EDHEC

Voie E

Mardi 02 mai 2017

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit*. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Solution.

1. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions polynomiales.
2. (a) f étant $\mathscr{C}^2$, elle admet des dérivées partielles en tout point, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)$$

(b) Le gradient de f est nul en (x,y) si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) &= 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y &= 0 \\ y^3 + x - y &= 0 \end{cases}$$

(c) On résout alors le système précédent :

$$\begin{cases} x^3 - x + y &= 0 \\ y^3 + x - y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y &= 0 \\ x^3 + y^3 &= 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y &= 0 \\ y^3 &= (-x)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y &= 0 \\ y &= -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x &= 0 \\ y &= -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2) &= 0 \\ y &= -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x=0, y=0) \text{ ou } (x=\sqrt{2}; y=-\sqrt{2}) \text{ ou } (x=-\sqrt{2}; y=\sqrt{2})$$

Il y a donc trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. (a) f admet des dérivées secondes en tout point, car de classe $\mathscr{C}^2$, et on a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 12x^2-4\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= 4\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 12y^2-4
\end{aligned}$$

(b) D'après les résultats précédents, on a

$$\begin{aligned}
\nabla^2(0,0) &= \begin{pmatrix} -4 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix}\\
\nabla^2(\sqrt{2},-\sqrt{2}) &= \begin{pmatrix} 20 & 4\\ 4 & 20\end{pmatrix}\\
\nabla^2(-\sqrt{2},\sqrt{2}) &= \begin{pmatrix} 20 & 4\\ 4 & 20\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Après calcul du déterminant $\det(\nabla^2-\lambda \mathrm{I}_2)$ pour chacune des trois matrices, on obtient que :

- $\nabla^2(0,0)$ a comme valeur propre 0 et 8. Puisque 0 est valeur propre, on ne peut pas conclure quand à la nature du point critique.
- $\nabla^2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $\nabla^2(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ont comme valeur propre 16 et 24 qui sont toutes les deux strictement positives. Ainsi il y a un minimum local en les deux points critiques $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, valant
$$f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=-8$$
- On remarque que $f(x,x)=2x^4\geqslant 0$ au voisinage de 0, et $f(x,-x)=2x^4-4x^2=2x^2(x^2-2)$ qui est négatif au voisinage de 0 (si $x\in]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$. Ainsi, il n'y a pas d'extremum au point critique $(0,0)$.

4. (a)

> **Remarque.** — **Attention : erreur d'énoncé originel** : il manque un carré.

On a

$$\begin{aligned}
f(x,y)-(x^2-2)^2-(y^2-2)^2-2(x+y)^2 &= x^4+y^4-2(x-y)^2-(x^4-4x^2+4)-\\
&\quad (y^4-4y^2+4)-2(x^2+2xy+y^2)\\
&= -2x^2+4xy-2y^2+4x^2-4+4y^2-4-2x^2-4xy-2y^2\\
&= -8
\end{aligned}$$

Le calcul précédent montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$f(x,y)=f(\sqrt{2},-\sqrt{2})+(x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2\geqslant f(\sqrt{2},-\sqrt{2})$$

Ainsi, $f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=f(-\sqrt{2},+\sqrt{2})$ est un minimum globale.

5. (a) On veut simplement calculer $f(x,y)$:

Programme Scilab 1

```
function z=f(x,y)
 z=x^4+y^4-2*(x-y)^2
endfunction

x=linspace(-2,2,101)
y=x
fplot3d(x,y,f)
```

(b) On doit avoir deux minima globaux sur notre courbe, et un point critique en $(0,0)$. La nappe 2 est exclue, de même que la 3 (qui semble avoir des minimas pour $x=-2$. Ainsi, la nappe 1 est la bonne réponse.

Exercice 2

Solution.

1. (a) Soient P et Q deux éléments de E, et λ un réel. Alors, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q)(x) &= \int_0^1 (\lambda P+Q)(x+t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \lambda P(x+t)+Q(x+t)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\int_0^1 P(x+t)\mathrm{d}t+\int_0^1 Q(x+y)\mathrm{d}t \text{ par linéarité de l'intégrale}\\ &= \lambda\varphi(P)(x)+\varphi(Q)(x)\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout réel x, on en déduit que $\varphi(\lambda P+Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$: φ est bien linéaire.

(b) Par calcul rapide, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\varphi(e_0)(x) &= \int_0^1 \mathrm{d}t=1\\ \varphi(e_1)(x) &= \int_0^1 x+t\mathrm{d}t=x+\frac{1}{2}\\ \varphi(e_2)(x) &= \int_0^1 (x+t)^2\mathrm{d}t=\int_0^1 x^2+2xt+t^2\mathrm{d}t=x^2+x+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Ainsi, ceci étant vrai pour tout réel x, on a

$$\varphi(e_0)=e_0,\quad \varphi(e_1)=e_1+\frac{1}{2}e_0\quad\text{et}\quad \varphi(e_2)=e_2+e_1+\frac{1}{3}e_0$$

(c) Remarquons que $\varphi(e_0)\in E$, $\varphi(e_1)\in E$ et $\varphi(e_2)\in E$. Ainsi, par linéarité de φ, pour tout $u\in E$, on peut écrire $u=ae_0+be_1+ce_2$ et alors $\varphi(u)=a\varphi(e_0)+b\varphi(e_1)+c\varphi(e_2)\in E$ car E est un espace vectoriel. Donc $\varphi(u)\in E$.
Bilan : φ est linéaire, de E dans E, et est donc un endomorphisme de E.

2. (a) D'après la question 1b on en déduit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) A est triangulaire supérieure, à termes diagonaux non nuls : elle est donc inversible. Puisque A est la matrice de φ dans une base de E, on en déduit que φ est bijective, et est donc un automorphisme de E.

(c) A est triangulaire : ses valeurs propres sont donc sur sa diagonale, et ne possède donc que 1 comme valeur propre. Si φ était diagonalisable, A le serait et on pourrait écrire (en utilisant les valeurs propres de A) $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = I_3$ ce qui est absurde.

Bilan : φ n'est pas diagonalisable.

3. On complète la valeur de A et on renvoie A^n :

Programme Scilab 2

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
A=[1 1/2 1/3; 0 1 1; 0 0 1]
disp(A^n)
```

4. (a) Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "il existe un réel u_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$."

- Pour $n = 0$, P_0 est vraie, en posant $u_0 = 0$ puisque $A^0 = I_3$.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé. On peut écrire, par hypothèse de récurrence, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mais alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n/2+1/2 & u_n+n/2+1/3 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (n+1)/2 & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3}$. P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n, et on a $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $u_0 = 0$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$$

(b) On écrit $u_1 = u_0 + \frac{1}{6}(3\times 0+2)$, $u_2 = u_1 + \frac{1}{6}(3\times 1+2)$, $\cdots$ $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{6}(3\times(n-1)+2)$, et on ajoute. Les termes se télescopent, et on a

$$\begin{aligned}
u_n &= u_0 + \frac{1}{6}(3\times 0+2) + \frac{1}{6}(3\times 1+2) + \cdots + \frac{1}{6}(3\times(n-1)+2) \\
&= u_0 + \frac{1}{6}\left(3\sum_{k=0}^{n-1} k + 2n\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(3\frac{(n-1)n}{2} + 2n\right) \\
&= \frac{1}{6}\frac{3n^2-3n+4n}{2} = \frac{3n^2+n}{12}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier n, on a $u_n = \dfrac{3n^2+n}{12}$.

(c) On regroupe les résultats précédents : pour tout entier n, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{3n^2+n}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Solution.

1. (a) Par définition, on a pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
F_W(x) &= \mathbb{P}(W \leqslant x) \\
&= \mathbb{P}(-\ln(V) \leqslant x) \\
&= \mathbb{P}(\ln(V) \geqslant -x) \\
&= \mathbb{P}(V \geqslant e^{-x}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(V < e^{-x}) = 1 - F_V(e^x) = e^{e^{-x}} \text{ car } e^{-x} > 0
\end{aligned}$$

(b) La fonction F_W est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$), donc W est une variable à densité.

2. (a) Si $x < 0$, $F_{Y_n}(x) = 0$ puisque $Y_n(\Omega) \in \mathbb{R}^+$.

Si $x \geqslant 0$:

$$\begin{array}{rcl} F_{Y_n}(x) & = & \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) \\ & = & \mathbb{P}(\max(X_1, \cdots, X_n) \leqslant x) \\ & = & \mathbb{P}((X_1 \leqslant x) \cap\ (X_2 \leqslant x) \cap \cdots \cap (X_n) \leqslant x) \\ & = & \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \cdots \mathbb{P}(X_n \leqslant x) \text{ par indépendance des lois } X_1, \cdots, X_n \\ & = & \mathbb{P}(V \leqslant x)^n = (1-e^{-x})^n \text{ car } x \geqslant 0 \end{array}$$

(b) La fonction F_{Y_n} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. De plus, elle est continue en 0 (car $\lim\limits_{x\to 0^+} F_{Y_n}(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} F_{Y_n}(x)$). Ainsi, F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 : Y_n est à densité, et on a comme densité (par exemple) :

$$f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

3. (a) Remarquons que, puisque $e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par développement limité, on a

$$(1-e^{-t})^n = 1 - ne^{-t} + e^{-t}\varepsilon(t) \text{ avec } \varepsilon(0) = 0$$

Ainsi,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1-F_{Y_n}(t)}{ne^{-t}} = 1$$

et donc

$$1 - F_{Y_n}(t) \underset{+\infty}{\sim} ne^{-t}$$

Les deux fonctions $t \mapsto\ ne^{-t}$ et $t \mapsto 1 - F_{Y_n}(t)$ étant positives, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ étant convergente (intégrale de référence), par comparaison des intégrales à termes positifs, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1 - F_{Y_n}(t) dt$ converge.

(b) Procédons à une intégration par partie, en posant $u : t \mapsto 1 - F_{Y_n}(t)$ et $v : t \mapsto t$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et donc $v' : t \mapsto 0$ et $u' : t \mapsto -f_{Y_n}(t)$. On a alors, par IPP, pour tout $x \geqslant 0$: :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^x (1-F_{Y_n}(t))dt & = & \left[t(1-F_{Y_n}(t))\right]_0^x - \displaystyle\int_0^x t(-f_{Y_n}(t))dt \\ & = & x(1-F_{Y_n}(x)) + \displaystyle\int_0^t f_{Y_n}(t)dt \end{array}$$

(c) En utilisant l'équivalent vu en $3a$, on a

$$x(1-F_{Y_n}(x)) \underset{+\infty}{\sim} nxe^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(d) D'après l'égalité $3b$ et le résultat $3c$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t f_{Y_n}(t) dt$ admet une limite finie, et que

$$\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t) dt = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n})(t) dt$$

Puisque $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$, on en déduit d'après ce qui précède que $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente (nulle sur $\mathbb{R}^-$, positive et convergente sur $\mathbb{R}^+$).
Bilan : Y_n admet une espérance, et

$$\mathbb{E}[Y_n] = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t$$

4. (a) On a par définition, pour $x \geqslant 0$, $\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t = \int_0^x 1 - (1 - \mathrm{e}^{-t})^n \mathrm{d}t$.
Posons $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, soit $t = -\ln(1-u)$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; 1 - \mathrm{e}^{-x}]$. On a de plus $\mathrm{d}t = \frac{1}{1-u}\mathrm{d}u$.
Par changement de variables :

$$\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} (1-u)^n \frac{1}{1-u}\mathrm{d}u$$

(b) Remarquons que, pour $0 \leqslant u < 1$:

$$\frac{1-u^n}{1-u} = \sum_{k=0}^{n-1} u^k = \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{(1-u)^n}{1-u}\mathrm{d}u &= \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} u^{k-1}\mathrm{d}u \text{ par linéarité de l'intégrale} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{u^k}{k}\right]_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}[Y_n] = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}}$$

5. (a) Il suffit de calculer Y_n (max) et soustraire $\ln(n)$.

> **Remarque.** — Attention : erreur d'énoncé non gênante : au lieu de Y, il faut écrire Z.

On fera attention : en Scilab, ln se note `log`.

Programme Scilab 3

```
function Z=f(n)
x = grand(1,n,'exp',1)
Z = max(x)-log(n)
endfunction
```

(b) D'après les figures, on a l'impression que l'histogramme (2) est très proche du (1), et donc que Z_n converge en loi vers W.

6. (a) Pour tout réel x, on a

$$\begin{array}{rcl} F_{Z_n}(x) & = & \mathbb{P}(Z_n \leqslant x) \\ & = & \mathbb{P}(Y_n - \ln(n) \leqslant x) \\ & = & \mathbb{P}(Y_n \leqslant x + \ln(n)) = F_{Y_n}(x+\ln(n)) \end{array}$$

(b) Si $x+\ln(n) < 0$, c'est-à-dire si $x < -\ln(n)$, on a $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x+\ln(n)) = 0$.
Si $x+\ln(n) \geqslant 0$, on a alors

$$F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x+\ln(n)) = (1-e^{-(x+\ln(n))})^n$$

Bilan :

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ (1-e^{-(x+\ln(n))})^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{cases}$$

(c) Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, on a $\dfrac{e^{-x}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, par équivalence :

$$\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e^{-x}}{n}$$

et donc

$$n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right) \sim -e^{-x}$$

Bilan : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.

(d) On reprend F_{Z_n}. Soit x fixé. A partir d'un certain rang n, $x \geqslant -\ln(n)$ (puisque $-\ln(n) \to -\infty$). Ainsi, à partir d'un certain rang

$$\begin{array}{rcl} F_{Z_n}(x) & = & \left(1-e^{-(x+\ln(n))}\right)^n \\ & = & e^{n\ln\left(1-e^{-x}e^{-\ln(n)}\right)} \\ & = & e^{n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)} \end{array}$$

D'après le résultat précédent, et par continuité de l'exponentielle, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = e^{-e^{-x}} = F_W(x)$$

Bilan : le résultat étant vrai pour tout réel x, on en déduit que (Z_n) converge en loi vers W.

Problème

Partie 1

1. Par définition, puisqu'au temps 0 on est en 1, et par équiprobabilité, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = 0, \quad \mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 4) = \frac{1}{3}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[X_1] = 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{3} = 3$$

2. A partir du rang 2, le mobile peut se retrouver sur n'importe quel sommet (par exemple, jusqu'au temps $n-1$, il peut circuler sur 123, puis sauter en 4 au temps n. Ce raisonnement est valable pour tous les sommets). Ainsi $X_n(\Omega) = \{1,2,3,4\}$ pour $n\ddot{o}geq2$.

3. (a) On utilise le sce associée à la variable aléatoire X_n. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=1) &= \mathbb{P}(X_n=1)\underbrace{\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=1)}_{=0 \text{ par définition}} + \mathbb{P}(X_n=2)\underbrace{\mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1}=1)}_{=\frac{1}{3}\text{par équiprob}} + \\
&\quad \mathbb{P}(X_n=3)\underbrace{\mathbb{P}_{X_n=3}(X_{n+1}=1)}_{=\frac{1}{3}\text{par équiprob}} + \mathbb{P}(X_n=4)\underbrace{\mathbb{P}_{X_n=4}(X_{n+1}=1)}_{=\frac{1}{3}\text{par équiprob}} \\
&= \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}(X_n=2)+\mathbb{P}(X_n=3)+\mathbb{P}(X_n=4)\right)
\end{aligned}$$

(b) Pour $n=0$, $(\mathbb{P}(X_n=2)+\mathbb{P}(X_n=3)+\mathbb{P}(X_n=4)) = 0$ (puisque $\mathbb{P}(X_n=1)=1$), et on a bien $\mathbb{P}(X_{n+1}=0$. Pour $n=1$, on a $(\mathbb{P}(X_n=2)+\mathbb{P}(X_n=3)+\mathbb{P}(X_n=4)) = 1$ et on a bien (d'après l'énoncé)$\mathbb{P}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

(c) (X_n) étant une variable aléatoire de support $\{1,2,3,4\}$ (question 2), on a bien

$$\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}(X_n=2)+\mathbb{P}(X_n=3)+\mathbb{P}(X_n=4) = 1$$

En injectant cette écriture dans la relation vue en $3a$, on a alors

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{3}(1-\mathbb{P}(X_n=1)) = -\frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n=1) + \frac{1}{3}$$

(d) Deux possibilités : par récurrence sur n, en utilisant le résultat précédent; ou l'étude de la suite arithmético-géométrique.

4. (a) On utilise le sce associée à la variable aléatoire X_n. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=2) &= \mathbb{P}(X_n=1)\underbrace{\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=2)}_{=\frac{1}{3}\text{par équiprob}} + \mathbb{P}(X_n=2)\underbrace{\mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1}=2)}_{=0 \text{ par définition}} + \\
&\quad \mathbb{P}(X_n=3)\underbrace{\mathbb{P}_{X_n=3}(X_{n+1}=2)}_{=\frac{1}{3}\text{par équiprob}} + \mathbb{P}(X_n=4)\underbrace{\mathbb{P}_{X_n=4}(X_{n+1}=2)}_{=\frac{1}{3}\text{par équiprob}} \\
&= \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}(X_n=3)+\mathbb{P}(X_n=4)\right)
\end{aligned}$$

(b) Puisque $\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}(X_n=2)+\mathbb{P}(X_n=3)+\mathbb{P}(X_n=4)=1$, en remplaçant dans la réponse précédente :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=2) = \frac{1}{3}(1-\mathbb{P}(X_n=2))$$

(c) Même réponse qu'en $3d$).

5. Remarquons que, par définition, les suites $(\mathbb{P}(X_n=3))$ et $(\mathbb{P}(X_n=4))$ vérifient la même relation de récurrence avec le même premier terme que la suite $(\mathbb{P}(X_n=2))$: elles sont donc égales et vérifient

$$\mathbb{P}(X_n=2) = \mathbb{P}(X_n=3) = \mathbb{P}(X_n=4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. On a, rapidement (l'espérance existe car X_n est à support fini) :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}[X_n] & = & \mathbb{P}(X_n=1)+2\mathbb{P}(X_n=2)+3\mathbb{P}(X_n=3)+4\mathbb{P}(X_n=4)\\ & = & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+9\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\\ & = & \frac{10}{4}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\end{array}$$

Partie 2

7. (a) En utilisant les relations obtenues en $3a$, $4a$ et celles admises en 5, on a

$$\begin{array}{rcl}U_nA & = & \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=2)+\mathbb{P}(X_n=3)+\mathbb{P}(X_n=4) & \mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}(X_n=3)+\mathbb{P}(X_n=4) & \cdots\end{pmatrix}\\ & = & =U_{n+1}\end{array}$$

   (b) Soit P la proposition définie pour tout entier naturel n par $U_n=U_0A^n$.
   - Pour $n=0$, $U_0A^0=U_0$ donc P_0 est vraie.
   - Supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n fixée. Ainsi, $U_n=U_0A$. Mais d'après la question $7a$) on a $U_{n+1}=U_nA$. Par hypothèse de récurrence :

     $$U_{n+1}=U_nA=(U_0A^n)A=U_0A^{n+1}$$

     P_{n+1} est donc vraie

   La proposition P_n est donc vraie pour tout n, ce qui établit la proposition donnée.

   (c) Ainsi, en utilisant les résultats obtenus dans la partie 1, on peut écrire que $U_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et on récupère la première ligne de A^n, qui s'écrit

   $$\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=1) & \mathbb{P}(X_n=2) & \mathbb{P}(X_n=3) & \mathbb{P}(X_n=4)\end{pmatrix}$$

   soit

   $$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\end{pmatrix}$$

8. En changeant la position au départ (soit en 2, soit en 3 soit en 4), on ne change pas les résultats en question $7a$ et $7b$, mais on change la valeur de U_0 et des différentes probabilités. Ainsi, le résultat est circulaire et on obtient la matrice suivante :

$$A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\end{pmatrix}$$

Partie 3

9. Après calcul, on a rapidement

$$A=\frac{1}{3}(J-I)$$

10. (a) On a $J^2=4J$. On montre alors, par récurrence sur k, que pour tout $k\geqslant 1$, $J^k=4^{k-1}J$.

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, les matrices I et J commutant, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{(-1)^n}{3^n}(I-J)^n \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-J)^k \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(I_4 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 4^{k-1} J\right) \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(I_4 + \frac{1}{4} J (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 4^k - 1)\right) \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(I_4 + \frac{1}{4} J((1-4)^n - 1)\right) \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(I_4 + \frac{(-3)^n - 1}{4} J\right)
\end{aligned}$$

(c) Pour $n = 0$, on remarque que

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(I_4 + \frac{(-3)^n - 1}{4} J\right) = I_4$$

Le résultat est donc également vrai pour $n = 0$.

Partie 4

11. On définit la matrice A. Pour n, on veut le nombre de fois où on obtient 1 dans la matrice x.
Pour n, on utilise `sum(x==1)` qui fait le travail.

Programme Scilab 4

```
A = [0 1 1 1; 1 0 1 1; 1 1 0 1; 1 1 1 0]/3
x = grand(100,'markov',A,1)
n = sum(x==1)
disp(x)
disp(n)
```

12. D'après les résultats précédents, on constate que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{4}$$

Il semble donc cohérent d'obtenir des résultats aux alentours de 25.