Chapitre 6

Généralités sur les suites

Résumé

Dans ce chapitre, on reprend les notions connues sur les suites, et on ajoute des suites de références : les suites arithmético-géométriques, et les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Plan du cours

Chapitre 6. **Généralités sur les suites**

I. Généralités 3
II. Monotonie, majoration, minoration 4
III. Suites arithmétiques et géométriques 8
IV. Suites arithmético-géométrique 11
V. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 12
VI. Utilisation de Python pour les suites 14
Exercices 19
Corrigés 22

> *« Une suite de petites volontés fait un gros résultat. »*
>
> Charles Baudelaire (1821 – 1867). *Mon Coeur mis à nu*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les généralités sur les suites :

- Connaître la méthode de représentation des suites .... □
- Savoir démontrer des variations par étude de fonctions .... □
- Savoir démontrer des variations par la méthode $u_{n+1} - u_n$ .... □
- Savoir démontrer des variations par récurrence .... □
- Savoir démontrer une majoration par récurrence .... □

② Concernant les suites particulières :

- Savoir étudier les suites arithmétiques et géométriques .... □
- Savoir étudier les suites arithmético-géométriques .... □
- Connaître la méthode d'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 .... □

I. Généralités

1. Définition et notations

Définition 6.1.

Une **suite numérique réelle** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{R}$.

Notation

Soit u une suite.

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

La suite u peut aussi se noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n). L'élément u_n est appelé **terme de rang** n de la suite u.

2. Trois types de définition de suites

On peut définir une suite de trois manières différentes.

a. Définition explicite

La suite peut être définie explicitement :

- v est la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- u est la suite définie par u_n est la $n^{\text{è}}$ décimale de π, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- w est la suite définie par

$$\begin{cases} w_n = 3n + 2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ w_n = \dfrac{1}{n} + 4 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

b. Définition par récurrence

Elle peut également être définie par récurrence :

- u est la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2 \times u_n - 1$.
- $\begin{cases} u_0 = & 2 \\ \forall\ n,\ u_{n+1} = & \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

Remarque

Pour déterminer u_n dans le cas d'une suite définie par récurrence, il est nécessaire de calculer $u_0, u_1, \dots u_{n-1}$ pour déterminer ensuite u_n. Par exemple, dans le cas de la suite u définie précédemment, pour calculer u_2 :

$$u_0 = -1 \text{ donc } u_1 = 2 \times u_0 - 1 = -3 \text{ et donc } u_2 = 2 \times u_1 - 1 = -7$$

c. Définition implicite

Une suite peut également être définie de manière implicite, par exemple par une équation.

Exemple 6.1

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 3$ par u_n est l'unique solution de l'équation $\ln(x) =$

nx.

3. Opérations sur les suites

Puisque les suites sont des fonctions particulières, on dispose des mêmes opérations générales :

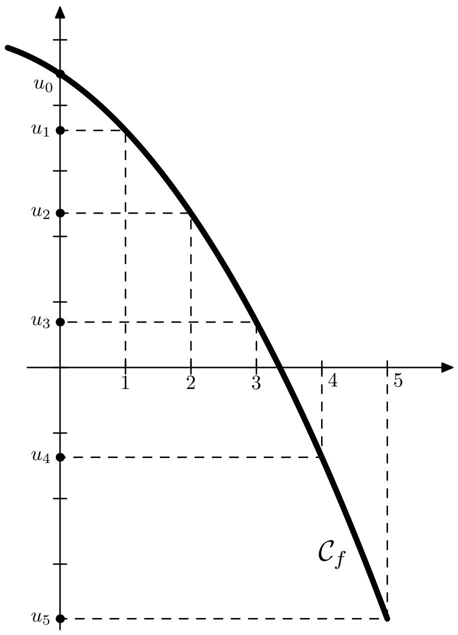
Définition 6.2.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note :

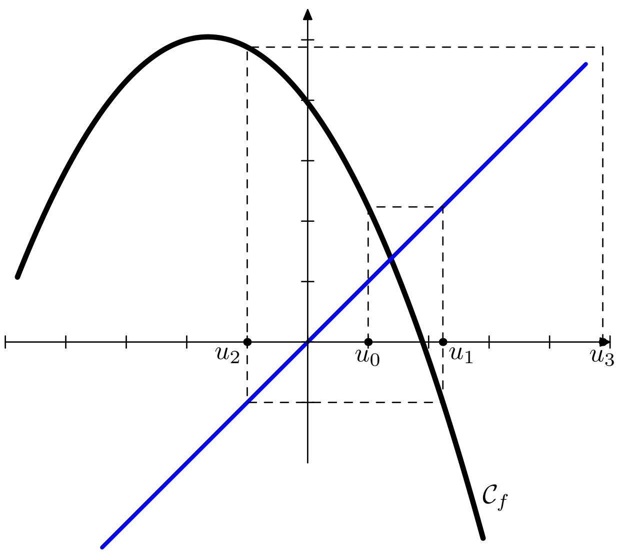
- La suite $u + v$ est la suite w définie pour tout n par $w_n = u_n + v_n$.
- La suite $u \times v$ est la suite w définie pour tout n par $w_n = u_n \times v_n$.
- La suite αu est la suite w définie pour tout n par $w_n = \alpha v_n$.
- Si la suite (v_n) ne s'annule jamais, $\frac{u}{v}$ est la suite w définie pour tout n par $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.
- La suite $|u|$ est la suite w définie pour tout n par $w_n = |u_n|$.

4. Représentation graphique d'une suite

On représente une suite définie explicitement par l'ensemble des points $(n; u_n)$. On peut également représenter les suites définies par récurrence par une représentation « en toile d'araignée ».



Définition $u_n = f(n)$



Définition par récurrence, $u_0 = 1$

II. Monotonie, majoration, minoration

1. Suites monotones

Définition 6.3. Monotonie

Soit (u_n) une suite.

…

- On dit que (u_n) est une suite **croissante** si $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n.
- On dit que (u_n) est une suite **décroissante** si $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout n.
- On dit qu'une suite est **constante** s'il existe un réel a tel que, pour tout n, $u_n = a$.
- Une suite **monotone** est une suite soit croissante, soit décroissante.

Remarque

- On a aussi des suites strictement croissantes ou strictement décroissantes.
- Une suite peut n'être monotone qu'à partir d'un certain rang n_0, c'est à dire $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \geqslant n_0$ (par exemple).
- Une suite est dite **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.

Définition 6.4. Périodique

Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est périodique s'il existe un entier $T \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout n, $u_{n+T} = u_n$.

2. Méthodes de recherche des variations d'une suite

a. Pour les suites $u_n = f(n)$

Théorème 6.1.

Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) est croissante.
Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration

Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$n < n+1 \implies u_n = f(n) \leqslant f(n+1) = u_{n+1}$$

Exemple 6.2

- Soit u la suite définie par $u_n = n^2$ pour tout n. La fonction $x \mapsto x^2$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- La suite u définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ est strictement décroissante, car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Méthode

Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = f(n)$, on introduit la fonction f associée, et on étudie ses variations. On en déduit alors la monotonie de u.

Exercice 6.3

Soit u la suite définie pour tout entier n par $u_n = n^2 - 4n + 2$. Déterminer la monotonie de u.

Solution

Introduisons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 2$. f étant un trinôme du second degré, on connait ses variations : ici, $a = 1 > 0$, $b = -4$ donc $-\frac{b}{2a} = 2$. Ainsi, f est

décroissante sur $]-\infty; 2]$ et est croissante sur $[2; +\infty[$.
La suite (u_n) est donc croissante pour $n \geqslant 2$.

b. Termes consécutifs

Théorème 6.2. Etude de la différence de deux termes consécutifs

Soit une suite u donnée. On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n, alors la suite u est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout n, alors la suite u est décroissante.

Théorème 6.3. Etude du quotient de deux termes consécutifs

Soit une suite u à termes *strictement positifs*, on peut utiliser :
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp. > 1) alors la suite u est croissante (resp. strictement croissante).
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ (resp. < 1) alors la suite u est décroissante (resp. strictement décroissante).

Remarque

Cette méthode est, en général, reservée aux suites définies par des puissances.

Exemple 6.4

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2+1}$ pour tout n. Alors, pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2+1} > 0$: la suite (u_n) est donc strictement croissante.
- La suite u définie pour tout n par $u_n = \frac{5^n}{2^{n+1}}$ est strictement croissante. En effet, elle est à termes strictement positifs, et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{5^n}{2^{n+1}}} = \frac{5^{n+1}}{2^{n+2}} . \frac{2^{n+1}}{5^n} = \frac{5}{2} > 1$$

Conséquence 6.4.

- Si $a > 1$, la suite (a^n) est strictement croissante.
- Si $a = 1$, la suite (a^n) est constante.
- Si $0 < a < 1$, la suite (a^n) est strictement décroissante.

Démonstration

Pour tout réel $a > 0$, on constate que la suite (a^n) est à termes strictement positifs. Enfin, en notant pour tout entier n, $u_n = a^n$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = a$$

Ainsi, la suite (a^n) est strictement croissante si $a > 1$, et strictement décroissante si $a < 1$. Elle est enfin constante si $a = 1$.

☞ *Exercice 1.*

c. Par récurrence

Méthode

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut étudier sa monotonie par récurrence, en prenant comme hypothèse de récurrence P_n : « $u_{n+1} \geqslant u_n$ » pour montrer que la suite est croissante, ou P_n : « $u_{n+1} \leqslant u_n$ » pour montrer qu'elle est décroissante.

Exemple 6.5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Montrer que la suite u est croissante.

Solution

Soit (P_n) la propriété définie pour tout n par P_n:« $u_{n+1} \geqslant u_n$ ».

- **initialisation** : $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2} \geqslant u_0$. Donc P_0 est vraie.
- **hérédité** : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain n. Alors

  $u_{n+1} \geqslant u_n \Rightarrow u_{n+1}+1 \geqslant u_n+1 \Rightarrow \sqrt{u_{n+1}+1} \geqslant \sqrt{u_n+1}$ car la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}^+$

  Donc $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$: la propriété est héréditaire.
- **conclusion** : la propriété est donc vraie pour tout n : $\forall\ n,\ u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite u est donc croissante.

3. Suites majorées, minorées, bornées

Définition 6.5.

- Une suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leqslant u_n$ pour tout n. m s'appelle un **minorant**.
- Une suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $M \geqslant u_n$ pour tout n. M s'appelle un **majorant**.
- Une suite **bornée** est une suite à la fois majorée et minorée : il existe deux réels m et M tels que pour tout n :

$$m \leqslant u_n \leqslant M$$

Exemple 6.6

La suite u définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est bornée :

$$\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

☞ *Exercice 2.*

Méthode

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut également montrer qu'elle est bornée par récurrence.

Exemple 6.7

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer que, pour tout n, $u_n \leqslant 2$.

Solution

Soit (P_n) la propriété définie pour tout n par P_n : « $u_n \leqslant 2$ ».

- **initialisation** : $u_0 = 1 \leqslant 2$. P_0 est donc vraie.
- **hérédité** : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain n. Alors

  $$u_n \leqslant 2 \Rightarrow u_n + 2 \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{u_n+2} \leqslant \sqrt{4} \text{ car la fonction racine est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

  Donc $u_{n+1} \leqslant 2$: la propriété est héréditaire.
- **conclusion** : la propriété est donc vraie pour tout n : $\forall\ n,\ u_n \leqslant 2$. La suite u est donc majorée par 2.

☞ *Exercices 3, 4 et 5.*

III. Suites arithmétiques et géométriques

1. Suites arithmétiques

Définition 6.6. Suite arithmétique

Une **suite arithmétique** est une suite (u_n) définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\ n, u_{n+1} = u_n + a \text{ où } a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le réel a est appelé **raison** de la suite (u_n), et u_0 est le **premier terme**.

Exemple 6.8

La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + 2$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Théorème 6.5. Expression explicite

Soit u une suite arithmétique, de premier terme u_0 et de raison a. Alors, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 + na.$$

Démonstration

Soit P_n la proposition « $u_n = u_0 + na$ » définie pour tout entier n.

- Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $u_0 = u_0 + 0 \times a$: P_0 est donc vraie.
- Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n. Alors, on a

  $$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{déf de } u} u_n + a \underbrace{=}_{\text{HR}} (u_0 + na) + a = u_0 + (n+1)a$$

  P_{n+1} est donc vraie.
- La proposition P_n, d'après le principe de récurrence, est donc vraie pour tout n.

On peut également démontrer ce théorème par téléscopage.

Remarque

Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison a, on a également

$$\forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p + (n-p)a$$

Exemple 6.9
Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -3. Alors, pour tout entier n, $u_n = 2 - 3n$.

On en déduit le résultat suivant concernant la monotonie des suites arithmétiques :

Proposition 6.6. Monotonie

Soit u une suite arithmétique, de premier terme u_0 et de raison a. Alors u est strictement croissante si $a > 0$, constante si $a = 0$ et strictement décroissante si $a < 0$.

Théorème 6.7. Somme des termes

Soit u une suite arithmétique, de raison a. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$. Alors,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2} = (\text{nb de terme}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Démonstration

- Première démonstration : astucieuse.
  Soit $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$. D'une part
  $$S = u_p + (u_p + a) + (u_p + 2a) + \cdots + (u_p + (n-p)a)$$
  et d'autre part
  $$S = u_n + (u_n - a) + (u_n - 2a) + \cdots + (u_n - (n-p)a)$$
  En sommant les deux égalités,
  $$2S = (u_p + u_n) + (u_p + u_n) + \cdots + (u_p + u_n)$$
  Avec $n-p+1$ termes. On a donc $2S = (n-p+1)(u_p + u_n)$, ce qui donne le résultat.
  On aurait pu également le démontrer par récurrence sur n.
- Deuxième démonstration : avec le symbole $\sum$.

$$\begin{aligned}
u_p + \ldots + u_n &= \sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{n} \left(u_p + (k-p)a\right) && \text{d'après le résultat précédent} \\
&= \sum_{i=0}^{n-p} \left(u_p + ia\right) && \text{en posant } i = k-p \\
&= \sum_{i=0}^{n-p} u_p + a\sum_{i=0}^{n-p} i && \text{par linéarité} \\
&= u_p\,(n-p+1) + a\frac{(n-p)(n-p+1)}{2} \\
&= (n-p+1)\left(\frac{2u_p + (n-p)a}{2}\right) \\
&= (n-p+1)\,\frac{u_p + \left(u_p + (n-p)a\right)}{2} \\
&= (n-p+1)\,\frac{u_p + u_n}{2} && \text{car } u_n = u_p + (n-p)a.
\end{aligned}$$

Exemple 6.10 (Classique)
En s'intéressant à la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1, on a

$$1 + 2 + \cdots + n = n\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Suites géométriques

Définition 6.7. Suite géométrique

Une **suite géométrique** est une suite (u_n) définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\ n, u_{n+1} = q \times u_n \text{ où } q \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n), et u_0 est le **premier terme**.

Exemple 6.11
La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Théorème 6.8. Expression explicite

Soit u une suite géométrique, de premier terme u_0 et de raison q. Alors, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Démonstration
Soit P_n la proposition « $u_n = u_0 \times q^n$ » définie pour tout entier n.

- Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $u_0 = u_0 q^0$: P_0 est donc vraie.
- Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n. Alors, on a

$$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{dèf de } u} q \times u_n \underbrace{=}_{\text{HR}} q \times (u_0 \times q^n) = u_0 \times q^{n+1}$$

  P_{n+1} est donc vraie.
- La proposition P_n, d'après le principe de récurrence, est donc vraie pour tout n.

Remarque
Si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, on a également

$$\forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple 6.12
Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -3. Alors, pour tout entier n, $u_n = 2 \times (-3)^n$.

On en déduit le résultat suivant concernant la monotonie des suites arithmétiques :

Proposition 6.9. Monotonie

Soit u une suite géométrique, de premier terme u_0 et de raison q. Alors

- Si $u_0 = 0$, ou $q = 1$, la suite est constante.

…

- Si $q > 1$, la suite est strictement croissante si $u_0 > 0$, strictement décroissante si $u_0 < 0$.
- Si $q \in]0,1[$, la suite est strictement décroissante si $u_0 > 0$, strictement croissante si $u_0 < 0$.
- Si $q = 0$, la suite est stationnaire à 0.
- Si $q < 0$, la suite n'est pas monotone.

Théorème 6.10. Somme des termes

Soit u une suite géométrique, de raison $q \neq 1$. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$. Alors,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{u_p - qu_n}{1-q} = \frac{\text{1er terme} - \text{terme à suivre}}{1 - \text{raison}}$$

Démonstration

Soit p un entier fixé. Soit P_n la proposition « $u_p + \cdots + u_n = \frac{u_p - qu_n}{1-q}$ » définie pour tout entier $n \geqslant p$.

- Initialisation : $\frac{u_p - qu_p}{1-q} = u_p \frac{1-q}{1-q} = u_p$: P_p est donc vraie.
- Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour un certain entier $n \geqslant p$. Alors

  $$u_p + \cdots + u_n + u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{HR}} \frac{u_p - qu_n}{1-q} + u_{n+1} = \frac{u_p - qu_n + u_{n+1} - qu_{n+1}}{1-q} \underbrace{=}_{\text{dèf de } u} \frac{u_p - qu_{n+1}}{1-q}$$

  P_{n+1} est donc vraie.
- D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout $n \geqslant p$.

Exemple 6.13 (Classique)

En s'intéressant à la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q, on a

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - qq^n}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

☞ *Exercices 6 et 7.*

IV. Suites arithmético-géométrique

1. Définition

Définition 6.8.

Une suite **arithmético-géométrique** est une suite u définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\ n,\ u_{n+1} = au_n + b, \quad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Remarque

Si $b = 0$, la suite u est une suite géométrique de raison a. Si $a = 1$, la suite u est une suite arithmétique de raison b.

Exemple 6.14
La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - 1$ est une suite arithmético-géométrique.

2. Etude d'une suite arithmético-géométrique

Théorème 6.11.

Soit u une suite arithmético-géométrique vérifiant, pour tout n, $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.
Soit ℓ l'unique réel vérifiant $\ell = a\ell + b$ (c'est-à-dire $\ell = \frac{b}{1-a}$).
Alors, la suite (v_n), définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique, de raison a.

Démonstration
En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. On a, en soustrayant membre à membre :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & = & au_n & + \ b \\ \ell & = & a\ell & + \ b \\ \hline u_{n+1} - \ell & = & a(u_n - \ell) & \end{array}$$

c'est-à-dire $v_{n+1} = av_n$ pour tout n.

Méthode
Pour étudier une suite arithmético-géométrique, on procédera ainsi :
- On cherche le réel ℓ vérifiant $\ell = a\ell + b$
- On introduit la suite $v = u - \ell$ et on montre qu'elle est géométrique.
- On en déduit l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exemple 6.15
Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Solution
- On cherche le réel ℓ vérifiant $\ell = 2\ell - 3 \Leftrightarrow \ell = 3$.
- On pose v la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 3$. On a alors

  $$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 = 2u_n - 6 = 2(v_n + 3) - 6 = 2v_n$$

  La suite v est donc géométrique, de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -2$.
- On a donc, pour tout entier n, $v_n = v_0 \times 2^n = -2 \times 2^n = -2^{n+1}$. En revenant à la suite u :

  $$\forall\ n,\ u_n = -2^{n+1} + 3$$

Pour la deuxième étape, on peut également écrire que $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $l = 2l - 3$ et on soustrait : $u_{n+1} - l = 2(u_n - l)$ et donc $v_{n+1} = 2v_n$.

V. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

1. Définition

Définition 6.9.

Une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** est une suite u définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ et } u_1 \text{ sont donnés} \\ \forall\ n,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Remarque

Si $b = 0$, la suite u est une suite géométrique de raison a.

Exemple 6.16

La suite u définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

2. Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

L'idée est de chercher des suites géométriques solutions de la récurrence.

Théorème 6.12.

Soit u une suite récurrente linéaire d'ordre 2, vérifiant pour tout n, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Alors, la suite géométrique (ℓ^n) $(\ell \neq 0)$ est solution de la récurrence si, et seulement si, $\ell^2 = a\ell + b$.

Démonstration

Si on a, pour tout n, $\ell^{n+2} = a\ell^{n+1} + b\ell^n$, puisque $\ell \neq 0$, en divisant par ℓ^n on obtient $\ell^2 = a\ell = b$. La réciproque est également vraie.

Théorème 6.13.

Soit u une suite récurrente linéaire d'ordre 2, vérifiant pour tout n, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On pose (E) l'équation $X^2 = aX + b$, appelée **équation caractéristique**.

- Si l'équation (E) possède deux solutions distinctes q_1 et q_2, alors il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout n,
$$u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$$
- Si l'équation (E) possède une racine double q_0, alors il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout n,
$$u_n = (\lambda n + \mu)q_0^n$$

Remarque

On utilise les valeurs de u_0 et u_1 pour déterminer les deux nombres réels λ et μ.

Méthode

Pour déterminer l'expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux :

- On pose l'équation caractéristique (E).
- On détermine les solutions de l'équation caractéristique.
- Une fois la (ou les) solution(s) trouvée(s), on écrit u_n sous la forme $\lambda q_1^n + \mu q_2^n$ ou $(\lambda n + \mu)q_0^n$, et on utilise les deux premiers termes pour obtenir un système nous

donnant λ et μ

Exemple 6.17
Soit u la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Solution

- Soit (E) l'équation $X^2 = -X + 2$. Les solutions sont 1 et -2.
- Il existe donc deux réels λ et μ vérifiant, pour tout n,
$$u_n = \lambda \times 1^n + \mu(-2)^n = \lambda + \mu(-2)^n$$
- En utilisant u_0 et u_1, on a donc
$$\begin{cases} 0 = \lambda + \mu \\ 3 = \lambda + (-2\mu) \end{cases}$$
ce qui donne $\mu = -1$ et $\lambda = 1$.
- Conclusion : pour tout entier n, on a
$$u_n = 1 - (-2)^n$$

☞ *Exercices 8, 9, 10, 11 et 12.*

VI. Utilisation de Python pour les suites

L'outil informatique peut être très important dans le cas des suites : il peut permettre de calculer des valeurs (ou en tout cas des approximations) des termes successif d'une suite définie par récurrence lorsque nous n'avons pas de formule générale.
Par ailleurs, il peut permettre de représenter les termes d'une suite afin de pouvoir émettre des conjectures (concernant la monotonie, ou en lien avec le chapitre suivant, sa limite éventuelle).
On va pour cela utiliser les listes de Python, vu dans le chapitre 3.

1. Suites définies par récurrence

Supposons que l'on ait une suite définie par récurrence de la forme $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = F(u_n)$.
L'idée de fonctionnement pour calculer le n-ième terme d'une suite sera tout d'abord d'initialiser une variable, par exemple `u`, à la valeur du premier terme de la suite.
Ensuite, nous allons calculer de proche en proche les termes jusqu'à atteindre le n-ième terme. Pour cela, nous allons utiliser une boucle `for`.
Si on ne souhaite pas déterminer la valeur d'un terme, mais savoir quand une certaine valeur sera dépassée par la suite (algorithme dit « de seuil »), on utilisera dans ces cas-là plutôt une boucle `while`.
Dans la suite, nous prendrons comme exemple la suite u définie pour tout entier n par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$.

a. Terme d'une suite

On va tout d'abord définir la fonction qui construire la suite, à savoir $f : x \longmapsto \ln(x + 1)$:

Code Python

```python
import numpy as np # Pour ln
def f(x): return np.log(x+1)
```

Ensuite, si on souhaite par exemple le 40-ième terme de la suite, on fait une boucle jusqu'à atteindre le rang 40 :

Code Python

```python
u = 2   # On initialise la variable u à la valeur de u_0 = 2

for i in range(40): # rappel : la boucle ira de 0 à 39
    u = f(u)        # on remplace u par f(u) qui représente le terme suivant de la suite
```

Cela donne ainsi :

Console Python

```
>>> u
np.float64(0.21507105376358)
```

Si on souhaite non pas un terme mais tous les termes de la suite jusqu'à un certain rang, on va utiliser une liste qui gardera en mémoire chacun des termes. Par exemple, si on veut les 10 premiers termes :

Code Python

```python
L = [0]*10    # Raccourci pour créer une liste avec 10 fois '0'
u = 2         # u vaut u_0 = 2
L[0] = u      # la première valeur de la liste représente u_0

for i in range(1,10): # Attention, si on veut 10 valeurs, on fait 9 itérations
    u = f(u)  # nouvelle valeur
    L[i] = u  # on met cette valeur dans la liste au bon endroit
```

ce qui donne

Console Python

```
>>> L
[2, np.float64(1.0986122886681098), np.float64(0.7412763113750154), \
↪ np.float64(0.5546183566222742), np.float64(0.44123008568346517), np.float64(0.3654969751134523), \
↪ np.float64(0.3115184470650497), np.float64(0.27118558557586003), \
↪ np.float64(0.2399499969500413), np.float64(0.21507105376358)]
```

On peut simplifier la rédaction en utilisant la méthode `append` : il suffit de partir d'une liste vide et d'ajouter le nouveau terme à la liste :

Code Python

```python
L = []      # Liste vide
u = 2        # u contient u_0
L.append(u) # on ajoute le premier terme

for i in range(1,9):
    u = f(u)    # nouvelle valeur
    L.append(u)    # ajout à la liste
```

2. Somme des termes d'une suite

Avec une légère adaptation, on peut aussi calculer la somme des termes d'une suite définie par récurrence : il suffit d'utiliser en plus une variable, par exemple `s`, qui retiendra la valeur de la somme. Par exemple :

Code Python

```python
u = 2    # première valeur
s = 2    # la somme est égale à u_0 pour commencer

for i in range(1,10): # 9 itérations, ce qui calculera u_0 + ... + u_9 =
    u = f(u)
    s = s + u
```

et ainsi

Console Python

```
>>> s
np.float64(6.238959100458303)
```

Remarque

Comme on peut le voir dans les différents exemples, le plus important est de compter le bon nombre d'itération dans le `range`, suivant le résultat que l'on souhaite obtenir. On n'oubliera pas que :

- `range(a,b)` va de a inclus à b exclu et compte $b-a$ itérations ;
- `range(b)` va de 0 inclus à b exclus et compte donc b itérations.

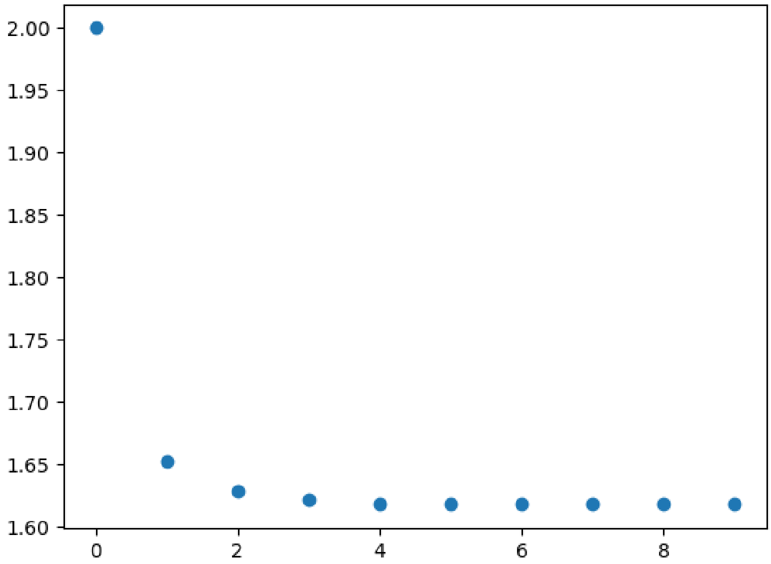
3. Représentation d'une suite

La représentation d'une suite se fait exactement comme pour une fonction, à ceci près que les suites sont représentées par des points, et les points ne doivent pas être reliés.
Si la suite est définie par récurrence, il faut créer une liste des valeurs, afin de l'utiliser comme liste des ordonnées.
Toujours avec le même exemple :

Code Python

```python
import matplotlib.pyplot as plt

X = range(10)      # On représente les 10 première valeurs
Y = [0]*10         # Liste des valeurs de la suite

u = 2
Y[0] = u

for i in range(1,10):
    u = f(u)
    Y[i] = u

plt.plot(X,Y, 'o') # noter le 'o' pour avoir des points
plt.show()
```

et cela donne :



Exercice 6.18

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n$. Écrire une fonction calculant le 20-ième terme de la suite.

Solution

Exercices

6

Exercices

Sens de variation, majoration, minoration

●○○ **Exercice 1 Variations** (20 min.)

- Soit u la suite définie pour tout n par $u_n = \frac{n-1}{n+2}$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- Etudier le sens de variation des suites $\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$, $\left(\frac{2^n}{n}\right)$ et $\left(\frac{n}{2n-1}\right)$

●○○ **Exercice 2 Majoration, minoration** (10 min.)

Déterminer si les suites suivantes sont majorées, minorées, ou bornées.

- La suite u définie par $u_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$.
- La suite v définie par $v_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

> ***Méthode***
> On peut calculer les premiers termes pour avoir une idée d'un majorant M ou minorant m. On calcule ensuite $u_n - M$ ou $u_n - m$ et on étudie le signe de cette différence.

Suites et récurrence

●○○ **Exercice 3 Suite récurrente I** (15 min.)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.

●○○ **Exercice 4 Suite récurrente II** (20 min.)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que
$$\forall\ n,\ u_n > n^2$$
3. Conjecturer, puis démontrer, une expression de u_n en fonction de n.

●○○ **Exercice 5 Suite récurrente III** (15 min.)

On considère la suite (u_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \forall\ n,\ u_{n+1} & = & \sqrt{4u_n - 3} \end{array}\right.$$

1. Montrer que pour tout n, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Suites arithmétiques et géométriques

●○○ Exercice 6 Justifications (10 min.)

Les suites suivantes sont elles arithmétiques ? géométriques ?

1. La suite u définie pour tout n par $u_n = 3n + 5$.
2. La suite v définie pour tout n par $v_n = \frac{n+1}{n^2+1}$.
3. La suite w définie pour tout n par $w_n = 3 \times 2^n$.

Méthode

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on calcule $u_{n+1} - u_n$. Pour montrer qu'elle est géométrique, on part de u_{n+1} pour essayer de montrer qu'elle s'écrit qu_n.
Pour montrer qu'une suite n'est ni arithmétique, ni géométrique, on calcule les premiers termes et on les utilise pour le montrer.

●○○ Exercice 7 Calculs (10 min.)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Sachant que $r = 2$, et $u_4 = 30$, déterminer u_0 et u_8. Déterminer $u_0 + u_1 + \cdots + u_8$.
- Sachant que $u_4 = 35$ et $u_2 = 15$, déterminer r et u_0. Déterminer $u_0 + u_1 + \cdots + u_4$.
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. Sachant que $v_2 = 5$ et $v_3 = 7$, déterminer q et v_4.

Suites arithmético-géométrique et récurrente linéaire d'ordre 2

●○○ Exercice 8 Expressions en fonction de n (30 min.)

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour les suites suivantes :

1. $u_0 = 4$ et $\forall\ n,\ u_{n+1} = 2u_n - 3$
2. $u_0 = -2$ et $\forall\ n,\ u_{n+1} + 3u_n = 1$
3. $u_0 = -1$ et $\forall\ n,\ u_{n+1} + u_n = 2u_n - 4$.
4. $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall\ n,\ u_{n+2} = -2u_{n+1} + 15u_n$
5. $u_0 = 2,\ u_1 = 4$ et $\forall\ n,\ u_{n+2} = 8u_{n+1} - 16u_n$

Exercices bilans

●○○ Exercice 9 Exercice bilan I (20 min.)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par $u_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$$

1. Démontrer que si $u_{n+1} = 1$ alors $u_n = 1$. En déduire que pour tout n, $u_n \neq 1$.
2. On pose pour tout entier n, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique, puis exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

●○○ Exercice 10 Exercice bilan II (30 min.)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$$

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Démontrer que si $u_{n+1} = -2$ alors $u_n = -2$. En déduire que pour tout n,
$$u_n \neq -2$$
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leqslant u_n \leqslant 3$$
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier n par
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$
   a) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie pour tout n.
   b) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Quelle est sa raison ?
   c) Exprimer v_n en fonction de n.
   d) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n. Que vaut u_{10} ?

●●○ Exercice 11 Exercice bilan III (30 min.)

On consdière les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{2}{u_n} \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Calculer $v_0; u_1; v_1; u_2; v_2$. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.
2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$
4. Montrer que pour tout n, $u_n \geqslant v_n$.
5. Montrer que (u_n) est décroissante, et (v_n) est croissante.
6. Montrer que pour tout n, $u_n - v_n \leqslant 1$, et en déduire que $(u_n - v_n)^2 \leqslant u_n - v_n$.
7. Montrer que pour tout n,
$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$
   En déduire que pour tout n, $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$.

●●○ Exercice 12 Exercice bilan IV (30 min.)

Soit u la suite vérifiant la relation

$$\forall \ n, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \text{ avec } u_0 = 1, u_1 = 2$$

1. Démontrer que pour tout entier n, $u_n > 0$. On considère alors la suite w définie pour tout n par $w_n = \ln(u_n)$.
2. Montrer que la suite w suit une récurrence linéaire d'ordre 2. Expliciter alors le terme général de la suite w. En déduire celui de la suite u.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

- Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1-1}{n+1+2}-\frac{n-1}{n+2}=\frac{n}{n+3}-\frac{n-1}{n+2}=\frac{n(n+2)-(n-1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}=\frac{3}{(n+3)(n+2)}$$

Puisque pour tout entier naturel n, $n+2>0$ et $n+3>0$, on en déduit que pour tout n, $u_{n+1}-u_n>0$.
Bilan : la suite (u_n) est strictement croissante.
- Notons les suites respectivement v, w et z. De la même manière, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{(n+1)^2+1}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}=\frac{n^2+n-1}{n(n+1)}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $n-1 \geqslant 0$ et donc $n-1+n^2 \geqslant 0$ (car $n^2 \geqslant 0$). Ainsi

$$\forall\ n \geqslant 1,\ v_{n+1}-v_n \geqslant 0$$

Bilan : la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$w_{n+1}-w_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^n}{n}=\frac{2^{n+1}n-2^n(n+1)}{n(n+1)}=\frac{2^n(n-1)}{n(n+1)}$$

Pour $n \geqslant 1$, on a $2^n>0$, $n-1 \geqslant 0$ et $n(n+1)>0$. Par quotient, pour tout entier $n \geqslant 1$, $w_{n+1}-w_n \geqslant 0$.
Bilan : la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Pour tout entier n, on a

$$z_{n+1}-z_n=\frac{n+1}{2(n+1)-1}-\frac{n}{2n-1}=\frac{(n+1)(2n-1)-n(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{-1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $2n-1>0$ et $2n+1>0$ donc par quotient,

$$\forall\ n \geqslant 1,\ z_{n+1}-z_n<0$$

Bilan : la suite (z_n) est strictement décroissante à partir du rang 1.

Exercice 2

- Pour tout entier n, on a $n+2>0$ et $2n+1>0$ donc par quotient,

$$\forall\ n,\ u_n>0$$

Il semblerait qu'elle soit majorée par 2. Calculons u_n-2 :

$$\forall\ n,\ u_n-2=\frac{n+2}{2n+1}-2=\frac{n+2-2(2n+1)}{2n+1}=\frac{-n}{2n+1}$$

Pour tout entier n, $-n \leqslant 0$ et $2n+1>0$ donc $u_n-2 \leqslant 0$.
Bilan : $\forall\ n,\ 0<u_n \leqslant 2$.
Remarque : on peut aussi montrer que pour tout entier n, $u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

- Pour tout entier $n > 0$, on a $n^2 + 2 > 0$ et donc

$$\forall \ n \geqslant 1, \ v_n > 0$$

Constatons également que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n = \frac{n^2+2}{n} = \frac{n^2}{n} + \frac{2}{n} = n + \frac{2}{n} \geqslant n$$

car $\frac{2}{n} > 0$.
Or la suite w définie pour tout n par $w_n = n$ n'est pas majorée. Par comparaison, la suite v n'est pas majorée.
Bilan : v est minorée par 0 mais n'est pas majorée.

Exercice 3

- Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$0 \leqslant u_n \leqslant 2$".

◦ Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 2$. La proposition P_0 est donc vraie.
◦ Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Mais alors

$$2 \leqslant 2 + u_n \leqslant 4$$

soit, en appliquant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2+u_n} \leqslant \sqrt{4}$$

c'est-à-dire

$$0 \leqslant \sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : $\forall \ n, \ 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

- Soit Q la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$u_n \leqslant u_{n+1}$".

◦ Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{3}$. On a donc $1 < \sqrt{3}$: la proposition Q_0 est donc vraie.
◦ Supposons la proposition Q_n vraie pour un certain entier n. Montrons que Q_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Mais alors

$$2 + u_n \leqslant 2 + u_{n+1}$$

soit, en appliquant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{2+u_n} \leqslant \sqrt{2+u_{n+1}}$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$

La proposition Q_{n+1} est donc vraie
D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : la suite (u_n) est croissante.

Exercice 4

- Constatons que pour tout entier n, on a

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 2n + 3) - u_n = 2n + 3$$

et $2n + 3 > 0$ pour tout entier n.
Bilan : la suite (u_n) est strictement croissante.

- Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n > n^2$".

◦ Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $1 > 0^2$. La proposition P_0 est donc vraie.

∘ Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n > n^2$. Mais alors

$$u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$$

soit,

$$u_{n+1} > (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : $\forall\ n,\ u_n > n^2$.

- Après calcul des premières valeurs, il semblerait que $u_n = (n+1)^2$. Montrons-le par récurrence.

Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n = (n+1)^2$".
∘ Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $1 = (0+1)^2$. La proposition P_0 est donc vraie.
∘ Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n = (n+1)^2$. Mais alors

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = \underbrace{(n+1)^2}_{\text{H.R.}} + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : $\forall\ n,\ u_n = (n+1)^2$.

Exercice 5

- Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$1 \leqslant u_n \leqslant 3$".

∘ Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $1 \leqslant 2 \leqslant 3$. La proposition P_0 est donc vraie.
∘ Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$. Mais alors $4 \leqslant 4u_n \leqslant 12$ puis $1 \leqslant 4u_n - 3 \leqslant 9$ soit, en appliquant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{4u_n - 3} \leqslant \sqrt{9}$$

c'est-à-dire

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : $\forall\ n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

- Soit Q la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$u_n \leqslant u_{n+1}$".

∘ Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{7}$. On a donc $2 < \sqrt{7}$: la proposition Q_0 est donc vraie.
∘ Supposons la proposition Q_n vraie pour un certain entier n. Montrons que Q_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Mais alors

$$4u_n - 3 \leqslant 4u_{n+1} - 3$$

soit, en appliquant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{4u_n - 3} \leqslant \sqrt{4u_{n+1} - 3}$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$

La proposition Q_{n+1} est donc vraie
D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : la suite (u_n) est croissante.

Exercice 6

- Remarquons que, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 3$. La suite (u_n) est donc arithmétique, de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.
- On a $v_0 = 1$, $v_1 = 1$ et $v_2 = \frac{3}{5}$. On remarque alors que

$$v_1 - v_0 = 0 \text{ et } v_2 - v_1 = -\frac{2}{5} \neq v_1 - v_0$$

La suite v n'est donc pas arithmétique.
De même, on a

$$\frac{v_1}{v_0} = 1 \text{ et } \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{5} \neq \frac{v_1}{v_0}$$

La suite v n'est pas géométrique.
- Remarquons que, pour tout entier n, $w_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 2 \times 3 \times 2^n = 2 \times w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique, de raison 2 et de premier terme $w_0 = 3$.

Exercice 7

> ***Méthode***
> On utilise les propriétés d'une suite arithmétique et géométrique, dont l'écriture en fonction de n.

- On a $u_0 = u_4 + (0-4)r = 30 - 8 = 22$. De même, $u_8 = u_4 + (8-4)r = 30 + 8 = 38$. Enfin, d'après la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$u_0 + \cdots + u_8 = 9 \times \frac{u_0 + u_8}{2} = 9 \times 30 = 270$$

- De même, on a $u_4 = u_2 + (4-2)r$, c'est-à-dire $35 = 15 + 2r$, ce qui donne $r = 10$. On a alors

$$u_0 = u_2 + (0-2)r = 15 - 20 = -5$$

et enfin

$$u_0 + \cdots + u_4 = 5 \times \frac{u_0 + u_4}{2} = 5 \times 15 = 75$$

- (v_n) étant géométrique, on a $v_3 = qv_2$, soit $q = \frac{v_3}{v_2} = \frac{7}{5}$. Mais alors,

$$u_4 = qu_3 = \frac{7}{5} \times 7 = \frac{49}{5}$$

Exercice 8

1. La suite u est arithmético-géométrique. En introduisant x tel que $x = 2x - 3$, c'est-à-dire $x = 3$, et en posant v la suite définie par $v_n = u_n - 3$, on en déduit que la suite (v_n) est géométrique, de raison 2 et de premier terme $v_0 = 1$. Ainsi,

$$\boxed{\forall\ n,\ v_n = 2^n \text{ et } u_n = 2^n + 3}$$

2. La suite u vérifie $u_{n+1} = -3u_n + 1$ et est donc arithmético-géométrique. En notant le réel l vérifiant $l = -3l + 1$, c'est-à-dire $l = \frac{1}{4}$, et en introduisant la suite v définie par $v_n = u_n - \frac{1}{4}$, on en déduit que la suite v est géométrique, de raison -3 et de premier terme $v_0 = -\frac{9}{4}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall\ n,\ v_n = -\frac{9}{4}(-3)^n \text{ et } u_n = -\frac{9}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}}$$

3. La suite u vérifie $u_{n+1} = u_n - 4$ et est donc arithmétique, de raison -4 et de premier terme $u_0 = -1$. Ainsi,

$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = -1 - 4n}$$

4. u est récurrente linéaire d'ordre 2. En introduisant (E) l'équation caractéristique $X^2 = -2X + 15$, de racines -5 et 3. Ainsi, il existe a et b tels que, pour tout n, $u_n = a(-5)^n + b3^n$. En utilisant $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 1 \\ -5a & + & 3b & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{8} \\ b & = & \frac{7}{8} \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = \frac{1}{8}(-5)^n + \frac{7}{8}3^n}$$

5. De la même manière, u est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $X^2 = 8X - 16$, qui admet comme unique racine 4. Ainsi, il existe deux réels a et b tels que, pour tout n, $u_n = (an+b)4^n$. En utilisant u_0 et u_1, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 0 & + & b & = & 2 \\ (a & + & b)4 & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & 2 \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = (-n+2)4^n}$$

Exercice 9

1. Si on a $u_{n+1} = 1$, alors $\dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3} = 1$, c'est-à-dire $5u_n - 1 = u_n + 3$, soit $4u_n = 4 \Leftrightarrow u_n = 1$.
Supposons alors par l'absurde qu'il existe un entier n tel que $u_n = 1$. D'après ce qui précède, on a alors $u_{n-1} = 1$, puis $u_{n-2} = 1$, et ainsi, $u_0 = 1$. Or, $u_0 = 2$, c'est donc absurde.
Bilan : $\forall\ n,\ u_n \neq 1$.
2. Remarquons tout d'abord que la suite v est bien définie, puisque $u_n \neq 1$. Pour montrer que v est arithmétique, calculons $v_{n+1} - v_n$ pour tout entier n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{5u_n - 1}{u_n + 3} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$$

soit

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{5u_n - 1 - (u_n + 3)}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3}{4u_n - 4} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3 - 4}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{4}$$

Ainsi, la suite v est arithmétique, de raison $\frac{1}{4}$, et de premier terme $v_0 = 1$. Ainsi,

$$\forall\ n,\ v_n = 1 + \frac{n}{4}$$

3. Pour tout n, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$, donc $u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$, soit $u_n = 1 + \frac{1}{v_n}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{n}{4}} = 1 + \frac{4}{4+n} = \frac{8+n}{4+n}}$$

Exercice 10

1. On a $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{4}{3}$. On constate alors que $u_1 - u_0 = -\frac{5}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{5}{6} \neq u_1 - u_0$. Donc u n'est pas arithmétique. De même,

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{6} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{3} \neq \frac{u_1}{u_0}$$

Ainsi, la suite u n'est pas géométrique.
2. Si $u_{n+1} = -2$, alors $\frac{2}{1+u_n} = -2$, c'est-à-dire $2 = -2(1+u_n)$ et donc $4 = -2u_n \Leftrightarrow u_n = -2$.
Supposons alors par l'absurde qu'il existe un entier n tel que $u_n = -2$. D'après ce qui précède, on a alors $u_{n-1} = -2$, puis $u_{n-2} = -2$, et ainsi, $u_0 = -2$. Or, $u_0 = 3$, c'est donc absurde.
Bilan : $\forall\ n,\ u_n \neq -2$.
3. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$0 \leqslant u_n \leqslant 3$".
∘ Pour $n = 0$, $u_0 = 3$ et $0 \leqslant 3 \leqslant 3$. La proposition P_0 est donc vraie.
∘ Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$. Mais alors $1 \leqslant 1 + u_n \leqslant 4$ soit, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{2}{1} \geqslant \frac{2}{1+u_n} \geqslant \frac{2}{4}$$

c'est-à-dire

$$3 \geqslant 2 \geqslant u_{n+1} \geqslant \frac{1}{2} \geqslant 0$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : $\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
4. a) D'après la question 2, on sait que pour tout n, $u_n \neq -2$, et donc $u_n + 2 \neq 0$. La suite (v_n) est donc bien définie.
b) On a $v_0 = \frac{2}{5}$, $v_1 = -\frac{1}{5}$ et $v_2 = \frac{1}{10}$. Ainsi, la suite v semble géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Démontrons-le : pour tout entier n, on a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2}{1+u_n} - 1}{\frac{2}{1+u_n} + 2} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}}$$

et donc

$$v_{n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n}\frac{1+u_n}{4+2u_n} = \frac{-(u_n-1)}{2(u_n+2)} = -\frac{1}{2}\frac{u_n-1}{u_n+2} = -\frac{1}{2}v_n$$

Ainsi, la suite v est géométrique, de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{2}{5}$.
c) On a donc, pour tout entier n,

$$v_n = \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

d) Puisque $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$, on a alors

$$v_n(u_n+2) = u_n - 1 \text{ soit } u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n \text{ et donc } u_n = \frac{-1-2v_n}{v_n - 1} = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$$

Bilan :

$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = \frac{1 + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{5 \times 2^n + 4 \times (-1)^n}{5 \times 2^n - 2 \times (-1)^n}}$$

Exercice 11

1. Rapidement on a $v_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$, $v_1 = \frac{4}{3}$, $u_2 = \frac{17}{12}$ et $v_2 = \frac{24}{17}$.

2. Faisons une récurrence liée. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : “$1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$”.

- Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_0 \leqslant 2$. Ainsi, P_0 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est également vraie. Par hypothèse de récurrence, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$ et en additionnant ces deux inégalités

$$2 \leqslant u_n + v_n \leqslant 4 \text{ soit } 1 \leqslant \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant 2$$

donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. En appliquant la fonction inverse, qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$1 \geqslant \frac{1}{u_{n+1}} \geqslant \frac{1}{2} \text{ et donc } 2 \geqslant \frac{2}{u_{n+1}} \geqslant 1$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n, et donc pour tout entier n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.

3. Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{\frac{u_n+v_n}{2}} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{4}{u_n + v_n}$$

et donc

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 8}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2 - 8}{2(u_n + v_n)}$$

Or $v_n = \frac{2}{u_n}$ donc $u_nv_n = 2$. Donc $8 = 4u_nv_n$. Ainsi,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2 - 4u_nv_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

4. Puisque, pour tout entier n, $u_n \geqslant 1 > 0$ et $v_n \geqslant 1 > 0$, on a $2(u_n + v_n) > 0$ et donc, par quotient, $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$. Puisqu'on a également $u_0 - v_0 = 1 \geqslant 0$, on en déduit :

$$\forall\ n,\ u_n \geqslant v_n$$

5. Constatons que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2}$$

D'après le résultat précédent, on en déduit donc que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier n. Donc (u_n) est décroissante.

Enfin, puisque $0 < u_{n+1} \leqslant u_n$, en appliquant la fonction inverse qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{u_{n+1}} \geqslant \frac{1}{u_n} \text{ soit } v_{n+1} \geqslant v_n$$

Ainsi, ceci étant vrai pour tout entier n, la suite (v_n) est croissante.

6. Notons, pour tout entier n, $w_n = u_n - v_n$. On a alors, pour tout entier n,

$$w_{n+1} - w_n = \underbrace{u_{n+1} - u_n}_{\leqslant 0} - (\underbrace{v_{n+1} - v_n}_{\geqslant 0}) \leqslant 0$$

La suite (w_n) est donc décroissante. Ainsi, pour tout entier n,

$$w_n \leqslant w_0 = 1$$

On a donc, d'après ce qui précède et la question 4., pour tout entier n,

$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant 1$$

Or, quand $x \in [0; 1]$, on a $x^2 \leqslant x$, donc

$$\forall\ n,\ (u_n - v_n)^2 \leqslant u_n - v_n$$

7. Pour tout entier n, on a

$$2 \leqslant u_n + v_n \leqslant 4 \text{ et donc } 4 \leqslant 2(u_n + v_n) \leqslant 8$$

soit, en appliquant la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{2(u_n + v_n)} \geqslant \frac{1}{8}$$

Enfin, puisque $(u_n - v_n)^2 \geqslant 0$,

$$\frac{(u_n - v_n)^2}{4} \geqslant \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geqslant \frac{(u_n - v_n)^2}{8}$$

En utilisant le résultat de la question 6, on obtient finalement que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)^2 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$

Soit alors P la proposition définie, pour tout entier n, par P_n : "$u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$".
- Pour $n = 0$, on a $u_0 - v_0 = 1$ et $\frac{1}{4^0} = 1$. Donc $u_0 - v_0 \leqslant \frac{1}{4^0}$ et P_0 est vraie.
- Supposons que P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après ce qui précède, on a

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$

Par hypothèse de récurrence, $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$. Donc

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$$

Donc P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n, et donc pour tout entier n, $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$.

Exercice 12

1. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "u_n existe et $u_n > 0$". Démontrons P par récurrence double.
- Initialisation : pour $n = 0$, u_0 existe bien et $u_0 = 1 > 0$. De même, u_1 existe et $u_1 = 2 > 0$. Donc P_0 et P_1 sont vraies.
- Hérédité : supposons les propositions P_n et P_{n+1} vraies pour un certain entier n. Montrons que P_{n+2} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$. Par produit $u_n u_{n+1} > 0$. Ainsi u_{n+2} existe bien et $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} > 0$. Donc P_{n+2} est vraie.
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n, et donc $u_n > 0$ pour tout entier n.

2. w est bien définie d'après ce qui précède. Constatons alors que, pour tout entier n,

$$w_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln\left(\sqrt{u_n u_{n+1}}\right)$$

Donc, pour tout entier n

$$w_{n+2} = \frac{1}{2}\ln(u_n u_{n+1}) = \frac{1}{2}(\ln(u_n) + \ln(u_{n+1})) = \frac{1}{2}(w_n + w_{n+1})$$

Donc (w_n) est une suite récurrent linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est

$$X^2 = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$$

de racines 1 et $-\frac{1}{2}$. Ainsi, il existe deux réels a et b tels que, pour tout entier n, $w_n = a+b\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Puisque $w_0 = \ln(u_0) = 0$ et $w_1 = \ln(u_1) = \ln(2)$, on en déduit

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 0 \\ a & - & \frac{1}{2}b & = & \ln(2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & \frac{2}{3}\ln(2) \\ b & = & -\frac{2}{3}\ln(2) \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout entier n,

$$w_n = \frac{2}{3}\ln(2) - \frac{2}{3}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

et donc

$$u_n = \mathrm{e}^{w_n} = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln(2) - \frac{2}{3}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

ce qui donne, finalement

$$\boxed{\forall\ n,\ u_n = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln(2)}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}}$$