ESSEC 2

Voie E

Mardi 3 mai 2016

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit*. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc, ...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée. Dans une première partie, on étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. Puis, dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné. Enfin, dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.

Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ sa variance.

Les deuxième et troisième parties sont indépendantes, et peuvent en outre être traitées en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie : Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul,

$$\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X > j-1) - \mathbb{P}(X > j)$$

   (b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j) - p\mathbb{P}(X > p)$$

2. (a) On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$.
      i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\mathbb{P}(X = k)$.
      ii. Montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = 0.$$

      iii. En déduire que

$$\lim_{p\to+\infty} p\mathbb{P}(X > p) = 0.$$

iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(X > j)$ converge.

v. Montrer que

$$\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j).$$

(b) On suppose que $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j)$ converge.

i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p \geqslant 1}$ définie par

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j)$$

ii. Comparer $\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X = j)$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j)$.

iii. En déduire que X admet une espérance.

(c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X > j)$ converge.

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait

$$\mathbb{P}(X > j) = \frac{1}{(j+1)^{\alpha}}. \qquad (*)$$

(a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

(c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul

$$\mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{j^{\alpha}}\left(1 - \frac{1}{(1+1/j)^{\alpha}}\right).$$

(d) i. Etudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0,1]$.

ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul,

$$\mathbb{P}(X = j) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

‘

(e) Montrer, en utilisant le résultat de (c), que

$$\lim_{j \to +\infty} j^{\alpha+1}\mathbb{P}(X = j) = \alpha.$$

(f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Solution.

Première partie

1. (a) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. La variable étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(X = j) = F_X(j) - F_X(j-1)$$

soit

$$\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X \leqslant j) - \mathbb{P}(X \leqslant j-1) = (1 - \mathbb{P}(X > j)) - (1 - \mathbb{P}(X > j-1))$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X=j)=\mathbb{P}(X>j-1)-\mathbb{P}(X>j)}$$

(b) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. D'après le résultat précédent, pour tout $j\in[\![1,p]\!]$, on a

$$j\mathbb{P}(X=j)=j\mathbb{P}(X>j-1)-j\mathbb{P}(X>j)$$

soit, en additionnant :

$$\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j)=\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X>j-1)-\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X>j)$$

en effectuant le changement de variable $k=j-1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j) &= \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)\mathbb{P}(X>k)-\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X>k)\\
&= \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)\mathbb{P}(X>k)-\sum_{j=0}^{p} j\mathbb{P}(X>j) \quad \text{en ajoutant un terme nul}\\
&= \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)\mathbb{P}(X>k)-k\mathbb{P}(X>k)-p\mathbb{P}(X>p) \text{ en regroupant les sommes}\\
&= \sum_{k=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>k)-p\mathbb{P}(X>p)
\end{aligned}$$

2. (a) i. X admettant une espérance, la série de terme général $k\mathbb{P}(X=k)$ est absolument convergente, et est donc convergente, de somme μ.

ii. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On constate que, par la relation de Chasles (les deux séries étant convergentes) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{p} k\mathbb{P}(X=k)+\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$$

soit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)-\sum_{k=0}^{p} k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$$

Or, par définition

$$\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p} k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$$

par somme, on en déduit donc que

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)=0}$$

iii. Remarquons que, pour $p\in\mathbb{N}^*$:

$$p\mathbb{P}(X>p)=p\sum_{k=p+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)$$

Or, pour tout $k \geqslant p+1$ on a

$$0 \leqslant p \leqslant k \Longrightarrow 0 \leqslant p\mathbb{P}(X=k) \leqslant k\mathbb{P}(X=k)$$

soit, en sommant

$$0 \leqslant p\mathbb{P}(X>p) \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$$

D'après la question précédente, $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = 0$. Par encadrement

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} p\mathbb{P}(X>p) = 0}$$

iv. D'après la question $1b)$ on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X>j) = \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j) + p\mathbb{P}(X>p)$$

Or, d'après les questions $2ai)$ et $2aiii)$, les deux membres de droites ont une limite. Par somme, on en déduit que la suite $\left(\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X>j)\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge, c'est-à-dire que la série de terme général $\mathbb{P}(X>j)$ est convergente.

v. En utilisant l'écriture précédent, et puisque

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j) = \mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{et} \quad \lim_{p\to+\infty} p\mathbb{P}(X>p) = 0$$

on en déduit donc que

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X>j) = \mu$$

soit

$$\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>j) = \mu}$$

(b) i. Constatons que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{p+1} - v_p = \sum_{j=0}^{p} \mathbb{P}(X>j) - \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X>j) = \mathbb{P}(X>p) \geqslant 0$$

Ainsi, $(v_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

ii. En utilisant la question $1b$, on a

$$\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j) \leqslant \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X>j)$$

car $-p\mathbb{P}(X > p) < 0$. Mais alors, la suite (v_p) étant croissante, pour tout p, v_p est inférieure à sa limite. Donc

$$\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j)$$

iii. Constatons que, étant à valeurs positives, la série $\sum_{j\geqslant 1} j\mathbb{P}(X=j)$ est absolument convergente si et seulement si elle est convergente.
Notons $S_p = \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j)$. La suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ; en effet

$$S_{p+1} - S_p = (p+1)\mathbb{P}(X = p+1) > 0$$

et est majorée, d'après la question précédente.
D'après le théorème de convergence monotone, (S_p) est convergente.
Bilan : X admet une espérance.

(c) D'après la question $2av$), si X admet une espérance, alors la série de terme générale $\mathbb{P}(X > j)$ est convergente D'après la question $2biii$), si la série de terme générale $\mathbb{P}(X > j)$ converge, alors X admet une espérance. On a donc bien montré que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X > j)$ converge, et dans ce cas, l'espérance de X est égale à la somme de la série.

3. (a) Remarquons que, pour tout entier naturel $j \geqslant 1$, on a

$$\mathbb{P}(X \leqslant j) = 1 - \mathbb{P}(X > j) = 1 - \frac{1}{(1+j)^\alpha}$$

et donc, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{(1+j)^\alpha} & \text{si } x \in [j; j+1[\end{cases}$$

On constate alors que la fonction $F : x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$ est bien croissante, continue à droite en tout point, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$: il s'agit donc bien d'une fonction de répartition dont les sauts ont lieu en tout entier strictement positif. Ainsi, $(*)$ définit bien une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$.

(b) D'après la question $2c$, X étant à valeur dans $\mathbb{N}^*$, X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X > j)$ est convergente. Or, d'après le critère de Riemann, la série de terme général $\dfrac{1}{(1+j)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
Bilan : X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$.

(c) En utilisant la question 1a), pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = j) &= \mathbb{P}(X > j-1) - \mathbb{P}(X > j) \\
&= \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(1+j)^\alpha} \\
&= \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{(1+j)^\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1+j}{j}\right)^\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+1/j)^\alpha}\right)
\end{aligned}$$

(d) i. f est dérivable sur $[0,1]$ (fonction puissance et affine) et on a, pour tout $x \in [0,1]$:

$$f'(x) = -(-\alpha)(1+x)^{-\alpha-1} - \alpha = \alpha\left((1+x)^{-\alpha-1} - 1\right)$$

Or, pour $x \in [0,1], 1 \leqslant 1+x$ et donc, par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ $(\alpha > 0)$, on a $1 \geqslant \frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} = (1+x)^{-\alpha-1}$.
Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) \leqslant 0$: f est décroissante sur $[0,1]$.

ii. Puisque f est décroissante, on a $f(x) \leqslant f(0) = 0$. Donc, pour tout entier naturel $j \in \mathbb{N}^*$, puisque $0 < 1/j < 1$, on a $f(1/j) \leqslant 0$, c'est-à-dire

$$1 - (1+1/j)^{-\alpha} - \alpha(1/j) \leqslant 0$$

soit

$$1 - \frac{1}{(1+1/j)^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{j}$$

et finalement

$$\boxed{\mathbb{P}(X = j) \leqslant \frac{1}{j^\alpha}\frac{\alpha}{j} = \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}}}$$

(e) On a, en utilisant l'écriture vue en c, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
j^{\alpha+1}\mathbb{P}(X = j) &= j^{\alpha+1}\frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+1/j)^\alpha}\right) \\
&= j\left(1 - \frac{1}{(1+1/j)^\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Or, on a (équivalence classique) :

$$1 - (1+1/j)^{-\alpha} \underset{j \to +\infty}{\sim} -(-\alpha)\frac{1}{j}$$

et donc

$$j\left(1 - \frac{1}{(1+1/j)^\alpha}\right) \underset{j \to +\infty}{\sim} j\alpha\frac{1}{j} = \alpha$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\mathbb{P}(X=j)=\alpha}$$

(f) La question 3*f* indique donc que

$$\mathbb{P}(X=j) \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$$

soit

$$j^2\mathbb{P}(X=j) \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{j^{\alpha-1}}$$

Cette série est (absolument) convergente (critère de Riemann) si et seulement si $\alpha-1>1$, soit $\alpha>2$.
Donc X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance (d'après Koenig Huygens) si et seulement si $\alpha>2$.

Deuxième partie : Etude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du i-ème composant en fonctionnement.

Soit k un entier naturel non nul. On note $T_k = X_1+\cdots+X_k$. T_k représente donc le jour où le k-ième composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement A_n = "le composant en place le jour n tombe en panne" c'est-à-dire A_n = "il existe k entier naturel non nul tel que $T_k=n$", et on se propose d'étudier $\mathbb{P}(A_n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j=\mathbb{P}(X_1=j)$ et $u_j=\mathbb{P}(A_j)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j, on a $p_j\neq 0$. On pose de plus par convention $u_0=1$.
   (a) Montrer que $u_1=p_1$.
   (b) i. Montrer que $A_2=[X_1=2]\cup([X_1=1]\cap[X_2=1])$.
       ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.
   (c) Pour tout entier naturel i, on pose $\tilde{X}_i=X_{i+1}$.
       i. Montrer que les variables $(\tilde{X}_i)$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.
       ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que

$$A_n\cap[X_1=k]=[X_1=k]\cap\bigcup_{j\geqslant 1}[\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\cdots+\tilde{X}_j=n-k]$$

       iii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n,

$$\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n)=\mathbb{P}(A_{n-k}).$$

   (d) Montrer que

$$u_n=u_{n-1}p_1+\cdots+u_0p_n.$$

   (e) En Scilab, soit $P=[p_1,p_2,\cdots,p_n]$ le vecteur ligne tel que $P(j)=p_j$ pour j dans $[\![1,n]\!]$. Ecrire un programme en Scilab qui calcule u_n à partir de P.

5. Soit λ un réel appartenant à $]0,1[$. **Dans cette question**, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ. Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathbb{P}(X_1 = j) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(X_1 > k)$ pour tout entier naturel k non nul.
   (b) Calculer $\mathbb{P}_{[X_1>k]}(X_1 = k+1)$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,
$$\mathbb{P}(A_n) = \lambda$$
6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$. Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.
   (a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3.
   (b) Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,
$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$
   (c) i. Diagonaliser la matrice M.
      ii. Montrer que
$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (d) i. Exprimer u_n en fonction de p et n.
      ii. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Solution. **Partie 2**

4. (a) Les (X_i) étant à support dans $\mathbb{N}^*$, pour tout entier k non nul, T_k est à support dans $[\![k,+\infty[\![$. Ainsi,
$$A_1 = [T_1 = 1] \cup \bigcup_{j\geqslant 2} \underbrace{[T_j = 1]}_{=\varnothing} = [T_1 = 1] = [X_1 = 1]$$
   et donc $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(A_1)$, soit $p_1 = u_1$.
   (b) i. Comme précédemment, on constate que, pour $j \geqslant 3$, $[T_j = 2] = \varnothing$ car $T_j(\Omega) = [\![j,+\infty[\![$. Donc
$$A_2 = [T_1 = 2] \cup [T_2 = 2] \cup \bigcup_{j\geqslant 3} \underbrace{[T_j = 2]}_{=\varnothing} = [T_1 = 2] \cup [T_2 = 2]$$
   Or, par définition de T_k :
$$[T_1 = 2] = [X_1 = 2] \quad \text{et} \quad [T_2 = 2] = [X_1 + X_2 = 2] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$$
   puisque les (X_i) sont à support dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi,
$$\boxed{A_2 = [X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])}$$

ii. D'après la question précédent, et puisque $[X_1 = 2]$ et $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ sont incompatibles :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \\ &= p_1 + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) \text{ par indépendance des } X_i \\ &= p_1 + p_1 p_1\end{aligned}$$

Ainsi, $u_2 = p_1 + p_1 p_1 = p_1(1 + p_1)$.

(c) i. D'après l'énoncé, les $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, celle de X_1.
C'est-à-dire, $X_1, X_2, \dots X_n \cdots$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, celle de X_1, ce qui s'écrit encore $X_1, \tilde{X_1}, \tilde{X_2}, \cdots, \tilde{X_n}, \cdots$.
Ainsi, les $(\tilde{X_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.

ii. Par définition,

$$\begin{aligned}A_n &= \bigcup_{j\geqslant 1} [T_j = n] \\ &= [T_1 = n] \cup \bigcup_{j\geqslant 2} [X_1 + X_2 + \cdots + X_j = n] \\ &= [T_1 = n] \bigcup_{j\geqslant 2} [X_1 + \tilde{X_1} + \cdots + X_{\tilde{j-1}} = n] \\ &= [T_1 = n] \bigcup_{j\geqslant 1} [X_1 + \tilde{X_1} + \cdots + \tilde{X_j} = n]\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $k < n$:

$$A_n \cap [X_1 = k] = \underbrace{([T_1 = n] \cap [X_1 = k])}_{=\emptyset \text{ car incompatible}} \cup [X_1 = k] \cap \bigcup_{j\geqslant 1} [k + \tilde{X_1} + \cdots + \tilde{X_j} = n] = \bigcup_{j\geqslant 1} [\tilde{X_1} + \cdots + \tilde{X_j} = n - k]$$

iii. Puisque les $\tilde{X_i}$ sont de même loi que X_1, on a par définition de A_n :

$$\mathbb{P}(A_{n-k}) = \bigcup_{j\geqslant 1} [X_1 + \cdots + X_j = n - k] = \bigcup_{j\geqslant 1} [\tilde{X_1} + \cdots + \tilde{X_j} = n - k]$$

D'après la question précédente, et par indépendance des $(\tilde{X_i})$ avec X_1, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n \cap [X_1 = k]) &= \mathbb{P}(X_1 = k) \times \mathbb{P}\left(\bigcup_{j\geqslant 1} [\tilde{X_1} + \cdots + \tilde{X_j} = n - k]\right) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = k) \times \mathbb{P}(A_{n-k})\end{aligned}$$

Ainsi, par définition (et puisque $\mathbb{P}(X_1 = k) \neq 0$)

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X_1 = k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})}$$

(d) Utilisons $(X_1 = k)_{k\geqslant 1}$ comme système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) + \mathbb{P}(X_1 = n) \underbrace{\mathbb{P}_{[X_1=n]}(A_n)}_{=1 \text{ car } X_1=n \text{ donc } T_1=n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k) \underbrace{\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n)}_{=0 \text{ car } k>n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(A_{n-k}) + \mathbb{P}(X_1 = n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p_k u_{n-k} + p_n u_0 \text{ avec } u_0 = 1
\end{aligned}
$$

soit

$$\boxed{\forall\ n \geqslant 1,\ u_n = p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \cdots + p_n u_0}$$

(e) En utilisant la question précédente :

```
U=zeros(1,n+1)
U(1)=1
for k=1:n do
    U(k+1)=0
    for j=1:k do
        U(k+1)= U(k+1)+P(j)*U(k+1-j)
    end
end
disp(U(n+1))
```

5. (a) Par définition, pour $k \geqslant 1$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 > k) &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = j) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \lambda(1-\lambda)^{j-1} \\
&= \lambda \frac{(1-\lambda)^k}{1-(1-\lambda)} \text{ en reconnaissant une série géométrique } (|\lambda| < 1) \\
&= (1-\lambda)^k
\end{aligned}
$$

Remarque : on peut calculer la somme en faisant un changement de variable.

(b) Par définition des probabilités conditionnelles, pour $k \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}_{[X_1>k]}(X_1 = k+1) = \frac{\mathbb{P}([X_1 = k+1] \cap [X_1 > k])}{\mathbb{P}(X_1 > k)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k+1)}{\mathbb{P}(X_1 > k)}$$

en constatant que $[X_1 = k+1] \subset [X_1 > k]$. En utilisant le résultat de la question précédente :

$$\mathbb{P}_{[X_1>k]}(X_1 = k+1) = \frac{\lambda(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^k} = \lambda$$

(c) En utilisant la question $4(d)$, pour tout $n \geqslant 1$, et en utilisant la définition $p_j = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$:

$$\begin{aligned}
u_n &= u_{n-1}p_1 + u_{n-2}p_2 + \ldots + u_0 p_n \\
&= u_{n-1}\lambda + u_{n-2}\lambda(1-\lambda) + \cdots + u_0\lambda(1-\lambda)^{n-1} \\
&= u_{n-1}.\lambda + (1-\lambda).[\underbrace{u_{n-2}p_1 + \ldots + u_0 p_{n-1}}_{=u_{n-1}}] \\
&= \lambda.u_{n-1} + (1-\lambda).u_{n-1} \\
u_n &= u_{n-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est constante, égale à $u_1 = p_1 = \lambda$.
On peut également montrer le résultat par récurrence forte. Pour $n \geqslant 1$, soit P_n : "$\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \lambda$" que l'on démontre par récurrence forte sur n :

- Pour $n = 1$, d'après la question $4a$), $u_1 = \mathbb{P}(\mathrm{A}_1) = p_1 = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = 1) = \lambda(1-\lambda)^0 = \lambda$. Ainsi, P_1 est vraie.
- Supposons la proposition P_k vraie pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$. Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_k = \mathbb{P}(\mathrm{A}_k) = \lambda$.
  Mais alors, en utilisant la question $4d$), on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n p_1 + \cdots + u_0 p_{n+1} \\
&= \lambda p_1 + \cdots + \lambda p_n + p_{n+1} \text{ par H.R.} \\
&= \lambda\left(p_1 + \cdots + p_n\right) + p_{n+1} \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda(1-\lambda)^{k-1} + \lambda(1-\lambda)^n \\
&= \lambda^2 \frac{1-(1-\lambda)^n}{1-(1-\lambda)} + \lambda(1-\lambda)^n \\
&= \lambda - \lambda(1-\lambda)^n + \lambda(1-\lambda)^n \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

  Donc P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on a donc pour tout $n \geqslant 1$: $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \lambda$).

6. (a) Puisque X_1 est une variable aléatoire, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k) = 1$, soit $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$. Or $p_1 + p_2 = 1$. Donc nécessairement

$$\boxed{\forall\ i \geqslant 3, \quad p_i = 0}$$

(b) En utilisant la question $4d$), et en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
u_n &= u_{n-1}p_1 + u_{n-2}p_2 + \underbrace{\cdots + u_0 p_n}_{=0 \text{ car } p_i = 0} \\
&= u_{n-1}p + u_{n-2}(1-p)
\end{aligned}$$

Et puisque $u_{n-1} = 1u_{n-1} + 0u_{n-2}$, on a bien

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} \\ 1u_{n-1} + 0u_{n-2} \end{pmatrix} = \mathrm{M}\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

(c) i. λ est valeur propre si et seulement si $M-\lambda I = \begin{pmatrix} p-\lambda & 1-p \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, soit si et seulement si

$$(p-\lambda)(-\lambda)-(1-p)=0 \Leftrightarrow \lambda^2-p\lambda-(1-p)=0$$

On obtient $\Delta = p^2+4(1-p) = p^2-4p+4 = (p-2)^2$ et M admet deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{p+(p-2)}{2} = p-1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{p-(p-2)}{2} = 1$$

On cherche alors une base de vecteur propre. On constate que

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(p-1)+1-p \\ p-1 \end{pmatrix} = (p-1)\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on notant $P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}$, on a

$$M = PDP^{-1}$$

ii. Après calcul,

$$P^{-1} = \frac{1}{p-2}\begin{pmatrix} -1 & p-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et, par un résultat classique, pour tout $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
M^n &= PD^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-1)^n \end{pmatrix}\frac{1}{p-2}\begin{pmatrix} -1 & p-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p-2}\begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & p-1 \\ (p-1)^n & -(p-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p-2}\begin{pmatrix} -1+(p-1)^{n+1} & p-1-(p-1)^{n+1} \\ -1+(p-1)^n & p-1-(p-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p-2}\begin{pmatrix} -1 & p-1 \\ -1 & p-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{p-2}\begin{pmatrix} (p-1)^{n+1} & -(p-1)^{n+1} \\ (p-1)^n & -(p-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p-2}\begin{pmatrix} -1 & p-1 \\ -1 & p-1 \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^n}{p-2}\begin{pmatrix} p-1 & -(p-1) \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^n}{2-p}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et donc, au rang $n-1$:

$$\boxed{M^{n-1} = \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(d) i. D'après la relation $6b$), on a (par récurrence)

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit, en utilisant le résultat précédent

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{1}{2-p}1 + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}(p-p^2+p-1)$$

soit

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n\frac{1}{2-p} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}(2p-p^2-1) = \frac{1}{2-p} - \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}(p-1)^2$$

ii. Puisque $0 < p < 1$, $0 < 2-p < 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(2-p)^{n-1} = 0$. Par somme et produit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2-p}}$$

Troisième partie : Etude de la durée de fonctionnement.

Comme dans la partie précédente, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ indépendantes et de même loi, telle que pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du i-ème composant en fonctionnement.

Soit k un entier naturel non nul. On étudie dans cette partie la durée de fonctionnement prévisible du système si on a k composants à disposition (y compris celui installé au départ). On notera toujours $T_k = X_1 + \cdots + X_k$.

On suppose dans cette partie qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que pour tout entier naturel j on ait

$$\mathbb{P}(X_1 > j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}$$

En particulier, dans toute cette partie, X_1 admet une espérance, que l'on note $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.

7. Que vaut $\mathbb{E}(T_k)$?
8. On suppose, **dans cette question**, que α est strictement supérieur à 2. X_1 admet donc une variance σ^2.
   (a) Calculer $\mathbb{V}\mathrm{ar}(T_k)$.
   (b) Montrer que pour tout réel ε strictement positif,
   $$\mathbb{P}\left(|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$
   (c) Déduire que, pour tout réel strictement positif ε, on a
   $$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon[\right) = 1.$$
9. On suppose maintenant uniquement que $\alpha > 1$ et donc que X_1 n'a pas nécessairement de variance d'où l'impossibilité d'appliquer la méthode précédente. On va mettre en œuvre ce qu'on appelle une méthode de troncation.
   On fixe un entier naturel m strictement positif. Pour tout entier naturel non nul i, on définit deux variables aléatoires $Y_i^{(m)}$ et $Z_i^{(m)}$ de la façon suivante
   $$Y_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad Z_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i > m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (a) Montrer que $X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$.

(b) i. En utilisant la question $3(d)ii$, montrer que

$$\mathbb{E}(Z_1^{(m)}) \leqslant \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^{\alpha}}$$

ii. Montrer que

$$\mathbb{E}(Z_1^{(m)}) \leqslant \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^{\alpha}}\,dx.$$

iii. Calculer

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^{\alpha}}\,dx.$$

iv. En déduire que

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}(Z_1^{(m)}) = 0$$

v. Montrer que

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}(Y_1^{(m)}) = \mu$$

(c) i. Montrer que

$$\left(Y_1^{(m)}\right)^2 \leqslant m X_1.$$

ii. En déduire que

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(Y_1^{(m)}\right) \leqslant m\mu$$

(d) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel m_0 non nul tel que pour tout entier naturel m supérieur à m_0,

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon.$$

Jusqu'à la fin du problème, m désignera un entier supérieur ou égal à m_0.

(e) On note, pour tout entier naturel k non nul

$$U_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} \quad \text{et} \quad V_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Z_i^{(m)}$$

Vérifier que

$$T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}$$

(f) i. Montrer que

$$\mathbb{E}(V_k^{(m)}) \leqslant k \times \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}.$$

ii. En déduire que

$$\mathbb{P}(V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\,\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

(g) i. Montrer que

$$\mathbb{E}(U_k^{(m)}) \geqslant k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}.$$

ii. En déduire que

$$|\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu| \leqslant k\varepsilon.$$

iii. Montrer que

$$\mathbb{P}(|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon).$$

iv. Montrer que
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(U_k^{(m)}) \leqslant km\mu.$$

v. En déduire que
$$\mathbb{P}(|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon) \leqslant \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}.$$

(h) i. Montrer que pour tout couple d'événements A et B dans $\mathscr{A}$, on a
$$\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

ii. En appliquant l'inégalité précédente aux événements
$$A = \left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right] \quad \text{et} \quad B = \left[U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[\right],$$
montrer que
$$\mathbb{P}(T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[) \geqslant \mathbb{P}(V_k^{(m)} < k\varepsilon) + \mathbb{P}(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon[)) - 1$$

iii. Déduire des questions précédentes que pour tout réel ε strictement positif, et pour tout entier m supérieur ou égal à m_0, on a pour tout entier naturel k non nul,
$$\mathbb{P}(T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}.$$

iv. Pour k assez grand, appliquer l'inégalité précédente à un entier $m_k \in [\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$ et conclure que
$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon[\right) = 1.$$

Solution.

Partie 3

7. Par linéarité de l'espérance
$$\boxed{\mathbb{E}(T_k) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_k) = k\mu}$$

8. (a) Par indépendance ces X_i, on a
$$\boxed{\mathbb{V}\mathrm{ar}(T_k) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k) = k\sigma^2}$$

(b) T_k possédant une variance, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $a > 0$:
$$\mathbb{P}(|T_k - \mathbb{E}(T_k)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(T_k)}{a^2}$$
soit, appliqué ici à $a = k\varepsilon > 0$ et avec $\mathbb{E}(T_k) = k\mu$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(T_k) = k\sigma^2$:
$$\boxed{\mathbb{P}(|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon) \leqslant \frac{k\sigma^2}{(k\varepsilon)^2} = \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}}$$

(c) D'après le résultat précédent, puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2} = 0$ et par encadrement :
$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}(|T_k - k\mu| > k\varepsilon) = 0$$

soit, en constatant que l'événement $[-k\varepsilon < T_k - k\mu < k\varepsilon]$ est l'événement contraire de $[|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon]$, on en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(-k\varepsilon < T_k - k\mu < k\varepsilon) = 1$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-k\varepsilon < T_k - k\mu < k\varepsilon &= \mathbb{P}(-\varepsilon < \frac{T_k - k\mu}{k} < \varepsilon) \text{ car } k > 0 \\
&= \mathbb{P}\left(-\varepsilon < \frac{T_k}{k} - \mu < \varepsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\mu - \varepsilon < \frac{T_k}{k} < \mu + \varepsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon[\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon[\right) = 1}$$

9. (a) Soit $\omega \in \Omega$.

- Si $X_i(\omega) \leqslant m$, alors $Y_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega)$ et $Z_i^{(m)}(\omega) = 0$, donc $Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega)$.
- De même, si $X_i(\omega) > m$, alors $Y_i^{(m)}(\omega) = 0$ et $Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega)$, donc $Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega)$.

Donc $X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$.

(b) i. Remarquons que, par définition, $\mathbb{Z}_i^{(m)}(\Omega) = [\![m+1, +\infty[\![$. Etant dans la situation de la question 3, on a donc, pour tout $j \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}(X_1 = j) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

soit

$$j\mathbb{P}(X_1 = j) \leqslant \frac{\alpha}{j^{\alpha}}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_1^{(m)}) &= \sum_{j=m+1}^{+\infty} j\mathbb{P}(Z_1^{(m)} = j) \\
&= \sum_{j=m+1}^{+\infty} j\mathbb{P}(X_1 = j) \quad \text{car } Z_1^{(m)} = X_1 \text{ si } X_1 > m \\
&\leqslant \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{j^{\alpha}} \quad \text{d'après ce qui précède}
\end{aligned}$$

ii. Soit $j \geqslant 1$. Par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha}}$, on a pour tout $t \in [j; j+1]$

$$\frac{1}{(j+1)^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{t^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{j^{\alpha}}$$

soit, en intégrant entre j et $j+1$:

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{(j+1)^\alpha} dt \leqslant \int_j^{j+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leqslant \int_j^{j+1} \frac{1}{j^\alpha} dt$$

ce qui donne

$$\frac{1}{(j+1)^\alpha} \leqslant \int_j^{j+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leqslant \frac{1}{j^\alpha}$$

En sommant pour j entre m et N (avec $\mathrm{N} > m$), et par la relation de Chasles :

$$\sum_{j=m}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(j+1)^\alpha} \leqslant \sum_{j=m}^{\mathrm{N}} \int_j^{j+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_m^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

puis, par changement d'indice

$$\sum_{j=m+1}^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{j^\alpha} \leqslant \int_m^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

En constatant que la somme et l'intégrale converge (critère de Riemann, $\alpha > 1$, par passage à la limite :

$$\sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{1}{j^\alpha} \leqslant \int_m^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

et finalement

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{Z}_i^{(m)}) \leqslant \int_m^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt}$$

iii. Posons $\mathrm{N} > m$. On a (puisque $\alpha > 1$)

$$\int_m^{\mathrm{N}} \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_m^{\mathrm{N}} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\mathrm{N}^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{m^{\alpha-1}}$$

Puis, par passage à la limite (avec $\alpha > 1$ et don $\alpha - 1 > 0$), on a $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\mathrm{N}^{\alpha-1}} = 0$ et donc

$$\boxed{\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{t^\alpha} dt = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{m^{\alpha-1}} = \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{1}{m^{\alpha-1}}}$$

iv. La variable X_1 étant à valeur positive, $\mathrm{Z}_1^{(m)}$ l'est également, et donc $\mathbb{E}(\mathrm{Z}_1^{(m)}) \geqslant 0$. De plus,

$$0 \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{Z}_1^{(m)}) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{1}{m^{\alpha-1}}$$

et $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{m^{\alpha-1}} = 0$ (car $\alpha - 1 > 0$). Par encadrement

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}(\mathrm{Z}_1^{(m)}) = 0}$$

v. Puisque $X_1 = Y_1^{(m)} + Z_1^{(m)}$ et par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(Y_1^{(m)}) + \mathbb{E}(Z_1^{(m)})$$

Or $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ et d'après la question précédente, $\lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}(Z_1^{(m)}) = 0$. Par somme

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}(Y_1^{(m)}) = \mu}$$

(c) i. Si $X_i > m$ alors $Y_i^{(m)} = 0$ et donc $Y_i^{(m)} \leqslant mX_i$.
Si $X_i \leqslant m$, alors

$$(Y_i^{(m)})^2 = X_i^2 = X_iX_i \leqslant mX_i \text{ car } 0 < X_i \leqslant m$$

Dans tous les cas, $(Y_i^{(m)})^2 \leqslant mX_i$.

ii. D'après le résultat précédent, $Y_i^{(m)}$ admet un moment d'ordre 2 et donc une variance, et

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}\text{ar}(Y_i^{(m)}) & = & \mathbb{E}((Y_i^{(m)})^2) - \mathbb{E}(Y_i^{(m)})^2 \quad \text{par Koenig-Huygens} \\ & \leqslant & \mathbb{E}((Y_i^{(m)}) \\ & \leqslant & \mathbb{E}(mX_i) \text{ d'après la question précédente} \\ & \leqslant & m\mathbb{E}(X_i) = m\mu \end{array}$$

(d) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. La fonction $m \mapsto \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$ est positive (car $\alpha > 1$) et sa limite vaut

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\alpha}{1-\alpha} m^{1-\alpha} = 0 \quad \text{car } \alpha > 1$$

Par définition de la limite, il existe un entier naturel m_0 tel que, pour tout $m \geqslant m_0$, on ait

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon$$

(e) Constatons que, pour $k \geqslant 1$:

$$\begin{array}{rcl} U_k^{(m)} + V_k^{(m)} & = & \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} + \sum_{i=1}^{k} Z_i^{(m)} \\ & = & \sum_{i=1}^{k} (Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}) \\ & = & \sum_{i=1}^{k} X_i \text{ d'après la question 9a)} \\ & = & T_k \end{array}$$

(f) i. Par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(V_k^{(m)}) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(Z_i^{(m)})$$

Or, on a démontré question $9(b)iv$, que $\mathbb{E}(Z_1^{(m)}) \leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{1}{m^{\alpha-1}}$. Les (X_i) ayant la même loi, les (Z_i) aussi et donc, pour tout $i \geqslant 1$

$$\mathbb{E}(Z_i^{(m)} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{m^{\alpha-1}} = \frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(V_k^{(m)}) \leqslant \sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha} = k \times \frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}}$$

ii. D'après l'inégalité de Markov (puisque $V_k^{(m)}$ admet une espérance) :

$$\mathbb{P}(V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(V_k^{(m)})}{k\varepsilon}$$

soit, avec le résultat précédent

$$\boxed{\mathbb{P}(V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon) \leqslant \frac{k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}}{k\varepsilon} = \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}}$$

(g) i. On a vu (question $9e$) que $T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}$ et donc, par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(U_k^{(m)}) = \mathbb{E}(T_k) - \mathbb{E}(V_k^{(m)}$$

Or $\mathbb{E}(T_k) = k\mu$ et d'après la question $9(f)i$, on a

$$-\mathrm{E}(V_k^{(m)}) \geqslant -k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(U_k^{(m)}) \geqslant k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}}$$

ii. Par positivité des $V_k^{(m)}$, on a également que

$$\mathbb{E}(U_k^{(m)}) \leqslant \mathbb{E}(T_k) = k\mu$$

Ce résultat et le précédent donne donc

$$0 \leqslant k\mu - \mathbb{E}(U_k^{(m)}) \leqslant k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}$$

soit encore

$$|k\mu - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \leqslant k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}$$

Or, $m \geqslant m_0$ donc $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon$ et finalement

$$\boxed{|k\mu - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| = |\mathbb{E}(U_k^{(m)}) - k\mu| \leqslant k\varepsilon}$$

iii. Remarquons que, par inégalité triangulaire

$$|U_k^{(m)}(\omega) - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant |U_k^{(m)}(\omega) - m\mu| - |m\mu - \mathbb{E}(U_k^{(m)})|$$

Si $|U_k^{(m)}(\omega) - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon$, alors

$$|U_k^{(m)}(\omega) - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant 2k\varepsilon - |m\mu - \mathbb{E}(U_k^{(m)})|$$

et en utilisant la question $9(g)ii$:

$$|U_k^{(m)}(\omega) - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant 2k\varepsilon - k\varepsilon = k\varepsilon$$

Ainsi, on a l'inclusion

$$\left[|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right] \subset \left[|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\right]$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{P}\left(|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\right)}$$

iv. Les variables aléatoires (X_i) étant indépendantes, d'après le lemme des coalitions, les $(Y_i^{(m)})$ sont également indépendantes. Ainsi

$$\mathbb{V}\text{ar}(U_k^{(m)}) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}\text{ar}(Y_i^{(m)})$$

En utilisant le résultat de la question $9(c)ii$, on a alors

$$\boxed{\mathbb{V}\text{ar}(U_k^{(m)}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} m\mu = km\mu}$$

v. $U_k^{(m)}$ possédant une variance, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}(|U_k^{(m)} - \mathbb{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}\text{ar}(U_k^{(m)})}{(k\varepsilon)^2} \leqslant \frac{km\mu}{k^2\varepsilon^2} = \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

et donc, avec la question $9(g)iii$

$$\boxed{\mathbb{P}(|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon) \leqslant \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}}$$

(h) i. Pour tout couple d'événements A, B de $\mathscr{A}$, on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$$

Or, par définition, $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant 1$, et donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

ii. Prenons les événements A et B de l'énoncé. Remarquons que

$$A \cap B = \left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right] \cap \left[U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[\right]$$

Remarquons que si $\omega \in A \cap B$, alors

$$0 \leqslant V_k^{(m)}(\omega) < k\varepsilon \quad \text{et} \quad k(\mu-2\varepsilon) < U_k^{(m)}(\omega) < k(\mu+2\varepsilon) \quad \text{et donc} \quad k(\mu-2\varepsilon) < T_k < k(\mu+2\varepsilon)+k\varepsilon$$

Ainsi, l'événement $A \cap B$ est inclus dans l'événement $T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[$.
Donc,

$$\mathbb{P}(T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[) \geqslant \mathbb{P}(A \cap B) \underbrace{\geqslant}_{\text{q° 9(h)1}} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

ce qui donne le résultat.

iii. En regroupant les résultats vue en $9(f)ii$, $9(g)v$ et $9(h)ii$:

$$\mathbb{P}(V_k^{(m)} < k\varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon) \underbrace{\geqslant}_{\text{q° 9(f)ii}} 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

$$\mathbb{P}(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\varepsilon, k(\mu + 2\varepsilon)[) = 1 - \mathbb{P}(|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon) \underbrace{\geqslant}_{\text{q° 9(g)v}} 1 - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

et finalement

$$\boxed{\mathbb{P}(T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} + 1 - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2} - 1 = 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}}$$

iv. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. L'inégalité précédente est vraie pour tout $m \geqslant m_0$ et pour tout entier naturel $k \geqslant 1$.
On prend k suffisamment grand pour que $\sqrt{k} > m_0$ (ce qui est possible). Soit m_k un entier compris dans $[\sqrt{k}; 2\sqrt{k}]$. Puisque $1 - \alpha < 0$, par décroissance, on a donc

$$m_k^{1-\alpha} \leqslant k^{1-\alpha} \quad \text{puis} \quad -m^{1-\alpha} \geqslant -k^{1-\alpha}$$

De plus, $-m_k \geqslant -2\sqrt{k}$.
L'inégalité précédente s'écrit alors

$$\mathbb{P}(T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{k^{1-\alpha}}{\varepsilon} - 2\frac{\sqrt{k}\mu}{k\varepsilon^2} = 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{k^{1-\alpha}}{\varepsilon} - 2\frac{\mu}{\sqrt{k}\varepsilon^2}$$

ε étant fixé, le terme de droite tend vers 1 (car $1 - \alpha < 0$) quand k tend vers $+\infty$. Par encadrement (puisque qu'une probabilité est inférieure à 1), on en déduit bien que

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[\right) = 1$$

ce qui s'écrit encore

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon[\right) = 1}$$