EML

Voie E

Mardi 26 avril 2016

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit*. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathscr{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

PARTIE I : Étude de la matrice A**.**

1. Calculer A^2.
2. Montrer que la famille $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est libre.
3. (a) Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.
4. Montrer : $\mathrm{A}^3 = 2\mathrm{A}$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathscr{E}$.

5. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est une base de $\mathscr{E}$. En déduire la dimension de $\mathscr{E}$.
6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathscr{E}$, la matrice AM appartient à $\mathscr{E}$.

On note f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathscr{E}$, associe AM.

7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$.
8. Former la matrice F de f dans la base $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$.
9. (a) Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$
   (b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.
   (c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
10. L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?
11. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
12. (a) Résoudre l'équation $f(\mathrm{M}) = \mathrm{I} + \mathrm{A}^2$, d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$.
    (b) Résoudre l'équation $f(\mathrm{N}) = \mathrm{A} + \mathrm{A}^2$, d'inconnue $\mathrm{N} \in \mathscr{E}$.

Exercice 2

On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0;+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0;+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau de variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.
   (a) Montrer que C admet une tangente en O et préciser celle-ci.
   (b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul noté I, et préciser les coordonnées de I.
   (c) Tracer l'allure de C.
5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0;+\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, définie, pour tout (x, y) de $]0;+\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0;+\infty[^2$.
7. (a) Soit $(x, y) \in]0;+\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1$$

   (b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).
8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.
10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
11. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. (On pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$.).
12. Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_n < 10^{-4}$.

Exercice 3

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par : $\quad f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge.

   (b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\quad \mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$.

PARTIE II : Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\quad \varphi(x) = \ln(1+e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur une intervalle I à préciser.
6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On définit la variable aléatoire réelle Y définie par : $\quad \mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$.

7. Justifier : $\quad \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant 0) = 0$.
8. Déterminer la fonction de répartition de Y.
9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variable aléatoire réelles $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad \mathrm{T}_n = \max(\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n) \quad$ et $\quad \mathrm{U}_n = \mathrm{T}_n - \ln(n)$.

10. (a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

    (b) En déduire : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(\mathrm{U}_n \leqslant x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.
11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.