaisons linéaires de e_1 et e_2.

Enfin, par définition, $\text{Vect}(e_1, e_2) = \left\{xe_1 + ye_2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \\ 2x-y \end{pmatrix},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 6

Montrons que u et v sont dans $\text{Vect}(w, x)$. Dans ce cas, par propriété, $\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(w, x)$.

Remarquons (ou démontrons selon la méthode de l'exercice précédent) que $u = 5w - x$ donc $u \in \text{Vect}(w, x)$. De même, $v = 4w - x$ donc $v \in \text{Vect}(w, x)$. Par définition de l'espace vectoriel engendré, on en déduit donc $\boxed{\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(w, x)}$.

De même, $w = u - v$ donc $w \in \text{Vect}(u, v)$, et $x = 4u - 5v$ donc $x \in \text{Vect}(u, v)$. Par définition de l'espace vectoriel engendré, on en déduit donc que $\boxed{\text{Vect}(w, x) \subset \text{Vect}(u, v)}$.

Par double inclusion, $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(w,)$.

Exercice 7

Soient x, y, z trois réels vérifiant $xe_1 + ye_2 + ze_3 = 0$. Alors

$$\begin{pmatrix} x+2y \\ x+y-z \\ -x+3y+5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On résout donc le système

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 0\\ x & + & y & - & z & = & 0\\ -x & + & 3y & + & 5z & = & 0\end{array}\right.$$

soit

$$(\mathrm{S})\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & & & = & 0 & \\ & - & y & - & z & = & 0 & \mathrm{L}_2\leftarrow \mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1\\ & & 5y & + & 5z & = & 0 & \mathrm{L}_3\leftarrow \mathrm{L}_3+\mathrm{L}_1\end{array}\right.$$

Remarquons enfin que les deux dernières lignes sont les mêmes. Donc le système est dégénéré et admet donc une infinité de solution. Ainsi,

$$\boxed{(e_1,e_2,e_3)\text{ est liée}}$$

Exercice 8

On applique naïvement la méthode.

1. Soient a, b et c trois réels tels que $a(2,2,1)+b(1,3,1)+c(-2,1,3)=(0,0,0)$. On peut alors écrire

$$(2a+b-2c, 2a+3b+c=0, a+b+3c)=(0,0,0)$$

On résout le système :

$$\begin{cases}2a+\ \ b-2c=0\\ 2a+3b+\ \ c=0\\ \ \ a+\ \ b+3c=0\end{cases}\sim\begin{cases}2a+\ \ b-2c=0\\ \quad -2b-3c=0\\ \qquad\quad 8c=0\end{cases}$$

Le système est de Cramer : le système homogène admet donc une unique solution : $(0,0,0)$. Ainsi, la seule solution est $a=b=c=0$: la famille est donc libre.

2. On fait de même : soient a, b et c trois réels tels que

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ce qu'on écrit

$$\begin{pmatrix}a+3c\\b-c\\3a+2b+7c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

On résout alors le système :

$$\begin{cases}a\qquad +3c=0\\ \qquad b-\ \ c=0\\ 3a+2b+7c=0\end{cases}\sim\begin{cases}a\qquad +3c=0\\ \qquad b-\ \ c=0\\ \qquad 2b-2c=0\end{cases}$$

$$\sim\begin{cases}a\quad +3c\quad =0\\ \quad b-\ \ c\quad =0\\ \qquad\qquad 0=0\end{cases}$$

Le système est dégénéré, donc la famille ne sera pas libre. Il faut cependant exhiber une combinaison linéaire, c'est-à-dire une soluton du système. Par exemple, en prenant $c=1$, on obtient $b=1$ puis $a=-3$. Ainsi :

$$-3\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

La famille est donc liée.

Exercice 9

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe une unique combinaison linéaire telle que $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$. On cherche donc à résoudre

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix}$$

d'inconnue λ_1, λ_2 et λ_3. On résout donc le système

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & x \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & y \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & z \end{array} \right.$$

Ainsi

$$(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & x \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & y - x \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & z \end{array} \right.$$

et donc

$$(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & x \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & y - x \\ & & & & \lambda_3 & = & z - y + x \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \end{array} \right.$$

Le système triangulaire possède trois pivots non nuls : il est donc de Cramer, et le système (S) admet donc une unique solution. Ainsi, u s'écrit bien de manière unique sous la forme d'une combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3 :

$$\boxed{(e_1, e_2, e_2) \text{ forme bien une base de } \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

Exercice 10

1. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On cherche λ et μ tels que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On doit donc résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{r} \lambda + \mu = a \\ 2\lambda - 2\mu = b \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{r} \lambda + \mu = a \\ 4\mu = b - 2a \end{array} \right.$$

Le système est de Cramer et admet donc une unique solution. Par définition, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est donc une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

2. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On cherche x, y et z tels que

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On résout le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z = a \\ x + y + 2z = b \\ 5x + 4y + 3z = c \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = b \\ - y - 7z = a - 3b \\ - y - 7z = c - 5b \end{array} \right.$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{ll} x + y + 2z & = b \\ - y - 7z & = a - 3b \\ & 0 = c - 2b - a \end{array} \right.$$

Ainsi, si $c-2b-a\neq 0$, le système n'a pas de solution. Ainsi, par exemple (en prenant $a=1$, $b=0$ et $c=2$) la matrice $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de la famille. Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$ ne peut pas être une base (elle n'est pas génératrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$).

Exercice 11

Méthode

Pour déterminer un système de générateurs, on ré-écrit les sous-espaces de manière à pouvoir les écrire comme un espace vectoriel engendré.

On écrit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_1 &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad x-y+2z=0\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad x=y-2z\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}y-2z\\y\\z\end{pmatrix},\quad (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}y\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2z\\0\\z\end{pmatrix},\quad (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \left\{y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\quad (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est donc génératrice de F_1. On peut même dire qu'elle est libre (car composée de deux vecteurs non colinéaires) donc est une base de F_1. Pour F_2, on obtient de même :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_2 &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad \begin{cases}x+y+2z=0\\2x-y-\ \ z=0\end{cases}\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad \begin{cases}x+\ \ y+2z=0\\\quad -3y-5z=0\end{cases}\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad \begin{cases}x=\ \ -\frac{1}{3}z\\y=-\frac{5}{3}z=0\end{cases}, z\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}z\\-\frac{5}{3}z\\z\end{pmatrix},\quad z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{5}{3}\\1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{5}{3}\\1\end{pmatrix}\right)$ est donc une famille génératrice (et étant composée d'un seul vecteur non nul, c'est même une base). On peut également prendre comme générateur $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$. Enfin :

$$\begin{aligned} F_3 &= \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad x+t=0,\ x+y-z=0\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad x=-t,\ y=z+t\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} -t & z+t \\ z & t \end{pmatrix}, \quad (z,t)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{t\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (z,t)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de F_3. Elle est même une base car la famille est composée de deux vecteurs non colinéaires.

Exercice 12

On réécrit les espaces vectoriels pour reconnaitre une base. Ainsi, pour l'exercice 1,

$$F_2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{3}x \end{pmatrix}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$$

et donc

$$F_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\right) \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ forme une base de } F_2.$$

Pour l'exercice 2, on a directement que

$$F_1 = \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de F_1.

Enfin, après résolution,

$$F_2 = \left\{\begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de F_2.

De la même manière, pour l'exercice 4 :

$$F_1 = \{(-z,y,z), \quad (y,z)\in\mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((-1,0,1),(0,1,0))$$

et la famille (libre) $((-1,0,1),(0,1,0))$ forme une base de F_1.

$$F_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

donc est un espace de dimension 0. Enfin,

$$F_3 = \left\{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 2b \\ -b \end{pmatrix}, \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est libre (car les vecteurs ne sont pas colinéaires) et forme donc une base de F_3.

Chapitre 15

Etude élémentaire des séries

Résumé

Dans ce chapitre, on introduit la notion de série, qui est à rapprocher de l'intégrale généralisée, mais dans le cas d'une suite. On y verra des méthodes de calculs, mais aussi des théorèmes pour montrer des convergences ou divergences de séries, sans pouvoir nécessairement calculer la somme de la série.

> *« ss »*

Auteur (Date). *Titre*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de série :
- connaître la définition d'une série, d'une somme et du reste d'une série ☐
- connaître les différentes opérations usuelles ☐
- connaître le lien entre suite et série ☐
- connaître la condition nécessaire de convergence ☐
- connaître les séries de référence ☐

② Concernant les théorèmes de convergence :
- connaître le théorème de comparaison ☐
- connaître le théorème d'équivalence et de négligeabilité ☐

③ Concernant l'absolue convergence :
- connaître la définition ☐
- connaître le lien entre absolue convergence et convergence ☐

I. Définition

1. Séries

Définition 15.1.

Soit (u_n) une suite réelle. On appelle **série de terme général** u_n, et on note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$, la suite des sommes partielles (S_n) définie par

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Remarque

Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de terme général u_n n'est également définie qu'à partir de n_0, ce que l'on note $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$. La suite des sommes partielles est $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant n_0}$, avec $\mathrm{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemple 15.1

Soit u la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$. La série de terme général u_n est notée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**.

Exercice 15.2

Déterminer les premiers termes de la suite des sommes partielles de la série harmonique.

Solution

On note $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles associées à la série harmonique, c'est-à-dire $\forall\ n \geqslant 1$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Alors on a

$$\mathrm{S}_1 = 1, \quad \mathrm{S}_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \mathrm{S}_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \quad \mathrm{S}_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

2. Convergence

La série $\sum u_n$ étant une suite, on peut s'intéresser à sa convergence.

Définition 15.2.

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite des sommes partielles (S_n) converge. Dans ce cas :

- la limite de la suite (S_n) est alors appelée **somme** de la série, et est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. On a ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- on appelle **reste** de la série la suite (R_n) définie par

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \mathrm{S}_n$$

Attention

L'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la série converge, alors que l'écriture $\sum u_n$ a bien un sens, puisqu'elle désigne une suite.

Remarque

Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies (puisqu'en réalité, ce sont des limites, et il faut donc toujours s'assurer de la convergence). C'est pourquoi on calculera (presque) toujours les sommes partielles, qui sont des sommes finies, avant de passer à la limite.

3. Premiers exemples

Exemple 15.3

Soit (u_n) la suite définie pour tout n par $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Etudier la série $\sum u_n$.

Solution

Notons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Alors

$$\forall\, n,\ \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$. Par somme et produit, on en déduit donc que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$

Exemple 15.4

Montrer que la série harmonique, de terme général $\frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, est divergente.

Solution

Pour tout $n \geqslant 1$, notons $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$.

Nous avons vu dans le chapitre sur le calcul différentiel que l'on a, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

En additionnant ces inégalités, on obtient alors

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \mathrm{H}_n$$

Or, on a

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1), \text{ les termes se téléscopant.}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, par comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

☞ *Exercice 2*

II. Propriétés

1. Opérations sur les séries

Les opérations sur les sommes finies se transposent, dans certains cas, aux séries :

Théorème 15.1. Linéarité

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et λ un réel non nul.

- Les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature (c'est-à-dire qu'elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes). Si elles sont convergentes, on a alors
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont toutes les deux convergentes, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ est également convergente, et on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

⚠ **Attention**

La réciproque du deuxième point n'est pas vraie. Par exemple, si pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n}$, alors la série $\sum u_n + v_n$ converge (vers 0) alors que ni $\sum u_n$ ni $\sum v_n$ ne convergent.
Il faudra donc toujours s'assurer que les séries convergent avant de séparer les sommes.

2. Suite et série

Théorème 15.2. Théorème suite série

Soit (u_n) une suite. Alors (u_n) converge si, et seulement si, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge. Dans ce cas, en notant ℓ la limite de (u_n), on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0$$

Démonstration

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$. On constate que $S_n = u_{n+1} - u_0$ par telescopage. Ainsi, (S_n) converge si et seulement si (u_n) converge. Si (u_n) converge vers ℓ, par passage à la limite, on obtient bien $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0$.

III. Conditions de convergence

1. Limite de la suite et convergence

Théorème 15.3.

Soit (u_n) une suite réelle. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Démonstration

Pour tout n, notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (S_n) admet, par définition, une limite que l'on note ℓ. Mais alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \ell$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell - \ell = 0$$

Remarque

La contraposée du théorème est intéressante : si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ n'est pas convergente. Par exemple, la série $\sum \frac{2n}{n+1}$ diverge, car son terme général ne tend pas vers 0.

⚠ **Attention**

Cette condition est nécessaire, mais pas suffisante : en effet, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 15.5

Soit q un réel. On s'intéresse à la série $\sum q^n$. Alors, pour que la série $\sum q^n$ converge, il faut que $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$, c'est à dire $|q| < 1$. On verra plus tard que la réciproque, dans ce cas, est vraie.

2. Séries à termes positifs

Le cas des séries à termes positifs est plus simple à étudier.

Théorème 15.4.

Soit (u_n) une suite à termes positifs. Alors la série $\sum u_n$ est convergente, si et seulement si, la suite des sommes partielles (S_n) est majorée.

Démonstration

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a alors $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$: la suite (S_n) est donc croissante. D'après les théorèmes sur les suites monotones, (S_n) converge si et seulement si la suite (S_n) est majorée.

IV. Séries de référence

1. Séries géométriques et dérivées

Définition 15.3. Série géométrique

Pour tout entier p, la série $\sum_{n\geqslant p} q^n$ s'appelle **série géométrique** de raison q.

Théorème 15.5.

La série $\sum q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Remarque

Plus généralement, la série $\sum_{n \geqslant p} q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas, $\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}$

Démonstration

La suite (q^n) converge vers 0 si et seulement si $|q| < 1$. Par condition nécessaire de convergence, la série $\sum q^n$ ne peut pas converger si $|q| \geqslant 1$.

Suppsons alors que $|q| < 1$. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. On a $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Or, $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$ car $|q| < 1$. Donc la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{1-q}$: la série converge, et sa somme vaut $\frac{1}{1-q}$.

On dispose également de deux séries, appelées séries géométriques dérivées première et deuxième :

Théorème 15.6. Série géométrique dérivée

- **Série géométrique dérivée première**
  La série $\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$
- **Série géométrique dérivée seconde**
  La série $\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,
  $$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Démonstration

Démontrons le premier résultat. Si $|q| \geqslant 1$, la suite (nq^{n-1}) ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ ne peut converger.

Pour tout $x \in]-1; 1[$, notons $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. T_n est une fonction dérivable sur $]-1; 1[$, et on a
$$T_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$
D'autre part, $T_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. On a donc également
$$T_n'(x) = \frac{-nx^{n+1}(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$
Puisque $\lim_{n \to +\infty} (n+1)x^{n+1} = \lim_{n \to +\infty} nx^{n+2} = 0$ (car $|x| < 1$), on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} T_n'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.
Ainsi, la série $\sum_{n \geqslant 1} nx^{n-1}$ converge, et on a bien
$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Remarque

On remarque que $nq^n = qnq^{n-1}$ et que $n(n-1)q^n = q^2 n(n-1)q^{n-2}$. Ainsi, si $|q| < 1$, les séries $\sum nq^n$ et

$\sum n(n-1)q^n$ convergent également, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^n = \frac{2q^2}{(1-q)^3}$$

2. Séries de Riemann

Définition 15.4. Série de Riemann

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ est appelée **série de Riemann**.

Théorème 15.7.

La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Théorème admis.

Remarque

Même si la série converge, on ne connait pas explicitement la valeur de la somme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, sauf dans certains rares cas.

☞ *Exercice 7*

3. Série exponentielle

Définition 15.5. Série exponentielle

La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$ est appelée série exponentielle.

Théorème 15.8.

Pour tout réel x, la série exponentielle

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

converge, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Démonstration

Théorème admis.

Méthode

Pour déterminer si une série converge ou non, et éventuellement calculer sa limite, on essaiera si possible de se ramener à une des séries usuelles (géométriques, Riemann ou exponentielle).

Exemple 15.6

Déterminer la nature de la série de terme générale $u_n = \frac{(-3)^{n+1}}{n!}$.

Solution

Remarquons tout d'abord que

$$u_n = \frac{(-3)^n(-3)}{n!} = -3\frac{(-3)^n}{n!}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-3)^n}{n!}$ converge puisqu'il s'agit de la série exponentielle, et sa somme vaut e^{-3}. Par produit, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{n!} = -3e^{-3}$$

Remarque

Par décalage d'indice, on a également, pour tout réel x, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ converge également, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$$

et de manière plus générale

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{x^{n-p}}{(n-p)!} = e^x$$

☞ *Exercice 6*

V. Théorèmes de convergence

1. Théorème de comparaison

Pour majorer (S_n), on commence en général par majorer (u_n). On somme alors ces majorants pour en déduire un majorant de (S_n). On dispose ainsi du théorème suivant :

Théorème 15.9. Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**. On suppose que pour tout n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

Alors, si la série $\sum v_n$ est convergente, la série $\sum u_n$ est également convergente. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Démonstration

Si on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, on a, pour tout n, $S_n \leqslant T_n$ (addition des inégalités). De plus, la suite (T_n) est également croissante, de limite T. Donc pour tout n, $T_n \leqslant T$. Donc

$$\forall\, n, S_n \leqslant T_n \leqslant T$$

La suite (S_n) est donc majorée, et d'après le théorème précédent, la série $\sum u_n$ converge. L'inégalité précédente donne alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \leqslant T = \lim_{n\to+\infty} T_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Exemple 15.7

Soit (u_n) une suite à termes positifs vérifiant, pour tout n, $u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$. Puisque la série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série convergente, la série $\sum u_n$ est donc convergente, et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant 2$.

On dispose également d'un critère de divergence :

Théorème 15.10.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à **termes positifs**. On suppose que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant vn$. Alors, si la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$, alors la série $\sum v_n$ diverge également vers $+\infty$.

Exemple 15.8

Soit (u_n) une suite à termes positifs vérifiant pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$. Alors, puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum u_n$ est également divergente.

☞ *Exercices 3 et 4*

2. Equivalence et négligeabilité

On peut enfin utiliser les équivalents :

Théorème 15.11.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**. On suppose que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors, la série $\sum v_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum u_n$ est également convergente.

Exemple 15.9

Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n+3^n}$ converge.

Solution

Remarquons que

$$\frac{1}{2^n+3^n} \sim \frac{1}{3^n}$$

Puisque les deux suites sont à termes positifs, et que la série $\sum \frac{1}{3^n}$ converge (série géométrique), on en déduit que par équivalent, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n+3^n}$ converge.

On dispose également d'un critère en cas de négligeabilité :

Théorème 15.12.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**. On suppose que $u_n = o_{+\infty}(v_n)$. Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est également convergente.

Exemple 15.10

Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2}$ est une série convergente.

Solution

Remarquons que $e^{-n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n^2}}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n^2} = 0 \text{ par croissances comparées}$$

Les deux suites (e^{-n^2}) et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sont positives, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann). Par comparaison de série à termes positifs, on en déduit que la série $\sum e^{-n^2}$ converge.

VI. Convergence absolue

1. Définition

Définition 15.6.

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Exemple 15.11

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente : en effet, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann).

2. Absolue convergence et convergence

Théorème 15.13.

Soit (u_n) une suite réelle. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque

Pour démontrer qu'une série de signe quelconque est convergente, il peut ainsi être judicieux de montrer qu'elle est absolument convergente, et se ramener donc à une série à termes positifs.

3. Convergence et absolue convergence

Remarque

La réciproque n'est pas vraie : une série peut être convergente sans être absolument convergente (on dit que la série est **semi-convergente**).

Par exemple, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais n'est pas absolument convergente, puisque la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

4. Etudier une série

Méthode

Pour étudier une série $\sum u_n$, on suit différentes étapes :

1. On vérifie si la suite (u_n) tend vers 0. Si non, la série est divergente.
2. On s'intéresse à la suite (u_n) et on regarde si elle est équivalente, négligeable devant, ou majorée par une suite dont on sait que la série converge (par exemple, parce que c'est une série de référence).

Dans ce cas, on peut conclure quant à la convergence (mais pas sur la somme de la série)

3. Si on demande de déterminer la somme, on pose la suite des sommes partielles (S_n) et on vérifie si on peut la calculer. Si oui, on peut conclure quant à la convergence, et la valeur de la somme le cas échéant.
4. Si tout ce qui précède n'a pas abouti, on essaie de majorer (ou minorer) les sommes partielles (S_n) si la série est à termes positifs, ou alors on s'intéresse à l'absolue convergence sinon.

Remarque

On ne peut pas forcément calculer la somme de la série, même si on arrive à prouver que la série converge.

Exemple 15.12

Soit u la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2(n^2+1)}$. Etudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$

Solution

Plusieurs méthodes pour cette série.

1. **Théorème de comparaison** : on constate que
$$u_n \sim \frac{1}{n^4}$$
La suite (u_n) et la suite $\left(\frac{1}{n^4}\right)$ sont des suites à termes positifs, et la série $\sum \dfrac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann avec $4>1$). Par équivalence de suite à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
2. **Majoration** : on constate que
$$n^2(n^2+1) = n^4+n^2 \geqslant n^2 \text{ donc } 0 \leqslant \frac{1}{n^2(n^2+1)} \leqslant \frac{1}{n^2}$$
La suite (u_n) est à termes positifs et majorée par la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ dont la série converge (série de Riemann avec $2>1$). Par majoration, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
3. **Calcul des sommes partielles** : Remarquons tout d'abord que la suite (u_n) converge vers 0. On peut écrire u_n sous la forme
$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+1} = v_n - w_n$$
Or, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge (série de Riemann). De plus, pour tout $n \geqslant 1$,
$$0 < w_n \leqslant \frac{1}{n^2} = v_n$$
Par comparaison, (w_n) étant à termes positifs et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ étant convergente, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ converge également.
Par somme, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge également, et
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n^2+1)} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$$

☞ *Exercices 8, 9 et 10*

Exercices

Etude élémentaire des séries

15

Exercices

Calcul de sommes partielles

●○○ **Exercice 1 Un calcul de série par téléscopage** (10 min.)

On considère la série numérique de terme général $\dfrac{1}{4n^2-1}$ $(n \geqslant 1)$ et on note S_N sa N-ème somme partielle.

1. Vérifier que : $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$
2. Montrer que :
$$S_N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right)$$
3. En déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2-1}$ est convergente.

●○○ **Exercice 2 Suites des sommes partielles** (20 min.)

Pour chacune des suites suivantes (définies pour $n \geqslant 3$), calculer la suite des sommes partielles, et déterminer si la série associée est convergente. Le cas échéant, donner la valeur de la somme.

1. $u_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$
2. $v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$
3. $w_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Pour la 3), on pourra essayer de décomposer $\frac{1}{n(n+1))}$ sous la forme $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ pour a, b deux réels bien choisis.

Comparaison

●○○ **Exercice 3 Minoration** (5 min.)

Soit u la suite définie pour tout $n \geqslant 2$ par
$$u_n = \frac{n}{n^2-1}$$
Montrer pour tout pour $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$. Montrer alors que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} u_n$ diverge.

●○○ **Exercice 4 Majoration** (5 min.)

Démontrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$ converge.

●○○ **Exercice 5 Équivalence et négligeabilié** (20 min.)

Étudier la convergence des séries de terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{n+3}{n^3+n+2}$
2. $u_n = \dfrac{1}{2^n+3}$
3. $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{2^n}$
4. $u_n = \dfrac{n^3-6n^2+n-12}{2^n}$
5. $u_n = \dfrac{-n+3}{n^4+1}$
6. $u_n = (-1)^n e^{-3n}$

Séries usuelles

●○○ **Exercice 6 Séries usuelles** (20 min.)

Justifier la convergence des séries suivantes, et calculer leur somme.

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)}{5^n}$
2. $\sum_{n} \frac{n^2-n+1}{3^n}$
3. $\sum_{n} \frac{(-1)^n n}{2^n}$
4. $\sum_{n} \frac{1}{2^n n!}$

●○○ Exercice 7 Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ (20 min.)

On considère la série numérique de terme général $\frac{1}{n^2}$ $(n \geqslant 1)$. On note T_N sa N-ème somme partielle.

1. Vérifier que :
$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$
2. En déduire que :
$$\forall N \geq 1, \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \leq T_N \leq 2 - \frac{1}{N}$$
3. Montrer que la suite (T_N) est majorée.
4. Déterminer la monotonie de la suite $(T_N)_{N\geq 2}$.
5. En déduire la convergence de la série initiale.
6. Établir l'encadrement suivant :
$$\frac{3}{2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

Suites et séries

●●○ Exercice 8 Suites et séries I - EDHEC (20 min.)

Soit u la suite définie par $u_0 \in]0;1[$ et pour tout n, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Démontrer que pour tout n, $0 < u_n < 1$. Montrer alors que la suite u converge, et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum_n u_n^2$ converge et calculer sa somme.
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$?

●●○ Exercice 9 Séries alternées (30 min.)

- Pour tout n, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
- (Généralisation) Soit u une suite positive, décroissante de limite nulle. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$. Démontrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, et en déduire que la série $\sum_n (-1)^n u_n$ converge.

Remarque : on peut calculer la somme de la première série : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

●●○ Exercice 10 Suites et séries II (30 min.)

On considère la suite (u_n) définie par
$$0 < u_0 < 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_n^2}$$

1. Montrer que pour tout n, u_n existe et appartient à $]0;1[$.
2. Montrer que pour tout n, $u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Corrigés

Etude élémentaire des séries

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. On constate que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{2n-1}{(2n-1)(2n+1)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\right)\\ &= \frac{1}{(2n)^2-1^2} = \frac{1}{4n^2-1}\end{aligned}$$

2. Posons, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{2n-1}$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}S_N &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} u_n - u_{n+1}\\ &= \frac{1}{2}(u_1 - u_{N+1}) \text{ par télescopage}\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}\right)\end{aligned}$$

3. On constate, d'après la question précédente, que

$$S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2} \text{ par somme}$$

Ainsi, la suite des sommes partielles converge, donc la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2-1}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 2

Constatons que

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}\\ &= \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}\\ &= \frac{1}{\ln(n)}-\frac{1}{\ln(n+1)}\end{aligned}$$

Notons pour tout entier $n \geqslant 3$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} u_k$. Alors,

$$S_n = \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{\ln(k)}-\frac{1}{\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln(3)}-\frac{1}{\ln(n+1)} \text{ par téléscopage.}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{\ln(3)}$. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} u_n$ converge, et

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} u_n = \frac{1}{\ln(3)}}$$

De même,

$$v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln(n-1)-\ln(n)$$

Notons, pour tout entier $n \geqslant 3$, $T_n = \sum\limits_{k=3}^{n} v_k$. Alors,

$$T_n = \sum_{k=3}^{n} \ln(k-1)-\ln(k) = \ln(2)-\ln(n) \text{ par téléscopage.}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = -\infty$. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} v_n$ diverge.

Méthode

Dans le cas d'une série avec des fractions rationnelles, on essaie de décomposer en éléments simples, et on observe ce qu'il se passe.

Pour tout entier $n \geqslant 3$, on a

$$w_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Notons alors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $U_n = \sum\limits_{k=3}^{n} w_k$. Alors,

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} \text{ par téléscopage.} \end{aligned}$$

On constate alors que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}$. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} w_n$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{3}}$$

Exercice 3

Méthode

Pour montrer qu'une série converge ou diverge, on peut raisonner par comparaison.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $n^2-1 \leqslant n^2$. Par passage à l'inverse, on en déduit donc que pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^2-1} \geqslant \frac{1}{n^2}$. Ainsi,

$$\forall\, n \geqslant 2,\ u_n = \frac{n}{n^2-1} \geqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n}$ est une série à termes positifs et divergente. Par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

Exercice 4

Pour tout $n \geqslant 3$, $\ln(n) \geqslant 1$. Donc, pour $n \geqslant 3$, $4^n \ln(n) \geqslant 4^n$. Par passage à l'inverse, on en déduit donc que

$$\forall\, n \geqslant 3,\ 0 \leqslant \frac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant \frac{5}{4^n}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{5}{4^n}$ est à termes positifs et convergente (série géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$). Par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$, qui est également à termes positifs, converge.

Exercice 5

On va raisonner par équivalence ou négligeabilité.

Attention

Attention, il faut que les suites soient à termes positifs.

1. $u_n \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Les suites sont à termes positifs, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$). Par théorème d'équivalence de suites à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.
2. De la même manière, $u_n \sim \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge (série géométrique, avec $-1 < \frac{1}{2} < 1$). Les suites étant à termes positifs, par le même théorème d'équivalence, on en déduit que $\sum u_n$ converge.
3. A nouveau, $u_n \sim \frac{n^2}{2^n} = n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Cette dernière série converge (série géométrique dérivée seconde, avec $-1 < \frac{1}{2} < 1$), et les suites sont à termes positifs. Par théorème d'équivalence, $\sum u_n$ converge.
4. La suite (u_n) n'est pas toujours à termes positifs, mais $n^3 - 6n^2 + n - 12$ tend vers $+\infty$, donc sera positif à partir d'un certain rang. La suite (u_n) est donc positive à partir d'un certain rang. De plus

$$u_n \sim \frac{n^3}{2^n}$$

Cela ne fait pas partie des séries usuelles. En revanche, on constate que $\frac{n^3}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En effet :

$$\frac{\frac{n^3}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^5}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ par croissances comparées}$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann avec $2 > 1$). Par théorème de négligeabilité de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{n^3}{2^n}$ converge également. Finalement, par théorème d'équivalence, la série $\sum u_n$ converge.
5. La suite (u_n) est négative pour $n \geqslant 3$. On passe à la convergence absolue :

$$\left|\frac{-n+3}{n^4+1}\right| \sim \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

La série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (Riemann avec $3 > 1$). Donc la série $\sum |u_n|$ converge par théorème d'équivalence de suites à termes positifs. Par théorème, la série $\sum u_n$ converge également.
6. La suite (u_n) n'est pas de signe constant. On a $|u_n| = \mathrm{e}^{-3n}$, ce qu'on peut écrire :

$$|u_n| = \left(\mathrm{e}^{-3}\right)^n$$

La série de terme général $\sum \left(\mathrm{e}^{-3}\right)^n$ converge (série géométrique, avec $-1 < \mathrm{e}^{-3} < 1$). Par théorème d'équivalence, $\sum |u_n|$ converge, et donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 6

Remarquons que

$$\frac{n(n-1)}{5^n} = \frac{1}{5^2} \frac{n(n-1)}{5^{n-2}} = \frac{1}{5^2} \times n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$ converge (série géométrique dérivée seconde, avec $-1 < \frac{1}{5} < 1$) et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3}$$

Par produit, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n(n-1)}{5^n}$ converge, et

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{5^n}=\frac{1}{5^2}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3}}$$

De même,

$$\frac{n^2-n+1}{3^n}=\frac{n(n-1)}{3^n}+\frac{1}{3^n}=n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Par le même raisonnement, la série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge (série géométrique dérivée seconde telle que $-1<\frac{1}{3}<1$). De plus, la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{3^n}\right)$ converge (série géométrique, $-1<\frac{1}{3}<1$). Par somme, la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{n^2-n+1}{3^n}$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2-n+1}{3^n}=\frac{1}{3^2}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}$$

Pour la troisième série, on constate que

$$\frac{(-1)^n n}{2^n}=-\frac{1}{2}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge (série géométrique dérivée, avec $-1<-\frac{1}{2}<1$), et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}$$

Par produit, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n n}{2^n}$ converge, et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}}$$

Enfin, on constate que

$$\frac{1}{2^n n!}=\frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}$$

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n n!}$ est la série exponentielle en $\frac{1}{2}$, qui converge, et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n n!}=e^{1/2}=\sqrt{e}}$$

Exercice 7

1. Après calculs :

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\quad\text{et}\quad\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n-1)}$$

Puisque $n-1\leqslant n\leqslant n+1$, par produit puis en appliquant la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{1}{n(n+1)}\leqslant\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{n(n-1)}$$

d'où le résultat.

2. On somme le résultat précédent pour n allant de 2 à N. On obtient, par télescopage :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{N}+1}\leqslant\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n^2}\leqslant 1-\frac{1}{\mathrm{N}}$$

et puisque $\mathrm{T}_n=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n^2}=1+\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n^2}$, on en déduit

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{N}+1}\leqslant \mathrm{T}_{\mathrm{N}}-1\leqslant 1-\frac{1}{\mathrm{N}}$$

puis le résultat en ajoutant 1 à chaque membre de l'égalité.

3. La suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ étant à termes positifs, la suite $(\mathrm{T}_{\mathrm{N}})$ est croissante. D'après ce qui précède, pour tout $\mathrm{N}\geqslant 2$:

$$\mathrm{T}_{\mathrm{N}}\leqslant 2-\frac{1}{\mathrm{N}}\leqslant 2$$

la suite $(\mathrm{T}_{\mathrm{N}})$ est donc majorée. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (T_n) converge.

4. Puisque la suite des sommes partielles converge, par définition, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge.

5. On utilise l'encadrement vu plus haut : puisque, pour tout $\mathrm{N}\geqslant 2$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{\mathrm{N}+1}\leqslant \mathrm{T}_{\mathrm{N}}\leqslant 2-\frac{1}{\mathrm{N}}$$

et que les trois membres admettent une limite, par passage à la limite, on en déduit que

$$\boxed{\frac{3}{2}\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant 2}$$

Exercice 8

1. Le premier résultat se montre par récurrence sur n, en constatant que si $u_n\in]0;1[$ alors $u_n-u_n^2\leqslant u_n<1$ et $u_n>u_n^2$, donc $0<u_{n+1}<1$. De plus, pour tout n, $u_{n+1}-u_n=-u_n^2<0$ donc la suite (u_n) est décroissante. Elle est minorée par 0, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. En notant l sa limite, et puisque la fonction $f:x\mapsto x-x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème du point fixe, $l=l-l^2$ et donc $l=0$. Bilan : la suite u converge vers 0.

2. Par définition, $u_n^2=u_n-u_{n+1}$. Notons, pour tout entier n, $\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}u_k^2$. D'après ce qui précède,

$$\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}(u_k-u_{k+1}=u_0-u_{n+1}\text{ par télescopage.}$$

Puisque la suite (u_n) converge vers 0, (S_n) converge vers u_0. Donc, par définition, la série $\sum_n u_n^2$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2=u_0$$

3. Notons $\mathrm{T}_n=\sum_{k=0}^{n}\ln(u_{k+1})-\ln(u_k)$. Par télescopage,

$$\mathrm{T}_n=\ln(u_{n+1})-\ln(u_0)$$

Puisque (u_n) converge vers 0, par composée, $\lim_{n\to+\infty}\ln(u_{n+1})=-\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{T}_n=-\infty$$

La série $\sum_n(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n))$ diverge.

Exercice 9

- Remarquons que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{S}_{2(n+1)} - \mathrm{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < 0$$

donc la suite (S_{2n}) est décroissante. De même,

$$\mathrm{S}_{2(n+1)+1} - \mathrm{S}_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0$$

donc la suite (S_{2n+1}) est croissante. Enfin,

$$\mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{2n+1} = 0$$

Ainsi, les suites $(\mathrm{S}_{2n}$ et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Etant adjacentes, elles convergent et ont la même limite. Puisque (S_{2n}) est (S_{2n+1}) convergent vers la même limite, on en déduit que (S_n) elle-même converge vers cette limite, et donc que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

- La généralisation se fait de la même manière.

Exercice 10

1. Montrons par récurrence la proposition P_n : “u_n existe et $0 < u_n < 1$”.

- Pour $n = 0$, puisque $0 < u_0 < 1$, la proposition P_0 est vraie.
- On suppose que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.

Puisque, par hypothèse de récurrence, $0 < u_n < 1$, alors

$$0 < u_n^2 < u_n < 1 \Leftrightarrow 1 < 1 + u_n^2 < 1 + u_n < 2$$

soit, puisque la fonction racine est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

$$1 < \sqrt{1+u_n^2} < \sqrt{1+u_n} < \sqrt{2}$$

u_{n+1} existe donc. De plus, d'une part,

$$\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_n^2} > 0$$

et d'autre part $-\sqrt{1+u_n^2} < -1$ et donc

$$\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_n^2} < \sqrt{2} - 1 < 1$$

donc $0 < u_{n+1} < 1$: la proposition P_{n+1} est donc vraie.
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.

2. On constate que, pour tout entier n (et puisque $u_n < 1$) :

$$u_{n+1} = \frac{(1+u_n) - (1+u_n^2)}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_n^2}} = \frac{u_n - u_n^2}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_n^2}} \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_n^2}}$$

Puisque $u_n \geqslant 0$, alors $\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_n^2} \geqslant 2$ et donc

$$u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$$

On peut alors montrer, par récurrence rapide, que pour tout entier n,

$$u_n \leqslant u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Puisque la suite (u_n) est positive, et que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et à termes positifs et converge, par théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ converge.

16

Chapitre

Espaces probabilisés infinis

Résumé

L'objectif de ce chapitre est de généraliser la notion d'espace probabilisé, que nous avons vu dans le chapitre 6, à des espaces infinis.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de tribu . . . . ☐

② Connaître la notion de système complet d'évènements dans le cas général . . . . ☐

③ Connaître les propriétés d'une probabilité . . . . ☐

④ Savoir utiliser la propriété de la limite monotone . . . . ☐

⑤ Savoir démontrer qu'un évènement est négligeable et presque sûr . . . . ☐

⑥ Connaître la définition d'une probabilité conditionnelle . . . . ☐

⑦ Savoir utiliser la formule des probabilités composées . . . . ☐

⑧ Savoir utiliser la formule des probabilités totales . . . . ☐

⑨ Connaître la formule de Bayes . . . . ☐

⑩ Savoir manipuler des évènements mutuellement indépendants . . . . ☐

⑪ Connaître la définition d'une variable aléatoire . . . . ☐

⑫ Savoir déterminer le support et la loi d'une variable aléatoire . . . . ☐

⑬ Connaître la définition et les propriétés de la fonction de répartition . . . . ☐

I. Espace probabilisable

1. Tribu

Pour un espace probabilisé fini, si on note Ω l'univers, on utilisait comme ensemble des événements $\mathscr{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω. Pour un ensemble Ω infini, il est peu judicieux de prendre toutes les parties comme ensemble des événements. On va prendre certains ensembles seulement, en imposant des propriétés essentielles pour pouvoir parler d'événements, puis plus tard, de probabilité.

Définition 16.1.

Soit Ω un ensemble quelconque. Soit $\mathscr{A}$ un ensemble de sous-ensembles de Ω ($\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$). On dit que $\mathscr{A}$ est une **tribu** (ou une σ**-algèbre**) s'il vérifie les propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathscr{A}$;
- $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathscr{A}, \overline{A} \in \mathscr{A}$;
- $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable : si pour tout $i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathscr{A}$, alors

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathscr{A}$$

Exemple 16.1

La tribu $\{\varnothing; \Omega\}$ est une tribu, appelée **tribu grossière**. La tribu $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu, appelée **tribu discrète**.

Proposition 16.1.

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

- $\varnothing \in \mathscr{A}$;
- $\mathscr{A}$ est stable par union et intersection finie ;
- $\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable : si pour tout $i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathscr{A}$, alors

$$\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathscr{A}$$

Démonstration

Si $\Omega \in \mathscr{A}$, alors $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathscr{A}$. La troisième propriété découle de la stabilité par passage au complémentaire, et les lois de de Morgan.

Remarque

Lorsque l'ensemble Ω est fini, on prendra toujours comme tribu $\mathscr{P}(\Omega)$, puisque (en prenant de l'avance) on sait calculer la probabilité d'un ensemble fini.

☞ *Exercice 1.*

2. Espace probabilisable

Définition 16.2.

Soit Ω un ensemble, et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. L'ensemble $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé **espace probabilisable**.

Exemple 16.2

L'ensemble $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable.

Remarque

Puisqu'on est dans le cadre des probabilités, si $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace probabilisable, tout ensemble $A \in \mathscr{A}$

est appelé **événement**. Ainsi, la tribu $\mathscr{A}$ contient l'ensemble des événements auxquels on va s'intéresser.

3. Système complet d'évènements

Définition 16.3.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des événements de $\mathscr{A}$. On dit que (A_i) est un **système complet d'événements** si

- Les A_i sont deux à deux disjoints :
$$\forall\, i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$$
- La réunion des A_i est égale à Ω :
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$$

Remarque
On dit que deux événements A_i et A_j sont **incompatibles** lorsqu'ils sont disjoints.

Exemple 16.3
Si $\Omega = \mathbb{N}$, et $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, alors les ensembles $A_i = \{i\}$, pour tout entier i, forment un système complet d'événements.

☞ *Exercice 2.*

II. Probabilité et espace probabilisé

1. Probabilité

Définition 16.4.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ une application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0;1]$ vérifiant

- (*probabilité de l'événement certain*) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- (σ*-additivité*) Pour toute suite d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ **deux à deux incompatibles**, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Remarque
On utilisera souvent la σ-additivité sur des unions finies, plutôt qu'infinies.

2. Propriétés

Propriété 16.2.

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
- Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
- Si $A, B \in \mathscr{A}^2$ avec $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Démonstration
Les preuves reposent systématiquement sur l'additivité ou σ-additivité des probabilités :

- Ω et $\varnothing$ sont incompatibles ; par additivité de $\mathbb{P}$, on a
$$\mathbb{P}(\varnothing \cup \Omega) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\varnothing) + 1$$

Or $\varnothing \cup \Omega = \Omega$, donc $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(\varnothing) + 1$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

- A et $\overline{A}$ sont incompatibles par définition, et $A \cup \overline{A} = \Omega$. Donc, par additivité de $\mathbb{P}$:
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$
- Si $A \subset B$, notons $C = B \backslash A = B \cap \overline{A} \in \mathscr{A}$. Par construction, A et C sont incompatibles, et $A \cup C = B$. Par additivité de $\mathbb{P}$:
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)$$
Puisque $\mathbb{P}(C) \geqslant 0$, on en déduit le résultat.

Théorème 16.3.

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$. Soient A et B deux événements de $\mathscr{A}$. Alors
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Démonstration

Par construction, $A \cap B$ et $A \backslash B$ sont incompatibles, et $(A \cap B) \cup (A \backslash B) = A$. Par additivité de $\mathbb{P}$,
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \backslash B)$$
Or $\mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B)$ à nouveau par additivité de $\mathbb{P}$ (B et $A \backslash B$ sont incompatibles). Donc
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$$

3. Espace probabilisé

Définition 16.5.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable, et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. L'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

Remarque

La plupart du temps, on ne cherchera pas l'espace probabilisé, il sera fixé une fois pour toute, sans être forcément explicitement donné.

III. Propriétés des probabilités

Dans cette section, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Propriété de la limite monotone

Définition 16.6.

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.

- On dit que la suite (A_i) est **croissante** si, pour tout entier i,
$$A_i \subset A_{i+1}$$
- On dit que la suite (A_i) est **décroissante** si, pour tout entier i,
$$A_i \supset A_{i+1}$$

Théorème 16.4. Propriété de la limite monotone

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.

···

- Si la suite (A_i) est croissante, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
- Si la suite (A_i) est décroissante, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Exemple 16.4

On possède une pièce bien équilibrée qu'on lance une infinité de fois. Déterminer la probabilité de n'obtenir jamais pile.

Solution

On note A_n l'événement "n'obtenir aucun pile jusqu'au $n^{\text{ième}}$ lancer". Alors, par construction $A_{n+1} \subset A_n$ (puisque si on n'a pas obtenu pile jusqu'au $n+1^{\text{ième}}$ lancer, c'est qu'on n'a pas obtenu pile jusqu'au $n^{\text{ième}}$ lancer). Puisque $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$
Ainsi, la probabilité de n'obtenir jamais pile est nulle.

La propriété de la limite monotone se généralise à des événements quelconques :

Proposition 16.5.

Soit (A_i) une suite d'événements de $\mathscr{A}$. Alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$$
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)$$

Démonstration

Il suffit de constater que $\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, et $\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

☞ *Exercices 3 et 4.*

2. Evénement vrai presque sûrement

L'exemple précédent nous a donné un événement de probabilité nulle, mais qui n'est pas l'événement impossible : en effet, on peut théoriquement n'obtenir jamais pile, en faisant systématiquement face.

Définition 16.7.

Soit A un événement de $\mathscr{A}$.
- On dit que A est **négligeable** si $\mathbb{P}(A) = 0$.
- On dit que A est **presque sûr** (ou **vrai presque sûrement**) si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exemple 16.5

Dans l'exemple précédent, l'événement "obtenir au moins une fois pile" est presque sûr, et l'événement "n'obtenir jamais pile" est négligeable.

Remarque
Ce cas n'arrivait jamais dans un espace probabilisé fini. En effet, dans ce cas, $\mathbb{P}(A) = 0$ si et seulement si $A = \varnothing$. C'est une particularité des espaces probabilisés infinis, dont il faut se méfier.

3. Probabilités conditionnelles

La définition de probabilités conditionnelles, vue dans le cas des probabilités finies, se généralise aux espaces probabilisés quelconques.

Définition 16.8.

Soient A et B deux événements, tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle **probabilité de** B **sachant** A, et on note $\mathbb{P}_A(B)$ le nombre

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

La fonction $\mathbb{P}_A : \mathscr{A} \to [0;1]$ est également une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Théorème 16.6. Probabilités composées

Pour tous événements $A_1, \cdots, A_n$, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Définition 16.9. Système complet d'évènements

Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille d'évènements de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forme un **système complet d'évènements** si :

- Pour tout $i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$,
- $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega$

On dit que $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'évènements si :

- Pour tout $i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$,
- $\displaystyle\mathbb{P}\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = 1$

Remarque
Un système complet d'évènements est un système quasi-complet d'évènements. En revanche, la réciproque n'est pas forcément vraie.

Théorème 16.7. Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements de Ω. Alors, pour tout événement B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

Si, de plus, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

En particulier,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$$

Le resultat est vraie si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'évènements.

Démonstration

Par définition,

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty}(A_k \cap B) = \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \cap B = \Omega \cap B = B$$

De plus, puisque les (A_i) sont deux à deux disjoints, les $(A_i \cap B)$ le sont également. Par σ-additivité, on en déduit alors que

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k \cap B)$$

De plus, puisque $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$ pour tout k, on peut conclure que

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Exemple 16.6 (Exemple fondamental)

Si $A \in \mathscr{A}$ est un évènement, alors $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'évènements. Ainsi, pour tout évènement B, on aura

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

Théorème 16.8. Formule de Bayes

Soient A et B deux événements de $\mathscr{A}$ de probabilité non nulle. Alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}_A(B)$$

Démonstration

Puisque A et B sont de probabilités non nulles, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$$

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_B(A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}_A(B)\end{aligned}$$

4. Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements

La notion d'indépendance mutuelle se généralise à une suite infinie d'événements :

Définition 16.10.

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite infinie d'événements de $\mathscr{A}$. On dit que la suite (A_i) est **mutuellement indépendante** si pour tout sous ensemble fini $J \subset \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$$

☞ *Exercices 5, 6 et 7.*

IV. Variables aléatoires

Dans cette section, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Définition

Définition 16.11.

Une **variable aléatoire** X sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{A}$$

On appelle **support** de X, et on note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Remarque

La condition imposée à X permet simplement de pouvoir calculer la probabilité de plusieurs ensembles, du type $\{w \in \Omega, X(w) = x\}$, ... Sans cette condition, les ensembles qu'on manipule ne sont *a priori* pas dans la tribu $\mathscr{A}$, et on ne peut donc pas *a priori* calculer leur probabilité.

Exemple 16.7

On lance un dé bien équilibré et on note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir 6. La variable aléatoire X est à valeur dans $\mathbb{N}$, et $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (il faut au moins un lancer pour obtenir 6).

Remarque

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, alors $X+Y$, $\min(X,Y) : \omega \mapsto \min(X(\omega), Y(\omega))$ et $\max(X,Y) : \omega \mapsto \max(X(\omega), Y(\omega))$ sont également des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.

Définition 16.12.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors la fonction

$$g(X) : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto g(X(\omega)) \end{array}$$

est également une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Exemple 16.8

En prenant pour g la fonction carrée, on peut définir la variable aléatoire $X^2 : \omega \mapsto X(\omega)^2$.

2. Propriétés

Définition 16.13.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$$
$$[X < x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\}$$
$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant x\}$$

Si I est une partie de $\mathbb{R}$, on note également

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}$$

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$ alors on note

$$[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega, x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}$$

Remarque

Ces différents ensembles sont dans la tribu $\mathscr{A}$ par construction de X. Ainsi, on pourra calculer leur probabilité, et on notera par exemple

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}([X = x]) \text{ et } \mathbb{P}(x \leqslant X \leqslant y) = \mathbb{P}([x \leqslant X \leqslant y])$$

Exercice 16.9

Dans l'exemple précédent, déterminer $\mathbb{P}(X=1)$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$.

Solution

$[X=1]$ correspond à l'ensemble des tirages ayant un 6 au premier lancer; $[X \leqslant 2]$ correspond à l'ensemble des tirages ayant un 6 au premier lancer, ou alors un 6 au deuxième lancer mais pas au premier. Par construction, $\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 2)=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$.

Théorème 16.9.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeur dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Alors, la suite des $([X=i])_{i\in\mathbb{N}}$ (ou $([X=i])_{i\in\mathbb{Z}}$) est un système complet d'événement associé à la variable aléatoire X.

Démonstration

Les ensembles $[X=i]$, par construction, sont deux à deux disjoints, et puisque la variable aléatoire est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$), la réunion des $[X=i]$ recouvre bien Ω.

Exemple 16.10

Dans l'exemple précédent, la variable aléatoire étant à valeur dans $\mathbb{N}^*$, la suite $([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ représente un système complet d'événements de Ω.

3. Loi d'une variable aléatoire

Définition 16.14.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On appelle **loi** de la variable aléatoire X, la donnée des $\mathbb{P}(X=x)$ pour tout réel x.

Remarque

Contrairement aux variables aléatoires finies, où on donnait la loi de probabilités sous forme de tableau, il faudra ici donner une formule plus générale.

Exemple 16.11

Dans le cas de notre lancer de dé, où X désigne le premier lancer où on obtient 6. Alors $\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X=2)=\frac{5}{6}.\frac{1}{6}$, et plus généralement

$$P(X=i)=\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\frac{1}{6}$$

Remarque

Cette loi s'appelle loi géométrique. Nous y reviendrons plus tard.

Théorème 16.10.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeur dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Alors

$$\sum_{i\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=i)=1$$

Démonstration

En effet, dans ce cas, la suite $([X=i])$ forme un système complet d'événements.

Exemple 16.12

Dans notre exemple, en utilisant la série géométrique (avec $-1 \leqslant \frac{5}{6} < 1$) :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1$$

Remarque

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, on dit que la variable aléatoire est **discrète**.

☞ *Exercice 8.*

4. Fonction de répartition

Définition 16.15.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On appelle **fonction de répartition** de X, et on note F_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X : x \longmapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Propriété 16.11.

La fonction de répartition F_X de X est une fonction croissante, continue à droite en tout point, et telle que

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$$

Démonstration

Si $x \leqslant y$, alors

$$F_X(y) = P(X \leqslant y) = P(X \leqslant x) + P(x < X \leqslant y) \geqslant P(X \leqslant x) = F_X(x)$$

donc F_X est bien croissante.

$$\lim_{x\to-\infty} P(X \leqslant x) = P(\varnothing) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} P(X \leqslant x) = P(\Omega) = 1$$

On admettra la continuité à droite en tout point.

Théorème 16.12.

Pour connaitre la loi de probabilité de X, il faut et il suffit de connaitre la fonction de répartition de X.

Démonstration

Dans le cas où X est à valeur dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, on constate par exemple que

$$\mathbb{P}(X=i) = \mathbb{P}(X \leqslant i) - \mathbb{P}(X \leqslant i-1) = F_X(i) - F_X(i-1)$$

Le cas où X est à valeur dans $\mathbb{R}$ quelconque est admis.

Exercices

Espaces probabilisés infinis

16

Exercices

Généralités

●○○ **Exercice 1 Une tribu** (5 min.)

Soit $\Omega = \{1,2,3,4\}$. Montrer que $\mathscr{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.
Montrer que $\mathscr{A}$ n'est pas égale à $\mathscr{P}(\Omega)$.

●○○ **Exercice 2 Des évènements** (10 min.)

On lance une pièce une infinité de fois. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement « le k-ième lancer donne pile ».

1. Décrire par une phrase chacun des évènements suivants :
$$E_1 = \bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k, \qquad E_2 = \left(\bigcap_{k=1}^{4} \bar{A}_k\right) \cap \left(\bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k\right), \qquad E_3 = \bigcup_{k=5}^{+\infty} A_k.$$
2. Écrire à l'aide des A_k l'évènement B_n « on obtient au moins une fois pile après le n-ième lancer ».
3. Écrire à l'aide des A_k les évènements :
   (a) C_n : « on n'obtient plus que des piles à partir du n-ième lancer ».
   (b) C : « on n'obtient plus que des piles à partir d'un certain lancer ».

Limite monotone

●○○ **Exercice 3 Une chaîne de Markov** (30 min.)

Une araignée se déplace sur les trois sommets d'un triangle ABC. A l'instant 0, elle est en A. Puis, à chaque instant instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle se déplace :

- si elle est en A, elle va en B ;
- si elle est en B, elle va en A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et en C avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- si elle est en C, elle y reste.

On note E l'évènement « la puce arrive en C ». On cherche à montrer que E a lieu presque sûrement.

1. Représenter la situation avec un graphe.
2. Montrer que l'araignée ne peut arriver au point C qu'à des instants pairs.
3. Calculer la probabilité de l'évènement D_n que l'araignée arrive en C pour la première fois à l'instant $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Que dire de D_p et D_q si $p \neq q$?
5. En déduire que $\mathbb{P}(E) = 1$.

●○○ **Exercice 4 Et la formule des probabilités totales** (30 min.)

Un joueur lance une pièce non truquée, équilibrée, jusqu'à l'obtention d'un premier pile. S'il lui a fallu n (n entier naturel non nul) lancers pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi $n!$ billets dont un seul gagnant.

On définit, pour tout entier naturel non nul, les évènements :

- E_n : « le joueur obtient le premier pile au lancer n »
- P_n : « le joueur obtient pile au n-ième lancer »
- F_n : « le joueur obtient face au n-ième lancer »
- F : « le joueur n'obtient jamais pile »

1. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $\mathbb{P}(E_n)$. Exprimer $\overline{F}$ en fonction des E_n, puis en déduire $\mathbb{P}(\overline{F})$ et $\mathbb{P}(F)$.
2. On définit l'évènement G : « le joueur obtient le billet gagnant ». Pour tout entier naturel n non nul, déterminer $\mathbb{P}_{E_n}(G)$, puis en déduire $\mathbb{P}(G)$.
3. Le jeu est-il équilibré (on donne $\sqrt{e} \approx 1,65$) ?

Autres exercices

●○○ Exercice 5 Une autre chaîne de Markov (20 min.)

On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B, C d'un triangle selon le procédé suivant :

- si la particule se trouve en B, elle y reste.
- si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
- si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, et elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.
- à la première seconde, elle se pose au hasard sur l'un des trois sommets.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement : "à la n^{ieme} seconde, la particule se trouve en A (resp. B, C)". On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n.

1. Que valent a_1, b_1, c_1 ?
2. Donner une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}$$
(*On pourra d'abord montrer que* (c_n) *est une suite récurrente linéaire d'ordre* 2).
En déduire a_n et b_n en fonction de n.
4. Etudier la convergence des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$. Intérpréter.

●○○ Exercice 6 Un jeu (20 min.)

On dispose de deux pièces identiques d'apparence, la pièce A donnant Pile avec une probabilité a, et la pièce B donnant Pile avec une probabilité b.

Pour le premier lancer du jeu, on choisit une pièce au hasard et pour les coups suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient Pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce pour le lancer suivant.

On note, pour tout $k \geqslant 1$, A_k l'événement "le k-ième lancer se fait avec la pièce A", $B_k = \overline{A_k}$ et E_k l'événement "le k-ième lancer amène Pile".

1. Trouver une relation entre $\mathbb{P}(E_k)$ et $\mathbb{P}(A_k)$.
2. Trouver une relation entre $\mathbb{P}(A_{k+1})$ et $\mathbb{P}(A_k)$.
3. En déduire $\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(E_k)$.

●○○ Exercice 7 Un autre jeu (30 min.)

Deux joueurs A et B jouent chacun avec deux dés équilibrés. A gagnera en amenant un total de 7, et B en amenant un total de 6. B joue le premier et ensuite (si nécessaire), A et B jouent alternativement. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux gagne.

1. Déterminer la probabilité des événements G_A (resp G_B) : "le joueur A obtient 7" (resp "le joueur B obtient 6")
2. On introduit les événements B_n (resp. A_n) : "le joueur B (resp A) gagne à son n-ième lancer". Déterminer la probabilité de ces événements.
3. On note V_A (resp. V_B) l'événement "le jouer A (resp. B) gagne". Décrire ces deux événements en fonction des événements précédents. En déduire la probabilité de V_A et V_B. Le jeu est-il équilibré ?

●●○ Exercice 8 Des boules (20 min.)

Soit $n > 0$. On dispose d'une boite A contenant n boules numérotées de 1 à n, et de n boîtes $A_1 \cdots A_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la boite A_k contient k boules numérotées de 1 à k.

On tire au hasard une boule de A. En désignant k le numéro obtenu, on tire alors au hasard une boule dans la boite A_k. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue à l'issue du 2e tirage. Déterminer la loi de X.

Sur les chaînes de Markov

●●○ Exercice 9 Présentation des chaînes de Markov (45 min.)

Calcul matriciel

On définit les matrices A, B par $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{12}A$.

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 0 & -11 & 11 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer $P^{-1}BP$. En déduire une matrice diagonale D telle que $B = PDP^{-1}$.
   (c) Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0$, $B^n = PD^nP^{-1}$.
   (d) Déterminer l'expression de la matrice B^n en fonction de n.

Application à un processus aléatoire

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :

T : les jouets traditionnels tels que poupées, peluches ;

M : les jouets liés à la mode inspirés directement d'un livre, un film, une émission ;

S : les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.

Il estime que

(i) Le client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour Noel choisira, l'année suivante, un jouet de l'une des trois catégories avec une équiprobabilité ;
(ii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
(iii) Le client qui a acheté un jouet scientifique optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{2}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Le volume des ventes de ce commerçant vient de se composer d'une part $p_0 = \frac{45}{100}$ de jouets de la catégorie T, d'une part $q_0 = \frac{25}{100}$ de jouets de la catégorie M et d'une part $r_0 = \frac{30}{100}$ de jouets de la catégorie S.
On désigne par p_n, q_n, r_n, les probabilités respectives des jouets T, M, S dans les ventes du distributeur le n-ième Noël suivant.

1. Montrer que le triplet $(p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1})$ s'exprime en fonction du triplet (p_n, q_n, r_n).
2. Déterminer une matrice C telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.
4. Exprimer (p_n, q_n, r_n) en fonction de n.
5. Quelles parts à long terme les trois catégories de jouets représenteront-elles dans la vente si l'attitude des consommateurs reste constante ?

Résumé

Le processus décrit dans cet exercice est un exemple de chaîne de Markov. Pour simplifier les notations, nous allons coder les catégories T, M et S par les nombres 0, 1 et 2 et introduire la suite de variables aléatoires (X_n), où X_n vaut 0, 1 ou 2 selon que le client choisit la n-ème année un jouets de la catégorie T, M et S. On a ainsi $p_n = P(X_n = 0)\ldots$

La caractéristique d'une chaîne de Markov est que la valeur de X_n (plus exactement la probabilité qu'elle prenne chaque valeur) ne dépend que de celle de X_{n-1} et non de ce qui s'est passé avant. C'est bien le cas dans notre exemple. La matrice C est appelée **matrice de transition** de la chaîne.

1. Quelle propriété possède C ?
2. Représenter les probabilités de passage de X_n d'une valeur à une autre sur un graphe.
3. Notons p_∞, q_∞, r_∞ les limites de (p_n), (q_n), (r_n) ; et $\pi_\infty = \begin{pmatrix} p_\infty \\ q_\infty \\ r_\infty \end{pmatrix}$? Que vaut $C\pi_\infty$?

   Cette convergence des probabilités vers l'état stable, indépendemment de l'état initial, est une propriété importante des chaînes de Markov : on dit qu'elle est **ergodique**.

   Pour des renseignements supplémentaires sur les chaînes de markov :

Corrigés

Espaces probabilisés infinis

Corrigés des exercices

Exercice 1

Les réunions deux à deux d'éléments de $\mathscr{A}$ sont incluses dans $\mathscr{A}$, et $\Omega \in \mathscr{A}$: $\mathscr{A}$ est bien une tribu.
De plus, $\mathscr{A} \neq \mathscr{P}(\Omega)$, car par exemple $\{3\} \notin \mathscr{A}$.

Exercice 2

1. E_1 représente l'évènement : "n'obtenir que des piles à partir du 5-ième lancer", E_2 l'évènement : "obtenir 4 fois face puis que des piles", et E_3 l'évènement : "obtenir au moins un pile à partir du 5-ième lancer".
2. On s'inspire de E_3 :

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$$

3. (a) De la même manière, on a

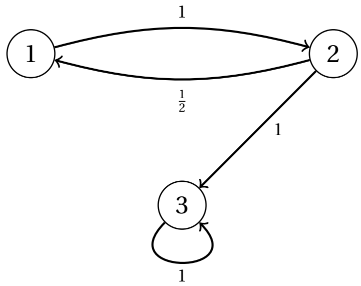
$$C_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

(b) On n'impose pas le début des piles : on est ainsi dans l'un des C_n. On a donc

$$C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \right)$$

Exercice 3

1. On obtient le graphe suivant :



2. L'araignée ne peut venir en C qu'à partir de B, et si elle y est, elle y reste. Au départ, elle est en A. Donc l'araignée va faire $(A-B)\dots(A-B)-C$ avec au moins une fois $A-B$. Elle y arrivera ainsi forcément en un instant paire (puisqu'en 0, elle est en A).
3. On note A_n l'évènement : "l'araignée est en A au n-ième instant" (et de même B_n pour B et C_n pour C). Alors, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_n) &= \mathbb{P}(A_0 \cap B_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap B_{2n-1} \cap C_{2n}) \\
&= \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}_{A_0}(B_1)\,\mathbb{P}_{A_0 \cap B_1}(A_2)\ldots\mathbb{P}_{A_0\cap B_1 \cap \ldots A_{2n-2}}(B_{2n-1})\mathbb{P}_{A_0 \cap B_1 \cap \ldots \cap B_{2n-1}}(C_{2n}) \text{ par les proba composées} \\
&= \underbrace{1 \times \frac{1}{2} \times\ 1 \times \frac{1}{2} \times \ldots \times 1 \times \frac{1}{2}}_{n-1 \text{ fois}} \times \frac{1}{2} \text{ par indépendance} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

4. Par définition, $D_p \cap C_q = \varnothing$ si $p \neq q$ (car on s'intéresse à la première fois où l'araignée arrive en C).

5. Mais alors, par définition :

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{D}_n$$

On peut appliquer la propriété de la limite monontone :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{E}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{D}_n\right) \\
&= \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{p} \mathrm{D}_n\right) \\
&= \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} \mathbb{P}(\mathrm{D}_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, E est un évènement presque sûr.

Exercice 4

1. Par définition, $\mathrm{E}_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} \mathrm{F}_k \cap \mathrm{P}_n$. Ainsi, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{E}_n) &= \mathbb{P}(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{F}_{n-1} \cap \mathrm{P}_n) \\
&= \mathbb{P}(\mathrm{F}_1)\mathbb{P}_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{F}_2)\ldots\mathbb{P}_{\mathrm{F}_1\cap\ldots\cap\mathrm{F}_{n-2}}(\mathrm{F}_{n-1})\mathbb{P}_{\mathrm{F}_1\cap\ldots\cap\mathrm{F}_{n-1}}(\mathrm{P}_n) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2}}_{n \text{ fois}} \text{ par indépendance} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

2. Par définition, $\overline{\mathrm{F}}$ représente l'évènement : “obtenir au moins une fois pile”, ce qui peut s'écrire également : “obtenir au moins une fois un premier pile”. Ainsi

$$\overline{\mathrm{F}} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E}_n$$

D'après la propriété de la limite monotone :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{\mathrm{F}}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E}_n\right) &= \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{p} \mathrm{E}_n\right) \\
&= \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} \mathbb{P}(\mathrm{E}_n) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{F}}) = 1$ et $\mathbb{P}(\mathrm{F}) = 0$: l'évènement F est donc négligeable.

3. L'énoncé nous indique que s'il a fallut faire n lancers pour obtenir pile, on tire un billet parmi $n!$ billets, dont un seul est gagnant et tous les billets sont équiprobables. Ainsi, il n'y a qu'un chance sur $n!$ d'obtenir un billet gagnant, et donc

$$\mathbb{P}_{\mathrm{E}_n}(\mathrm{G}) = \frac{1}{n!}$$

La famille (E_n) est un système complet d'évènements : ils sont 2 à 2 incompatibles, et leur réunion est égale à l'univers. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n \cap G)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)\mathbb{P}_{E_n}(G)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = e^{\frac{1}{2}} - 1\end{aligned}$$

Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - a_0$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \sqrt{e} - 1}$$

4. On obtient $\mathbb{P}(G) \approx 0,65$. On peut ainsi dire que le jeu ne semble pas équilibré.

Exercice 5

1. A la première seconde, la particule se pose au hasard sur l'un des trois sommets, donc $a_1 = b_1 = c_1 = \dfrac{1}{3}$.
2. Remarquons que, par définition, (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, et en utilisant l'énoncé :

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}a_n + 0 \times b_n + \frac{1}{12}c_n$$

$$b_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3}a_n + 1 \times b_n + \frac{7}{12}c_n$$

$$c_{n+1} = \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}a_n + 0 \times b_n + \frac{1}{3}c_n$$

La seule difficulté est de déterminer $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})$. Si on note $a = \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$ et $b = \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})$, l'énoncé indique que $b = 7a$. De plus, puisque $\mathbb{P}_{C_n}$ est une loi de probabilité, on doit avoir $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = 1$, soit

$$a + 7a + \frac{1}{3} = 1$$

ce qui donne $a = \frac{1}{12}$ et $b = \frac{7}{12}$.
3. Pour tout $n \geqslant 0$, en utilisant les relations précédentes, on a

$$c_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}c_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n\right) + \frac{1}{3}c_{n+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}\frac{1}{12}c_n + \frac{1}{3}c_{n+1}$$

Or $c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \Leftrightarrow \frac{1}{3}a_n = c_{n+1} - \frac{1}{3}c_n$ donc :

$$c_{n+2} = \frac{1}{3}\left(c_{n+1} - \frac{1}{3}c_n\right) + \frac{1}{3}\frac{1}{12}c_n + \frac{1}{3}c_{n+1} = \frac{2}{3}c_{n+1} - \frac{1}{12}c_n$$

Ainsi, (c_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En étudiant son équation caractéristique $X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{1}{12}$, on obtient deux racines $x_1 = \frac{1}{6}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$. Puisque $c_1 = \frac{1}{3}$ et $c_2 = \frac{2}{9}$, on obtient après résolution du système

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1,\ \ c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}}$$

En utilisant les relations vues en 2., on obtient

$$a_n = 3c_{n+1} - c_n = 3\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{6^{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}\right) = \frac{3}{2 \times 2^n} - \frac{1}{2 \times 6^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{6^n}$$

ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1,\ \ a_n = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2 \times 6^n}}$$

Enfin, $a_n + b_n + c_n = 1$ puisque (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, donc

$$b_n = 1 - a_n - c_n = 1 - \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2\times 6^n}\right) - \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}\right)$$

soit

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1,\ \ b_n = 1 + \frac{1}{2\times 6^n} - \frac{3}{2^{n+1}}}$$

4. Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $-1 < \frac{1}{6} < 1$, on obtient par passage à la limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = 1$$

Ainsi, plus on évolue dans le temps, plus la probabilité que la particule soit en B est grande, et en A et C est faible, ce qui est cohérent, vue la définition.

Exercice 6

1. Remarquons que (A_k, B_k) forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(E_k) = \mathbb{P}(A_k \cap E_k) + \mathbb{P}(B_k \cap E_k) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(E_k) + \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(E_k)$$

or, d'après l'énoncé, on fait Pile avec la pièce A avec une probabilité a, et avec la pièce B avec une probabilité b. Ainsi,

$$\mathbb{P}(E_k) = \mathbb{P}(A_k)a + \mathbb{P}(B_k)b = a\mathbb{P}(A_k) + b(1 - \mathbb{P}(A_k))$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(E_k) = (a-b)\mathbb{P}(A_k) + b}$$

2. Puisque (A_k, B_k) forme un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) + \mathbb{P}(B_k \cap A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(A_{k+1}) + \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1})$$

D'après l'énoncé, si on a la pièce A au k^{ieme} lancer, on garde cette pièce si on fait Pile, donc avec une probabilité a. Si on a la pièce B au k^{ieme} lancer, on prend la pièce A si on fait Face, donc avec une probabilité $1-b$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)a + \mathbb{P}(B_k)(1-b) = a\mathbb{P}(A_k) + (1 - \mathbb{P}(A_k))(1-b)$$

soit

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{k+1}) = (a+b-1)\mathbb{P}(A_k) + 1 - b}$$

3. La relation précédente nous indique que la suite $(\mathbb{P}(A_k))$ est une suite arithmético-géométrique. Après étude classique, on obtient :

- que le point fixe est $l = \frac{1-b}{2-a-b}$
- que la suite u définie pour tout $k \geqslant 1$ par $u_k = \mathbb{P}(A_k) - l$ est géométrique, de raison $(a+b-1)$, de premier terme $u_1 = \mathbb{P}(A_1) - l = \frac{1}{2} - l$.
- enfin, que

$$\boxed{\forall\, k \geqslant 1,\ \ \mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-a-b}\right)(a+b-1)^{k-1} + \frac{1-b}{2-a-b}}$$

Enfin, puisque $\mathbb{P}(E_k) = (a-b)\mathbb{P}(A_k) + b$, on a

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \ \mathbb{P}(E_k) = (a-b)\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-a-b}\right)(a+b-1)^{k-1} + \frac{1-b}{2-a-b}\right) + b$$

> **Remarque**
> Si $a = b = \frac{1}{2}$, le résultat se simplifie en
>
> $$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(E_k) = \frac{1}{2}$$
>
> ce qui est cohérent (cas d'équiprobabilité)

Exercice 7

1. On s'intéresse à la somme de deux dés. Notre univers est donc $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, de cardinal 36 et toutes les issues sont équiprobables. Pour obtenir 6, il y a 5 issues possibles $(1-5, 5-1, 2-4, 4-2, 3-3)$, et pour obtenir 7, il y en a 6 $(1-6, 6-1, 2-5, 5-2, 4-3, 3-4)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\mathrm{G_A}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbb{P}(\mathrm{G}_b) = \frac{5}{36}$$

2. Pour que B gagne à son n^{ieme} lancer, il faut que B ait perdu à chacun de ses $(n-1)^{ieme}$ lancers, et A aussi. On a alors par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_1} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{B}_{n-1}} \cap \overline{\mathrm{A}_{n-1}} \cap \mathrm{B}_n) = \mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}_1})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{B}_1}}(\overline{\mathrm{A}_1}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{\mathrm{B}_1} \cap \overline{\mathrm{A}_1} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{B}_{n-1}} \cap \overline{\mathrm{A}_{n-1}}}(\mathrm{B}_n)$$

Or les lancers sont indépendants, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) &= \underbrace{\mathbb{P}(\overline{\mathrm{G_B}}) \times \mathbb{P}(\overline{\mathrm{G_A}}) \times \ldots \times \mathbb{P}(\overline{\mathrm{G_B}}) \times \mathbb{P}(\overline{\mathrm{G_A}})}_{n-1 \text{ fois}} \times \mathbb{P}(\mathrm{G_B}) \\ &= \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-1} \frac{5}{36}\end{aligned}$$

soit

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \left(\frac{31 \times 5}{216}\right)^{n-1} \frac{5}{36} = \frac{5}{36}\left(\frac{155}{216}\right)^{n-1}$$

Par le même raisonnement, il faut que B perde ses n lancers, A ses $n-1$ premiers lancers. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{n} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$

soit

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \frac{31}{216}\left(\frac{155}{216}\right)^{n-1}$$

3. Remarquons que, pour tout n,

$$\mathrm{V_A} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n \text{ et } \mathrm{V_B} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{B}_n$$

Les événements (A_n) étant deux à deux incompatibles, on a alors, d'après la propriété de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(\mathrm{V_A}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \text{ et } \mathbb{P}(\mathrm{V_B}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$$

On reconnait dans les deux cas une série géométrique de raison $-1 < \frac{155}{216} < 1$ qui converge, et on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{V_A}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{31}{216}\left(\frac{155}{216}\right)^{n-1} = \frac{31}{216} \frac{1}{1 - \frac{155}{216}} = \frac{31}{61}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{V_B}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{36}\left(\frac{155}{216}\right)^{n-1} = \frac{5}{36} \frac{1}{1 - \frac{155}{216}} = \frac{30}{61}$$

Le jeu n'est donc pas équilibré.
Remarquons également que $\mathbb{P}(\mathrm{V_A}) + \mathbb{P}(\mathrm{V_B}) = 1$, ce qui est normal car $(\mathrm{V_A}; \mathrm{V_B})$ forme un système complet d'événements.

Exercice 8

Notons E_i l'événement "la boule i est tirée dans l'urne A", et F_j^i l'événement "la boule j est tirée de l'urne i". Remarquons que, par définition,

$$\forall\, i \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{E}_i) = \frac{1}{n}$$

et

$$\forall\, i \in [\![1;n]\!],\ \forall\, j \in [\![1;i]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{F}_j^i) = \frac{1}{i} \text{ et } \mathbb{P}(\mathrm{F}_j^i) = 0 \text{ si } j > i$$

La famille (E_i) forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\forall\, j \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{E}_i \cap (\mathrm{X} = j)) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{E}_i)\mathbb{P}_{\mathrm{E}_i}(\mathrm{X} = j)$$

Or, par construction, $\mathbb{P}_{E_i}(X=j)=\mathbb{P}(F_j^i)$. Ainsi

$$\forall\ j\in[\![1;n]\!],\ \ \mathbb{P}(X=j)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}(F_j^i)=\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{i}$$

et donc

$$\boxed{\forall\ j\in[\![1;n]\!],\ \ \mathbb{P}(X=j)=\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}}$$

Exercice 9

Calcul matriciel

1.

(a) Deux méthodes : on applique la méthode du Pivot pour démontrer que P est inversible, et trouver P^{-1}. Ou alors, on calcule $P\times P^{-1}$ et on constate que ça fait I_3.

(b) Après calculs, on obtient $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-\frac14&0&0\\0&\frac{1}{12}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. En posant $D=\begin{pmatrix}-\frac14&0&0\\0&\frac{1}{12}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, on a alors $B=PDP^{-1}$.

(c) Par récurrence classique, en utilisant, pour l'hérédité :

$$B^{n+1}=B^nB=(PD^nP^{-1})(PDP^{-1})=PD^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}DP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$$

(d) En utilisant ce qui précède, on calcule PD^nP^{-1}, en remarquant que D est diagonale, donc D^n est facile à calculer. On obtient :

$$\begin{aligned}B^n&=\begin{pmatrix}0&-8&1\\-1&3&1\\1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(-\frac14\right)^n&0&0\\0&\left(\frac{1}{12}\right)^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{22}\begin{pmatrix}0&-11&11\\-2&1&1\\6&8&8\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}0&-8&1\\-1&3&1\\1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-11\left(-\frac14\right)^n&11\left(-\frac14\right)^n\\-2\left(\frac{1}{12}\right)^n&\left(\frac{1}{12}\right)^n&\left(\frac{1}{12}\right)^n\\6&8&8\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}16\left(\frac{1}{12}\right)^n+6&-8\left(\frac{1}{12}\right)^n+8&-8\left(\frac{1}{12}\right)^n+8\\-6\left(\frac{1}{12}\right)^n+6&11\left(-\frac14\right)^n+3\left(\frac{1}{12}\right)^n+8&-11\left(-\frac14\right)^n+3\left(\frac{1}{12}\right)^n+8\\-6\left(\frac{1}{12}\right)^n+6&-11\left(-\frac14\right)^n+3\left(\frac{1}{12}\right)^n+8&11\left(-\frac14\right)^n+3\left(\frac{1}{12}\right)^n+8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Application à un processus aléatoire

On notera T_n l'évènement "le client achète un jouet traditionnel l'année n" (et de même pour M_n et S_n).

1. On applique la formule des probabilités totales, au système complet d'évènements (T,M,S) qui par construction est un système complet d'évènements. Ainsi

$$\begin{aligned}p_{n+1}=\mathbb{P}(T_{n+1})&=\mathbb{P}(T_{n+1}\cap T_n)+\mathbb{P}(T_{n+1}\cap M_n)+\mathbb{P}(T_{n+1}\cap S_n)\\
&=\mathbb{P}(T_n)\mathbb{P}_{T_n}(T_{n+1})+\mathbb{P}(M_n)\mathbb{P}_{M_n}(T_{n+1})+\mathbb{P}(S_n)\mathbb{P}_{T_n}(T_{n+1})\\
&=p_n\frac13+q_n\frac13+r_n\frac13\end{aligned}$$

Par le même raisonnement, on obtient :

$$\begin{aligned}q_{n+1}&=\mathbb{P}(M_{n+1})=\frac14p_n+\frac14q_n+\frac12r_n\\
r_{n+1}&=\mathbb{P}(S_{n+1})=\frac14p_n+\frac12q_n+\frac14r_n\end{aligned}$$

2. Ainsi, on obtient

$$\begin{pmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\\r_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac13&\frac13&\frac13\\\frac14&\frac14&\frac12\\\frac14&\frac12&\frac14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_n\\q_n\\r_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}p_n\\q_n\\r_n\end{pmatrix}$$

3. Par récurrence habituelle (en partant de $C^0=I_3$ et en utilisant la relation vue à la question d'avant).

4. Ainsi, en utilisant la partie précédente :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 16\left(\frac{1}{12}\right)^n+6 & -8\left(\frac{1}{12}\right)^n+8 & -8\left(\frac{1}{12}\right)^n+8 \\ -6\left(\frac{1}{12}\right)^n+6 & 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n+3\left(\frac{1}{12}\right)^n+8 & -11\left(-\frac{1}{4}\right)^n+3\left(\frac{1}{12}\right)^n+8 \\ -6\left(\frac{1}{12}\right)^n+6 & -11\left(-\frac{1}{4}\right)^n+3\left(\frac{1}{12}\right)^n+8 & 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n+3\left(\frac{1}{12}\right)^n+8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{45}{100} \\ \frac{25}{100} \\ \frac{30}{100} \end{pmatrix}$$

dont le calcul est long...

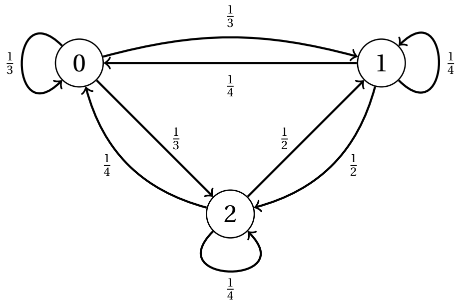
5. On cherche la limite quand n tend vers l'infini. Puisque $-1 < \frac{1}{12} < 1$ et $-1 < -\frac{1}{4} < 1$, la plupart des termes tend vers 0. On obtient au final la limite :

$$\begin{pmatrix} p_\infty \\ q_\infty \\ r_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{71}{220} \\ \frac{71}{220} \\ \frac{71}{220} \end{pmatrix}$$

Résumé

1. La somme des termes d'une ligne vaut 1, qui traduit le fait que la valeur de l'état $n+1$ ne dépend que de l'état n.

2. On obtient le graphe suivant :



3. Puisque $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{C}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$, par passage à la limite (qui est légitime par somme et produit)

$$\pi_\infty = \mathrm{C}\pi_\infty$$

17

Chapitre

Intégration

Résumé

Dans ce chapitre, on rappelle la notion de primitive, ainsi que de l'intégrale sur un segment, que l'on calculera à l'aide de différentes méthodes de calcul pratiques (intégration par parties, changement de variable). On revient également sur la notion de primitive. On introduit la notion de sommes de Riemann pour le calcul intégral, et on généralise, enfin, la notion d'intégrale à un intervalle quelconque.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les primitives :

- connaître les primitives usuelles .... □
- savoir déterminer des primitives dans les cas de dérivation classique .... □
- connaître les opérations sur les primitives .... □

② Connaître la notion d'intégrale et les différentes propriétés de l'intégrale :

- définition de l'intégrale .... □
- linéarité et relation de Chasles .... □
- encadrement et inégalité de la moyenne .... □
- positivité et croissance de l'intégrale .... □
- fonction positive et intégrale nulle .... □

③ Concernant les méthodes de calcul d'intégrales :

- l'intégration par partie .... □
- le changement de variable .... □
- les fonctions définies par une intégrale .... □

④ Savoir utiliser les sommes de Riemann pour calculer des sommes de séries .... □

⑤ Connaître la définition d'intégrale sur un intervalle :

- connaître la définition .... □
- connaître les différentes propriétés usuelles .... □

⑥ Concernant les théorèmes d'existence :

- connaître le théorème de majoration des fonctions positives .... □
- connaître les intégrales de référence (Riemann, exponentielle) .... □

⑦ Connaître la notion de convergence absolue :

- connaître la définition .... □
- l'inégalité triangulaire .... □

I. Primitives

1. Définition

Définition 17.1.

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I, avec F dérivable. Si $F' = f$, on dit que F est une **primitive** de f sur l'intervalle I.

Exemple 17.1

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. Alors f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : x \mapsto x^2$, mais également les fonctions $G : x \mapsto x^2 + 1$, $H : x \mapsto x^2 + l, \quad l \in \mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto e^x$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto e^x$.

2. Différentes primitives d'une fonction

Théorème 17.1.

Les seules primitives de la fonction nulle sur un intervalle I sont les fonctions constantes.

Démonstration

En effet, si $F' = 0$ sur l'intervalle I, nous avons vu dans le chapitre sur la dérivation, que cela implique que F est constante. Réciproquement, les fonctions constantes ont une dérivée nulle.

Conséquence 17.2.

Soit F une primitive d'une fonction f sur l'intervalle I. Alors toutes les primitives de f sur I s'écrivent $F + \lambda$, avec λ constante réelle.

Démonstration

En effet, en notant F et G deux primitives de f sur I, on a $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. D'après le résultat précédent, $F - G$ est une fonction constante sur l'intervalle I, c'est à dire $F = G + \lambda$ avec λ constante réelle.

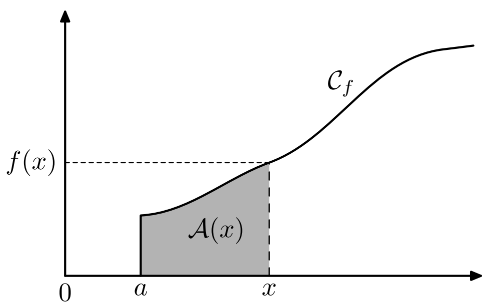
3. Fonction continue et primitive

Théorème 17.3.

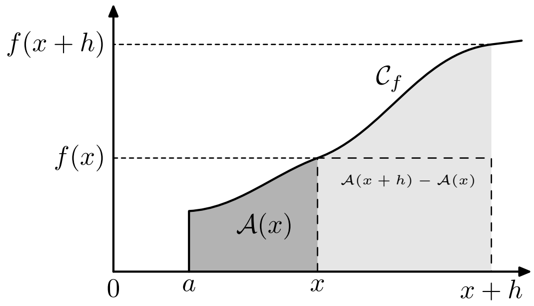
Une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration

Démontrons, pour simplifier, le théorème dans le cas où f est une fonction croissante et positive. Soit f une fonction continue croissante sur $[a; b]$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Pour tout $x \in [a; b]$, on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, entre les abscisses a et x.



Cette fonction est bien définie sur $[a;b]$. On va montrer que $\mathscr{A}$ est dérivable sur $[a;b]$, et que $\mathscr{A}' = f$.
Soit $h > 0$ et $x \in [a;b]$. Le nombre $\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)$ représente l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, et les abscisses x et $x+h$.



Puisque f est croissante, on peut encadrer cette aire par deux rectangles :

$$(x+h-x)f(x) \leqslant \mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x) \leqslant (x+h-x)f(x+h)$$

donc

$$f(x) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} \leqslant f(x+h)$$

Par continuité de f, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Par encadrement, on a donc

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} = f(x)$$

Donc $\mathscr{A}$ est bien dérivable à droite en x, et $\mathscr{A}'_d(x) = f(x)$.
On montre de même que $\mathscr{A}$ est dérivable à gauche en x, et que $\mathscr{A}'_g(x) = f(x)$. Les dérivées à droite et à gauche de $\mathscr{A}$ étant égales, on en déduit que $\mathscr{A}$ est dérivable et que sa dérivée est f.

4. Fonction primitive et condition initiale

Théorème 17.4.

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I, et y_0 un réel donné. Alors il existe une, et une seule, primitive F de f sur I telle que $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.
En particulier, f admet une unique primitive s'annulant en un x_0 donné.

Démonstration

Soit F une primitive de f. Alors, la fonction G définie par $\mathrm{G} = \mathrm{F} - \mathrm{F}(x_0) + y_0$ est également une primitive de f, et $\mathrm{G}(x_0) = y_0$.
Si G et H sont deux primitives de f telles que $\mathrm{G}(x_0) = \mathrm{H}(x_0) = y_0$, alors, puisqu'on peut écrire $\mathrm{G} = \mathrm{H} + l$, on a $\mathrm{G}(x_0) = \mathrm{H}(x_0) + l = \mathrm{G}(x_0) + l$, donc $l = 0$ et $\mathrm{G} = \mathrm{H}$.

Exemple 17.2

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = x^2 - 1$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $\mathrm{F}(1) = 0$.

II. Recherche de primitives

Pour rechercher des primitives, on utilise les formules connues pour la dérivation, et les dérivées connues.

1. Fonctions usuelles

Fonction f	**Primitive** F	**Intervalle** I
$x \longmapsto a$ (constante non nulle)	$x \longmapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n (n \geqslant 1)$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}\ (n>1)$	$x \longmapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha\ (\alpha \neq -1)$	$x \longmapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$

2. Utilisation des formules de dérivation

On peut utiliser les formules suivantes :

Remarque

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} = (2\sqrt{u})' \qquad \frac{u'}{u^2} = \left(-\frac{1}{u}\right)'$$

$$2u'u = (u^2)' \qquad u'u^n = \left(\frac{1}{n+1}u^{n+1}\right)' \qquad u'u^\alpha = \left(\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' (\alpha \neq -1)$$

$$\frac{u'}{u} = (\ln|u|)' \qquad u'\mathrm{e}^u = (\mathrm{e}^u)'$$

Exemple 17.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Déterminer une primitive de f.

Solution

On pose $u(x) = \ln x$. Alors $f(x) = u'(x)u(x)$ et admet donc comme primitive $\mathrm{F} : x \longmapsto \frac{1}{2}u^2(x) = \frac{1}{2}\ln(x)^2$.

3. Opération sur les primitives

Théorème 17.5.

Soient F et G deux primitives respectives des fonctions f et g sur un meme intervalle I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\lambda\mathrm{F}$ est une primitive de λf sur I.
- $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est une primitive de $f+g$ sur I.

Démonstration

Assez immédiate : $(\lambda\mathrm{F})' = \lambda\mathrm{F}' = \lambda f$ et $(\mathrm{F}+\mathrm{G})' = \mathrm{F}'+\mathrm{G}' = f+g$ en exploitant la linéarité de la dérivation.

☞ *Exercice 1*

III. Intégrale sur un segment

1. Définition

Définition 17.2.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. On appelle **intégrale** de a à b de la fonction f le nombre réel $F(b)-F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur $[a;b]$. On note $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$.

Remarque

Par convention de notation, on note $[F(t)]_a^b = F(b)-F(a)$, de sorte que

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b)-F(a)$$

Exemple 17.4

$\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. On peut également prendre une autre primitive :

$$\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+1\right]_1^2 = 3-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Remarque

La définition de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, soient F et G deux primitives de f. D'après un résultat précédent, il existe un réel λ tel que $G = F+\lambda$. Mais alors

$$G(b)-G(a) = (F(b)+\lambda)-(F(a)+\lambda) = F(b)-F(a)$$

Remarque

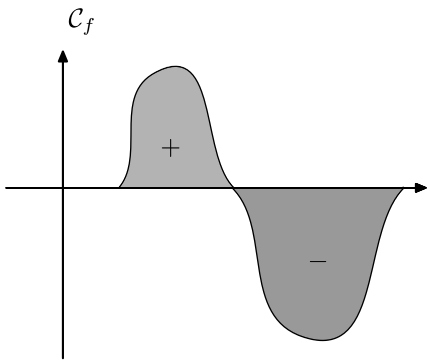
Dans l'écriture $\int_a^b f(t)dt$, t est une variable muette. Ainsi,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx$$

2. Interprétation graphique

Remarque

Si $a<b$, le nombre $\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire **algébrique** (ou aire **signée**) en unité d'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}$, courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



IV. Premières propriétés

1. Premiers résultats

Définition 17.3.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I.

- On a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.
- Lorsque $a = b$, $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t)dt$$

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0$$

2. Relation de Chasles

Théorème 17.6.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a, b, c trois réels quelconques de I. Alors

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$

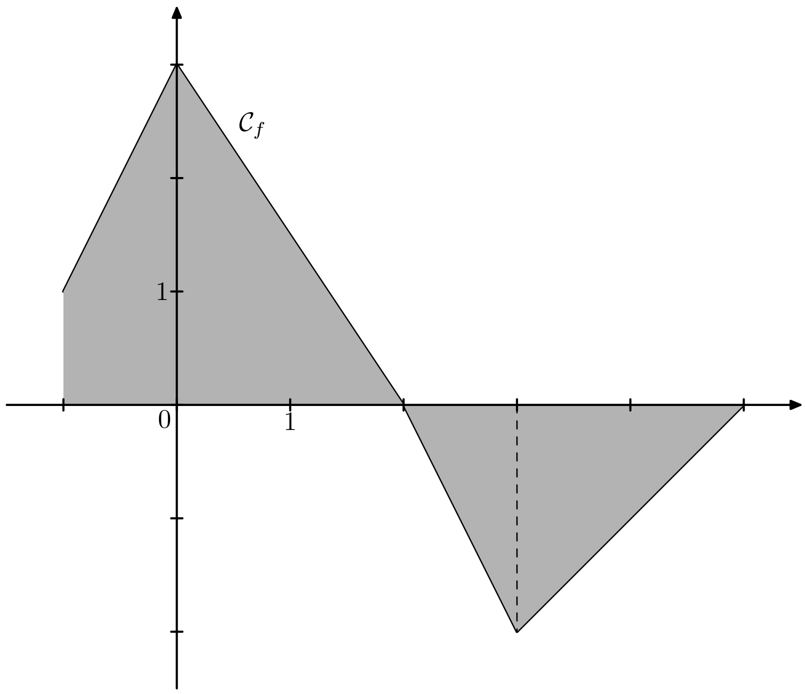
Démonstration

Soit F une primitive de f sur I. Alors

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = (F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)dt$$

Exemple 17.5 (Calcul de l'intégrale d'une fonction affine par morceaux)

Soit f la fonction donnée ci-dessous. Déterminer $I(f) = \int_{-1}^5 f(t)dt$.



Solution

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-1}^{5} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{3} f(t)dt + \int_{3}^{5} f(t)dt = 2+3-1-2 = 2$$

Conséquence 17.7.

- Si f est paire sur $[-a;a]$, alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$
- Si f est impaire sur $[-a;a]$, alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

3. Linéarité

Théorème 17.8.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, soit λ un réel quelconque, et soient a, b deux réels quelconques de l'intervalle I. Alors

$$\int_{a}^{b} \lambda f(t)dt = \lambda \int_{a}^{b} f(t)dt$$

$$\int_{a}^{b} (f+g)(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt + \int_{a}^{b} g(t)dt$$

Démonstration

En effet, si F et G sont des primitives sur I respectivement de f et de g, alors λF est une primitive sur I de f, et F + G est une primitive de $f + g$ sur I. Le résultat s'en déduit.

4. Primitive nulle en un point

Théorème 17.9. Théorème fondamental de l'intégration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in \mathrm{I}$. La fonction

$$\mathrm{F} : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0. Ainsi, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $\mathrm{F}' = f$.

Démonstration

Soit G une primitive de f sur I (qui existe parce qu'elle est continue). Alors, pour tout x de I,

$$\mathrm{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(x_0)$$

Donc $\mathrm{F}(x_0) = 0$, F est dérivable sur I et on a, pour tout x de I, $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x) = f(x)$. Donc F est une primitive de f, et puisque $\mathrm{F}(x_0) = 0$, c'est la primitive de f nulle en 0.

Exemple 17.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$$

Déterminer f'.

Solution

f est la primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ (fonction continue sur $\mathbb{R}$) nulle en 0. Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x,\ f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

☞ *Exercice 2*

V. Propriétés d'encadrement et valeur moyenne

1. Encadrement

Théorème 17.10.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et soient a, b deux réels quelconques de I.

- **Positivité de l'intégrale**. Si $a \leqslant b$ et si, pour tout réel t de $[a;b]$, $f(t) \geqslant 0$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$$

- **Croissance de l'intégrale.** Si $a \leqslant b$ et si, pout tout réel t de $[a;b]$ $f(t) \leqslant g(t)$ alors

$$\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$$

Remarque

⚠ Il faut absolument que $a \leqslant b$!

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I, et G une primitive de g sur I.

- Si f est positive sur I, alors F est croissante sur I (puisque $F' = f$). Mais alors, si $a \leqslant b$,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \geqslant 0 \text{ par croissance de F}$$

- Si $f \leqslant g$ sur I, alors $g - f \geqslant 0$ sur I. D'après le résultat précédent, $\displaystyle\int_a^b (g(t) - f(t))dt \geqslant 0$. Par linéarité, on obtient bien $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

2. Inégalité de la moyenne

Théorème 17.11. Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient m et M deux réels, et a, b deux réels de l'intervalle I tels que $a \leqslant b$.
Si $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a;b]$ alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$$

Et si $a \neq b$:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leqslant M$$

Démonstration

Pour tout t dans $[a;b]$, on a $m \leqslant f(t) \leqslant M$. D'après le théorème précédent, puisque $a \leqslant b$, on a alors

$$\int_a^b m\,dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b M\,dt$$

Or $\int_a^b m\,dt = m(b-a)$ et $\int_a^b M\,dt = M(b-a)$ (car les fonction $t \mapsto M$ et $t \mapsto m$ sont constantes sur $[a;b]$), ce qui donne le résultat.

Exercice 17.7

On admet que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$$

Prouver que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$, puis en déduire que la suite (I_n) est convergente.

Solution

Soit n un entier. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, elle l'est sur $[n;n+1]$. Ainsi, pour tout réel $t \in [n;n+1]$, on a

$$f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a alors

$$f(n+1)(n+1-n) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n)(n+1-n)$$

soit

$$f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$$

Constatons enfin que

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ par quotient.}$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite (I_n) converge, et que sa limite vaut 0.

Théorème 17.12. Inégalité triangulaire

Soient f une fonction continue sur $[a;b]$. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$$

Démonstration

Théorème admis.

3. Valeur moyenne d'une fonction

Définition 17.4.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a, b deux réels distincts de I. Le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b.

Théorème 17.13.

Dans les conditions précédentes, il existe un réel c situé entre a et b, tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c)$$

Démonstration

Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$. Puisqu'elle est continue, l'image du segment $[a;b]$ est un segment $[m;\mathrm{M}]$. Mais alors, pour tout x de $[a;b]$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M} \Leftrightarrow \int_a^b m\,dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b \mathrm{M}\,dt$$

Soit

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leqslant \mathrm{M}$$

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ est donc compris entre m et M. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette valeur est atteinte en un réel $c \in [a;b]$.

4. Fonctions positive et intégrale nulle

Proposition 17.14.

Soit f une fonction <u>continue</u> sur $[a;b]$. Si

$$\forall\ t \in [a;b], f(t) \geqslant 0 \text{ et } \int_a^b f(t)dt = 0$$

alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a;b]$.

Démonstration

Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha \in]a;b[$ tel que $f(\alpha) > 0$. Par continuité de f, il existe un intervalle

$J =]\alpha-\varepsilon;\alpha+\varepsilon[$ tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \geqslant \frac{f(\alpha)}{2}$. Mais alors,

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_J f(t)dt \geqslant \frac{f(\alpha)}{2} \times 2\varepsilon > 0$$

ce qui est absurde.

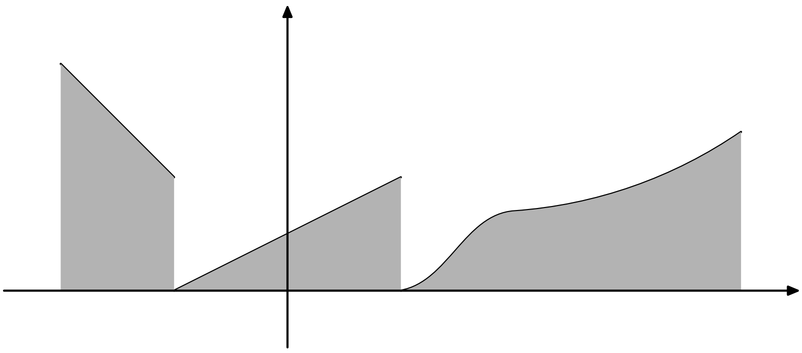
5. Intégration d'une fonction continue par morceaux

Remarque
Rappel : une fonction f est dite continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Définition 17.5.

Pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$;, notons $\widehat{f_i}$ le prolongement par continuité de f_i sur l'intervalle $[a_i;a_{i+1}]$. On appelle alors intégrale de f sur $[a;b]$ le nombre

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widehat{f_i}(x)dx$$



Remarque
Ainsi, pour calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on calcule l'intégrale sur chacun des intervalles $[a_i;a_{+1}]$ de la subdivision, puis on additionne les différentes valeurs.

VI. Méthode de calcul d'intégrales

1. Intégration par partie

Théorème 17.15.

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Alors, pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Démonstration
La fonction uv est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + uv'$. Donc $uv' = uv - u'v$, et toutes ces fonctions sont continues sur I. On en déduit donc :

$$\int_a^b (uv')(t)dt = \int_a^b [(uv)'(t) - (u'v)(t)]dt$$

Par linéarité de l'intégrale, et puisque uv est une primitive de $(uv)'$, on a

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Méthode

Pour calculer une intégrale par intégration par partie, on détermine les fonctions u et v qui interviennent et on vérifie qu'elles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle considéré.

Exemple 17.8

Calculer $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t dt$.

Solution

Pour tout $t \in [0;1]$, posons $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t$. u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. Alors, $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^t$. On a donc

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^t dt = [t\mathrm{e}^t]_0^1 - \int_0^1 1\mathrm{e}^t dt = \mathrm{e} - [\mathrm{e}^t]_0^1 = 1$$

Exemple 17.9

Calculer $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx$.

Solution

Puisque $\ln(t) = 1 \times \ln(t)$, pour tout $t \in [1;\mathrm{e}]$, on pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;\mathrm{e}]$. On a donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$. Alors

$$\int_1^e \ln(t)dt = [t\ln(t)]_1^\mathrm{e} - \int_1^\mathrm{e} t\frac{1}{t}dt$$

et donc

$$\int_1^\mathrm{e} \ln(t)dt = \mathrm{e} - [t]_1^\mathrm{e} = 1$$

Remarque

Ainsi, une primitive de la fonction ln sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$.

☞ *Exercice 3*

2. Changement de variable

L'idée du changement de variable est de se ramener à une intégrale que l'on sait calculer.

Théorème 17.16.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, et u une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha;\beta]$, telle que $u([\alpha;\beta]) \subset [a;b]$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$$

Remarque

Il faut donc reconnaitre une forme $f(u)u'$ pour pouvoir effectuer un changement de variable. On n'oubliera pas de remplacer également les bornes d'intégration.

Démonstration

Soit F une primitive de f, et $g = \mathrm{F}\circ u$. g est C^1 sur $[\alpha;\beta]$ (puisque F et u sont C_1) et on a $g' = \mathrm{F}'(u)\times u' = f(u)u'$. Donc g est une primitive de $f(u)u'$. Donc

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = [g(t)]_\alpha^\beta = \mathrm{F}(u(\beta)) - \mathrm{F}(u(\alpha)) = [\mathrm{F}(t)]_{u(\alpha)}^{u(\beta)} = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$$

Exemple 17.10

Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}dt$ en posant $u = 1-t^2$.

Solution

Pour tout $t\in[0;1]$, $u(t) = 1-t^2$. u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. Alors

$$\mathrm{I} = \int_0^1 -\frac{1}{2}u'(t)\sqrt{u(t)}dt = -\frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(1)} \sqrt{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Méthode

Soit $\mathrm{I} = \int_a^b f(t)dt$. Pour effectuer un changement de variable :

- On pose $x = u(t)$ où u est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. On écrit alors $t = u^{-1}(x)$ puis $dt = (u^{-1})'(x)dx$.
- On s'occupe des bornes : lorsque $t = a$, $x = u(a)$ et lorsque $t = b$, $x = u(b)$.
- Enfin, on exprime $f(t)$ et dt uniquement avec x et dx.

On a alors $\int_a^b f(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} g(x)dx$, cette intégrale étant a priori plus simple à calculer.

Exemple 17.11

Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}dt$ en effectuant le changement de variable $x = 1+\mathrm{e}^t$.

Solution

- La fonction $u : t\mapsto 1+\mathrm{e}^t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$.
- $u(0) = 2$ et $u(1) = 1+e$.
- Puisque $x = 1+\mathrm{e}^t$, alors $t = \ln(x-1)$. La fonction $x\mapsto \ln(x-1)$ est dérivable sur $[2;1+e]$, et donc

$$dt = \frac{1}{x-1}dx$$

Ainsi,

$$\mathrm{I} = \int_2^{e+1} \frac{\ln(u)}{1-\mathrm{e}^{-\ln(u-1)}}\frac{du}{u-1} = \int_2^{e+1} \frac{\ln u}{u}du$$

et donc

$$\mathrm{I} = \left[\frac{1}{2}(\ln u)^2\right]_2^{e+1} = \frac{1}{2}((\ln(e+1))^2 - \ln(2)^2$$

☞ *Exercice 4*

3. Fonctions définies par une intégrale

On peut être amené à étudier une fonction du type $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ ou $\mathrm{G} : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.

Méthode

Pour étudier ce genre de fonctions :

- Dans le premier cas, on reconnait, après avoir étudié la continuité de f, la primitive de f nulle en x_0, que l'on étudiera en tant que telle.
- Dans le deuxième cas, on introduira systématiquement une primitive H de f si f est continue. Dans ce cas, $\mathrm{G}(x) = \mathrm{H}(v(x)) - \mathrm{H}(u(x))$ et on étudiera ensuite (dérivation par exemple, si u et v sont dérivables).

Exemple 17.12

Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{2x} f(t)dt$ où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer g'.

Solution

En notant F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a pour tout réel x, $g(x) = \mathrm{F}(2x) - \mathrm{F}(x)$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque f est continue. On a donc

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2\mathrm{F}'(2x) - \mathrm{F}'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

☞ *Exercices 7 et 8*

VII. Sommes de Riemann

1. Définition

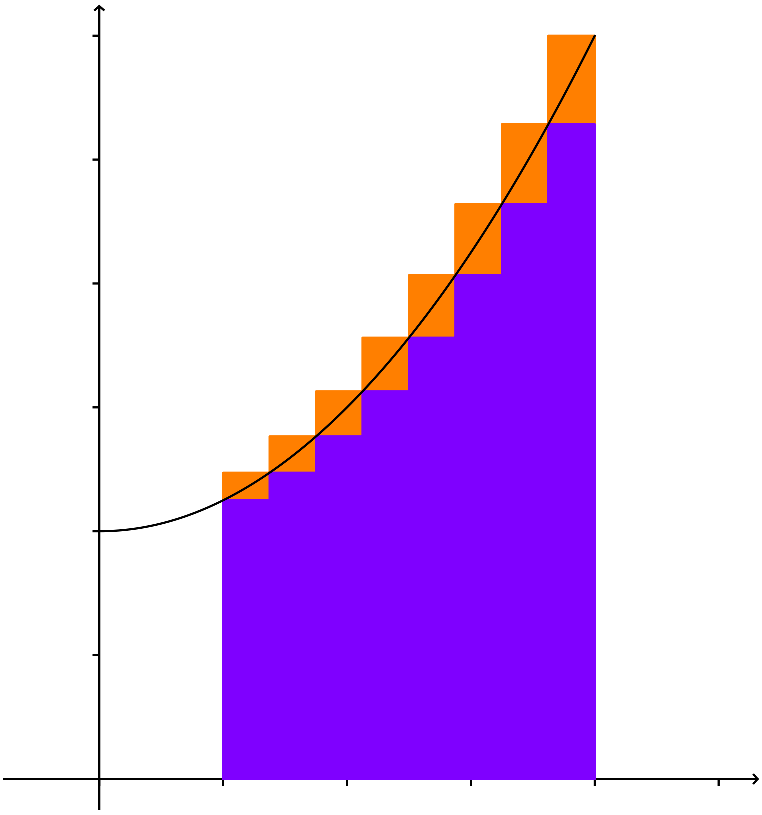
Définition 17.6.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Soit n un entier strictement positif. On note,

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \text{ et } \mathrm{S}'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Remarque

Les sommes S_n et S'_n représentent l'aire des réctangles associés à la fonction f lorsqu'on effectue un découpage régulier de l'intervalle $[a;b]$:



Remarque
Dans le cas d'une fonction continue sur $[0;1]$, les sommes de Riemann s'écrivent

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } S'_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. Sommes de Riemann et intégrale

Les sommes de Riemann d'une fonction continue ont une propriété très importante : elles convergent vers l'intégrale de f sur $[a;b]$ et en sont donc une très bonne approximation.

Théorème 17.17.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Alors les suites $(S_n(f))_n$ et $(S'_n(f))_n$ convergent et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \lim_{n\to+\infty} S'_n(f) = \int_a^b f(t)dt$$

Démonstration
Pour simplifier les calculs, supposons que $a = 0$ et $b = 1$, et supposons f continue croissante sur $[0;1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout k entre 0 et $n-1$, on a

$$\forall\, t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right], f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant f(t) \leqslant f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

en utilisant la croissance de f. D'après l'inégalité de la moyenne, on a donc

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

En additionnant ces inégalités pour k entre 0 et $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

soit, par la relation de Chasles

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \leqslant \int_0^1 f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k+1}{n})$$

En effectuant le changement de variable $j = k+1$ dans la deuxième somme, on déduit donc

$$\mathrm{S}_n(f) \leqslant \int_0^1 f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) = \mathrm{S}_n(f) - \frac{f(0)}{n} + \frac{f(1)}{n}$$

Cette inégalité s'écrit également

$$\int_0^1 f(t)dt + \frac{f(0)}{n} - \frac{f(1)}{n} \leqslant \mathrm{S}_n(f) \leqslant \int_0^1 f(t)dt$$

En passant à la limite, par encadrement, on déduit donc bien

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

3. Application : limite de certaines suites

Méthode

Les sommes de Riemann peuvent nous permettre de calculer la limite de certaines suites.

Exemple 17.13

Soit u la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4}$$

Déterminer la limite de u.

Solution

Pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^3}{n^4} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3$$

On reconnait une somme de Riemann de la fonction $f : x \mapsto x^3$ sur le segment $[0;1]$, qui est continue sur $[0;1]$. Alors, (u_n) converge, et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

☞ *Exercice 10*

4. Application : valeur approchée d'intégrale

Pour déterminer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment, on peut utiliser la méthode des rectangles, qui consiste à calculer l'une des sommes de Riemann dans le cas d'une fonction continue et monotone.

Méthode (Méthode des rectangles)

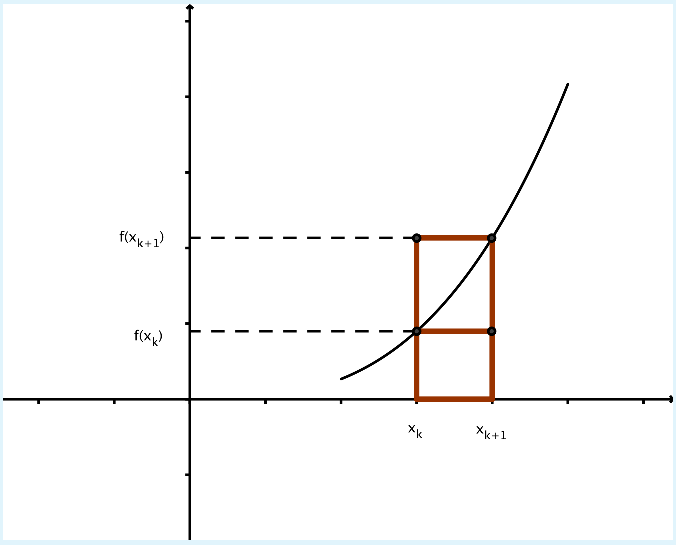
Lorsqu'une fonction est croissante ou décroissante sur un segment $\mathrm{I} = [a, b]$, on décompose I en subdivision de longueur $\frac{b-a}{n}$:

$$\left[a, a+\frac{b-a}{n}\right], \left[a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}\right] \dots, \left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right], \dots \left[a+(n-1)\frac{b-a}{n}, b\right]$$

On calcule alors la somme des aires des rectangles "inférieurs" et "supérieurs" : pour l'intervalle

$$\left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right],$$

on prend le rectangle de hauteur $f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ (rectangle inférieur), ou $f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)$.



Lorsque n tend vers $+\infty$, l'aire obtenue, si la fonction est continue, tend vers l'intégrale de la fonction sur le segment.

Scilab 17.18. Méthode des rectangles

```
// On définit la fonction
function y=f(x)
  y=sqrt(1+x^2)
endfunction

// On détermine l'aire des rectangles inférieurs et supérieurs
// Arguments :
//   a : borne inférieure du segment
//   b : borne supérieure du segment
//   n : nombre de subdivision
function [inf, sup]=rectangle(a,b,n)
  inf=0.0
  sup=0.0
  for i=0:n-1
        inf=inf+(b-a)/n*f(a+i*(b-a)/n)
        sup=sup+(b-a)/n*f(a+(i+1)*(b-a)/n)
  end;
endfunction

// Exemple : pour a=1, b=2, n=100
[inf,sup]=rectangle(1,2,100)
// Comparaison avec une valeur calculée par SciLab:
integrate('f(x)','x',1,2)
```

☞ *Exercices 5, 6 et 11*

VIII. Intégrale sur un intervalle quelconque

L'idée est d'étendre la notion d'intégrale, mais sur un intervalle infini, du type $[a;+\infty[$, $]-\infty;a[$ voire $]-\infty;+\infty[$.

1. Définition

Définition 17.7.

- Soit f une fonction continue sur $[a;+\infty[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente** si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$ existe et est finie. Dans ce cas, on note
$$\int_{[a;+\infty[} f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$
On définit de même $\displaystyle\int_{]-\infty;a]} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$.
- Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente** si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt$ existent et sont finies. Dans ce cas, on note
$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt + \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$

Remarque

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est une intégrale **impropre** (puisque, rigoureusement, l'intégrale n'est définie que sur un segment).

Exemple 17.14

Soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ sur $[0;+\infty[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}dt$.

Solution

Soit $x>0$. Alors
$$\int_0^x f(t)dt = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^x = 1-\mathrm{e}^{-x}$$
et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-x} = 0$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe, et
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 1$$

2. Propriétés

Toutes les propriétés de base se généralisent aux intégrales sur un intervalle quelconque :

Propriété 17.19.

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a;+\infty[$, et $\lambda\in\mathbb{R}$.

- Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} \lambda f(t)dt$ converge, et
$$\int_a^{+\infty} \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)dt$$
- Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ convergent, alors $\int_a^{+\infty} (f(t)+g(t))dt$ converge également, et
$$\int_a^{+\infty} (f(t)+g(t))dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt + \int_a^{+\infty} g(t)dt$$

Remarque

Attention : l'intégrale $\int_a^{+\infty} (f(t)+g(t))dt$ peut exister, sans pour autant que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ n'existent.
Par exemple, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}dt$ ne convergent pas, et pourtant la somme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge.

Propriété 17.20. Relation de Chasles

Soient $-\infty \leqslant a < c < b \leqslant +\infty$ et f une fonction continue sur $]a;b[$. Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent. Dans ce cas
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

3. Théorème de comparaison

Pour monter des convergences d'intégrale, on peut procéder par comparaison :

Théorème 17.21.

Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[a;+\infty[$. On suppose que
$$\forall x \in [a;+\infty[, 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$
Alors, si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est également convergente, et on a
$$0 \leqslant \int_a^{+\infty} f(t)dt \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)dt$$

⚠ **Attention**

Attention : il faut absolument que f soit positive.

Exemple 17.15

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2}dt$ converge.

Solution

Remarquons que pour tout $t \geqslant 1$ on a $t+t^2 \geqslant t^2$, soit
$$0 \leqslant \frac{1}{t+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Or, pour $x>1$, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1-\frac{1}{x}$$

qui possède une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge. Par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2}dt$ converge.

Remarque
Vous verrez l'année prochaine d'autres méthodes de comparaison que la majoration de fonctions positives.

4. Intégrales de référence

Théorème 17.22. Intégrale de Riemann

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $\alpha>1$. Dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

Démonstration
Dans le cas où $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}$$

- Si $\alpha>1$: quand x tend vers $+\infty$, cette intégrale converge vers $\dfrac{1}{\alpha-1}$
- Si $\alpha<1$:

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = +\infty$$

  donc l'intégrale diverge.
- Si $\alpha=1$, on a

  $$\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln(x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

  L'intégrale diverge donc.

Théorème 17.23. Intégrale de Riemann - 2

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[0;1]$ si et seulement si $\alpha<1$. Dans ce cas,

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

Démonstration
Pour $\alpha \neq 1$, on a, pour tout $u \in]0;1[$,

$$\int_u^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_u^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{u^{\alpha-1}}$$

Si $\alpha>1$, $\displaystyle\lim_{u\to0} \frac{1}{u^{\alpha-1}} = +\infty$. L'intégrale diverge donc. Si $\alpha<1$, $\displaystyle\lim_{u\to0} \frac{1}{u^{\alpha-1}} = 0$ donc l'intégrale converge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}$.

Si $\alpha = 1$, pour $u \in]0;1[$,

$$\int_u^1 \frac{1}{t}\,dt = \ln(1) - \ln(u) = -\ln(u) \xrightarrow{u\to 0} +\infty$$

Donc l'intégrale diverge également.

Théorème 17.24.

La fonction $f : t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$. Dans ce cas,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}$$

Démonstration

Si $\alpha = 0$, $e^{-\alpha t} = 1$ et la fonction constante égale à 1 n'est pas intégrable sur $[0;+\infty[$. Sinon,

$$\int_0^x e^{-\alpha t}\,dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^x = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$$

Cette intégrale converge si et seulement si $\alpha > 0$, et dans ce cas

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}$$

Théorème 17.25.

La fonction $f : t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0;1]$, et on a

$$\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1$$

Démonstration

Soit $a \in]0;1[$. Par intégration par parties, ou en utilisant une primitive de ln, on a

$$\int_a^1 \ln(t)\,dt = [t\ln(t) - t]_a^1 = -1 - a\ln(a) + a$$

Or, on a $\lim\limits_{a\to 0} a\ln(a) = 0$ (croissance comparée). Par somme, $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_a^1 \ln(t)\,dt = 1$. Ainsi, l'intégrale converge, et

$$\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1$$

Théorème 17.26.

La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

Démonstration

Théorème admis.

5. Convergence absolue

Définition 17.8.

Soit f une fonction définie sur $[a;+\infty[$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge absolument** sur $[a;+\infty[$ si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.

Remarque

Rigoureusement, on dit que f est **intégrable** sur $[a;+\infty[$ si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.

Théorème 17.27. Inégalité triangulaire

Soit f une fonction définie sur $[a;+\infty[$. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et on a

$$\left|\int_a^{+\infty} f(t)dt\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(t)|dt$$

Démonstration

Admis.

Remarque

⚠ La réciproque n'est pas vraie. Une intégrale peut être convergente, sans êtres absolument convergente. On dit alors que l'intégrale est **semi-convergente**.

☞ *Exercices 12, 13 et 14*

Exercices

Intégration

17

Exercices

Intégrales et primitives

●○○ **Exercice 1 Primitives** (15 min.)

Déterminer sur quel(s) intervalle(s) les fonctions suivantes possèdent des primitives, puis les déterminer

$$f(x)=\frac{x}{x+1} \qquad h(x)=\frac{2}{x(x+1)}$$

$$g(x)=x\sqrt{1-x^2}$$

●○○ **Exercice 2 Premières intégrales** (30 min.)

Montrer l'existence, puis calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\mathrm{A}=\int_1^2\frac{\ln(x)}{x}dx \qquad \mathrm{C}=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t+t}dt \qquad \mathrm{E}=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx$$

$$\mathrm{B}=\int_0^3(2u+1)\mathrm{e}^{u^2+u+1}du \qquad \mathrm{D}=\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}}\frac{dt}{t\sqrt{\ln(t)}} \qquad \mathrm{F}=\int_{-1}^1|x^2-x|dx$$

●○○ **Exercice 3 Intégration par parties** (20 min.)

Montrer l'existence, puis calculer chacunes des intégrales suivantes :

$$\mathrm{A}=\int_0^1 t\mathrm{e}^t dt \qquad \mathrm{C}=\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln(x))^2 dx$$

$$\mathrm{B}=\int_1^{\mathrm{e}} v^2\ln(v)dv \qquad \mathrm{D}=\int_0^1 u^3\mathrm{e}^{u^2}du$$

●○○ **Exercice 4 Changement de variable** (15 min.)

Montrer l'existence, puis calculer chacunes des intégrales suivantes en utilisant le changement de variable donné :

$$\mathrm{A}=\int_1^2\frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)}dx \quad (y=x^2) \qquad \mathrm{B}=\int_{1/2}^1\frac{1}{x(x+1)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx \quad (y=\frac{x}{x+1})$$

Suites d'intégrales

●●○ **Exercice 5 Suite d'intégrales I** (25 min.)

Pour tout entier n, on pose

$$u_n=\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x^2}dx$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, $\frac{1}{1-x^2}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}$. En déduire la valeur de u_0.
2. Calculer u_1.

3. Montrer que pour tout entier n,
$$u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$
En déduire u_2 et u_3.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et minorée par 0.
5. En minorant $1-x^2$, montrer que pour tout entier n, $u_n \leqslant \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. En déduire la limite de la suite u.

●●○ Exercice 6 Suite d'intégrales II (25 min.)

Pour tout entier n, on note
$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \text{ et } \mathrm{J}_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$$

1. Déterminer la monotonie des suites I et J.
2. Montrer que pour tout n, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n).
3. Par un intégration par parties, démontrer que pour tout n,
$$\mathrm{J}_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}\mathrm{I}_{n+2}$$
En déduire la limite de (J_n) puis celle de $(n \times \mathrm{J}_n)$.

Fonctions définies par une intégrale

●●○ Exercice 7 Fonctions définies par une intégrale (20 min.)

Etudier complètement les fonctions suivantes (ensemble de définition, signe, dérivée, et tableau de variations). On justifiera toutes les étapes.

$$a(x) = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad b(x) = \int_x^1 \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}\,\mathrm{d}t \qquad c(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

●●○ Exercice 8 ESCP 99 (30 min.)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2} dt$$

1. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, et que la fonction g est impaire.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}$$
4. Dresser le tableau de variations de g. On précisera $g(0)$.
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $x\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant g(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

●●○ Exercice 9 Prolongement par continuité (10 min.)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^2 \mathrm{e}^t dt$$
Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement.

Sommes de Riemann et séries

●○○ Exercice 10 Sommes de Riemann (15 min.)

Montrer que les suites suivantes sont convergentes, et trouver leur limite.

$$u_n = n^{-3/2}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} \qquad w_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$$

●●○ Exercice 11 Série de Bertrand (15 min.)

En calculant $\int_2^n \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$, et en montrant que pour tout $k \geqslant 2$,

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$$

Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Intégrales impropres

●○○ Exercice 12 Intégrales impropres (15 min.)

Déterminer si les intégrales suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, calculer leur valeur.

$$\mathrm{A} = \int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{C} = \int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{B} = \int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{D} = \int_3^{+\infty}\frac{1}{u\ln u}\,\mathrm{d}u$$

●○○ Exercice 13 Intégrales impropres (10 min.)

Démontrer la convergence et déterminer la valeur de

$$\mathrm{I} = \int_1^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\,dx$$

On pourra dériver la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)$.

●○○ Exercice 14 Suite d'intégrales impropre (20 min.)

Pour tout $a > 0$, et pour tout entier n, on note

$$\mathrm{I}_n(a) = \int_0^a t^n \mathrm{e}^{-t}\,dt$$

On note également

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,dt$$

L'objectif du problème est de montrer que les intégrales I_n existent, et de calculer leur valeur.

1. Calculer $\mathrm{I}_0(a)$, puis déterminer la valeur de I_0.
2. Trouver une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_{n+1}(a)$ et $\mathrm{I}_n(a)$.
3. Démontrer par récurrence que l'intégrale I_n converge.
4. Ecrire la relation liant I_n et I_{n+1}. Déterminer alors la valeur de I_n en fonction de n.

Corrigés

Intégration

Corrigés des exercices

Exercice 1

• La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et y est continue comme quotient de fonctions continues. Donc f admet des primitives sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$. En constatant que

$$\forall\, x \neq -1,\quad \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Les primitives sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$ s'écrivent

$$x \mapsto x - \ln|x+1| + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

soit $x \mapsto x - \ln(x+1) + k$ sur $]-1;+\infty[$, et $x \mapsto x - \ln(-(x+1)) + k'$ sur $]-\infty;-1[$.

• Remarquons que $x \mapsto 1-x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$, et est positif sur $[-1;1]$. La fonction g est donc définie et continue sur $[-1;1]$ comme composée de fonctions continues. Elle y admet donc des primitives. En constatant que $g(x) = -\frac{1}{2}u'(x)\sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = 1-x^2$, on en déduit que les primitives de g s'écrivent

$$x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3/2} + k = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2} + k$$

• La fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$. Elle admet donc des primitives sur $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$. En remarquant que

$$\frac{2}{x(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$$

on en déduit que les primitives de h sur chacun des intervalles s'écrivent

$$x \mapsto 2\ln|x| - 2\ln|x+1| + k = \ln\left(\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\right) + k$$

Exercice 2

L'idée de cet exercice est de trouver les primitives des fonctions sous le signe intégrale. On se ramènera aux primitives usuelles, ou aux formules de dérivations ($u'\mathrm{e}^u$, $\frac{u'}{u}$, $\cdots$).

Remarquons tout d'abord que chaque intégrale existe car toutes les fonctions considérées sont continues sur les intervalles d'intégration.

$$\mathrm{A} = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^2 = \frac{(\ln(2))^2}{2} \text{ en reconnaissant } \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(x) = u'(x)u(x) \text{ avec } u(x) = \ln(x)$$

$$\mathrm{B} = \int_0^3 (2u+1)\mathrm{e}^{u^2+u+1}du = \left[\mathrm{e}^{u^2+u+1}\right]_0^3 = \mathrm{e}^{13} - \mathrm{e} \text{ en reconnaissant } v'(u)\mathrm{e}^{v(u)} \text{ avec } v(u) = u^2+u+1$$

$$\mathrm{C} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t+t}dt = \left[\ln\left|\mathrm{e}^t+t\right|\right]_0^1 = \ln(1+\mathrm{e}) \text{ en reconnaissant } \frac{u'(t)}{u(t)} \text{ avec } u(x) = \mathrm{e}^t + t$$

$$\mathrm{D} = \int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} \frac{dt}{t\sqrt{\ln(t)}} = \left[2\sqrt{\ln(t)}\right]_{\mathrm{E}}^{2\mathrm{e}} = 2\sqrt{\ln(2)+1} - 2 \text{ en reconnaissant } \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} \text{ avec } u(t) = \ln(t)$$

Pour le E, on ne reconnait pas de primitives usuelles. On transforme alors l'écriture de l'intégrale :

$$\mathrm{E} = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1}dx = [x - \ln|x+1|]_0^1 = 1 - \ln(2)$$

Méthode

Dans le cas d'une intégrale avec une valeur absolue, il faut utiliser la relation de Chasles pour pouvoir enlever, suivant les intervalles considérés, les valeurs absolues.

Remarquons que $x^2-x=x(x-1)$ est positif sur $[-1;0]$ et est négatif sur $[0;1]$. Ainsi,

$$\mathrm{F}=\int_{-1}^{1}|x^2-x|dx=\int_{-1}^{0}|x^2-x|dx+\int_{0}^{1}|x^2-x|dx=\int_{-1}^{0}x^2-x\,dx+\int_{0}^{1}-(x^2-x)dx$$

en utilisant le fait que $|u|=u$ si $u\geqslant 0$, $|u|=-u$ sinon. Ainsi,

$$\mathrm{F}=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right]_{0}^{1}=1$$

Exercice 3

Les quatre intégrales existent car les fonctions sous le signe intégrale sont bien continues sur l'intervalle considéré.

Méthode

En règle générale, on essaiera de dériver la fonction ln et assimilée, et de prendre une primitive des fonctions exp et assimilées.

- Posons $u(t)=t$ et $v'(t)=\mathrm{e}^t$ sur $[0;1]$. Ainsi, $u'(t)=1$ et $v(t)=\mathrm{e}^t$ par exemple. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. Par intégration par parties :

$$\mathrm{A}=\int_0^1 t\mathrm{e}^t dt=\left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^t dt$$

et donc

$$\mathrm{A}=\mathrm{e}-\left[\mathrm{e}^t\right]_0^1=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1$$

- Posons $u(v)=\ln(v)$ et $w'(v)=v^2$. Donc $u'(v)=\frac{1}{v}$ et $w(v)=\frac{v^3}{3}$. u et w sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;e]$. Par intégration par parties :

$$\mathrm{B}=\int_1^{\mathrm{e}} v^2\ln(v)dv=\left[\frac{v^3}{3}\ln(v)\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{v^3}{3}\frac{1}{v}dv$$

soit

$$\mathrm{B}=\frac{\mathrm{e}^3}{3}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{v^2}{3}dv=\frac{\mathrm{e}^3}{3}-\left[\frac{v^3}{3\times 3}\right]_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^3}{3}-\left(\frac{\mathrm{e}^3}{9}-\frac{1}{9}\right)=\frac{2\mathrm{e}^3-1}{9}$$

- Posons $u(x)=(\ln(x))^2$ et $v'(x)=x$. Ainsi, $u'(x)=2\frac{\ln(x)}{x}$ et $v(x)=\frac{x^2}{2}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;e]$. Par intégration par parties,

$$\mathrm{C}=\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln(x))^2dx=\left[(\ln(x))^2\frac{x^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}2\frac{\ln(x)}{x}\frac{x^2}{2}dx$$

soit

$$\mathrm{C}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\int_1^{\mathrm{e}}x\ln(x)dx$$

Posons alors $a(x)=\ln(x)$ et $b'(x)=x$, soit $a'(x)=\frac{1}{x}$ et $b(x)=\frac{x^2}{2}$. a et b sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;e]$ et par intégration par parties

$$\mathrm{C}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx\right)$$

et donc

$$\mathrm{C}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x}{2}dx\right)$$

Ainsi,

$$\mathrm{C}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}}\right)=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$$

- Posons $a(u) = u^2$ et $b'(u) = u\mathrm{e}^{u^2}$. Ainsi, $a'(u) = 2u$ et $b(u) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{u^2}$. a et b sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et, par intégration par parties :

$$\mathrm{D} = \int_0^1 u^3\mathrm{e}^{u^2}\,du = \left[u^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2u\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u^2}\,du$$

soit

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{e}}{2} - \int_0^1 u\mathrm{e}^{u^2}\,du = \frac{\mathrm{e}}{2} - \left(\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u^2}\right]_0^1\right) = \frac{1}{2}$$

Exercice 4

Pour A, on pose $y = x^2$, soit $x = \sqrt{y}$ qui sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors $dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$. Enfin, si $x = 1$ alors $y = 1$, et si $x = 2$ alors $y = 4$. Par changement de variables, on a ainsi

$$\mathrm{A} = \int_1^4 \frac{\sqrt{y}}{(y+1)(y+2)}\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{(y+1)(y+2)}dx$$

Par décomposition en éléments simples, on obtient que

$$\frac{1}{(y+1)(y+2)} = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}$$

Ainsi

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}dy = \frac{1}{2}\left[\ln|y+1| - \ln|y+2|\right]_1^4 = \frac{1}{2}(\ln(5) - \ln(6) - (\ln(2) - \ln(3))) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5\times 3}{6\times 2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

Pour B, on pose $y = \frac{x}{x+1}$. Ainsi, pour $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, on a

$$y = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)y = x \Leftrightarrow x(y-1) = -y \Leftrightarrow x = \frac{-y}{y-1} = \frac{y}{1-y}$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. Ainsi,

$$dy = \frac{1(1-y) - y(-1)}{(1-y)^2}dy = \frac{1}{(1-y)^2}dy$$

Enfin, si $x = 1/2$, $y = \frac{1}{3}$ et si $x = 1$ alors $y = \frac{1}{2}$.
Par changement de variable,

$$\mathrm{B} = \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{\frac{y}{1-y}\left(\frac{y}{1-y}+1\right)}\ln(y)\frac{1}{(1-y)^2}dy = \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{\frac{y}{(1-y)^2}}\ln(y)\frac{1}{(1-y)^2}dy = \int_{1/3}^{1/2}\frac{\ln(y)}{y}dy$$

Ainsi,

$$\mathrm{B} = \left[\frac{(\ln(y))^2}{2}\right]_{1/3}^{1/2} = \frac{\ln(1/2)^2}{2} - \frac{\ln(1/3)^2}{2} = \frac{\ln(2)^2 - \ln(3)^2}{2}$$

Exercice 5

Remarquons déjà que, pour tout entier n, la fonction $x \mapsto \frac{x^n}{1-x^2}$ est définie et continue sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Toutes les intégrales considérées existent donc bien.

1. En mettant au même dénominateur,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\},\quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{(a-b)x + (a+b)}{1-x^2}$$

Par identification des coefficients,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b & = & 0 \\ a+b & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout x différent de -1 et 1,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$$

et donc

$$u_0 = \int_0^{1/2}\frac{1}{1-x^2}dx = \int_0^{1/2}\frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}dx = \left[-\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|\right]_0^{1/2}$$

soit

$$\boxed{u_0 = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(\sqrt{3})}$$

2.

$$u_1=\int_0^{1/2}\frac{x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{-2x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\left[\ln(1-x^2)\right]_0^{1/2}$$

et donc

$$\boxed{u_1=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)}$$

3. Par linéarité de l'intégrale,

$$u_n-u_{n+2}=\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x^2}dx-\int_0^{1/2}\frac{x^{n+2}}{1-x^2}dx=\int_0^{1/2}\frac{x^n-x^{n+2}}{1-x^2}dx$$

soit

$$u_n-u_{n+2}=\int_0^{1/2}\frac{x^n(1-x^2)}{1-x^2}dx=\int_0^{1/2}x^n\,dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{1/2}$$

et donc

$$\boxed{u_n-u_{n+2}=\frac{(1/2)^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}}$$

Pour $n=0$, on obtient donc $u_0-u_2=\frac{1}{2}$, soit

$$u_2=u_0-\frac{1}{2}=\ln(\sqrt{3})-\frac{1}{2}$$

et pour $n=1$, il vient $u_1-u_3=\frac{1}{2^2\times 2}$, soit

$$u_3=u_1-\frac{1}{8}=\ln\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)-\frac{1}{8}$$

4. Pour déterminer la monotonie de la suite u, déterminons pour tout entier n le signe de $u_{n+1}-u_n$:

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^{1/2}\frac{x^{n+1}}{1-x^2}dx-\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x^2}dx=\int_0^{1/2}\frac{x^{n+1}-x^n}{1-x^2}dx \text{ par linéarité}$$

donc

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^{1/2}\frac{x^n(x-1)}{1-x^2}dx$$

Or, sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $x^n\geqslant 0$, $x-1\leqslant 0$ et $1-x^2>0$. Ainsi, sur cet intervalle, $\dfrac{x^n(x-1)}{1-x^2}\leqslant 0$. Puisque $0<\frac{1}{2}$, par positivité de l'intégrale, on en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{x^n(x-1)}{1-x^2}dx\leqslant 0$.

Bilan : pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$: la suite (u_n) est décroissante.

De plus, toujours sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $x^n\geqslant 0$ et $1-x^2\geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on a donc $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x^2}dx\geqslant 0$: la suite (u_n) est bien positive.

5. Remarquons déjà qu'étant décroissante et minorée, par théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.

Méthode

Pour encadrer une intégrale, on encadre ce qui est dans l'intégrale, et on utilise la croissance de l'intégrale.

Pour tout $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$; $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow 0\leqslant x^2\leqslant\frac{1}{4}$ par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$. Soit

$$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-x^2\geqslant\frac{3}{4}$$

Donc sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, on a

$$\frac{1}{1-x^2}\leqslant\frac{4}{3}$$

ainsi

$$\frac{x^n}{1-x^2}\leqslant\frac{4}{3}x^n \text{ car } x^n\geqslant 0$$

Par croissance de l'intégrale ($0 \leqslant \frac{1}{3}$), on a alors

$$\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}dx \leqslant \int_0^{1/2} \frac{4}{3}x^n dx$$

et donc

$$u_n \leqslant \left[\frac{4}{3}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{4}{3}\frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} = \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$$

Par produit, et puisque $2 > 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)2^{n+1} = +\infty$$

et par quotient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{3(n+1)2^{n+1}} = 0$$

Or, pour tout entier n, nous avons $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. Ainsi, par le théorème d'encadrement, la limite de (u_n) existe et vaut 0 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Exercice 6

Les fonctions $x \mapsto \frac{t^n}{1+t^2}$ et $x \mapsto t^n \ln(1+t^2)$ sont définies et continues sur $[0;1]$, donc toutes les intégrales considérées existent.

1. Pour tout entier n, et par linéarité de l'intégrale :

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1}-t^n}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+t^2}dt$$

Or, sur $[0;1]$, $t^n \geqslant 0$, $t-1 \leqslant 0$ et $1+t^2 > 0$. Par quotient, $\dfrac{t^n(t-1)}{1+t^2} \leqslant 0$ sur $[0;1]$. Par positivité de l'intégrale $(0<1)$, on a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+t^2}dt \leqslant 0$.

$$\boxed{\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \leqslant 0 : \text{ la suite } (\mathrm{I}_n) \text{ est décroissante.}}$$

De même,

$$\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n = \int_0^1 t^n(t-1)\ln(1+t^2)dt$$

Puisque, sur $[0;1]$, $t^n \geqslant 0$, $1+t^2 \geqslant 1$ donc $\ln(1+t^2) \geqslant 0$ et $t-1 \leqslant 0$. Par produit, $t^n(t-1)\ln(1+t^2) \leqslant 0$ sur $[0;1]$. Par positivité de l'intégrale, on a donc $\displaystyle\int_0^1 t^n(t-1)\ln(1+t^2)dt \leqslant 0$.

$$\boxed{\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n \leqslant 0 : \text{ la suite } (\mathrm{J}_n) \text{ est décroissante}}$$

2. Pour tout $t \in [0;1]$ $t^n \geqslant 0$ et $1+t^2 \geqslant 0$. Par quotient, $\dfrac{t^n}{1+t^2} \geqslant 0$ sur $[0;1]$. Par positivité de l'intégrale,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt \geqslant 0$$

De plus, pour tout $t \in [0;1]$ on a

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant t^2 \leqslant 1 \text{ par croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+$$

ainsi $1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2$ et donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $1 \geqslant \frac{1}{1+t^2}$ et donc $t^n \geqslant \frac{t^n}{1+t^2}$ sur $[0;1]$ car $t^n \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit donc

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt \leqslant \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, pour tout entier n,

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, par théorème d'encadrement, (I_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0}$$

3. Partons de J_n et faisons une intégration par parties. On pose, pour $t \in [0;1]$, $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v'(t) = t^n$, soit $u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$. u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et, par intégration par parties,

$$J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{2t}{1+t^2}dt$$

soit

$$J_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \int_0^1 \frac{2}{n+1}\frac{t^{n+2}}{1+t^2}dt = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_{n+2}$$

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+2} = 0$ d'après la question précédente. Par somme et produit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$$

De plus,

$$nJ_n = \frac{n\ln(2)}{n+1} - \frac{2n}{n+1}I_{n+2}$$

Puisque, par la règle du terme de plus haut degré,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln(2)}{n+1} = \ln(2) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

par somme et produit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \ln(2)}$$

Remarque
On peut ainsi conclure que (J_n) est équivalente à $\frac{\ln(2)}{n}$, c'est-à-dire $J_n \sim \frac{\ln(2)}{n}$.

Exercice 7

- a est la primitive de la fonction ln nulle en 1. Ainsi, la fonction ln étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ a'(x) = \ln(x)$$

Ainsi, puisque $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, on en déduit que a est décroissante sur $]0;1]$ et est croissante sur $[1;+\infty[$. Puisque $a(1) = 0$, on en déduit également qu'elle est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Remarquons que $t^3+1 > 0 \Leftrightarrow t^3 > -1 \Leftrightarrow t > -1$ par stricte croissance de la fonction cube. Ainsi,la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}$ est continue sur $]-1;+\infty[$ comme quotient et composée de fonctions continues : elle admet des primitives. Soit F une primitive de f. Alors, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $b(x) = F(1) - F(x)$ et la fonction b est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$. On a alors

$$\forall x \in]-1;+\infty[,\ b'(x) = 0 - F'(x) = -f(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$$

Puisque pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\sqrt{x^3+1} > 0$, $b'(x)$ est du signe de $-x$. Ainsi, b est croissante sur $]-1;0]$ et est décroissante sur $[0;+\infty[$.

- La fonction $h : t \mapsto e^{-t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. La fonction c, qui est donc une primitive de h, est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ c'(x) = e^{-x^2}$$

c' est strictement positive, donc la fonction c est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, h étant strictement positive, et par positivité de l'intégrale, $c(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$, et $c(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$.

Exercice 8

1.

> ***Méthode***
> Pour une fonction définie par une intégrale, la parité se fera (presque) toujours par le changement de variable $x = -t$.

La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et pour tout réel x, on a

$$g(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2} dt$$

Faisons le changement de variable $u = -t$, soit $t = -u$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$, et $dt = -du$. Lorsque $t = -x$, $u = x$ et lorsque $t = -2x$, $u = 2x$. Par changement de variable

$$g(-x) = \int_{x}^{2x} e^{-(-u)^2}(-du) = -\int_{x}^{2x} e^{-u^2} du = -g(x)$$

Ainsi, la fonction g est impaire.
2.

> **Remarque**
> On fera toujours attention à l'ordre des bornes avant d'utiliser la positivité de l'intégrale.

La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$. Il faut donc s'intéresser aux bornes de l'intégrale :

- Pour $x > 0$, on a $x < 2x$. Par positivité de l'intégrale,

$$g(x) = \int_{x}^{2x} e^{-t^2} dt \geqslant 0$$

- Pour $x < 0$, on a par contre $x > 2x$. Par positivité de l'intégrale, on a cette fois-ci

$$g(x) = \int_{x}^{2x} e^{-t^2} dt \leqslant 0$$

Bilan : g est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$.
3. Soit F une primitive de f (qui existe car f est continue sur $\mathbb{R}$). F est de classe $\mathscr{C}^1$, et on peut alors écrire, pour tout réel x,

$$g(x) = \mathrm{F}(2x) - \mathrm{F}(x)$$

Par somme et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(x) = 2\mathrm{F}'(2x) - \mathrm{F}'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2e^{-(2x)^2} - e^{-x^2} = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$

4. On a alors

$$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2e^{-4x^2} \geqslant e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{-3x^2} \geqslant \frac{1}{2}$$

Soit, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$-3x^2 \geqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 \leqslant \frac{\ln(2)}{3}$$

Ainsi, g' est négative sur $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right]$ et sur $\left[\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}; +\infty\right[$, positive sinon. On obtient le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$		$\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

5. Soit $x>0$. Sur $[x;2x]$, la fonction $f: t\mapsto e^{-t^2}$ est décroissante. Ainsi
$$\forall\, t\in[x;2x],\quad f(2x)\leqslant f(t)\leqslant f(x)\Leftrightarrow e^{-4x^2}\leqslant f(t)\leqslant e^{-x^2}$$
Par positivité de l'intégrale (car pour $x>0$, $x<2x$), on a alors
$$\int_x^{2x} e^{-4x^2}dt\leqslant\int_x^{2x} f(t)dt\leqslant\int_x^{2x} e^{-x^2}dt$$
soit
$$e^{-4x^2}[t]_x^{2x}\leqslant g(x)\leqslant e^{-x^2}[t]_x^{2x}$$
et donc
$$xe^{-4x^2}\leqslant g(x)\leqslant xe^{-x^2}$$
Or, par croissance comparée,
$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\underbrace{x^2e^{-x^2}}_{\xrightarrow[+\infty]{}0\text{ (CC)}}=0\text{ par produit}$$
De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-4x^2}=0$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ existe et
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)=0}$$

Exercice 9

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=t^2e^t$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. On note alors F une primitive de f. On a donc
$$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x te^t dt=\frac{1}{x}(\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0))=\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0)}{x}$$
F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car f est continue sur $\mathbb{R}$) donc g est continue sur $\mathbb{R}^*$. Enfin, par définition du nombre dérivé
$$\lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0)}{x-0}=\mathrm{F}'(0)$$
or $\mathrm{F}'(0)=f(0)=0$.
Bilan : g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0)=0$.

Exercice 10

On essaie de faire apparaitre systématiquement une série de Riemann sur $[0;1]$, *en introduisant "de force" le terme en* $\frac{1}{n}$.

- On constate que
$$u_n=\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k}=\frac{1}{n\times n^{1/2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k}=\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}$$
Introduisons alors la fonction f, définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\sqrt{x}$. Cette fonction est continue sur $[0;1]$ et
$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$
Ainsi, (u_n) représente une somme de Riemann de la fonction f sur le segment $[0;1]$. f étant continue, cette somme converge vers $\int_0^1 f(t)dt$. Ainsi,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=\int_0^1\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^1=\frac{1}{3/2}=\frac{2}{3}}$$

- On remarque que
$$v_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k+n}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}n\frac{1}{k+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{n}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$
On introduit alors la fonction g, définie sur $[0;1]$ par $g(x)=\frac{1}{1+x}$. Cette fonction est continue sur $[0;1]$ et on a
$$v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right)$$

On reconnait ainsi une somme de Riemann de la fonction g sur le segment $[0;1]$. g étant continue, cette somme converge vers $\int_0^1 g(t)dt$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)}$$

• *Ici, on ne dispose pas d'une somme, mais d'un produit. On va alors utiliser la fonction logarithme népérien.* Pour tout entier $n \geqslant 1$, $w_n > 0$ comme produit de termes positifs. Introduisons alors la suite (x_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $x_n = \ln(w_n)$. On a alors

$$\forall\ n \geqslant 1,\quad x_n = \ln(w_n) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

On définit alors la fonction h, définie sur $[0;1]$ par $h(x) = \ln(1+x)$. h est continue sur $[0;1]$ et

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)$$

(x_n) représente une somme de Riemann de la fonction h sur le segment $[0;1]$. h étant continue, cette somme converge vers $\int_0^1 h(t)dt = \int_0^1 \ln(1+t)dt$. Calculons cette intégrale par intégration par partie.
On pose $u(t) = \ln(1+t)$ et $v'(t) = 1$, soit $u'(t) = \frac{1}{1+t}$ et $v(t) = t+1$ (en effet, $t \mapsto t+1$ est une primitive de v'). Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. Par intégration par parties,

$$\int_0^1 \ln(1+t)dt = [(1+t)\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+t}(1+t)dt = 2\ln(2) - \int_0^1 1dt = 2\ln(2) - [t]_0^1 = 2\ln(2)-1$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 2\ln(2)-1$$

Or, pour tout entier $n \geqslant 1$, $x_n = \ln(w_n) \Leftrightarrow w_n = \mathrm{e}^{x_n}$. La fonction exp étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = e^{2\ln(2)-1} = \mathrm{e}^{\ln(4)}\mathrm{e}^{-1} = \frac{4}{\mathrm{e}}}$$

Exercice 11

La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $[2;+\infty[$. Ainsi, pour $k \geqslant 2$, on a

$$\forall\ x \in [k;k+1],\quad g(x) \leqslant g(k) = \frac{1}{k\ln(k)}$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a ainsi

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x\ln(x)} \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}(k+1-k) = \frac{1}{k\ln(k)}$$

En sommant ces inégalités pour $n \geqslant 2$, on a alors

$$\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x\ln(x)} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}$$

soit, d'après la relation de Chasles,

$$\int_2^{n+1}\frac{dx}{x\ln(x)} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}$$

Or,

$$\int_2^{n+1}\frac{dx}{x\ln(x)} = \int_2^{n+1}\frac{1}{x}\frac{1}{\ln(x)}dx = \int_2^{n+1}\frac{u'(x)}{u(x)}dx$$

en posant $u(x) = \ln(x)$ sur $[2;n+1]$. Ainsi,

$$\int_2^{n+1}\frac{dx}{x\ln(x)} = [\ln(\ln(x))]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$$

Bilan : on a donc, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) = +\infty \text{ par composée}$$

Par comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = +\infty$$

La suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ tend vers $+\infty$: la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ diverge.

Exercice 12

Remarquons que chacune des fonctions considérées est continue sur les intervalles donnés.

- Soit $u > 0$. On a alors

$$\int_0^u \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\right]_0^u = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2} + \frac{1}{2}$$

Or,

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{1}{1+u^2} = 0 \text{ par quotient}$$

Par somme et produit de limite, on en déduit que l'intégrale A converge, et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}}$$

- Soit $u > 0$. On a alors

$$\int_0^u t^2 e{-}t^3\,dt = \left[-\frac{1}{3}e^{-t^3}\right]_0^u = -\frac{1}{3}e^{-u^3} + \frac{1}{3}$$

Par composée, $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} e^{-u^3} = 0$. Par sommet et produit, l'intégrale B est convergente, et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^3}\,dt = \frac{1}{3}}$$

- Soit $u > 1$. On a alors

$$\int_1^u \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_1^u = \frac{(\ln(u))^2}{2} - \frac{(\ln(1))^2}{2} = \frac{(\ln(u))^2}{2}$$

Or $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty$ donc par composée

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{(\ln(u))^2}{2} = +\infty$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'intégrale C est divergente.}}$

- Soit $x > 3$. On a alors

$$\int_3^x \frac{du}{u\ln(u)} = \int_3^x \frac{1/u}{\ln(u)} = [\ln(|\ln(u)|)]_3^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(3))$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par composée $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'intégrale D est divergente.}}$

Exercice 13

Remarquons déjà que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{e^x - e^{-x}}$ est continue sur $[1;+\infty[$ comme quotient de fonction continue dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit $f : x \longmapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$. f est définie et dérivable sur $[1;+\infty[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables. En écrivant $f(x) = \ln(e^x - 1) - \ln(e^x + 1)$ pour $x \geqslant 1$, on a alors

$$\forall\, x \geqslant 1,\ \ f'(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1} = \frac{2e^x}{e^x(e^x-e^{-x})} = \frac{2}{e^x-e^{-x}}$$

Ainsi, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x - e^{-x}}$ est $\frac{1}{2}f$.
Soit alors $u \geqslant 1$. On a donc

$$\int_1^u \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx = \left[\frac{1}{2}f(x)\right]_0^u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^u-1}{e^u+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$$

Soit $X = \frac{e^u-1}{e^u+1}$. Alors

$$X = \frac{e^u(1-e^u)}{e^u(1+e^u)} = \frac{1-e^{-u}}{1+e^{-u}}$$

et par quotient

$$\lim_{u\to+\infty} X = 1 \text{ et } \lim_{X\to 1}\ln(X) = 0$$

Par composée,

$$\lim_{u\to+\infty} \ln\left(\frac{e^u-1}{e^u+1}\right) = 0$$

et par somme

$$\lim_{u\to+\infty} \int_0^u \frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx = 0 - \ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$$

Ainsi, l'intégrale I converge, et

$$\boxed{I = -\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right) = \ln\left(\frac{e+1}{e-1}\right)}$$

Exercice 14

1. Pour tout $a > 0$, on a

$$I_0(a) = \int_0^a t^0 e^{-t}\,dt = \int_0^a e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^a = -e^{-a} + 1$$

Mais alors,

$$\lim_{a\to+\infty} I_0(a) = \lim_{a\to+\infty} -e^{-a} + 1 = 1 \text{ par composée}$$

Ainsi, I_0 converge, et $I_0 = 1$.
2. Partons de $I_{n+1}(a)$ et faisons une intégration par parties.
On note $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = e^{-t}$, soit $u'(t) = (n+1)t^{n+1}$ et $v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;a]$. Par intégration par parties,

$$I_{n+1}(a) = \int_0^a t^{n+1}e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}t^{n+1}\right]_0^a - \int_0^a -e^{-t}(n+1)t^n\,dt$$

soit

$$\boxed{I_{n+1}(a) = -e^{-a}a^{n+1} + (n+1)\int_0^a t^n e^{-t}\,dt = -e^{-a}a^{n+1} + (n+1)I_n(a)}$$

3. Nous allons montrons par récurrence la proposition P_n définie pour tout entier n par P_n : "I_n converge "
- Initialisation : Pour $n = 0$, nous avons prouvé à la question 1 que I_0 converge et que $I_0 = 1$. Donc P_0 est vraie.
- Hérédité : on suppose la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé. Montrons que P_{n+1} est vraie.

Ainsi, par hypothèse de récurrence, l'intégrale I_n converge, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} I_n(a)$ existe et est finie (et vaut I_n). Mais alors, en utilisant la relation vue en 2, puisque $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-a}a^{n+1} = 0$ par croissance comparée, on en déduit par produit que

$$\lim_{a\to+\infty} I_{n+1}(a) = 0 + (n+1)I_n = (n+1)I_n$$

Donc, la limite étant finie, l'intégrale I_{n+1} est convergente, et on a

$$I_{n+1} = (n+1)I_n$$

La proposition P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n : l'intégrale I_n converge pour tout n.
4. Dans la récurrence précédente, nous avons démontré que, pour tout entier n,

$$I_{n+1} = (n+1)I_n$$

Ainsi, $I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = n(n-1)\cdots 2\times 1\times I_0$ et donc

$$\forall\, n,\ \ I_n = n!$$

Remarque
Rigoureusement, il faut montrer le résultat par récurrence sur n.

Chapitre 18

Variables aléatoires discrètes

Résumé

Dans ce chapitre, on fait des rappels sur les paramètres concernant les variables aléatoires discrètes. On s'intéresse ensuite aux lois de référence : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique et de Poisson.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les paramètres d'une variable aléatoire :

- connaître la définition de l'espérance . . . . ☐
- savoir utiliser la formule de transfert . . . . ☐
- connaître la définition de la variance . . . . ☐
- savoir utiliser la formule de Koenig-Huygens . . . . ☐

② Concernant les lois usuelles, il faut connaître

- la définition et les paramètres de la loi certaine . . . . ☐
- la définition et les paramètres de la loi uniforme . . . . ☐
- la définition et les paramètres de la loi de Bernoulli . . . . ☐
- la définition et les paramètres de la loi binomiale . . . . ☐
- la définition et les paramètres de la loi géométrique . . . . ☐
- la définition et les paramètres de la loi de Poisson . . . . ☐

③ Savoir générer avec SCILAB les différentes lois . . . . ☐

Dans l'ensemble de ce chapitre, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

I. Compléments sur les variables aléatoires discrètes

Dans l'ensemble de cette section, les variables aléatoires seront **discrètes**, c'est-à-dire que $X(\Omega)$ est inclus dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

1. Espérance mathématiques

Définition 18.1.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On écrit $X(\omega) = \{x_i, i \in I\}$. On dit que X admet une **espérance** lorsque la série $\sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ est absolument convergente. Dans ce cas, on appelle **espérance** (ou **moyenne**) de X le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a ainsi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

Remarque

Si $X(\Omega)$ est fini, X admet une espérance.

Exemple 18.1

On dispose d'un dé non truqué qu'on lance une fois. On note X la variable aléatoire qui vaut 5 si on tombe sur 6, 1 si on tombe sur 5 ou 1, et -3 sinon. Démontrer que X admet une espérance, et déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Solution

Alors, $X(\Omega) = \{-3, 1, 5\}$ est fini, donc possède une espérance, et on a

$$\mathbb{E}(X) = -3.\frac{3}{6} + 1.\frac{2}{6} + 5.\frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

Propriété 18.1.

Si $X(\Omega) \subset [p, q]$ et si X admet une espérance, alors $p \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant q$.
En particulier, si X est positive, $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

Démonstration

Si $X(\Omega) \subset [p, q]$ et si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, alors pour tout $i \in I$,

$$p \leqslant x_i \leqslant q \Rightarrow p\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant x_i\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant q\mathbb{P}(X = x_i)$$

les probabilités étant positives. En additionnant,

$$\sum_{i\in I} p\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \sum_{i\in I} q\mathbb{P}(X = x_i)$$

et on peut conclure car $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

Propriété 18.2. Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance. Soient a et b deux réels.

- la variable aléatoire $aX + b$ admet une espérance, et $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

- la variable aléatoire $X+Y$ admet une espérance, et $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration

Repose sur la linéarité des séries, dans le cas où les deux séries sont absolument convergentes.

Définition 18.2.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- On dit que X est **centrée** si $\mathbb{E}(X)=0$.
- Si elle n'est pas centrée, la variable aléatoire $Y=X-\mathbb{E}(X)$ est centrée, et est appelée **variable aléatoire centrée associée** à X.

Démonstration

En effet, si $Y=X-\mathbb{E}(X)$, alors $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)=0$ en utilisant la linéarité de l'espérance ($a=1$ et $b=-\mathbb{E}(X)\in\mathbb{R}$).

2. Formule de transfert

Théorème 18.3. Formule de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On écrit $X(\Omega)=\{x_i, i\in I\}$. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si $\sum_{i\in I} g(x_i)\mathbb{P}(X=x_i)$ est absolument convergente, alors la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(g(X))=\sum_{i\in I} g(x_i)\mathbb{P}(X=x_i)$$

Si $X(\Omega)=\mathbb{N}$, on a ainsi

$$\mathbb{E}(g(X))=\sum_{n=0}^{+\infty} g(n)\mathbb{P}(X=n)$$

Exemple 18.2 (Exemple fondamental)

Si on prend la fonction $g: x\mapsto x^2$, si la série $\sum_{i\in I} x_i^2\mathbb{P}(X=x_i)$ est absolument convergente, alors X^2 admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{i\in I} x_i^2\mathbb{P}(X=x_i)$$

Si $X(\Omega)=\mathbb{N}$, on a ainsi

$$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X=n)$$

3. Moment d'ordre r

Définition 18.3.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit $r\in\mathbb{N}^*$. **Sous réserve d'existence**, on appelle **moment d'ordre** r de X le nombre

$$m_r(X)=\mathbb{E}(X^r)$$

Remarque

- Les variables aléatoires finies possèdent des moments à tout ordre.
- Si X admet un moment d'ordre r, alors elle admet des moments d'ordre p avec $p\leqslant r$.

4. Variance

Définition 18.4.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. **Sous réserve d'existence**, on appelle

- **moment d'ordre** 2 de X le nombre
$$m_2(X) = \mathbb{E}(X^2)$$
- **variance** de X le nombre mesurant l'écart entre X et son espérance :
$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$
- ***écart-type*** de X le nombre
$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(X)}$$

Remarque

Une variable aléatoire discrète peut admettre une espérance sans admettre un moment d'ordre 2.

Proposition 18.4.

Si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Démonstration

Montrons le dans le cas où $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour tout entier k, on a $k \leqslant k^2$ et donc
$$0 \leqslant k\mathbb{P}(X = k) \leqslant k^2\mathbb{P}(X = k)$$
Si X admet un moment d'ordre 2, la série de terme générale $(k^2\mathbb{P}(X = k))$ converge. Par comparaison, la série de terme général $(k\mathbb{P}(X = k))$ converge également, et X admet une espérance.

Théorème 18.5. Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si X admet une variance, et dans ce cas
$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Démonstration

On suppose que X admet une espérance. Constatons que
$$(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2$$
Par linéarité de l'espérance, on remarque, sous réserve d'existence, que
$$\mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
Ainsi $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2]$ existe si et seulement si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, et dans ce cas, toujours par linéarité de l'espérance,
$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Cette formule est due à **Johann Samuel König** (1712–1757), mathématicien allemand, et **Christian Huygens** (1629–1695), mathématicien néerlandais.

Propriété 18.6.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une variance. Alors, pour tous réels a et b, $aX + b$ admet une variance, et
$$\mathbb{V}\text{ar}(aX + b) = a^2\mathbb{V}\text{ar}(X)$$

Démonstration

On utilise la formule de Koenig-Huygens. Constatons que $(aX + b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$ et $\mathbb{E}(aX + b) =$

$a\mathbb{E}(X)+b$. Donc $aX+b$ admet une variance si X en admet une, et

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX+b)=\mathbb{E}[(aX+b)^2]-(\mathbb{E}(aX+b))^2=a^2\mathbb{E}[X^2]+2ab\mathbb{E}[X]+b^2-a^2\mathbb{E}(X)^2-2ab\mathbb{E}(X)-b^2$$

Donc

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX+b)=a^2(\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2)=a^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$$

Définition 18.5.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$.

- On dit que X est **réduite** si $\sigma(X)=\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)=1$.
- Si X admet une variance, et que $\sigma(X)\neq 0$, la variable aléatoire

$$Y=\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

  est centrée et réduite, et est appelée **variable centrée réduite associée** à X. On la note en général X^*.

Remarque

La variance est toujours positive. Si $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)=0$ alors l'événement $[X=\mathbb{E}(X)]$ est presque sûr : on dit que X suit la **loi certaine**.

☞ *Exercices 1, 2, 3 et 4.*

II. Lois usuelles finies

1. Loi certaine

Définition 18.6.

On dit que la variable aléatoire X suit la **loi certaine** si et seulement s'il existe un réel a tel que l'événement $(X=a)$ soit presque sûr. Ainsi

$$X(\Omega)=\{a\} \text{ et } \mathbb{P}(X=A)=1$$

On dit également que X est une variable aléatoire certaine.

Exemple 18.3

Une urne contient n boules, indiscernables au toucher, de couleurs différentes et portant toutes le numéro 2 et on tire une boule. On note X le numéro tiré. Alors X est une variable aléatoire suivant la loi certaine, et $(X=2)$ est un événement certain.

Théorème 18.7.

Soit $a\in\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire suivant la loi certaine égale à a. Alors

$$\mathbb{E}(X)=a \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)=0$$

Démonstration

Par définition de X, puisqu'elle ne prend qu'une seule valeur, on a

$$\mathbb{E}(X)=a.\mathbb{P}(X=a)=a \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)=(a-a)^2.\mathbb{P}(X=a)=0$$

Remarque

Nous avons une réciproque au théorème précédent : si X est une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)=0$ alors X suit une loi certaine.

2. Loi uniforme

Définition 18.7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[\![1,n]\!]$ si

$$X(\Omega) = [\![1,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

Exemple 18.4

On dispose d'un dé à six faces bien équilibré qu'on lance une fois. On note X le chiffre obtenu après le lancer. Alors X suit la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,6]\!])$.

Théorème 18.8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Démonstration

Par définition,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\\
&= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X=k) - \frac{(n+1)^2}{4}\\
&= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}\\
&= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \frac{n^2-1}{12}
\end{aligned}$$

Remarque

On peut également définir la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$: pour tout $k \in [\![a,b]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$. Dans ce cas, on peut montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$$

Ces formules étant à démontrer systématiquement, en remarquant que si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a;b]\!])$ alors

$$X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; b-a+1]\!])$$

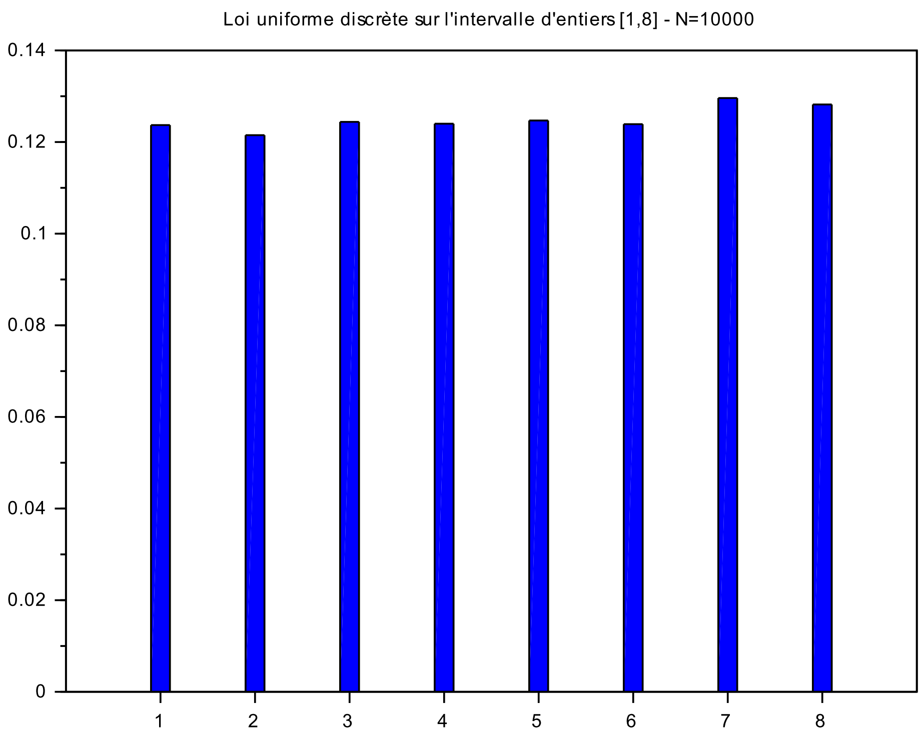
Remarque

On peut simuler une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ avec GRAND.

Scilab 18.9. Simulation d'une loi uniforme discrète

```
// Résumé : fonction simulant une loi uniforme sur [1;8]

clf; clc; // On efface et réinitialise la fenêtre graphique

// On génère 10000 simulations suivant la loi uniforme sur [1;8]
n1=1; n2=8;
N=10000;

U =grand(1,N,"uin",n1,n2);  // uin : uniforme
X = tabul(U,"i");  // tabul renvoie la liste U triée en ordre croissant/
effectif
                                   //  X(:,1) renvoie les éléments en
ordre croissant
                                   //  X(:,2) renvoie les effectifs

// On représente graphiquement la simulation
bar(X(:,1), X(:,2)/N,width=0.2) // histogramme
titre='Loi␣uniforme␣discrète␣sur␣l''intervalle␣d''entiers␣['+string(n1
)+','+string(n2)+']..␣-␣N='+string(N)
xtitle(titre) // on change le titre de l'interface graphique
a=get("current_axes") ; // on change les axes pour les rendre plus
lisibles
a.font_size=1;
a.x_location="bottom";
a.y_location="left";
```

Ce qui donne, après exécution sur Scilab, le graphique suivant. On constate que l'aléatoire fait que les barres de l'histogramme ne sont pas toutes rigoureusement de même taille.



3. Loi de Bernoulli

Définition 18.8.

Soit $p \in]0,1[$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p si

$$X(\Omega) = \{0,1\} \text{ et } \mathbb{P}(X=1) = p \quad \mathbb{P}(X=0) = q = 1-p$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Exemple 18.5

On dispose d'une pièce truquée, dont la probabilité d'obtenir Pile est de $\frac{1}{3}$. Soit X la variable aléatoire valant 1 si on fait Pile, et 0 sinon. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Théorème 18.10.

Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Alors

$$\mathbb{E}(X) = p \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = pq = p(1-p)$$

Démonstration

Par définition,

$$\mathbb{E}(X) = 1.\mathbb{P}(X=1) + 0.\mathbb{P}(X=0) = 1.p = p$$

et

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = (1-p)^2.\mathbb{P}(X=1) + (0-p)^2.\mathbb{P}(X=0) = (1-p)^2 p + p^2(1-p) = p(1-p)((1-p)+p) = (1-p)p$$

4. Loi binomiale

Définition 18.9.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres (n,p) si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } \forall\, k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 18.6 (Exemple fondamental)

On répète n fois de manière indépendante une expérience ayant deux issues possibles : le succès de probabilité p, et l'échec de probabilité $1-p$. On dit alors qu'on dispose d'un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X comptant le nombre de succès obtenus suit une loi binomiale de paramètre (n,p).

Remarque

- Il s'agit bien d'une loi de probabilité. En effet, en utilisant la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1$$

- Dans le cas $n=1$, on retrouve la loi de Bernoulli de paramètre p. Ainsi, $\mathscr{B}(1,p)$ représente également la loi de Bernoulli de paramètre p.

Exemple 18.7

- On lance n dés équilibrés, et on note X le nombre de 6 obtenus. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{1}{6})$.
- Un avion possède deux moteurs identiques. Ces moteurs tombent en panne avec probabilité p. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de moteurs tombés en panne. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(2,p)$.
- Une urne contient a boules rouges et b boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. On note X le nombre de boules noires obtenues. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{b}{a+b})$.

Théorème 18.11.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre (n,p). Alors

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(X) = np(1-p)$$

Démonstration

Par définition,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

Or

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}pp^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}\\ &= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}\\ &\underbrace{=}_{i=k-1} np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{n-1-i}\\ &= np(p+(1-p))^{n-1} = np \text{ en reconnaissant la formule du binôme}\end{aligned}$$

La variance est admise.

Remarque

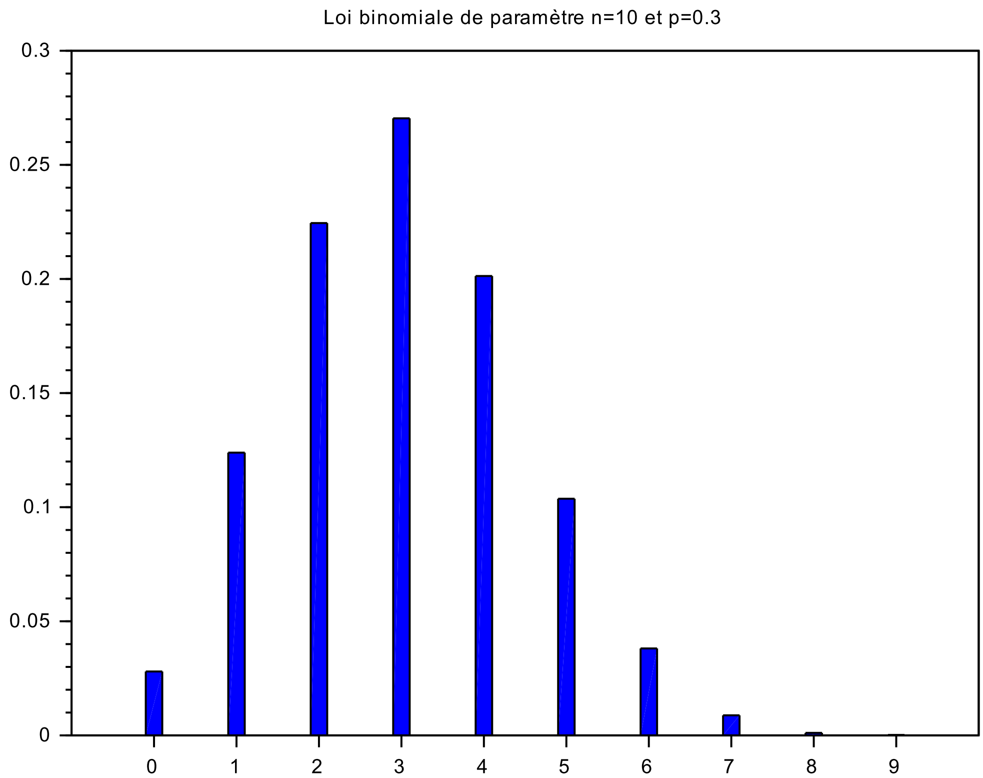
On peut simuler une loi binomiale de paramètre n et p avec GRAND.

Scilab 18.12. Simulation d'une loi binomiale

```
// Résumé : fonction simulant une loi binomiale de paramètre n=10 et p
=0.3

clf; clc; // On efface et réinitialise la fenêtre graphique

// On génère 10000 simulations suivant la loi binomiale de paramètre n
=10 et p=0.3
n=10;
p=0.3;
N=10000;

U =grand(1,N,"bin",n,p);  // bin : binomiale
X = tabul(U,"i");

// On représente graphiquement la simulation
bar(X(:,1), X(:,2)/N,width=0.2) // histogramme

titre='Loi␣binomiale␣de␣paramètre␣n='+string(n)+'␣et␣p='+string(p)

xtitle(titre) // on change le titre de l'interface graphique

a=get("current_axes") ; // on change les axes pour les rendre plus
```

```
lisibles
a.font_size=1;
a.x_location="bottom";
a.y_location="left";
```

Ce qui donne, après exécution sur Scilab, le graphique suivant.



☞ *Exercices 5 et 6.*

III. Lois usuelles infinies

1. Loi géométrique

Définition 18.10.

Soit $p \in]0,1[$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre p si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Remarque

Il s'agit bien d'une loi de probabilité. En effet, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = n) \geqslant 0$ et on a

$$\sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k$$

Ainsi, en reconnaissant une série géométrique de raison $1-p$ avec $-1<1-p<1$:

$$\lim_{n\to+\infty} p\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Exemple 18.8

On dispose d'une pièce truquée, dont la probabilité d'obtenir Face est p. On effectue des lancers indépendants, jusqu'à l'obtention d'un Face. On note X le nombre de lancers effectués avant d'obtenir Face : on dit que X est le **temps d'attente** du premier Face. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Théorème 18.13.

Soit $p\in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Démonstration

Par définition, et en utilisant les séries géométriques et géométriques dérivées ($|1-p|<1$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1}\\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}\\
&= p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} \text{ en reconnaissant la série géométrique dérivée}
\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2p(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2}$$

Or, en utilisant les méthodes classiques sur les séries géométriques :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} k^2p(1-p)^{k-1} &= p\sum_{k=1}^{+\infty}(k(k-1)+k)(1-p)^{k-1}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1}\\
&= p\frac{2(1-p)}{(1-(1-p))^3} + p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Remarque

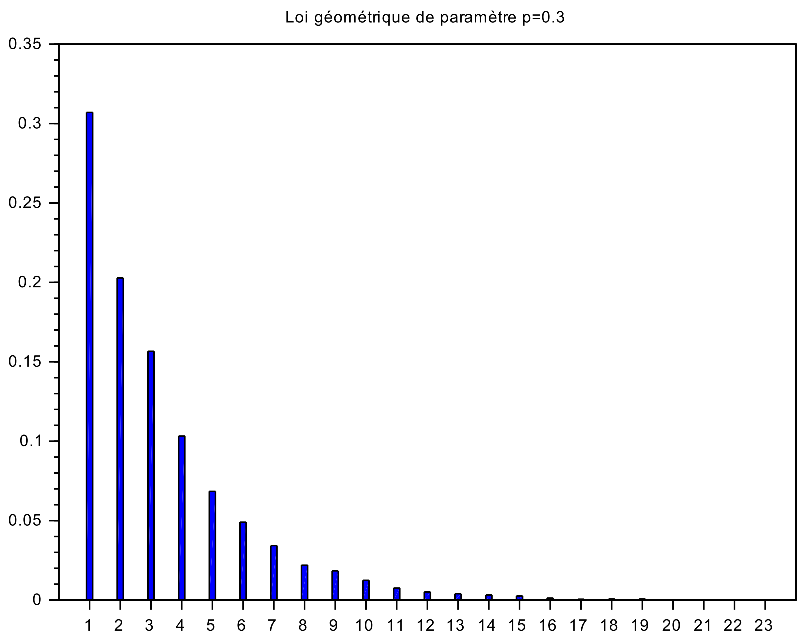
On peut simuler une loi géométrique de paramètre p avec GRAND.

Scilab 18.14. Simulation d'une loi géométrique

```
// Résumé : fonction simulant une loi géométrique de paramètre p=0.3

clf; clc; // On efface et réinitialise la fenêtre graphique
```

```
// On génère 10000 simulations suivant la loi géométrique de paramètre p
=0.3
p=0.3;
N=10000;

U =grand(1,N,"geom",p);  // geom : géométrique
X = tabul(U,"i");

// On représente graphiquement la simulation
bar(X(:,1), X(:,2)/N,width=0.2) // histogramme
titre='Loi␣géométrique␣de␣paramètre␣p='+string(p)
xtitle(titre) // on change le titre de l'interface graphique
a=get("current_axes") ; // on change les axes pour les rendre plus
lisibles
a.font_size=1;
a.x_location="bottom";
a.y_location="left";
```

Ce qui donne, après exécution sur Scilab, le graphique suivant.



2. Loi de Poisson

Définition 18.11.

Soit $\lambda > 0$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Remarque
Il s'agit bien d'une loi de probabilité. En effet, pour tout n, $P(X=n) \geqslant 0$ et on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Exemple 18.9
Une usine produit des bouteilles d'eau. Parmi celles-ci, 3% sont défectueuses. On tire au hasard 100 bouteilles, et on note X le nombre de bouteilles défectueuses. On admet que X suit une loi de Poisson. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{P}(0,03 * 100 = 3)$.

Remarque (Lien avec la loi binomiale)
Dans l'exemple précédent, on aurait tout aussi bien pu utiliser une loi binomiale de paramètres $(100, 0, 03)$.

Théorème 18.15.
Par approximation classique, si X suit une loi binomiale de paramètre (n, p), et si on a
$$n \geqslant 50, p \leqslant 0,1, \ \lambda = np \leqslant 10$$
alors X peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Remarque
On dira, l'année prochaine, que si, pour tout $n \geqslant 1$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{\lambda}{n})$, alors quand n tend vers l'infini, la suite (X_n) **converge en loi** vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Théorème 18.16.
Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Alors
$$\mathbb{E}(X) = \lambda \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(X) = \lambda$$

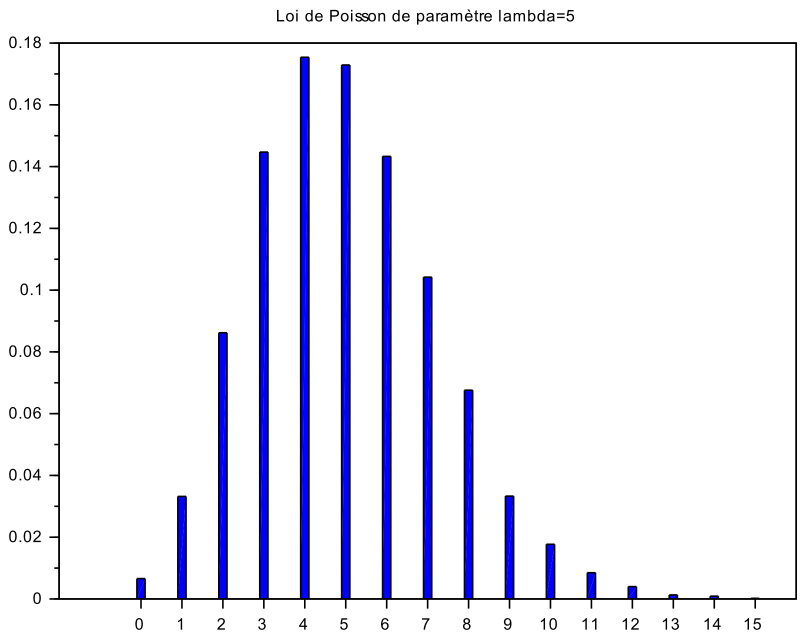
Démonstration
Par définition, et en reconnaissant la série de l'exponentielle,
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-\lambda}(\lambda e^{\lambda}) = \lambda$$
La variance se fait selon la même idée, en utilisant la série dérivée de l'exponentielle.

Remarque
On peut simuler une loi de Poisson de paramètre λ avec *grand*.

Scilab 18.17. Simulation d'une loi de Poisson
```
// Résumé : fonction simulant une loi de Poisson de paramètre lambda=5

clf; clc; // On efface et réinitialise la fenêtre graphique

// On génère 10000 simulations suivant la loi de Poisson de paramètre
lambda=5
lambda=5;
N=10000;

U =grand(1,N,"poi",lambda);  // poi : Poisson
```

```
X = tabul(U,"i");

// On représente graphiquement la simulation
bar(X(:,1), X(:,2)/N,width=0.2) // histogramme
titre='Loi␣de␣Poisson␣de␣paramètre␣lambda='+string(lambda)
xtitle(titre) // on change le titre de l'interface graphique
a=get("current_axes") ; // on change les axes pour les rendre plus
lisibles
a.font_size=1;
a.x_location="bottom";
a.y_location="left";
```

Ce qui donne, après exécution sur Scilab, le graphique suivant.



☞ *Exercices 6, 7, 1 et 5*

Exercices

Variables aléatoires discrètes

18

Exercices

Généralités sur les lois discrètes

●○○ **Exercice 1 Variable aléatoire - I** (20 min.)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = a3^{-k}$$

1. Déterminer a pour que l'on définisse bien une loi de probabilité.
2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?
3. Montrer que X admet une espérance et une variance, et les calculer.
4. On pose $Y = X(X-1)$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

●○○ **Exercice 2 Variables aléatoires - II** (20 min.)

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules rouges restants à ce moment dans l'urne, et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
3. Trouver un lien entre Z et X et en déduire la loi de Z.

●○○ **Exercice 3 Variables aléatoires - III** (15 min.)

Soit $n \geqslant 1$ fixé. On jette n fois une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est p. Soit X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut $n+1$ sinon.

1. Déterminer la loi de X et vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
2. Déterminer l'espérance de X.

●○○ **Exercice 4 Variables aléatoires - IV** (20 min.)

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en rajoutant à chaque tirage, une boule blanche supplémentaire. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage final où apparaît une boule noire, si un tel tirage existe, et égale à 0 si à chaque tirage une boule blanche est obtenue.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = n)$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$. En déduire $\mathbb{P}(X = 0)$. Qu'en déduisez-vous ?

Lois usuelles

●○○ **Exercice 5 Loi usuelle - I** (10 min.)

On considère une pièce dont la probabilité d'avoir pile est de $0,3$.

1. On lance la pièce 10 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 piles ?
2. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile. Combien en moyenne effectuera-t-on de lancer ?

●○○ Exercice 6 Loi usuelle - II (10 min.)

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$ avec $n>0$ et $p\in]0,1[$. On pose $Y=n-X$. Donner la loi de Y.

●○○ Exercice 7 Loi usuelle - III (10 min.)

Soit $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$. On pose $Y=\frac{1}{X+1}$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

●○○ Exercice 8 Loi usuelle - IV (20 min.)

Soit $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$. Montrer que $\forall\ k\in\mathbb{N}^*, P(X>k)=(1-p)^k$. En déduire alors que

$$\forall\ (k,l),\ P_{(X>l)}(X>k+l)=P(X>k)$$

On dit que la variable aléatoire est sans mémoire.

●○○ Exercice 9 Loi usuelle - V (10 min.)

Soit $p\in]0,1[$. On suppose que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est donnée par

$$\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ F_X(n)=1-(1-p)^n$$

Déterminer la loi de X.

●○○ Exercice 10 Loi usuelle - VI (10 min.)

Une urne contient dix boules rouges et cinq boules bleues. On pioche simultanément six boules et on note R (resp. B), le nombre de boules rouges (resp. bleues) obtenues. Déterminer Ω et son cardinal, puis la loi et l'espérance R (resp. B).

●○○ Exercice 11 Allons au ski (10 min.)

A. va au teleski et emprunte l'une des N perches de cet appareil. Entre cet instant, et la prochaine remontée de A, le nombre de skieurs (autres que A.) qui se présentent est une variable de loi $\mathscr{G}(p)$. Quelle est la probabilité que A. reprenne la même perche ?

●○○ Exercice 12 Des péages (30 min.)

Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre de voitures N, arrivant au péage en 1 heure, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et indépendamment les uns des autres.
Soit X_1 la v.a. égale au nombre de voitures se présentant au guichet 1 en une heure.

1. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure.
2. Quelle est la probabilité qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet 1 ?
3. Pour tout $0\leqslant k\leqslant n$, calculer
$$P_{(N=n)}(X_1=k)$$
Et pour $k>n$?
4. Justifier que $P(X_1=k)=\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}P_{(N=n)}(X_1=k)P(N=n)$ puis montrer que
$$P(X_1=k)=e^{-\lambda}\left(\frac{1}{10}\right)^k\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n\frac{\lambda^n}{n!}$$
5. En déduire la loi, l'espérance et la variance de X_1.

●○○ Exercice 13 EML 94 (30 min.)

On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres, et la probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à 0,2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés et Y la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état. On a donc $X+Y=N$.

1. Calculer pour tout n et k, la probabilité
$$P_{(N=n)}(X=k)$$
2. En déduire que X suit la loi de Poisson de paramètre 1.
3. De la même manière, déterminer la loi de Y.

Sujets de concours

●●○ Exercice 14 EDHEC 2005 (60 min.)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant $n+1$:

- il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec une probabilité p $(0<p<1)$
- il sera sur le point 0 avec une probabilité $1-p$.

Pour tout n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n, et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0,0,1,2,0,0,1$, alors $T=1$. Si les abscisses successives sont $1,2,3,0,0,1$ alors $T=4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T=k)$ en fontion d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.
   (b) Donner la loi de X_1.
   (c) En déduire $P(T=k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1}=k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ pour montrer que : $P(X_n=0)=1-p$
3. (a) Etablir que
$$\forall\ n\in\mathbb{N}, \forall\ k\in\{1,2,\cdots,n+1\}, P(X_{n+1}=k)=pP(X_n=k-1)$$
   (b) En déduire que $\forall\ n\in\mathbb{N}^*, \forall\ k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\},\ P(X_n=k)=p^k(1-p)$.
   En déduire également la valeur de $P(X_n=n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n=k)=1$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
$$\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1}+1}{(1-p)^2}$$
   (b) En déduire que $E(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.
5. (a) Montrer en utilisant la question 3a) que
$$\forall\ n\in\mathbb{N}, E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2)+2E(X_n)+1)$$
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E(X_n^2)+(2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$ Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.
   (c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n.
   (d) Montrer enfin que
$$V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}(1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1})$$

Corrigés

Variables aléatoires discrètes

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. Pour que l'on définisse bien une variable aléatoire, il faut $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)=1$. Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty} a3^{-k}=\sum_{k=1}^{+\infty} a\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

On reconnait la série géométrique sans le premier terme. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1=\frac{1}{2}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)=\frac{a}{2}$$

Pour que l'on définisse une variable aléatoire, il faut donc que $\frac{a}{2}=1$ c'est-à-dire $a=2$.

2. Soit P l'événement "obtenir un nombre pair", et I l'événement "obtenir un nombre impaire". Alors,

$$\mathbb{P}(P)=\sum_{k=1}^{+\infty} a3^{-2k}=2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k=2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}}-1\right)=\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(I)=\sum_{k=0}^{+\infty} a3^{-(2k+1)}=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k=\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$$

Donc X a plus de chance de prendre des valeurs impaires que des valeurs pairs.

3. Par définition, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$. Ainsi, en utilisant la série géométrique dérivée première avec $-1<\frac{1}{3}<1$:

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} 2k\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{2}$$

4. Soit $g: x\mapsto x(x-1)$. Ainsi, $Y=g(X)$. D'après la formule de transfert, et sous réserve d'existence,

$$E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)P(X=k)$$

En utilisant la série géométrique dérivée seconde :

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{+\infty} 2k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{2}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}=\frac{2}{9}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{3}{2}$$

Exercice 2

1. X prend des valeurs dans $[\![1;n]\!]$. On note R_i l'événement : "une boule rouge est tirée au i^{ieme} lancer". Soit $k\in[\![1;n]\!]$. $(X=k)$ représente l'événement

$$(X=k)=R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{k-1}\cap\overline{R_k}$$

D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(R_1)\times\mathbb{P}_{R_1}(R_2)\times\cdots\times\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-2}}(R_{k-1})\times\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(\overline{R_k})$$

soit
$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)}\times\frac{2}{n-(k-1)}$$
soit, après simplification
$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$
$X(\Omega)$ étant fini, X admet une espérance, et par définition,
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{2(n-k)}{n(n-1)}=\frac{2n}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
et donc
$$\mathbb{E}(X)=\frac{2n}{n(n-1)}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2}{n(n-1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{n-1}-\frac{(n+1)(2n+1)}{3(n-1)}=\frac{(n+1)(n-1)}{3(n-1)}=\frac{n+1}{3}$$
2. Il y a $n-2$ boules rouges au total. Si X désigne le nombre de tirages nécessaires avant d'obtenir une boule blanche, on a donc tiré $X-1$ boules rouges (la dernière étant blanche). Ains, on a
$$Y=n-2-(X-1)=n-1-X$$
et
$$\mathbb{E}(Y)=n-1-\mathbb{E}(X)\text{ par linéarité de l'espérance}$$
Bilan : $\mathbb{E}(Y)=n-1-\frac{n+1}{3}=\frac{2n-4}{3}$.

3. Notons déjà que Z prend des valeurs dans $[\![2;n]\!]$. Soit $j\in[\![2;n]\!]$. $(X=i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(Z=j)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}_{(X=i)}(Z=j)$$
Remarquons que si $i\geqslant j$, $\mathbb{P}_{(X=i)}(Z=j)=0$ (on ne peut pas obtenir la deuxième boule au j^{ime} lancer si la première boule a été prise au i^{ime} lancer avec $i\geqslant j$). Sinon, avec le même raisonnement que précédemment
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X=i)}(Z=j)&=\mathbb{P}_{(X=i)}(R_{i+1}\cap\cdots\cap R_{j-1}\cap\overline{R_j})\\&=\mathbb{P}_{(X=i)}(R_{i+1})\mathbb{P}_{(X=i)\cap R_{i+1}}(R_{i+2})\times\ldots\times\mathbb{P}_{(X=i)\cap\ldots\cap R_{j-2}}(R_{j-1})\times\mathbb{P}_{(X=i)\cap\ldots\cap R_{j-1}}(\overline{R_j})\\&=\frac{n-i-1}{n-i}\times\frac{n-i-2}{n-i-1}\times\ldots\times\frac{n-2-(j-3)}{n-2-(j-2)}\times\frac{1}{n-(j-1)}=\frac{1}{n-i}\end{aligned}$$
Ainsi, pour tout $j\in[\![2;n]\!]$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=j)&=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{2(n-i)}{n(n-1)}\times\frac{1}{n-i}+\sum_{i=j}^{n}0\\&=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{2}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}(j-1)\end{aligned}$$
et donc
$$\boxed{\forall\ j\in[\![2;n]\!],\ \mathbb{P}(Z=j)=\frac{2(j-1)}{n(n-1)}}$$

Exercice 3

1. Comme pour la loi géométrique, pour $k\in[\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$.
De plus, pour $n+1$, on a $\mathbb{P}(X=n+1)=(1-p)^n$ (cas où on obtient n face). Alors
$$\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{n}p(1-p)^{k-1}+(1-p)^n$$
soit
$$\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(X=k)=p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}+(1-p)^n=1-(1-p)^n+(1-p)^n=1$$

2. X(Ω) étant fini, X admet une espérance, et par définition,

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1} + (n+1)(1-p)^n$$

Or, en dérivant la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ valable pour tout $x \neq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

On en déduit donc

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} + (n+1)(1-p)^n = p\frac{1-(n+1)(1-p)^n - (1-p)^{n+1}}{(1-(1-p))^2} + (n+1)(1-p)^n$$

soit, après simplification,

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \frac{1-p(1-p)^n(n+1)-(1-p)^{n+1}}{p} = \frac{1+(1-p)^n(pn+1)}{p}}$$

Exercice 4

1. On tire systématiquement une boule jusqu'à l'obtention d'une boule noir, et note X le numéro du tirage de la boule noire, 0 si on n'obtient pas de boule noir. Ainsi,

$$\mathrm{X}(\Omega) = \underbrace{\mathbb{N}^*}_{\text{cas où on tire une boule noire}} \cup \underbrace{\{0\}}_{\text{cas où on n'en tire pas}} = \mathbb{N}$$

2. Pour $n \geqslant 1$, notons B_n l'événement "tirer une boule blanche au n^{ime} tirage". Alors,

$$(\mathrm{X}=n) = \mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{B}_{n-1} \cap \overline{\mathrm{B}_n}$$

D'après la formule des probabilités composées, on en déduit donc, pour $n \geqslant 1$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = \mathbb{P}(\mathrm{B}_1) \times \mathbb{P}_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{B}_2) \times \cdots \mathbb{P}_{\mathrm{B}_1\cap\cdots\cap\mathrm{B}_{n-2}}(\mathrm{B}_{n-1}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{B}_1\cap\cdots\cap\mathrm{B}_{n-1}}(\overline{\mathrm{B}_n})$$

soit

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1}$$

et après simplification

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = \frac{1}{n(n+1)}}$$

3. On constate que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. En notant $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$, par télescopage, on a

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = 1$. Ainsi, la série converge et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = 1}$$

Puisque X est une variable aléatoire, on a également

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = 1$$

on en déduit donc que $\mathbb{P}(\mathrm{X}=0) = 0$: l'événement $(\mathrm{X}=0)$ (c'est-à-dire ne jamais obtenir de boule noire) est négligeable.

Exercice 5

1. Soit X la variable aléatoire dénombrant le nombre de pile obtenu sur 10 lancers. Puisqu'il s'agit d'une répétition successive et indépendante d'une loi de Bernoulli de paramètre 0,3, on en déduit que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; 0,3)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X=3) = \binom{10}{3}(0,3)^3(1-0,3)^{10-3} \approx 0,2668$$

2. Soit Y le nombre de lancers effectués avant d'obtenir le premier pile. Par construction, $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(0,3)$. Par définition et théorème, le nombre moyen de lancers effectués est donc

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$$

Exercice 6

Remarquons que, puisque X prend ses valeurs dans $[\![0; n]\!]$, Y prend également ses valeurs dans $[\![0; n]\!]$. Enfin, pour $k \in [\![0; n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(n-X=k) = \mathbb{P}(X=n-k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^k$$

En utilisant les propriétés des nombres combinatoires, on a donc

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$$

Ainsi,

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-p)}$$

Exercice 7

Remarquons que Y est à valeurs positives, puisque X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Sous réserve d'existence, et d'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(Y) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$$

On reconnait la série exponentielle sans son premier terme. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = e^{\lambda} - 1$$

Donc la série converge, et Y admet une espérance, qui vaut

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}}$$

Exercice 8

Rappelons que $X(\Omega) = \mathbb{N}>$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Deux méthodes pour la première partie :

- Par définition, puisque le support est entier :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>k) &= \mathbb{P}(X=k+1)+\mathbb{P}(X=k+2)+\dots\\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=i)\\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty}p(1-p)^{i-1}\\ &= p\sum_{i=k+1}^{\infty}(1-p)^{i-1}\\ &= p\sum_{j=k}^{\infty}(1-p)^{i} \text{ en posant } j=i-1\\ &= p\frac{(1-p)^k}{1-(1-p)} \text{ en reconnaissant une série géométrique}\\ &= (1-p)^k\end{aligned}$$

- En passant par l'évènement contraire, $\overline{(X>k)}=(X\leqslant k)$ et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>k)1-\mathbb{P}(X\leqslant k)\\ &= 1-\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X=i)\\ &= 1-\sum_{i=1}^{k}p(1-p)^{i-1}\\ &= 1-(1-(1-p)^k) \text{ en reconnaissant la somme termes d'une suite géométrique}\\ &= (1-p)^k\end{aligned}$$

Donc, pour k,l entiers strictement positifs, on a

$$\mathbb{P}_{(X>l)}(X>k+l)=\frac{\mathbb{P}((X>l)\cap(X>k+l)}{\mathbb{P}(X>l))}=\frac{\mathbb{P}(X>k+l)}{\mathbb{P}(X>l)}$$

et alors

$$\boxed{\mathbb{P}_{(X>l)}(X>k+l)=\frac{(1-p)^{k+l}}{(1-p)^l}=(1-p)^k=\mathbb{P}(X>k)}$$

Remarque
Cette propriété de la loi géométrique est très importante, et est à retenir.

Exercice 9

Rappelons que $F_X(n)=\mathbb{P}(X\leqslant n)$. Pour une variable aléatoire discrète, on a également

$$\mathbb{P}(X=n)=F_X(n)-F_X(n-1)$$

Ainsi, pour $n\geqslant 2$, on obtient

$$\mathbb{P}(X=n)=F_X(n)-F_X(n-1)=1-(1-p)^n-(1-(1-p)^{n-1})=(1-p)^{n-1}(1-(1-p))=p(1-p)^{n-1}$$

également valable pour $n=1$, puisque dans ce cas $\mathbb{P}(X=1)=F_X(1)=1-(1-p)=p$.
Bilan : ainsi, $\boxed{X\hookrightarrow\mathcal{G}(p)}$.

Exercice 10

On tire simultanément 6 boules, ainsi $\Omega=\{R,B\}^6$, excepté le tirage (B,B,B,B,B,B) qui est impossible. On en déduit, puisqu'on tire 6 boules parmi 15, que

$$\text{card}(\Omega)=\binom{15}{6}=5005$$

R prend des valeurs dans $[\![1;6]\!]$ (puisqu'on n'est obligé de prendre une boule rouge), et B prend des valeurs dans $[\![0;5]\!]$. Par dénombrement, on obtient

$$\forall\, k \in [\![1;6]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{R}=k)=\frac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{5005}$$

$$\forall\, k \in [\![0;5]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{B}=k)=\frac{\binom{5}{k}\binom{10}{6-k}}{5005}$$

Après calcul, on obtient

$$\mathbb{E}(\mathrm{R})=\sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(\mathrm{R}=k)=\frac{20020}{5005}=4$$

$$\mathbb{E}(\mathrm{B})=\sum_{k=0}^{5} k\mathbb{P}(\mathrm{B}=k)=\frac{10010}{5005}=2$$

Exercice 11

Remarquons que A récupère la même perche si et seulement si il y a $\mathrm{N}-1+k\mathrm{N}$, $k\in\mathbb{N}$ personnes qui passent avant lui. Notons alors M l'événement : "A. reprend la même perche". Alors, d'après ce qui précède

$$\mathbb{P}(\mathrm{M})=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{G}=\mathrm{N}-1+k\mathrm{N})$$

en utilisant les propriétés des lois géométriques

$$\mathbb{P}(\mathrm{M})=\sum_{k=0}^{+\infty}p(1-p)^{\mathrm{N}-1+k\mathrm{N}-1}=p(1-p)^{\mathrm{N}-2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left((1-p)^{\mathrm{N}}\right)^k$$

Puisque $-1<(1-p)^{\mathrm{N}}<1$, la série géométrique converge, et on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{M})=p(1-p)^{\mathrm{N}-2}\frac{1}{1-(1-p)^{\mathrm{N}}}$$

La probabilité qu'il récupère la même perche est donc de $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{M})=\dfrac{p(1-p)^{\mathrm{N}-2}}{1-(1-p)^{\mathrm{N}}}}$.

Exercice 12

> **Remarque**
> Les méthodes de cet exercice sont classiques et donc, à connaitre.

1. Par définition, le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure vaut $\mathbb{E}(\mathrm{N})=\lambda$.
2. Puisque le choix de la file est au hasard, ce choix est uniforme. Ainsi, la probabilité qu'une voiture se dirige vers le guichet 1 est de $\frac{1}{10}$.
3. Soit n fixé. Le nombre de voitures, parmi n voitures, choisissant le guichet 1 suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{10}$. En effet, les conducteurs choisissent au hasard et indépendamment leur guichet : ainsi, il s'agit d'une répétition successive et indépendante d'une épreuve de Bernoulli, de succès "aller au guichet 1", de probabilité $\frac{1}{10}$. Ainsi,

$$\forall\, 0\leqslant k\leqslant n,\ \mathbb{P}_{(\mathrm{N}=n)}(\mathrm{X}_1=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^k\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}$$

Si $k>n$, il est impossible que parmi n voitures, k voitures se dirigent vers le guichet 1 :

$$\forall\, k>n,\ \mathbb{P}_{(\mathrm{N}=n)}(\mathrm{X}_1=k)=0$$

4. Remarquons que, puisque N est valeur dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $(\mathrm{N}=n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_1=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{N}=n)\mathrm{P}_{(\mathrm{N}=n)}(\mathrm{X}_1=k)$$

soit, d'après ce qui précède, puisque $\mathrm{P}_{(\mathrm{N}=n)}(\mathrm{X}_1=k)=0$ si $k>n$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_1=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{N}=n)\mathrm{P}_{(\mathrm{N}=n)}(\mathrm{X}_1=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^k\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}$$

On obtient, en sortant ce qui ne dépend pas de n :

$$\mathbb{P}(X_1=k)=\left(\frac{1}{10}\right)^k e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}$$

On pose $i=n-k$ dans la somme. On obtient alors

$$\mathbb{P}(X_1=k)=\left(\frac{1}{10}\right)^k e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{i+k}}{(i+k)!}\binom{i+k}{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{i}$$

Enfin, remarquons que

$$\binom{i+k}{k}\frac{1}{(i+k)!}=\frac{(i+k)!}{k!(i+k-k)!}\frac{1}{(i+k)!}=\frac{1}{i!k!}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=k)&=\left(\frac{1}{10}\right)^k e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i\lambda^k}{i!k!}\left(\frac{9}{10}\right)^{i}\\&=\left(\frac{1}{10}\right)^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{9}{10}\right)^{i}\end{aligned}$$

5. On reconnait une série exponentielle, et donc

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{9}{10}\right)^i=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{9\lambda}{10}\right)^i\frac{1}{i!}=e^{\frac{9\lambda}{10}}$$

et finalement

$$\boxed{\forall\, k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_1=k)=\left(\frac{\lambda}{10}\right)^k\frac{e^{-\frac{\lambda}{10}}}{k!}}$$

Bilan : X_1 suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{10}$. On a alors $\mathbb{E}(X_1)=\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)=\lambda$.

Exercice 13

1. Remarquons que, par définition, si $k>n$, on a nécessairement

$$\mathbb{P}_{(N=n)}(X=k)=0$$

Le nombre de colis détérioré, parmi un ensemble de n colis fixés, va suivre une loi binomiale de paramètre n et $p=0,2$. En effet, puisque les colis sont expédiés indépendamment les uns des autres, il s'agit d'une répétition successive, indépendante et identiquement distribuée d'une même épreuve de Bernoulli, de succès “le colis est détérioré” de probabilité $0,2$.
Ainsi, pour $0\leqslant k\leqslant n$, on a

$$\mathbb{P}_{(N=n)}(X=k)=\binom{n}{k}(0,2)^k(0,8)^{n-k}$$

2. Puisque N est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, et pour tout entier k :

$$\mathbb{P}(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X=k)$$

D'après le résultat précédent, et puisque N suit une loi de Poisson de paramètre 5 :

$$\mathbb{P}(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{5^n}{n!}e^{-5}\binom{n}{k}(0,2)^k(0,8)^{n-k}$$

soit, en sortant ce qui ne dépend pas de la somme

$$\mathbb{P}(X=k)=e^{-5}(0,2)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{5^n}{n!}\binom{n}{k}(0,8)^{n-k}$$

En procédant au changement de variable $i=n-k$, on obtient

$$\mathbb{P}(X=k)=e^{-5}(0,2)^k\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{5^{i+k}}{(i+k)!}\binom{i+k}{k}(0,8)^{i}$$

et de même que dans l'exercice précédent,

$$\frac{1}{(i+k)!}\binom{i+k}{k} = \frac{1}{(i+k)!}\,\frac{(i+k)!}{k!i!} = \frac{1}{k!i!}$$

d'où

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-5}(0,2)^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{5^i 5^k}{i!k!}(0,8)^i = e^{-5}(0,2)^k \frac{5^k}{k!} \times \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(5\times 0,8)^i}{i!}}_{=e^{5\times 0,8}=e^4}$$

soit

$$\boxed{\forall\ k\in\mathbb{N},\ \ \mathbb{P}(X=k) = e^{-1}\frac{1^k}{k!}}$$

et donc, $X \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$.

3. On peut procéder de la même manière, en observant que dans ce cas, le nombre de colis en bon état parmi n colis fixés suit une loi binomiale de paramètre n et $p=0,8$. On obtient alors, par le même raisonnement, que $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(4)$.

Exercice 14

Chapitre 19

Applications linéaires

Résumé

Ce chapitre est très important et tombe régulièrement au concours. Il est abstrait, mais pas difficile. Il sera approfondi l'année prochaine.
Il doit être maitrisé dans son ensemble.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir montrer qu'une application est linéaire .... □

② Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ .... □

③ Savoir déterminer le noyau d'une application linéaire .... □

④ Savoir déterminer l'image d'une application linéaire .... □

⑤ Savoir démontrer qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective .... □

I. Applications linéaires

1. Définition

Définition 19.1.

Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ telle que

- $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Remarque

On peut réunir les deux propriétés en une seule : $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une application linéaire si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Méthode

Pour montrer qu'une application f est une application linéaire, on prendra x et y dans E, $\lambda \in \mathbb{R}$, et on montre que $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Exercice 19.1

Soit $f : \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une application linéaire.

Solution

En effet, si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$f(\lambda \mathrm{A} + \mathrm{B}) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + b_1 \\ \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a_2 + b_2 \\ 0 \\ \lambda a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda f(\mathrm{A}) + f(\mathrm{B}) = \lambda \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_2 + b_2 \\ 0 \\ \lambda a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

Donc $f(\lambda \mathrm{A} + \mathrm{B}) = \lambda f(\mathrm{A}) + f(\mathrm{B})$: f est une application linéaire.

☞ *Exercice* **??**.

Notation

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Définition 19.2.

- Si $\mathrm{F} = \mathrm{E}$, et si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est une application linéaire, on dit que f est un **endomorphisme**.
- Si $\mathrm{F} = \mathbb{R}$, et si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$, on dit que f est une **forme linéaire**.

Propriété 19.1.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire. Alors $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$.

Proposition 19.2.

Soient E, F et G trois espaces vectoriels, et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

Démonstration

Soient $x, y \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant respectivement la linéarité de f puis de g :

$$g\circ f(\lambda x + y) = g(f(\lambda x+y)) = g(\lambda f(x) + f(y)) = \lambda g(f(x)) + g(f(y)) = \lambda g\circ f(x) + g\circ f(y)$$

2. Cas de $\mathscr{L}(\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R}))$

Théorème 19.3.

Soit $f : \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ une application linéaire. Alors, il existe une matrice $M \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), f(X) = MX$$

Cette matrice est appelée matrice **associée** à f dans les bases canoniques respectives et est notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, f$.

Méthode

Pour déterminer la matrice associée à une application linéaire $f : \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on prend la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on calcule les images $f(e_i)$ par f qu'on range dans une matrice.

Exercice 19.2

Soit f l'application définie dans l'exemple précédent :

$$f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice associée à f dans les bases canoniques.

Solution

Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

donc $\forall\, X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = MX$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☞ *Exercice* **??**.

3. Noyau d'une application linéaire

Définition 19.3.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **noyau** de f, et on note $\mathrm{Ker} f$, le sous- …

ensemble de E défini par
$$\operatorname{Ker} f = \left\{x \in E,\ f(x) = 0_F\right\}$$

Théorème 19.4.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Puisque $f(0_E) = 0_F$, on a déjà $0_E \in \operatorname{Ker} f$. Ensuite, si x et y sont deux vecteurs de $\operatorname{Ker} f$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \underbrace{=}_{x \text{ et } y \text{ dans } \ker f} \lambda 0_F + 0_F = 0_F$$
donc $\lambda x + y \in \operatorname{Ker} f$: $\operatorname{Ker} f$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

Méthode

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on résout l'équation $f(x) = 0_F$ d'inconnue x. On se ramène en général à un système.

Exercice 19.3

Déterminer le noyau de l'application linéaire précédente.

Solution

Si $f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si
$$f(X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
ce qui donne le système
$$\left\{\begin{array}{ccc} x_2 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x_2 & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow X = 0_E$$
Donc, $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Théorème 19.5.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Démonstration

Supposons f injective. Soit x tel que $f(x) = 0_F$ alors $f(x) = f(0_E)$. Par injectivité de f, $x = 0_E$. Donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Soient x et x' tels que $f(x) = f(x')$. Par linéarité de f, $f(x - x') = 0_F$. Puisque $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, alors $x - x' = 0_E$ c'est-à-dire $x = x'$: f est injective.

4. Image d'une application linéaire

a. Définition

Définition 19.4.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **image** de f, et on note $\operatorname{Im} f$, le sous-

ensemble de F défini par
$$\operatorname{Im} f = \left\{ y \in F,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x) \right\}$$

Théorème 19.6.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F. Si $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors
$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

Démonstration

Puisque $0_F = f(0_E)$, on a $0_F \in \operatorname{Im} f$. Soient a et b deux éléments de $\operatorname{Im} f$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque a et b sont dans $\operatorname{Im} f$, il existe x et y dans E tels que
$$a = f(x) \quad \text{et} \quad b = f(y)$$
Mais alors
$$\lambda a + b = \lambda f(x) + f(y) \underbrace{=}_{\text{linéarité de } f} f(\lambda x + y)$$
Donc $\lambda a + b$ s'écrit $f(z)$ pour un certain $z \in E$: $\lambda a + b \in \operatorname{Im} f$. $\operatorname{Im} f$ est donc bien un sous-espace vectoriel de F.

b. Rang

Puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel, on peut s'intéresser à sa dimension :

Définition 19.5.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **rang** de f, et on note $\operatorname{rg}(f)$, la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Méthode

Pour déterminer l'image d'une application linéaire, on prend une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E et on écrit $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$. On essaie ensuite d'en déterminer une base.

Exercice 19.4

Déterminer l'image de l'application linéaire précédente.

Solution

Si $f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, on prend $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$.
$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc
$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

et $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\operatorname{Im} f$. Ainsi, $\operatorname{rg}(f) = 2$.

Théorème 19.7.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

Démonstration

Par définition, f est surjective si et seulement si $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$. Or, par définition, $f(\mathrm{E}) = \operatorname{Im} f$. Donc f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

Théorème 19.8.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors f est bijective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathrm{E}}\}$ et $\operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

Méthode

Pour montrer qu'une application linéaire $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective, on montrera que $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathrm{E}}\}$ et que $\operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

Exercice 19.5

Soit $f : \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

est bijective.

Solution

f est bien linéaire (c'est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminons noyau et image.

- Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$. Alors

$$f(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0$$

ainsi, $\operatorname{Ker} f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ et f est injective.

- Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1$$

La famille $(2e_1, e_2)$ est libre (car les vecteurs ne sont pas colinéaires) donc forme une base de $\operatorname{Im} f$:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(2e_1, e_2) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2) = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

Ainsi, f est surjective.

Bilan : f est bien bijective.

Définition 19.6.

Soient E et F deux espaces vectoriels.

- Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est bijective, on dit que f est un **isomorphisme** de E dans F.
- Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est bijective, on dit que f est un **automorphisme**.

- On note Isom(E, F) l'ensemble des isomorphismes de E dans F, et Aut(E) ou GL(E) l'ensemble des automorphismes de E.

Théorème 19.9.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \text{Isom}(E, F)$. Alors f^{-1} est également une application linéaire et $f^{-1} \in \text{Isom}(F, E)$.

Démonstration

Soient x, y deux éléments de F et λ un réel. Puisque f est bijective, il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = x$ et un unique $b \in E$ tel que $f(b) = y$. Donc $f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b) = \lambda x + y$ donc, par unicité de bijectivité de f, $\lambda a + b = f^{-1}(\lambda f(a) + f(b))$, c'est-à-dire

$$\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}(\lambda x + y)$$

f^{-1} est bien linéaire.

☞ *Exercices* **??**, **??**, **??**, **??** *et* **??**.

Exercices

Applications linéaires

19

Exercices

Applications linéaires

●○○ Exercice 1 Linéarité (20 min.)

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, le démontrer rigoureusement.

- $f_1 : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par
$$f_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$
- $f_2 : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par
$$f_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$
- $f_3 : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par
$$f_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$
- $f_4 : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_4\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

●○○ Exercice 2 Matrices associées (10 min.)

Déterminer les matrices associées aux applications linéaires de l'exercice précédent dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés.

Noyaux, images

●○○ Exercice 3 Un endomorphisme (15 min.)

Soit f un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, dont les images des vecteurs de la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner $f(X)$ pour toute matrice X de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et donner la matrice associée à l'application f dans la base canonique.
2. Déterminer les antécédents de $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer une base du noyau, et de l'image de f.

●○○ Exercice 4 Application linéaire I (20 min.)

Soit $f : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x+y-3z \\ 3x+2y-4z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une application linéaire, et déterminer sa matrice associée dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau, et l'image de f.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. En anticipant sur l'année prochaine, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

●○○ Exercice 5 Application linéaire II (20 min.)

Soit $f : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ y-z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une application linéaire, et déterminer sa matrice associée dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau, et l'image de f.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. En anticipant sur l'année prochaine, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

●●○ Exercice 6 Application linéaire III (30 min.)

Soit $f : \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une application linéaire, et déterminer M sa matrice associée dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau, et l'image de f.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. Déterminer f^{-1} puis la matrice associée à f^{-1}. Calculer alors M^{-1}. Que constate-t-on ?
5. Déterminer $f \circ f$, sa matrice associée, et comparer le résultat obtenu avec M^2.

●●○ Exercice 7 Application linéaire IV (15 min.)

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(\mathrm{A}) = \mathrm{AM} - \mathrm{MA}$. Montrer que f est une application linéaire, et déterminer image et noyau.

Corrigés

Applications linéaires

Corrigés des exercices

Exercice 1

- f_1 est une application linéaire. En effet, soient $u=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f_1(\lambda u+v)=f_1\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1+y_1\\\lambda x_2+y_2\\\lambda x_3+y_3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2(\lambda x_1+y_1)+(\lambda x_2+y_2)\\(\lambda x_2+y_2)-(\lambda x_3+y_3)\end{pmatrix}$$

ainsi,

$$f_1(\lambda u+v)=\begin{pmatrix}\lambda(2x_1+x_2)+(2y_1+y_2)\\\lambda(x_2-x_3)+(y_2-y_3)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2x_1+x_2\\x_2-x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2y_1+y_2\\y_2-y_3\end{pmatrix}=\lambda f_1(u)+f_1(v)$$

- f_2 n'est pas linéaire. En effet,

$$f_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

donc $2f_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, et pourtant

$$f_2\left(2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\neq 2f_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

- f_3 est linéaire, et est un endomorphisme. Tout d'abord, elle va de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même. Soient $u=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f_3(\lambda u+v)=f_3\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1+y_1\\\lambda x_2+y_2\\\lambda x_3+y_3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}(\lambda x_1+y_1)-(\lambda x_2+y_2)\\(\lambda x_2+y_2)-(\lambda x_3+y_3)\\(\lambda x_3+y_3)-(\lambda x_1+y_1)\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$f_3(\lambda u+v)=\begin{pmatrix}\lambda(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\\\lambda(x_2-x_3)+(y_2-y_3)\\\lambda(x_3-x_1)+(y_3-y_1)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_3-x_2\\x_1-x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1-y_2\\y_3-y_2\\y_1-y_3\end{pmatrix}=\lambda f_3(u)+f_3(v)$$

$$\boxed{f_3 \text{ est bien un endomorphisme de } \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

- f_4 est également linéaire, et est une forme linéaire, car elle est à valeur dans $\mathbb{R}$. Soient $u=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et

$v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f_4(\lambda u + v) = f_4\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right)$$

donc

$$f_4(\lambda u + v) = (\lambda x_1 + y_1) + 2(\lambda x_2 + y_2) + 3(\lambda x_3 + y_3) = \lambda(x_1 + 2x_2 + 3x_3) + (y_1 + 2y_2 + 3y_3) = \lambda f_4(u) + f_4(v)$$

Donc f_4 est linéaire et est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 2

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- On a $f_1(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_1(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f_1(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Ainsi,

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à f_1 dans la base canonique.

- De la même manière, on obtient la matrice M_3 de f_3 dans la base canonique :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Enfin, en notant M_4 la matrice de f_4 dans les bases canoniques : $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 3

1. On nous donne par définition les images des vecteurs de la base canonique. Donc

$$\mathrm{Mat} f = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y - 7z \\ -x + 2y + 4z \\ 2x - y + z \end{pmatrix}$$

2. On cherche x, y et z tels que

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y - 7z \\ -x + 2y + 4z \\ 2x - y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Après résolution du système par la méthode du pivot de Gauss, on obtient une infinité de solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{\begin{pmatrix} 5 - 2z \\ 2 - 3z \\ z \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R}\right\}$$

L'application f n'est donc pas injective puisqu'un élément admet une infinité d'antécédents.
De même, on cherche x, y et z tels que

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y - 7z \\ -x + 2y + 4z \\ 2x - y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Après résolution du système par la méthode du pivot de Gauss, on n'obtient aucune solution : la fonction f n'est donc pas surjective, puisque la matrice $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'est pas atteinte par f.

3. On a, en résolvant le système,

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ -3z \\ z \end{pmatrix}, \; z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$. De plus, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique, on a

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } f(e_3) = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si on cherche x, y, z trois réels tels que $x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient une infinité de solutions.

La famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est donc liée. En revanche, $(f(e_1), f(e_2))$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

et $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 4

1. Montrons que f est linéaire. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f(\lambda X + Y) = f \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

donc

$$f(\lambda X + Y) = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \\ 2(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) - 3(\lambda x_3 + y_3) \\ 3(\lambda x_1 + y_1) + 2(\lambda x_2 + y_2) - 4(\lambda x_3 + y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2 - x_3) + (y_1 + y_2 - y_3) \\ \lambda(2x_1 + x_2 - 3x_3) + (2y_1 + y_2 - 3y_3) \\ \lambda(3x_1 + 2x_2 - 4x_3) + (3y_1 + 2y_2 - 4y_3) \end{pmatrix}$$

et donc $f(\lambda X + Y) = \lambda f(X) + f(Y)$: f est bien une application linéaire, qui va de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même, donc est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Sa matrice associée dans la base canonique est

$$\operatorname{Mat} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément du noyau. Alors on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x + y - 3z \\ 3x + 2y - 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après résolution par la méthode du pivot de Gauss, on obtient

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, \; z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On cherche à savoir si la famille est libre. On cherche donc x, y, z tels que $xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Après résolution (qui revient à étudier le noyau de f), on constate qu'il y a une infinité de solutions. La famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est donc liée. En revanche, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

3. f n'est pas injective, car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul. f n'est pas surjective non plus, car son rang vaut 2 (puisque on a trouvé une base précédemment) alors que l'espace d'arrivé est de dimension 3. Elle n'est donc pas bijective.
4. D'après les résultat de la question 2, on a

$$\dim(\operatorname{Ker} f)=1 \text{ et } \operatorname{rg}(f)=\dim(\operatorname{Im} f)=2$$

ainsi

$$\dim(\operatorname{Ker} f)+\operatorname{rg}(f)=3=\dim(\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

qu'on appelle formule du rang.

Exercice 5

1. Montrons que f est linéaire. Soient $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f(\lambda X+Y)=f\begin{pmatrix}\lambda x_1+y_1\\\lambda x_2+y_2\\\lambda x_3+y_3\end{pmatrix}$$

donc

$$f(\lambda X+Y)=\begin{pmatrix}(\lambda x_1+y_1)+(\lambda x_2+y_2)-(\lambda x_3+y_3)\\(\lambda x_2+y_2)-(\lambda x_3+y_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda(x_1+x_2-x_3)+(y_1+y_2-y_3)\\\lambda(x_2-x_3)+(y_2-y_3)\end{pmatrix}$$

et donc $f(\lambda X+Y)=\lambda f(X)+f(Y)$: f est bien linéaire.
Sa matrice associée dans la base canonique est

$$\operatorname{Mat} f=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

2. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un élément du noyau. Alors on doit résoudre

$$\begin{pmatrix}x+y-z\\y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Après résolution par la méthode du pivot de Gauss, on obtient

$$\operatorname{Ker} f=\left\{\begin{pmatrix}0\\z\\z\end{pmatrix},\ z\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$f(e_1)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad f(e_2)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad f(e_3)=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

On cherche à savoir si la famille est libre. On cherche donc x, y, z tels que $xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Après résolution (qui revient à étudier le noyau de f), on constate qu'il y a une infinité de solutions. La famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est donc liée. En revanche, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

3. f n'est pas injective, car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul. f est surjective en revanche. En effet, son rang vaut 2 (puisque on a trouvé une base précédemment) et l'espace d'arrivée est de dimension 2 puisqu'il s'agit de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Elle n'est cependant pas bijective.
4. D'après les résultat de la question 2, on a

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = 1 \text{ et } \operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = 2$$

ainsi

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f) = 3 = \dim(\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

qu'on appelle formule du rang.

Exercice 6

1. Montrons que f est linéaire. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f(\lambda X + Y) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

donc

$$f(\lambda X + Y) = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) \\ (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \\ \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

et donc $f(\lambda X + Y) = \lambda f(X) + f(Y)$: f est bien une application linéaire de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans lui même, donc est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Sa matrice associée dans la base canonique est

$$\operatorname{Mat} f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément du noyau. Alors on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après résolution par la méthode du pivot de Gauss, on obtient $x = y = 0$ soit

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

3. f est injective, car son noyau est réduit au vecteur nul. f est surjective. En effet, son rang vaut 2 (puisque on a trouvé une base précédemment) et l'espace d'arrivée est de dimension 2 puisqu'il s'agit de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Elle est donc bijective, et f est un automorphisme de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
4. On cherche a et b tels que

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Après résolution, on obtient

$$a = \frac{x+y}{2} \text{ et } b = \frac{y-x}{2}$$

Ainsi

$$f^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}$$

Sa matrice associée dans la base canonique est alors

$$\operatorname{Mat} f^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Après calcul, on constate que $M^{-1} = \operatorname{Mat} f^{-1}$, et on obtient le résultat

$$\boxed{\operatorname{Mat} f^{-1} = (\operatorname{Mat} f)^{-1}}$$

5. De la même manière, constatons que pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a

$$f^2 = f \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-y)-(x+y) \\ (x-y)+(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\operatorname{Mat} f^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et après calcul, $M^2 = \operatorname{Mat} f^2$. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Mat} f^2 = (\operatorname{Mat} f)^2}$$

résultat qu'on peut bien évidemment généraliser à n'importe quelle puissance.

Exercice 7

L'application f va bien de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, d'après les propriétés sur les produits de matrices. Soient $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un réel. Alors

$$f(\lambda A + B) = (\lambda A + B)M - M(\lambda A + B) = \lambda AM + BM - \lambda MA - MB = \lambda(AM - MA) + (BM - MB) = \lambda f(A) + f(B)$$

f est donc une application linéaire, et est donc un endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$. Alors

$$f(A) = AM - MA = \begin{pmatrix} a & 2a+3b \\ c & 2c+3d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors

$$\begin{pmatrix} -2c & 2a+2b-2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors $c = 0$ et $d = a + b$. Ainsi,

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

soit

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (donc forme une base de $\operatorname{Ker} f$) car les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Pour l'image, on note $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette famille forme une base de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. On calcule donc l'image par f de cette base. Après calcul, on obtient

$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que la famille est liée puisque $f(E_{1,1}) = f(E_{1,2}) = -f(E_{2,1})$. On peut donc enlever deux de ces vecteurs. La famille $(f(E_{1,1}), f(E_{2,1}))$ est libre (car les vecteurs sont non colinéaires) et forme donc une base de $\operatorname{Im} f$:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(E_{1,1}, f(E_{2,1}))$$

Remarquons enfin que

$$f(E_{1,1}) = -2E_{1,2} \quad f(E_{1,2}) = -2E_{1,2} \quad f(E_{2,1}) = -2E_{1,1} - 2E_{2,1} + 2E_{2,2} \text{ et } f(E_{2,2}) = 2E_{2,2}$$

donc, dans la base canonique, on a

$$\operatorname{Mat} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

20

Chapitre

Variables aléatoires à densité

Résumé

L'objectif de ce chapitre est de s'intéresser aux variable aléatoires dont le support est un intervalle, et non plus fini ou dénombrable. C'est l'occasion d'introduire la notion de densité, et d'étendre la notions d'espérance. On s'intéresse alors à des lois usuelles : uniforme, exponentielle et normale.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

I. Variables aléatoires à densité

On s'intéresse dans ce chapitre aux variables aléatoires X dont l'univers image $X(\Omega)$ est un intervalle, ou une union d'intervalles.
Dans l'ensemble de ce chapitre, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Notion de densité

Définition 20.1.

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note F_X sa fonction de répartition : $\forall\ x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$. On dit que X est une **variable à densité** lorsque F_X est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement un nombre fini de points.

Méthode

Pour démontrer qu'une variable aléatoire est à densité, il suffit de montrer que F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$ (ça fait de F_X une fonction de répartition), continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de point.

Exercice 20.1

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_X : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$$

Montrer que X est une variable à densité.

Solution

F_X est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues, et est même $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. La dérivée de F est $F' : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc F est également croissante. Enfin, F est de limite 0 en $-\infty$ (par quotient) et 1 en $+\infty$ (après factorisation par e^x). Donc X est une variable à densité.

Remarque

F_X étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de point, on peut définir F_X' sauf éventuellement en un nombre fini de point. Cette fonction F_X' sera alors continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de point.

Définition 20.2.

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et F_X sa fonction de répartition. On appelle **densité** de X toute fonction f_X, positive sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ où F_X est de classe $\mathscr{C}^1$, $f_X(x) = F_X'(x)$.

Remarque

La valeur prise par la densité f_X aux points où F_X n'est pas $\mathscr{C}^1$ n'a pas d'importance. On peut même modifier un nombre fini de valeurs de f_X sans que cela change la densité :

Théorème 20.1.

Soit f une fonction, à valeurs positives, qui ne diffère de F_X' qu'en un nombre fini de points. Alors f est également une densité de X.

2. Propriétés

Proposition 20.2.

Soient X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, F_X sa fonction de répartition, et f_X une densité de X.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1.$
- La fonction f_X est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Démonstration

- Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} F_X(x) - F_X(-x) = 1$$
- Puisque F_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, par définition, f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en un nombre fini de point.

Théorème 20.3.

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, soit F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X. Alors
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\text{et}\quad \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Par définition, puisque $f_X = F_X'$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, par propriété de l'intégration
$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to-\infty} [F_X(t)]_a^x = \lim_{a\to-\infty} F_X(x) - F_X(a) = F_X(x) - 0 = F_X(x)$$
Enfin, par la relation de Chasles,
$$1 - F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{-\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque

Puisque la fonction de répartition définit la loi de X, d'après ce qui précède, la connaissance d'une densité f_X permet de connaitre complètement F_X, et donc la loi de X.

Propriété 20.4.

Soit X une variable aléatoire à densité, F_X sa fonction de répartition, et f_X une densité. Alors

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$
- Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$,
$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \left[x - \frac{1}{n} < X \leqslant x + \frac{1}{n}\right]$. La suite d'évènements (A_n) est décroissante, et
$$\lim_{n\to+\infty} \bigcap_{k=1}^{n} A_k = [X = x]$$

D'après la propriété de limite monotone :

$$\mathbb{P}(X=x)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(X\leqslant x+\frac{1}{n}\right)-\mathbb{P}\left(X\leqslant x-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}F_X(x+\frac{1}{n})-F_X(x-\frac{1}{n})=0$$

par continuité de F_X.

- D'après ce qui précède,

$$\mathbb{P}(a\leqslant X\leqslant b)=\mathbb{P}(X=a)+\mathbb{P}(a<X\leqslant b)=0+\mathbb{P}(a<X\leqslant b)$$

Les autres se font de la même manière. Enfin,

$$\mathbb{P}(a<X\leqslant b)=\mathbb{P}(X\leqslant b)-\mathbb{P}(X\leqslant a)=F_X(b)-F_X(a)=\int_{-\infty}^{b}f_X(t)\,\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{a}f_X(t)\,\mathrm{d}t=\int_{a}^{b}f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

par la relation de Chasles.

3. Reconnaitre une densité

Théorème 20.5.

Soit f une fonction positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=1$$

Alors f est la densité d'une variable aléatoire.

Méthode

Pour démontrer qu'une fonction est une densité, il faut donc montrer trois points :

- que f est positive sur $\mathbb{R}$,
- que f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=1$.

Exercice 20.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ si $x\geqslant 0$, et 0 sinon. Montrer que f est une densité sur $\mathbb{R}$.

Solution

f est bien positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ (donc sur $\mathbb{R}$ sauf en un point), et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $a>0$, on a

$$\int_{-a}^{a}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-a}^{0}0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{a}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=0+[-\mathrm{e}^{-x}]_0^a=1-\mathrm{e}^{-a}$$

or $\lim_{a\to+\infty}1-\mathrm{e}^{-a}=1$. Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=1$$

f est donc bien une densité.

4. Transformation affine

Théorème 20.6.

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de fonction de répartition F_X et de densité f_X. Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Alors $Y = aX + b$ est également une variable à densité, dont une densité est

$$f_Y : x \mapsto \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Démonstration

On suppose que $a > 0$. Déterminons la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = aX + b$:

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(aX + b < x) = \mathbb{P}\left(X < \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

La fonction $x \mapsto F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$ est une fonction continue (par composée de fonctions continues), et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un éventuellement nombre fini de points (la fonction $x \mapsto \frac{x-b}{a}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et F_X est $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points). Donc la variable aléatoire Y est à densité.
Par définition,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

De plus, en tout réel x où la fonction F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$, on a

$$F_Y'(x) = \frac{1}{a} F_X'\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Par construction, la fonction $f_Y : x \mapsto \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$ est positive, continue sauf en un nombre fini de points.
D'après la relation précédente, f_Y est une densité de Y.
La cas $a < 0$ se traite de la même manière, en n'oubliant pas qu'en divisant par a, on changera le sens des inégalités.

Remarque

Il est inutile d'apprendre ce résultat. En effet, il est souvent plus simple de le retrouver, en partant de $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x)$ et en revenant à X.

II. Espérance d'une variable aléatoire à densité

1. Définition

Définition 20.3.

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, dont f_X est une densité. On dit que X admet **une espérance** si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
Dans ce cas, on appelle **espérance** de X, et on note E(X) le nombre

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque

- Il faut que l'intégrale soit **absolument** convergente, et non simplement convergente.
- Une densité étant positive, on constate que :

$$\forall\, t \geqslant 0, |t f_X(t)| = t f_X(t) \text{ et } \forall\, t \leqslant 0, |t f_X(t)| = -t f_X(t)$$

  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

Méthode

Pour montrer qu'une variable aléatoire à densité admet une espérance, on procède en deux temps :

- On montre que l'intégrale est absolument convergente : pour cela, on calcule $\displaystyle\int_a^0 t f_X(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^b t f_X(t)\,dt$ et on montre que les intégrales admettent une limite lorsque a tend vers $-\infty$ et b tend vers $+\infty$. Dans ce cas, d'après la remarque précédente, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt$ est absolument convergente, et la variable aléatoire admet donc une espérance.
- Une fois cela fait, on peut conclure que X admet une espérance, qui vaut alors
$$\int_{-\infty}^{0} t f_X(t)\,dt + \int_0^{+\infty} t f_X(t)\,dt,$$
valeurs qu'on aura calculées précédemment.

Exercice 20.3

Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$, et $f(x) = e^{-x}$ sinon. Montrer que X admet une espérance, et calculer E(X).

Solution

On a déjà vu que f est bien une densité.

On constate que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t f(t)\,dt = 0$. De plus, pour $b > 0$:
$$\int_0^b t f(t)\,dt = \int_0^b t e^{-t}\,dt = 1 - b e^{-b} - e^{-b}$$
(résultat qu'on peut obtenir par intégration par partie) qui admet une limite lorsque b tend vers $+\infty$ (limites classiques et croissances comparées).
L'intégrale est absolument convergente, donc X admet une espérance, et
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt = 1$$

2. Propriétés

Tout comme dans le cas discret, l'espérance est linéaire **sous réserve d'existence**.

Théorème 20.7.

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ **admettant une espérance**, et soit a un réel non nul et b un réel quelconque. Alors la variable aléatoire $aX + b$ admet également une espérance, et on a
$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Démonstration

On note f_X une densité de X, et $Y = aX + b$. Une densité de Y est $f_Y : x \mapsto \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$. Pour simplifier, on va supposer que $a > 0$ et on admet que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,dt$ est absolument convergente. Alors, par changement de variable $u = \frac{t-b}{a}$, on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (au + b)\frac{1}{a} f_X(u) a\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} (au + b) f_X(u)\,du$$

Or, puisque f_X est une densité, et que X admet une espérance, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b f_X(u)\,\mathrm{d}u = b \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} a u f_X(u)\,\mathrm{d}u = a\mathrm{E}(X)$$

Donc $\mathrm{E}(Y) = a\mathrm{E}(X) + b$.

3. Variable aléatoire centrée

Définition 20.4.

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance.

- On dit que X est une variable aléatoire **centrée** si $\mathrm{E}(X) = 0$.
- Si X n'est pas centrée, la variable aléatoire $Y = X - \mathrm{E}(X)$ est une variable aléatoire à densité centrée.

III. Lois à densité usuelles

1. Loi uniforme

a. Définition

Définition 20.5.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que X suit la **loi uniforme** sur l'intervalle $[a; b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a; b])$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a; b] \end{cases}$$

La loi uniforme sur $[a; b]$ est la même que sur $[a; b[$, $]a; b]$ ou $]a; b[$.

Remarque

La fonction f est bien une densité. En effet, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a; b\}$, positive sur $\mathbb{R}$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1$$

Remarque

Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0; 1])$, alors une densité de X est la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0; 1]$, 0 sinon.

b. Propriétés

Théorème 20.8.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a; b]$.

- La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

- X admet une espérance, et $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration

- Pour $x < a$, on a

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{x} 0 dt = 0$$

Pour $a \leqslant x \leqslant b$, on a
$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \left[\frac{1}{b-a}t\right]_a^x = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$
Enfin, pour $x > a$, on a
$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_a^b f_X(t)dt = 1$$

- Pour le deuxième point, calculons
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt = \int_a^b |t|\frac{1}{b-a}dt$$
Cette intégrale converge, puisqu'il s'agit d'une intégrale sur un segment, et que la fonction $t \mapsto |t|$ est continue. Donc X admet une espérance, qui vaut
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_a^b t\frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Proposition 20.9.

Soient a et b deux réels, tels que $a < b$. Alors
$$X \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1]) \Leftrightarrow Y = a+(b-a)X \hookrightarrow \mathscr{U}([a;b])$$

Démonstration

En effet, si $Y = a+(b-a)X$ alors, pour tout réel x
$$F_Y(x) = \mathbb{P}(a+(b-a)X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{x-a}{b-a}\right) = F_X\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \text{ et donc } F_X(x) = F_Y(a+(b-a)x)$$

- Si $Y \hookrightarrow \mathscr{U}[a;b]$, alors
  - si $x < 0$, $a+(b-a)x < a$ donc $F_X(x) = F_Y(a+(b-a)x) = 0$
  - si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $a \leqslant a+(b-a)x \leqslant b$ donc $F_X(x) = F_Y(a+(b-a)x) = \frac{(a+(b-a)x)-a}{b-a} = \frac{(b-a)x}{b-a} = x$
  - si $x > 1$, alors $a+(b-a)x > b$ donc $F_X(x) = F_Y(a+(b-a)x) = 1$.

  On reconnait la fonction de répartition d'une loi $\mathscr{U}[0;1]$: $X \hookrightarrow \mathscr{U}[0;1]$
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}[0;1]$, alors
  - si $x < a$ alors $\frac{x-a}{b-a} < 0$ donc $F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = 0$
  - si $a \leqslant x \leqslant b$ alors $0 \leqslant \frac{x-a}{b-a} \leqslant 1$ donc $F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = \frac{x-a}{b-a}$
  - si $x > b$ alors $\frac{x-a}{b-a} > 1$ donc $F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = 1$

  On reconnait la fonction de répartition d'une loi $\mathscr{U}[a;b]$: $X \hookrightarrow \mathscr{U}[a;b]$

2. Loi exponentielle

a. Définition

Définition 20.6.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et $\lambda > 0$. On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
La loi exponentielle est à support sur $\mathbb{R}^+$ mais peut être également définie à support sur $\mathbb{R}^+_*$.

Remarque

La fonction f est bien une densité. En effet, f est continue sur $\mathbb{R}^*$, et positive sur $\mathbb{R}$. De plus,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(t)dt$$

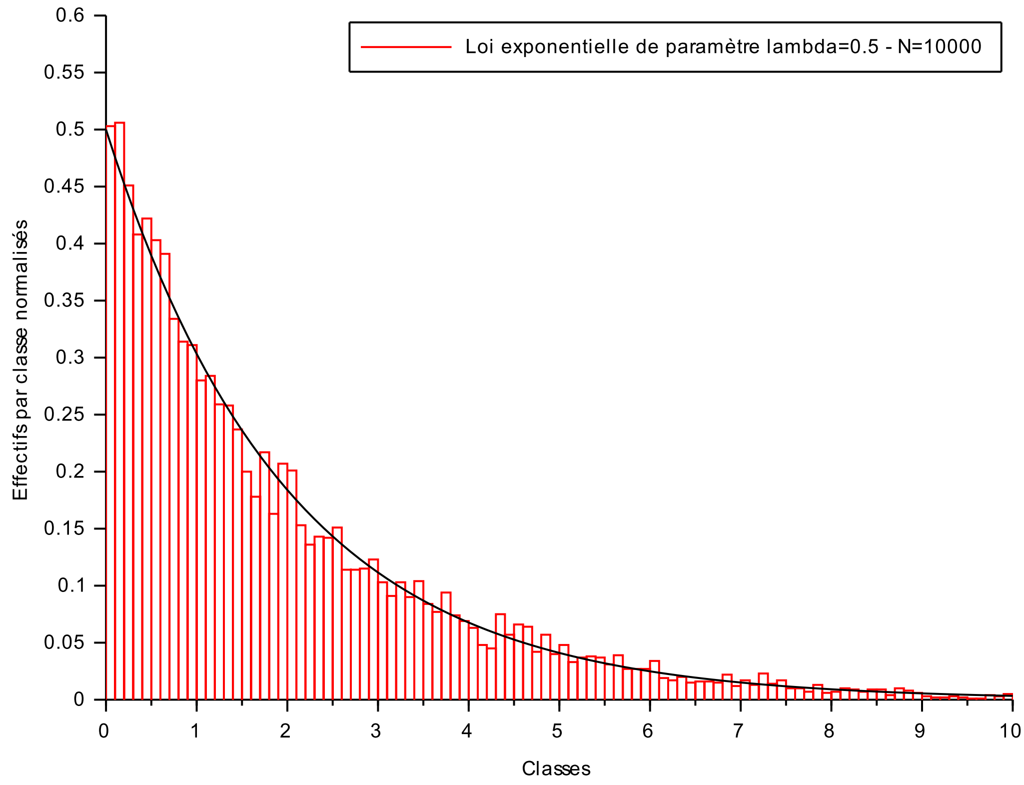
Soit $a>0$, alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} 0dt + \int_{0}^{a} \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = 1-e^{-\lambda a}$$
et $\lim\limits_{a\to+\infty} 1-e^{-\lambda a} = 1$. Donc
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$
et f est bien une densité.

Remarque

On peut simuler une loi exponentielle avec *grand*.

Scilab 20.10. Simulation d'une loi exponentielle

```
// Auteur : Crouzet
// Date : 13/07/2015
// Résumé : fonction simulant une loi exponentielle de paramètre lambda
=0.5

clf; clc; // On efface et réinitialise la fenêtre graphique

N=10000;

lambda=0.5
titre='Loi␣exponentielle␣de␣paramètre␣lambda='+string(lambda)+'␣-␣N='+
string(N)

x=0:0.1:10
y=lambda*exp(-lambda*x) // Densité de la loi exponentielle
t=grand(N,1,"exp",1/lambda) // exp : loi exponentielle. Attention, le
paramètre est l'espérance

histplot(x, t, style=5); // On représente par classe d'écart 0.1 pour
représentation
plot2d(x,y,rect=[0,0,8,lambda+0.1],style=1) // On représente la densité

xtitle("", "Classes", "Effectifs␣par␣classe␣normalisés")
legend(titre)
a=get("current_axes");
a.font_size=1;
a.x_location="bottom";
```



b. Propriétés

Théorème 20.11.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

- La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- X admet une espérance, et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Démonstration

Notons f_X la densité vue précédemment.

- Pour $x < 0$, on a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

Pour $x > 0$, on a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Pour le deuxième point, remarquons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt = \int_{0}^{+\infty} |t|\lambda e^{-\lambda t} dt = \int_{0}^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt$$

Donc l'intégrale est absolument convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt$ existe et est finie.

Soit $a>0$. Par intégration par partie, on obtient

$$\int_0^a t\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \int_0^a e^{-\lambda t}\,dt = \left[\frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^a = \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

Or $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$. Ainsi, cette intégrale converge, donc X admet une espérance, qui vaut

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$$

Proposition 20.12.

Soit $\lambda>0$. Alors

$$\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{E}(1) \Leftrightarrow \mathrm{Y} = \frac{1}{\lambda}\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$$

Démonstration

Pour tout réel x, on a

$$\mathrm{F_X}(x) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant x) = \mathbb{P}(\lambda\mathrm{Y} \leqslant x) = \mathbb{P}\left(\mathrm{Y} \leqslant \frac{x}{\lambda}\right) = \mathrm{F_Y}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \text{ et donc } \mathrm{F_Y}(x) = \mathrm{F_X}(\lambda x)$$

- Si $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, alors
$$\forall\ x<0,\ \mathrm{F_X}(x) = \mathrm{F_Y}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 0 \text{ et } \forall\ x \geqslant 0,\ \mathrm{F_X}(x) = \mathrm{F_Y}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\lambda\frac{x}{\lambda}} = 1 - e^{-x}$$
On reconnait la fonction de répartition d'une loi $\mathscr{E}(1)$: $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.
- Si $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, alors
$$\forall\ x<0,\ \mathrm{F_Y}(x) = \mathrm{F_X}(\lambda x) = 0 \text{ et } \forall\ x \geqslant 0,\ \mathrm{F_Y}(x) = \mathrm{F_X}(\lambda x) = 1 - e^{-(\lambda x)} = 1 - e^{-\lambda x}$$
On reconnait la fonction de répartition d'une loi $\mathscr{E}(\lambda)$: $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

c. Loi sans vieillissement

Définition 20.7.

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, et telle que pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}>x)>0$. On dit que la loi de X est **sans vieillissement** si

$$\forall\ (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \mathbb{P}_{(\mathrm{X}>y)}(\mathrm{X}>y+x) = \mathbb{P}(\mathrm{X}>x)$$

Remarque

Par définition des probabilités conditionnelles, la loi de X est sans vieillissement si et seulement si,

$$\forall\ (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \mathbb{P}(\mathrm{X}>y+x) = \mathbb{P}(\mathrm{X}>x)\mathbb{P}(\mathrm{X}>y)$$

Exemple 20.4

La loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ est la seule loi discrète sans vieillissement.

Théorème 20.13.

Soit X une variable à densité, à valeurs positives, et telle que $\forall\ x>0, \mathbb{P}(\mathrm{X}>x)>0$. Alors X est une variable sans mémoire si et seulement si X suit une loi exponentielle.

Démonstration

- Montrons que si $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, alors X est sans mémoire. Soient x, y deux réels positifs. Puisque

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, alors $P(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant x) = 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x}$. Donc

$$\mathbb{P}_{(X>y)}(X > y + x) = \frac{\mathbb{P}((X > y) \cap (X > y + x))}{\mathbb{P}(X > y)}$$

Or $(X > y + x) \cap (X > y) = (X > y + x)$. Donc

$$\mathbb{P}_{(X>y)}(X > y + x) = \frac{\mathbb{P}(X > y + x)}{\mathbb{P}(X > y)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X > x)$$

- Réciproquement, soit X une variable aléatoire à densité, à valeurs positives, et sans mémoire. Notons F_X sa fonction répartition, et notons $G = 1 - F_X$. G est continue, et puisque X est sans mémoire, par définition, on a donc

$$\forall\, (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ G(x + y) = G(x)G(y)$$

On peut montrer (d'abord sur $\mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{Q}$ et enfin par continuité sur $\mathbb{R}$) qu'alors, pour tout $x > 0$,

$$G(x) = e^{x \ln(G(1))}$$

Donc, pour tout réel $x > 0$, $F_X(x) = 1 - G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ avec $\lambda = -\ln(G(1)) > 0$. Donc X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

3. Lois normales

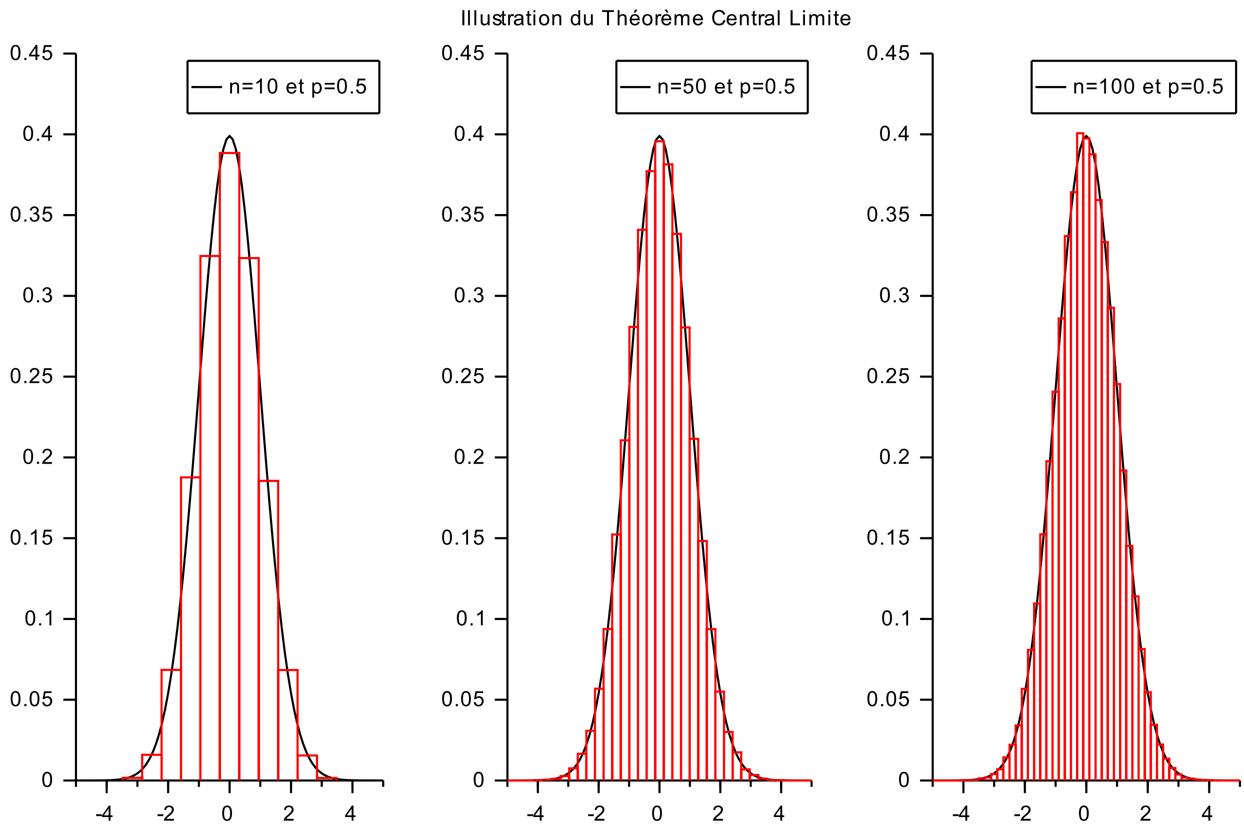
a. Théorème de Moivre-Laplace

On se fixe un réel $p \in]0;1[$. Pour tout $n \geqslant 1$, soit Z_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre p et n, que l'on centre et réduit.
On a représenté ci-dessous Z_{10}, Z_{50} et Z_{100} pour $p = 0,50$, en utilisant le programme Scilab ci-dessous.

Scilab 20.14.

```
// Auteur : Crouzet
// Date : 13/07/2015
// Résumé : représentation du Théorème Central Limite

clf; clc; // On efface et réinitialise la fenêtre graphique

// On va simuler des lois binomiales de paramètres n=10, 50 et 100 avec
p=0.5
N=100000;
n=[10,50,100];
p=0.5

x = [-5 : 0.1 : 5];  // Fenêtre de représentation
y=exp(- (x.^2) / 2)  ./ sqrt( 2 * %pi );  // Densité de la loi normale
centrée réduite

// Pour chacun des trois paramètres, on effectue une simulation
for i=1:3
        z = (grand(1,N,"bin", n(i), p)-n(i)*p)/sqrt(n(i)*p*(1-p));    //
On simule une loi binomiale, qu'on centre et réduit
    L=([-1:n(i)]-n(i)*p+1/2)/sqrt(n(i)*p*(1-p));                  // On d
écoupe pour améliorer la représentation graphique
    subplot(1,3,i);

    plot2d(x, y,style=1)
                                              // On affiche la densité de la loi
binomiale
    histplot(L, z, rect=[-5,0,5,0.45],style=5)                    // On
affiche Zn
    leg='n='+string(n(i))+'␣et␣p='+string(p)
```

```
            // On affiche la légende
    legend(leg)
    if i==2; xtitle("Illustration␣du␣Théorème␣Central␣Limite"); end
    a=get("current_axes"); a.font_size=1; a.x_location="bottom";
end
```



On constate que les suites de variables aléatoires Z_n s'approche d'une loi de probabilité dont la densité semble être une courbe "en cloche".

Théorème 20.15. Moivre-Laplace

Soit $p \in]0;1[$. On suppose que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Alors, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

Remarque

- On dit que la suite de variables aléatoires (Z_n) **converge en loi** vers la loi dont la densité est donnée par le théorème de Moivre-Laplace.

- Le théorème de Moivre-Laplace est une cas particulier d'un théorème essentiel de la théorie de la probabilité : le théorème central limite.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Le théorème de Moivre-Laplace a été d'abord démontré par **Abraham de Moivre** pour $p = 0,5$ en 1733. Le cas général a été démontré par **Pierre Simon de Laplace** en 1812.

b. Loi normale centrée réduite

Définition 20.8.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que X suit la loi **normale centrée réduite**, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Remarque

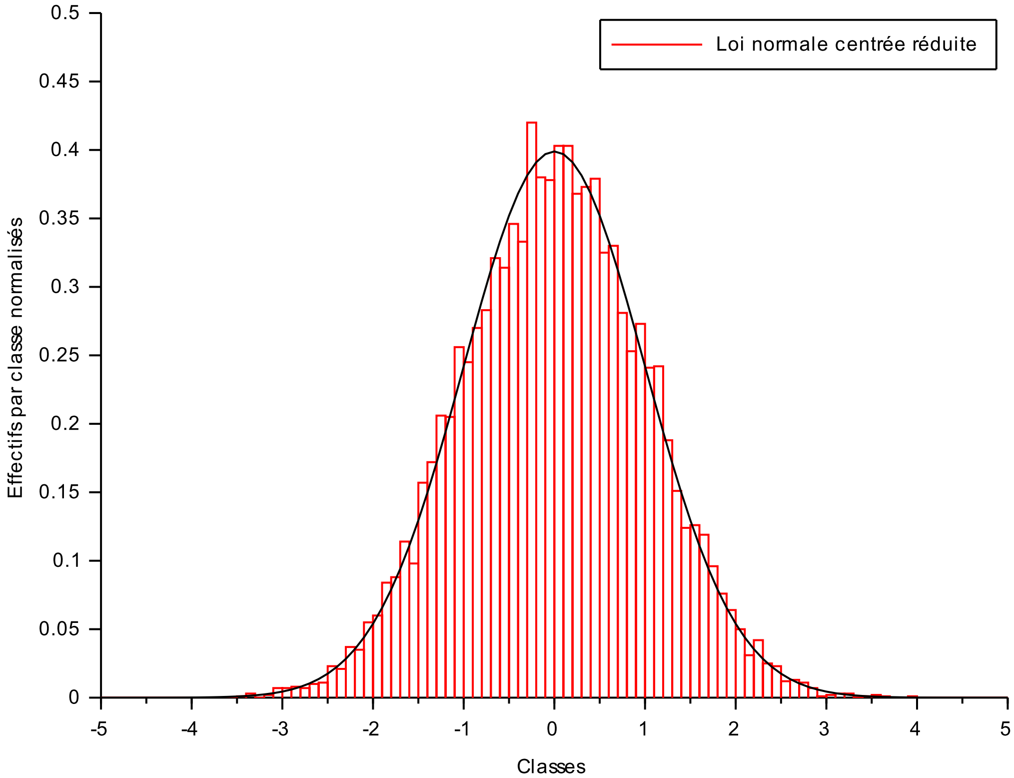
On admet que f définit bien une densité : on peut en tout cas observer qu'elle est continue, positive.

Remarque

On peut simuler une loi normale centrée réduite avec *grand*.

Scilab 20.16. Simulation d'une loi normale centrée réduite

```
// Auteur : Crouzet
// Date : 13/07/2015
// Résumé : fonction simulant une loi normale de paramètre mu=0 et sigma
=1

clf; clc; // On efface et réinitialise la fenêtre graphique

N=10000;

mu=0
sigma=1

titre='Loi␣normale␣centrée␣réduite'

x=-5:0.1:5
y=1/sqrt(2*%pi)*exp(-x**2/2) // Densité de la loi exponentielle
t=grand(N,1,"nor",mu,sigma) // nor : loi normale

histplot(x, t, style=5); // On représente par classe d'écart 0.1 pour
représentation
plot2d(x,y,rect=[-5,0,5,0.5],style=1) // On représente la densité

xtitle("", "Classes", "Effectifs␣par␣classe␣normalisés")
legend(titre)
a=get("current_axes");
a.font_size=1;
a.x_location="bottom";
```



c. Propriétés

Théorème 20.17.

Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi normale centrée réduite.

- Sa fonction de répartition est notée Φ :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

  On ne peut pas simplifier cette expression, car on ne connait pas de primitive de f.
- Pour tout réel x, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, et $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.
- Pour tout réel x, $\mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$.
- X admet une espérance, et $E(X) = 0$.

Démonstration

- Le premier point est la définition de la fonction de répartition.
- Par définition,

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)dt$$

  Posons $u = -t$ (on admet ici qu'on peut le faire sur l'intégrale impropre). Alors

$$\Phi(-x) = \int_{+\infty}^{x} f(-u)(-du) = \int_{x}^{+\infty} f(u)du \text{ par parité de } f$$

  Ainsi

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt + \int_{x}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

- On a
$$\mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x) = \Phi(x) - \Phi(-x)$$
D'après le résultat précédent,
$$\mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x) = 2\Phi(x) - 1$$
- On admet la convergence absolue. Calculons
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}}$$
Posons $a > 0$ et calculons
$$\int_{-a}^{a} t e^{-\frac{t^2}{2}} = \left[-e^{\frac{-t^2}{2}} \right]_{-a}^{a} = e^{\frac{(-a)^2}{2}} - e^{\frac{a^2}{2}} = 0$$
ainsi, $\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} t e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$. et donc $E(X) = 0$.

Remarque

Vous verrez l'année prochaine que X admet une variance, qui vaut 1. D'où la notation $\mathcal{N}(0,1)$.

d. Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition 20.9.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$. On dit que X suit la **loi normale** de paramètre (μ, σ^2), et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Remarque

On admet également que f est bien une densité.

Théorème 20.18.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres (μ, σ^2). Alors X admet une espérance, et $E(X) = \mu$.

Remarque

Vous verrez l'année prochaine que X admet une variance, qui vaut σ^2. Ainsi, σ représente l'écart-type de la loi normale.

Proposition 20.19.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Alors
$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Exercices
Variables aléatoires à densité

20

Exercices

Répartition et densité

●○○ **Exercice 1 Fonctions de répartition** (15 min.)

Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui définissent la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Le cas échéant, déterminer une densité associée.

$$F_1(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad F_2(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 1 \\ \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

●○○ **Exercice 2 Densités** (15 min.)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer celles qui définissent une densité d'une variable aléatoire à densité. Le cas échéant, déterminer la fonction de répartition associée.

$$f_1(x)=\frac{1}{1+|x|} \qquad f_2(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \qquad f_3(x)=\begin{cases} 1+x & \text{si } x\in[-1;0] \\ 1-x & \text{si } x\in]0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Espérance

●○○ **Exercice 3 L'espérance est esclave** (20 min.)

Déterminer l'existence, et le cas échéant la valeur de l'espérance des variables aléatoires dont la fonction de répartition, ou la densité est donnée dans l'exercice 1 ou 2.

Variables aléatoires à densité

●○○ **Exercice 4 Une variable aléatoire sans espoir** (15 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} \frac{a}{x\sqrt{x}} & \text{si } x\geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition associée à X.
3. Montrer que X n'admet pas d'espérance.

●○○ **Exercice 5 Des variables aléatoires** (30 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire que l'on notera X.
2. Déterminer la fonction de répartition associée.
3. Montrer que X admet une espéarnce, et la calculer.
4. On pose $Y=X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de G de Y.
   (b) Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y.
   (c) Répondre aux mêmes questions avec $Z=2X+1$.

●○○ **Exercice 6 EML 96** (30 min.)

Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leqslant x \leqslant \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X.
2. Déterminer la fonction de répartition associée.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition G de Y.
   (b) Montrer alors que Y est une variable à densité, et déterminer une densité g de Y.

Corrigés

Variables aléatoires à densité

Corrigés des exercices

Exercice 1

F_1 est continue, et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme fonctions usuelles. De plus,

$$\lim_{x\to 0^-} F_1(x) = e^0 = 1 = \lim_{x\to 0^+} F_1(x).$$

De plus, F_1 est croissante sur $\mathbb{R}$, de limite 0 en $-\infty$, et 1 en $+\infty$. Comme F_1 est continue sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, c'est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Une densité est donnée par la dérivée de F_1 sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, et par une valeur arbitraire positive en 0. Par exemple, une densité est

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

De même, F_2 est croissante, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$, et on a

$$\lim_{x\to 1^+} F_2(x) = 0 = \lim_{x\to 1^-} F_2(x)$$

Ainsi, F_2 est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1. C'est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, dont une densité est donnée par (en donnant une valeur arbitraire en 1) :

$$f_2 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{2}{(1+x)^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2

Remarquons que les trois fonctions sont positives sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en $-1, 0$ et 1 pour f_3). Il reste à calculer leur intégrale sur $\mathbb{R}$.

- On utilise la relation de Chasles pour ôter la valeur absolue. Soient $A<0<B$ deux réels.

$$\begin{aligned}\int_A^B f_1(x)\,dx &= \int_A^0 f_1(x)\,dx + \int_0^B f_1(x)\,dx \\ &= \int_A^0 \frac{1}{1-x}\,dx + \int_0^B \frac{1}{1+x}\,dx \\ &= [-\ln(|1-x|)]_A^0 + [\ln(|1+x|)]_0^B \\ &= \ln(1-A)+\ln(1+B) \xrightarrow[A\to-\infty, B\to+\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

Donc f_1 n'est pas une densité de probabilité.

- De même, soient $A<0<B$. Alors

$$\begin{aligned}\int_A^B f_2(x)\,dx &= \int_A^B \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_A^B \\ &= -\underbrace{\frac{1}{1+e^B}}_{\xrightarrow[A\to-\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{1}{1+e^A}}_{\xrightarrow[B\to+\infty]{} 1} \longrightarrow 1\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\,dx = 1$: f_2 est une densité de probabilité.

- Constatons, pour f_3, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f_3(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f_3(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} f_3(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} f_3(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f_3(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} 1+x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1-x\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\
&= -\left(-1+\frac{1}{2}\right)+1-\frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

f_3 est donc une densité de probabilité (et on peut remarquer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$).
Il nous reste à déterminer les fonctions de répartition associées aux densité f_2 et f_3.

- Pour f_2, l'expression de f_2 étant valable sur $\mathbb{R}$, on calcule rapidement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_2(x) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant x) &= \int_{-\infty}^{x} f_2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\mathrm{A}\to-\infty} \int_{\mathrm{A}}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\mathrm{A}\to-\infty} \left[-\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\right]_{\mathrm{A}}^{x} \\
&= \lim_{\mathrm{A}\to-\infty} -\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - \left(-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{A}}}\right) = -\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}+1
\end{aligned}$$

Bilan : la fonction de répartition associée à f_2 est donc

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{F}_2(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}$$

- Pour f_3, l'expression de la densité impose de traiter 4 cas : un cas par définition de f_3.

⋆ Si $x \in]-\infty,-1]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_3(x) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant x) &= \int_{-\infty}^{x} f_3(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

⋆ Si $x \in]-1,0]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_3(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_3(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{-1} f_3(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} f_3(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} (1+t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x} \\
&= x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

⋆ Si $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_3(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_3(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} 1+t\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 1-t\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x} \\
&= 0 + \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

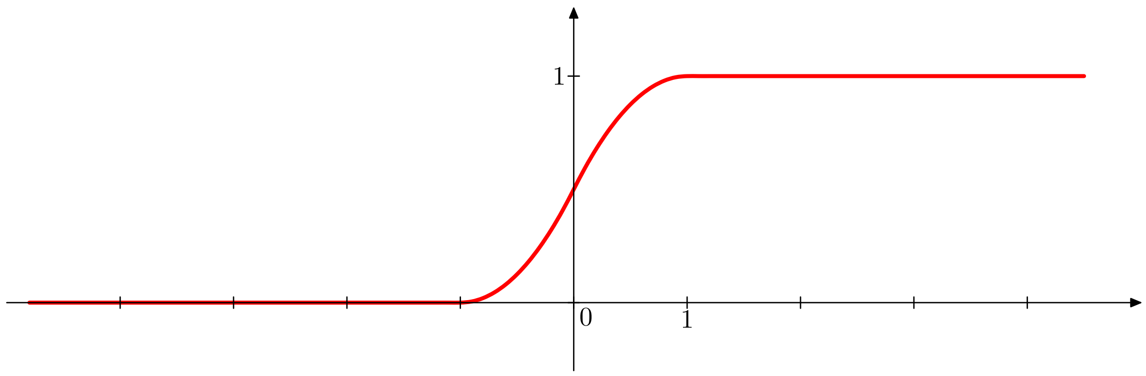
⋆ Enfin, si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_3(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_3(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} 1+t\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} 1-t\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} 0\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1
\end{aligned}$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{F}_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

dont on peut tracer la courbe représentative :



Exercice 3

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1. Elle est positive si $a \geqslant 0$. Déterminons son intégrale sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathrm{A} > 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\mathrm{A}} f(x)\,\mathrm{d}x &= 0 + \int_{1}^{\mathrm{A}} \frac{a}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[a\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_{1}^{\mathrm{A}} \\
&= 2a - \frac{2a}{\sqrt{\mathrm{A}}} \xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{} 2a
\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ si et seulement si $2a = 1$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$, qui est bien positif.

Bilan : f est une densité de probabilité si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

2. Par définition, la fonction de répartition F est donnée par $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi

- Si $x \leqslant 1$: $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- Si $x > 1$:

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \frac{1}{2t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\frac{t^{-1/2}}{-1/2}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ainsi

$$\mathrm{F} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente, c'est-à-dire si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ sont convergentes car la densité f est positive.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Soit $\mathrm{A} > 1$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathrm{A}} x f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 0\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{A}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\sqrt{x}\right]_1^{\mathrm{A}} \\ &= \sqrt{\mathrm{A}} - 1 \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{aligned}$$

L'intégrale ne converge donc pas.
Ainsi, X n'admet pas d'espérance.

Exercice 4

1. f est positive sur $\mathbb{R}$, continue comme fonctions usuelles sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Soit $\mathrm{A} < 0$. Alors

$$\int_{\mathrm{A}}^{0} f(x)dx = \int_{\mathrm{A}}^{0} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_{\mathrm{A}}^0 = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} \underset{\mathrm{A}\to-\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

2. Notons F la fonction de répartition. Si $x < 0$, alors

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\mathrm{A}\to-\infty} [\mathrm{e}^t]_{\mathrm{A}}^x = \mathrm{e}^x$$

et si $x \geqslant 0$, alors

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 1$$

Ainsi,

$$\mathrm{F} : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si} x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente, c'est-à-dire si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ sont convergentes car la densité f est positive. Ici,

$$\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Soit $A<0$. Alors

$$\begin{aligned}\int_A^0 tf(t)dt &= \int_A^0 te^t dt\\ &\underset{\text{I.P.P}}{=} [te^t]_A^0 - \int_A^0 e^t dt \qquad \text{(fonctions de classe } \mathscr{C}^1)\\ &= -Ae^A-(1-e^A) \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} -1 \text{ par croissances comparées}\end{aligned}$$

Ainsi, X admet une espérance, et $\mathbb{E}[X]=-1$.

4.

(a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}G(x) &= \mathbb{P}(Y\leqslant x)\\ &= \mathbb{P}(X^2\leqslant x)\end{aligned}$$

Si $x<0$, alors $(X^2\leqslant x)=\varnothing$ et $\mathbb{P}(X^2\leqslant x)=0$.
Si $x\geqslant 0$, alors

$$\begin{aligned}G(x) &= \mathbb{P}(|X|\leqslant\sqrt{x})\\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{x}\leqslant X\leqslant\sqrt{x})\\ &= \mathbb{P}(X\leqslant\sqrt{x})-\mathbb{P}(X\leqslant-\sqrt{x})\\ &= F(\sqrt{x})-F(-\sqrt{x})\\ &= 1-e^{-\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Ainsi

$$G: x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\sqrt{x}} & \text{sinon}\end{cases}$$

(b) F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. De plus,

$$\lim_{x\to0^+}G(x)=0=\lim_{x\to0^-}G(x)$$

Ainsi, G est continue sur $\mathbb{R}$, et Y est donc une variable aléatoire à densité. Une densité est donnée par (en prenant une valeur arbitraire en 0) :

$$g: x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si} x\leqslant 0\\ \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} & \text{sinon}\end{cases}$$

(c) Notons H la fonction de répartition de Z. Alors, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}H(x) &= \mathbb{P}(Z\leqslant x)\\ &= \mathbb{P}(2X+1\leqslant x)\\ &= \mathbb{P}\left(X\leqslant\frac{x-1}{2}\right)\\ &= F\left(\frac{x-1}{2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, F étant continue sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, et $x\mapsto\frac{x-1}{2}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par composée, H est continue sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 1. Z est donc une variable aléatoire à densité, dont une densité est donnée par

$$h: x\mapsto\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{x-1}{2}} & \text{si} x\leqslant 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Exercice 5

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $-\ln 2$ et en $\ln 2$. Il reste à calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire ici sur $[-\ln 2;\ln 2]$ puisqu'elle est nulle en dehors. En utilisant la relation de Chasles (obligatoire à cause de la valeur absolue) :

$$\begin{aligned}\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)=dx &= \int_{-\ln 2}^{0} e^{-(-x)}dx+\int_0^{\ln 2}e^{-x}dx\\ &= [e^x]_{-\ln 2}^0+[-e^{-x}]_0^{\ln 2}\\ &= 1-e^{-\ln 2}+(-e^{-\ln 2}+1)\\ &= 1-e^{\ln(1/2)}-e^{\ln(1/2)}+1\\ &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=1\end{aligned}$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.
2. Par définition de la densité, on doit distinguer selon la position de x par rapport à $-\ln 2$, $\ln 2$ mais également 0 pour le calcul.

- Si $x < -\ln 2$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0 dt = 0$
- Si $-\ln 2 \leqslant x \leqslant 0$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\ln 2}^{x} e^{-(-t)}dt = [e^t]_{-\ln 2}^{x} = e^x - \frac{1}{2}$$

- Si $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\ln 2}^{0} e^t dt + \int_{0}^{x} e^{-t}dt = [e^t]_{-\ln 2}^{0} + [-e^{-t}]_0^x = \frac{1}{2} - e^{-x} + 1 = \frac{3}{2} - e^{-x}$$

- Enfin, si $x \geqslant \ln 2$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(t)dt = 1$$

Bilan : on obtient la fonction de répartition suivante :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \ln 2 \\ e^x - \frac{1}{2} & \text{si } -\ln 2 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{3}{2} - e^{-x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ln 2 \\ 1 & \text{si } x \geqslant \ln 2 \end{cases}$$

et on peut vérifier qu'elle est bien continue en $-\ln 2$, 0 et $\ln 2$.
3. X étant à support fini (puisque f est nulle en dehors de $[-\ln 2; \ln 2]$, X admet une espérance. En utilisant la relation de Chasles, puis une intégration par parties (les fonctions étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur les intervalles considérés) :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} xf(x)dx \\
&= \int_{-\ln 2}^{0} xe^x dx + \int_{0}^{\ln 2} xe^{-x}dx \\
&= \left([xe^x]_{-\ln 2}^{0} - \int_{-\ln 2}^{0} e^x dx\right) + \left([-xe^{-x}]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} -e^{-x}dx\right) \\
&= \frac{\ln 2}{2} - [e^x]_{-\ln 2}^{0} - \frac{\ln 2}{2} - [e^{-x}]_0^{\ln 2} \\
&= -1 + \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - 1) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, X admet une espérance, et $\mathbb{E}[X] = 0$.

Remarque
La densité f étant paire, $x \mapsto xf(x)$ est impaire, et donc son intégrale sur un intervalle centré en 0 est nulle.

4.
(a) Soit x un réel. Ainsi, $G(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(|X| \leqslant x)$.

- Si $x < 0$, $(|X| \leqslant x) = \emptyset$ et $\mathbb{P}(|X| \leqslant x) = 0$.
- Si $x \geqslant 0$, alors

$$\begin{aligned}
G(x) &= \mathbb{P}(|X| \leqslant x) \\
&= \mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x) \\
&= \mathbb{P}(X \leqslant x) - \mathbb{P}(X \leqslant -x) \\
&= F(x) - F(-x)
\end{aligned}$$

– Si $x > \ln 2$, alors

$$G(x) = F(x) - F(-x) = 1 - 0 = 1$$

– Si $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$, alors $F(x) = \frac{3}{2} - e^{-x}$ et $F(-x) = e^x - \frac{1}{2}$, et donc

$$G(x) = \frac{3}{2} - e^{-x} - (e^x - \frac{1}{2}) = 2 - e^{-x} - e^x$$

Ainsi,

$$\mathrm{G} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2 - \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ln 2 \\ 1 & \text{si } x \geqslant \ln 2 \end{cases}$$

(b) G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$, $]0; \ln 2[$ et $]\ln 2; +\infty[$ comme sommes de fonctions usuelles. De plus, elle est continue en 0 et en $\ln 2$ (calcul rapide des limites). Donc G est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf 0 et $\ln 2$: Y est donc une variable aléatoire à densité, dont une densité est la dérivée de G là où elle est dérivable, et en prenant des valeurs arbitraires pour 0 et $\ln 2$. Ainsi, une densité est

$$g :\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x} & \text{si } 0 < x < \ln 2 \\ 0 & \text{si } x \geqslant \ln 2 \end{cases}$$

