EDHEC

Voie E

Mardi 3 mai 2016

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit*. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. (a) En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
   ‘
3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.
4. (a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.
   (c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.
5. (a) Expliquer pourquoi l'on a :
   $$\forall\ n \in \mathbb{N}, A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I$$
   (b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.
   (c) Vérifier que la formule trouvée à la question 5*a*) reste valable pour $n = -1$.

Solution.

1. Après calcul, $A^2 - 4A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_2$. Ainsi, en notant $P(X) = X^2 - 4X + 4$, on a $P(A) = 0$.
2. (a) Si λ est valeur propre de A, alors nécessairement, $P(\lambda) = 0$. Or $P(X) = (X-2)^2$ donc la seule valeur propre possible de A est 2.

(b) Si A est diagonalisable, il existe P matrice inversible telle que

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$

et donc $A = P(2I)P^{-1} = 2PP^{-1} = 2I$. Or $A \neq 2I$: A **n'est pas diagonalisable**. En revanche, 0 n'est pas une valeur propre de A, donc A **est inversible**.

3. On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant $AX = 2X$, soit $(A-2I)X = 0$, qui s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

en remarquant que les trois lignes sont les mêmes. Ainsi, $x = y - z$ et donc $X = \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. Ainsi, en notant $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Puisque les deux vecteurs sont linéairement indépendants, (u_1, u_2) forme une base de E_2.

4. (a) Notons $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soient a, b, c tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. Alors

$$\begin{pmatrix} a-b+c \\ a+c \\ b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = -c, \quad b = -c \quad \text{et} \quad (-c) - (-c) + c = 0$$

et on obtient finalement $c = 0$ puis $a = 0$ et $b = 0$. Ainsi, la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. Puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, et que la famille possède 3 éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) D'après l'énoncé, $f(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + e_3$, $f(e_2) = -e_1 - e_3$ et $f(e_3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3$. Ainsi :

$$f(u_1) = f(e_1 + e_2) = 3e_1 + 2e_2 = 2u_1, \quad f(u_2) = f(-e_1 + e_3) = -2e_1 + 2e_3 = 2u_2$$

$$\text{et} \quad f(u_3) = f(e_1 + e_2 + e_3) = 3e_1 + 4e_2 + 3e_3 = 2u_3 + 2u_1 + u_2$$

Ainsi, dans la base (u_1, u_2, u_3), la matrice de f est

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Ecrivons $\mathrm{T} = 2\mathrm{I} + \mathrm{N}$ avec $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On constat que $\mathrm{N}^2 = 0$. Puisque $2\mathrm{I}$ et N commutent, d'après la formule du binôme de Newton, pour $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{T}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{N}^k (2\mathrm{I})^{n-k} = \binom{n}{0}(2\mathrm{I})^n + \binom{n}{1}(2\mathrm{I})^{n-1}\mathrm{N} + 0$$

Ainsi, pour $n \geqslant 2$, $\mathrm{T}^n = 2^n\mathrm{I} + n2^{n-1}\mathrm{N}$, formule valable pour $n = 1$ et $n = 0$. On a donc

$$\forall\, n, \quad \mathrm{T}^n = 2^n\mathrm{I} + n2^{n-1}\mathrm{N}$$

puis, comme $\mathrm{N} = \mathrm{T} - 2\mathrm{I}$:

$$\boxed{\forall\, n, \quad \mathrm{T}^n = 2^n\mathrm{I} + n2^{n-1}(\mathrm{T} - 2\mathrm{I}) = n2^{n-1}\mathrm{T} + 2^n(1-n)\mathrm{I}}$$

5. (a) T étant la matrice de f dans une autre base, on en déduit que f vérifie :

$$\forall\, n, \quad f^n = n2^{n-1} f + (1-n)2^n \mathrm{Id}$$

et donc, dans la base canonique :

$$\forall\, n, \quad \mathrm{A}^n = n2^{n-1}\mathrm{A} + (1-n)2^n\mathrm{I} = n2^{n-1}\mathrm{A} - (n-1)2^n\mathrm{I}$$

(b) On a vu que $\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{A} = -4\mathrm{I}$ soit $\mathrm{A}(\mathrm{A} - 4\mathrm{I}) = -4\mathrm{I}$, ce qui s'écrit encore

$$\mathrm{A}\left(\frac{-1}{4}(\mathrm{A} - 4\mathrm{I})\right) = \mathrm{I}$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\mathrm{A}^{-1} = -\frac{1}{4}(\mathrm{A} - 4\mathrm{I}) = -\frac{1}{4}\mathrm{A} + \mathrm{I}}$$

(c) Pour $n = -1$, on a

$$n2^{n-1}\mathrm{A} - (n-1)2^n\mathrm{I} = -2^{-2}\mathrm{A} - (-2)2^{-1}\mathrm{I} = -\frac{1}{4}\mathrm{A} + \mathrm{I} = \mathrm{A}^{-1}$$

Ainsi, la formule trouvée question 5a) reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall\, x \in [n;+\infty[, \quad f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\,dt.$

1. Étude de f_n.
   (a) Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n;+\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n;+\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.
   (b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
   (c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n;+\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. Étude de la suite (u_n).

(a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(b) Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.

3. (a) Utiliser la question $2b$) pour compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n=0
while ------
n = -----
end
disp(n)
```

(b) Le script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln 10$.

4. On pose $v_n = u_n - n$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

(b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

(c) Vérifier ensuite que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

(d) Déduire de l'encadrement obtenu en $2b$) que : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Solution.

1. (a) La fonction $g : t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, et donc sur $[n;+\infty[$. Par définition, f_n est l'unique primitive de g nulle en n, et est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n;+\infty[$. On a de plus, pour tout $x \geqslant n$:

$$f_n'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$$

Ainsi, la fonction f_n est strictement croissante sur $[n;+\infty[$.

(b) Constatons que, pour tout $t \in [n;+\infty[$, $e^{\sqrt{t}} \geqslant 1$. Ainsi, pour $x \geqslant n$:

$$\int_n^x e^{\sqrt{t}} \geqslant \int_n^x 1 dt = x - n$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x - n = +\infty$. Par comparaison

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$$

(c) On a de plus $f_n(n) = 0$ par définition. Ainsi, f_n est continue et strictement croissante sur $[n;+\infty[$. De plus, d'après les questions précédentes, $f_n([n;+\infty[) = [0;+\infty[$ et $1 \in [0;+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(u_n) = 1$ admet une unique solution sur $[n;+\infty[$.

2. (a) Par définition, $u_n \in [n;+\infty[$ donc $u_n \geqslant n$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, par comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

(b) Par croissance de la fonction g, on a, pour tout $t \in [n; u_n]$:

$$e^{\sqrt{n}} \leqslant e^{\sqrt{t}} \leqslant e^{\sqrt{u_n}}$$

soit, puisque $u_n \geqslant n$:

$$\int_n^{u_n} e^{\sqrt{n}} dt \leqslant \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} dt \leqslant \int_n^{u_n} e^{\sqrt{u_n}} dt$$

ou encore (et en utilisant le résultat $f_n(u_n) = 1$) :

$$e^{\sqrt{n}}(u_n - n) \leqslant 1 \leqslant e^{\sqrt{u_n}}(u_n - n)$$

ce qui s'écrit également (les nombres étant positifs) :

$$e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$

3. (a) Il suffit, d'après ce qui précède, d'avoir $e^{-\sqrt{n}} < 10^{-4}$ pour avoir $u_n - n \leqslant 10^{-4}$. On obtient :

```
n=0
while exp(-sqrt(n)) > 10^(-4)
    n=n+1
end
disp(n)
```

   (b) Remarquons que $e^{-\sqrt{n}} < 10^{-4}$ si et seulement si $-\sqrt{n} \leqslant -4\ln(10)$ puis $n \geqslant (4\ln(10))^2$. Puisque $\ln(10) \approx 2,3$, $4\ln(10) \approx 9,2$ et donc $(4\ln(10))^2 \approx 85$.

4. (a) On a (question $2b$), $e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, par composée

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{u_n}} = 0$$

   Puisque on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$, par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - n = 0$$

   (b) Pour $x \geqslant -1$, on a

$$\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2} \Longleftrightarrow 1 + x \leqslant \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

   Or

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - (1+x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} - 1 - x = \frac{x^2}{4} > 0$$

   Donc

$$1 + x \leqslant \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

   puis, pour $x \leqslant -1$, $1 + x \geqslant 0$ et donc, par croissance de la fonction racine :

$$\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$$

   (c) D'après la question précédente

$$\sqrt{u_n} = \sqrt{v_n + n} = \sqrt{n}\sqrt{\frac{v_n}{n} + 1} \leqslant \sqrt{n}\left(1 + \frac{v_n}{2n}\right)$$

soit
$$-\sqrt{u_n} \geqslant -\sqrt{n}\left(1+\frac{v_n}{2n}\right)$$
puis, en utilisant la croissance de la fonction exponentielle :
$$e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}\left(1+\frac{v_n}{2n}\right)} = e^{-\sqrt{n}-\sqrt{n}\frac{v_n}{2n}} = e^{-\sqrt{n}-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}}$$
et donc
$$e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}}e^{-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}}$$

(d) On reprend l'inégalité du $2b$:
$$e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$
soit, en utilisant ce qui précède :
$$e^{-\sqrt{n}}e^{-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$
ce qui s'écrit encore ($e^{-\sqrt{n}} > 0$) :
$$e^{-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}} \leqslant \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \leqslant 1$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n}$. Par quotient et composée :
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}} = 1$$
Par encadrement, on obtient donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$$
soit
$$u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$$

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On désigne par p un réel de $]0,1[$.
On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.
On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :
$$\mathbb{P}(Z=1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z=-1) = 1-p$$
Enfin, on note X la variable aléatoire, définie par :
$$\forall\ \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$
On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Établir, grâce au système complet d'événements $((Z=1), (Z=-1))$, que :
$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = pF_U(x) + (1-p)F_V(x)$$

(b) Vérifier que $X(\Omega) = [-3, 3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3, \quad -3 \leqslant x \leqslant -1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

(c) On admet que X est une variable aléatoire à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

(d) Établir que X admet une espérance E(X) et une variance V(X), puis les déterminer.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

(a) Vérifier que l'on a : $X = U\dfrac{1+Z}{2} + V\dfrac{1-Z}{2}$.

(b) Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de E(X).

(c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $E(X^2)$.

4. (a) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la loi de $2T - 1$.

(b) On rappelle que `grand(1,,1,"unf",a,b)` et `grand(1,1,"bin",1,p)` sont des commandes `Scilab` permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Écrire des commandes `Scilab` permettant de simuler U, V, Z puis X.

Solution.

1. U et V suivant des lois uniformes, on a les fonctions de répartitions suivantes :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -3 \\ \frac{x+3}{4} & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ \frac{x+1}{4} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

2. (a) Z étant une variable aléatoire à valeur dans $\{-1, 1\}$, $((Z = -1), (Z = 1))$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leqslant x) &= \mathbb{P}((X \leqslant x) \cap (Z = -1)) + \mathbb{P}((X \leqslant x) \cap (Z = 1)) \\ &= \mathbb{P}(Z = -1)\underbrace{\mathbb{P}_{(Z=-1)}\mathbb{P}(X \leqslant x)}_{X=V \text{ si } Z=-1} + \mathbb{P}(Z = 1)\underbrace{\mathbb{P}_{(Z=1)}(X \leqslant x)}_{X=U \text{ si } Z=1} \\ &= (1-p)\mathbb{P}(V \leqslant x) + p\mathbb{P}(U \leqslant x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = (1-p)F_V(x) + pF_U(X)$.

(b) Puisque $U(\Omega) = [-3, 1]$ et $V(\Omega) = [-1, 3]$, et que X = U ou V selon les valeurs de Z, on a bien $X(\Omega) = U(\Omega) \cup V(\Omega) = [-3, 3]$.
En utilisant les résultats des questions 1 et 2*a*), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall\, x < -3, &\qquad F_X(x) = 0 \\ \forall\, x \in [-3, -1], &\qquad F_X(x) = p\frac{x+3}{4} \\ \forall\, x \in [-1, 1], &\qquad F_X(x) = p\frac{x+3}{4} + (1-p)\frac{x+1}{4} = \frac{x+2p+1}{4} \\ \forall\, x \in [1, 3], &\qquad F_X(x) = p + (1-p)\frac{x+1}{4} = \frac{(1-p)x+5-p}{4} \\ \forall\, x \geqslant 3, &\qquad F_X(x) = p + (1-p) = 1 \end{aligned}$$

(c) On admet que X est à densité (la fonction de répartition est clairement $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points, la continuité peut se faire sans difficulté). Une densité de f_X est alors donnée par

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 3 \\ \frac{p}{4} & \text{si } -3 < x \leqslant -1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -1 < x \leqslant 1 \\ \frac{1-p}{4} & \text{si } 1 < x \leqslant 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

(d) X étant à support fini, elle admet espérance et variance. En utilisant la densité précédente (qui est continue par morceaux), et par la relation de Chasles :

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-3}^{-1} x \frac{p}{4} dx + \int_{-1}^{1} x \frac{1}{4} dx + \int_{1}^{3} \frac{1-p}{4} x dx$$

soit

$$\mathrm{E(X)} = \left[\frac{p}{4}\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1-p}{4}\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3}$$

et finalement

$$\boxed{\mathrm{E(X)} = -p + 0 + 1 - p = 1 - 2p}$$

De même, d'après la formule de transfert

$$\mathrm{E(X^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-3}^{-1} x^2 \frac{p}{4} dx + \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{4} dx + \int_{1}^{3} \frac{1-p}{4} x^2 dx$$

Et après calcul

$$\mathrm{E(X^2)} = \frac{p}{4}\frac{26}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{4} + \frac{1-p}{4}\frac{26}{3} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

et donc, d'après la formule de Koenig Huyghens :

$$\mathrm{V(X)} = \mathrm{E(X^2)} - \mathrm{E(X)}^2 = \frac{7}{3} - (1-2p)^2$$

3. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Si $Z(\omega) = 1$, alors $X(\omega) = U(\omega)$ mais on a également

$$U(\omega)\frac{1+Z(\omega)}{2} + V\frac{1-Z(\omega)}{2} = U(\omega)$$

de même, si $Z(\omega) = -1$, alors $X(\omega) = V(\omega)$ mais on a également

$$U(\omega)\frac{1+Z(\omega)}{2} + V\frac{1-Z(\omega)}{2} = V(\omega)$$

Dans tous les cas, on a bien $X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}$.

(b) U, Z et V possèdent une espérance. U, V et Z étant indépendantes, on en déduit que X admet une espérance, et

$$\mathrm{E(X)} = \mathrm{E(U)E}\left(\frac{1+Z}{2}\right) + \mathrm{E(V)E}\left(\frac{1-Z}{2}\right) = \mathrm{E(U)}\frac{1+\mathrm{E(Z)}}{2} + \mathrm{E(V)}\frac{1-\mathrm{E(Z)}}{2}$$

Or, $E(U) = \frac{-3+1}{2} = -1$, $\quad E(V) = \frac{-1+3}{2} = 1$ et

$$E(Z) = p \times 1 + (1-p) \times (-1) = 2p - 1$$

Ainsi,

$$\boxed{E(X) = -1\frac{1+(2p-1)}{2} + 1\frac{1-(2p-1)}{2} = -p + (1-p) = 1-2p}$$

(c) Constatons que

$$\begin{aligned}
X^2 &= \left(U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}\right)^2 \\
&= U^2\left(\frac{1+Z}{2}\right)^2 + 2UV\frac{1+Z}{2}\frac{1-Z}{2} + V^2\left(\frac{1-Z}{2}\right)^2 \\
&= U^2\frac{1+2Z+Z^2}{4} + 2UV\frac{1-Z^2}{4} + V^2\frac{1-2Z+Z^2}{4} \\
&= U^2\frac{1+2Z+1}{4} + 2UV\frac{1-1}{4} + V^2\frac{1-2Z+1}{4} \text{ car } Z^2 = 1 \\
&= U^2\frac{1+Z}{2} + V^2\frac{1-Z}{2}
\end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que précédemment (indépendances et linéarité), X^2 admet une espérance, et

$$E(X^2) = E(U^2)\frac{1+E(Z)}{2} + E(V^2)\frac{1-E(Z)}{2}$$

Or, en utilisant les résultats de la loi uniforme

$$E(U^2) = V(U) + E(U)^2 = \frac{(1-(-3))^2}{12} + (-1)^2 = \frac{16}{12} + 1 = \frac{7}{3}$$

et

$$E(V^2) = V(V) + E(V)^2 = \frac{7}{3}$$

Ainsi,

$$\boxed{E(X^2) = \frac{7}{3}\frac{1+2p-1}{2} + \frac{7}{3}\frac{1-(2p-1)}{2} = \frac{7}{3}}$$

4. (a) Notons $S = 2T - 1$. $T(\Omega) = \{0, 1\}$ donc $S(\Omega) = \{-1, 1\}$. De plus

$$\mathbb{P}(S = -1) = \mathbb{P}(2T - 1 = -1) = \mathbb{P}(T = 0) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(2T - 1 = 1) = \mathbb{P}(T = 1) = 1 - p$$

Ainsi, S a la même loi que Z.

(b) On simule U et V avec une loi uniforme, Z avec la loi de Bernoulli et en utilisant le résultat précédent, et enfin X en utilisant le $3a$. Cela donne donc :

```
U = grand(1,1,"unf",-3,1)      // U Loi uniforme sur [-3, 1]
V = grand(1,1,"unf",-1,3)      // V Loi uniforme sur [-1, 3]
T = grand(1,1,"bin",1,p)       // T Loi de Bernoulli de paramètre p
Z = 2*T-1                      // Z = 2T-1 d'après question 4a)

X = U * (1+Z)/2 + V * (1-Z)/2 // X suivant question 3a)
```

Problème

Partie 1 : questions préliminaires

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

   (b) En déduire que : $\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$.

   (c) Établir par encadrement que l'on a : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0$.

   (d) En déduire que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

2. Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule de triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall\, q \geqslant m, \quad \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} P\big((S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j)\big)$$

   (b) En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall\, k \in [\![n,+\infty[\![, \quad P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}$$

   (c) En déduire, pour tout x de $]0,1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

   (d) On rappelle que la commande `grand(1,n,"geom",p)` permet à `Scilab` de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
   Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n.

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1  : ')
S = -----
disp(S)
```

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = -\frac{q^k}{k\ln p}$$

1. (a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

   (b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = u_k$$

2. (a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

   (b) Montrer également que X possède une variance et vérifie que $\mathrm{V(X)} = \dfrac{-q(q+\ln p)}{(p\ln p)^2}$.

3. Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'événement $(\mathrm{X} = k)$, est la loi binomiale de paramètre k et p.

   (a) Montrer que $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la question 1) de la partie 1, pour montrer que :

   $$\mathbb{P}(\mathrm{Y} = 0) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$$

   (b) Après avoir montré que, pour tout couple (k,n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = -\dfrac{p^n q^n}{n\ln p}\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(q^2)^{k-n}$.

   En déduire, grâce à la question 3) de la première partie, l'égalité :

   $$\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = -\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln p}$$

   (c) Vérifier que l'on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) = 1$.

   (d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln p$ et q.

   (e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a :

   $$\mathrm{V(Y)} = -\frac{q(q+(1+q)\ln p)}{(\ln p)^2}$$

Solution. **Partie 1**

1. (a) Pour $t \in [0,1]$ (et donc $t \neq 0$), en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} t^p = \frac{1-t^n}{1-t}$$

(b) Le résultat précédent étant vrai pour tout t dans $[0,x]$, on intègre le résultat précédent entre 0 et x :

$$\int_0^x \sum_{p=1}^n t^{p-1} dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

soit, on utilisant la linéarité de l'intégration à nouveau :

$$\sum_{p=1}^n \int_0^x t^{p-1} dt = [-\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

et finalement

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

(c) Constatons que, pour tout t dans $[0,x]$, $1 \geqslant 1-t \geqslant 1-x \geqslant 0$. Ainsi

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant t^n$$

En intégrant ce résultat entre 0 et x (avec $0 \leqslant x$) :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leqslant \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Puisque $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$. Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$$

Ainsi, par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

(d) D'après ce qui précède,

$$\lim_{n\to+\infty} -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = -\ln(1-x)$$

et donc, d'après $1b$), on en déduit que

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$$

2. Soit P_q la proposition définition pour $q \geqslant m$ par

$$\mathrm{P}_q : \sum_{k=m}^q \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

- Pour $q = m$, $\sum\limits_{k=m}^m \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1$ et $\binom{m+1}{m+1} = 1$. P_m est donc vraie.

- Supposons la proposition P_q vraie pour un certain $q \geqslant m$ fixé. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} + \binom{q+1}{m} \\
&= \binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{q+2}{m+1} \text{ par la formule du triangle}
\end{aligned}$$

La proposition P_{q+1} est donc vraie

Par le principe de récurrence, la proposition P_q est donc vraie pour tout $q \geqslant m$.

3. (a) Pour tout k, $X_k(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Par somme, on a

$$S_n(\Omega) = [\![n; +\infty [\![$$

Remarquons que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. En utilisant $(S_n = j)_{j \in [\![n;+\infty [\![}$ comme système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k) &= \sum_{j=n}^{+\infty} P((S_n = j) \cap (S_{n+1} = k) \\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} P((S_n = j) \cap (X_{n+1} = k - j)) \text{ car } X_{n+1} = S_{n+1} - S_n \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} P((S_n = j) \cap (X_{n+1} = k - j)) \text{ car } P(X_{n+1} = i) = 0 \text{ si } i < 1
\end{aligned}$$

(b) Soit P_n la proposition définie pour $n \geqslant 1$ par "P_n : S_n suit la loi indiquée".

- Pour $n = 1$, $S_1 = X_1$ et pour tout $k \geqslant 1$:

$$\binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-1} = \binom{k-1}{0} x(1-x)^{k-1} = x(1-x)^{k-1}$$

on reconnait la définition de la loi géométrique de paramètre x. Ainsi, P_1 est vraie.

- Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé.

Soit $k \geqslant n+1$. D'après la question précédente

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1}=k) &= \sum_{j=n}^{k-1} P((S_n=j)\cap(X_{n+1}=k-j)) \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} P(S_n=j)P_{(S_n=j)}(X_{n+1}=k-j) \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} P(S_n=j)P(X_{n+1}=k-j) \text{ par mutuelle indépendance des } X_i \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^n(1-x)^{j-n}(x(1-x)^{k-j-1}) \text{ par H.R. et loi géométrique} \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^{n+1}(1-x)^{k-n-1} \\
&= x^{n+1}(1-x)^{k-n-1}\sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} \\
&= x^{n+1}(1-x)^{k-n-1}\binom{k}{n} \text{ d'après 2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, S_{n+1} suit bien la loi de l'énoncé.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

(c) Par définition d'une loi de probabilité, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n=k)=1$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^n(1-x)^{k-n}=1$$

soit encore

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n}=\frac{1}{x^n}$$

(d) S représente la somme de n lois géométriques de paramètre p indépendantes. Ainsi, on a

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1 : ')
S = sum( grand(1,n,"geom",x) )
disp(S)
```

Partie 2

1. (a) Puisque $p \in]0,1[$, $\ln p < 0$ et $q > 0$. Par produit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k > 0$.

(b) Soit $\mathrm{N} \geqslant 1$. Alors

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} u_k = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} -\frac{q^k}{k \ln p} = -\frac{1}{\ln p} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{q^k}{k}$$

D'après la question 1d) de la partie 1, on sait que

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{q^k}{l} = -\ln(1-q) = -\ln(1-(1-p)) = -\ln(p)$$

Ainsi, la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ converge, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{\ln(p)}(-\ln(p)) = 1$$

2. (a) X admet une espérance si et seulement si $\sum_{k=1}^{+\infty} k u_k$ est convergente (car à termes positifs). Soit $\mathrm{N} \geqslant 1$. On a

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k u_k = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} -k\frac{q^k}{k \ln(p)} = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} q^k = -\frac{1}{\ln(p)} \frac{q-q^{\mathrm{N}+1}}{1-q}$$

Puisque $-1 < q < 1$, $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} q^{\mathrm{N}} = 0$. Ainsi, la série est convergente, et

$$\boxed{\mathrm{E(X)} = \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k = -\frac{1}{\ln(p)} \frac{q}{1-q} = -\frac{q}{p\ln(p)}}$$

(b) Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$k^2 \mathrm{P(X} = k) = -\frac{1}{\ln(p)} k^2 \frac{q^k}{k} = -\frac{1}{\ln(p)} k q^k$$

On reconnait le terme d'une série géométrique dérivée première, avec $-1 < q < 1$. Donc la série est convergente, et puisqu'elle est à terme positif, est également absolument convergente. Donc X admet un moment d'ordre 2 et

$$\mathrm{E(X^2)} = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} k q^k = -\frac{1}{\ln(p)} \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{-q}{\ln(p) p^2}$$

X admet donc une variance, et par la formule de Koenig Huyghens :

$$\mathrm{V(X)} = \mathrm{E(X^2)} - \mathrm{E(X)}^2 = -\frac{q}{\ln(p) p^2} - \left(-\frac{q}{p\ln(p)}\right)^2 = \frac{-q\ln(p) - q^2}{(p\ln(p))^2} = \frac{-q(\ln(p)+q)}{(p\ln(p))^2}$$

3. (a) Conditionné à $(\mathrm{X} = k)$, $\mathrm{Y}(\Omega) = [\![0, k]\!]$. Puisque ceci est valable pour tout $k \geqslant 1$, on a bien

$$\mathrm{Y}(\Omega) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} [\![0, k]\!] = \mathbb{N}$$

Prenons $(X = k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ comme système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{(X=k)}(Y=0) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \binom{k}{0} p^0 (1-p)^{k-0} \text{ en utilisant la loi binomiale} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k (1-p)^k \\
&= -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k}(1-p)^k \\
&= -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(q(1-p))^k}{k}
\end{aligned}$$

En utilisant la question $1d)$ de la partie 1 (car $0 \geqslant q(1-p) < 1$), on obtient finalement

$$\mathbb{P}(Y=0) = -\frac{1}{\ln(p)} \times (-\ln(1-q(1-p)))$$

Or $1-q(1-p) = 1-q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)$, d'où finalement

$$\mathbb{P}(Y=0) = -\frac{1}{\ln(p)}(-\ln(p) - \ln(1+q)) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$$

(b) Remarquons que pour $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $k \geqslant n$, on a

$$n\binom{k}{n} = n\frac{k!}{n!(k-n)!} = \frac{k!}{(n-1)!(k-n)!} = k\frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-1-(n-1))!} = k\binom{k-1}{n-1}$$

Donc le résultat annoncé est vrai. Celui-ci est également vrai si $k < n$, car dans ce cas, les deus nombres binomiaux sont nuls.
En reprenant le même système complet d'événement que précédemment, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{(X=k)}(Y=n) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \\
&= -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k}\binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \\
&= -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{n}\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} \text{ d'après le résultat précédent}
\end{aligned}$$

En sortant tout ce qui ne dépend pas de k :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) &= -\frac{1}{\ln(p)}\frac{p^n}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} q^k\binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}\\
&= -\frac{p^n}{\ln(p)n}\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}q^n q^{k-n}(1-p)^{k-n}\\
&= -\frac{p^n q^n}{\ln(p)n}\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}((1-p)^2)^{k-n}
\end{aligned}$$

Or, $(1-p)^2 = 1+p^2-2p = 1+p(p-2) = 1-p(1+q)$ et en utilisant la question $3c)$ $(0<q^2<1)$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) = -\frac{p^n q^n}{\ln(p)n}\frac{1}{(p(1+q))^n} = -\frac{q^n}{(1+q)^n\ln(p)n}$$

4. On a également pour $k \geqslant 1$

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{\left(\frac{q}{1+q}\right)^k}{k}$$

D'après le résultat de la question $1d)$ de la partie 1

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{q}{1+q}\right)^k}{k} = -\ln\left(1-\frac{q}{1+q}\right) = -\ln\left(\frac{1}{1+q}\right) = \ln(1+q)$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = 1+\frac{\ln(1+p)}{\ln(p)}+\left(-\frac{1}{\ln(p)}\ln(1+q)\right) = 1$$

5. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$n\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) - \frac{q^n}{(1+q)^n\ln(p)} = -\frac{1}{\ln(p)}\left(\frac{q}{1+q}\right)^n$$

On reconnait le terme d'une série géométrique positive convergente car $0 \leqslant \frac{q}{1+q} < 1$. Ainsi, Y admet une espérance, et

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{\frac{q}{1+q}}{1-\frac{q}{1+q}} = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{1} = -\frac{q}{\ln(p)}$$

6. Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$n^2\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) = -\frac{1}{\ln(p)}n\left(\frac{q}{1+q}\right)^n$$

On reconnait une série géométrique dérivée première, dont la raison est $0 \leqslant \frac{q}{1+q} < 1$. La série converge, et étant positive, Y admet un moment d'ordre 2 qui vaut

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}^2) = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{\frac{q}{1+q}}{\left(1-\frac{q}{1+q}\right)^2} = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{\frac{q}{1+q}}{\frac{1}{(1+q)^2}} = -\frac{1}{\ln(p)}q(1+q)$$

et donc, par la formule de Koenig Huyghens, on a

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = -\frac{1}{\ln(p)} q(1+q) - \left(-\frac{q}{\ln(p)}\right)^2 = \frac{-\ln(p) q(1+q) - q^2}{(\ln(p))^2}$$

et finalement

$$\boxed{V(Y) = \frac{-q(\ln(p)(1+q)+q)}{(\ln(p))^2}}$$