Chapitre 5

Généralités sur les fonctions

Résumé

Dans ce chapitre, on rappelle certaines généralités sur les fonctions, et on ajoute certains compléments permettant d'étudier les fonctions (parité, périodicité). On en profite pour revoir les fonctions usuelles (exp, ln, *fonctions puissances) que l'on complète des fonctions trigonométrique.*

Plan du cours

Chapitre 5. **Généralités sur les fonctions**

I. Généralités sur les fonctions 3
II. Limites 12
III. Continuité, dérivabilité 15
IV. Fonctions trigonométrique 21
V. Fonctions de référence 26
VI. Représentation d'une fonction en Python 37
Exercices 43
Corrigés 45

> *« Avant d'être des urgences médicales, les épidémies sont des urgences mathématiques. Car les mathématiques ne sont pas vraiment la science des nombres, elles sont la science des relations : elles décrivent les liens et les échanges entre différentes entités en s'efforçant d'oublier de quoi ces entités sont faites, en les rendant abstraites sous forme de lettres, de fonctions, de vecteurs, de points et de surfaces. La contagion est une infection de notre réseau de relations. »*

Paolo Giordano (1982 –). *Contagions*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① savoir déterminer certaines caractéristiques d'une fonction :

- parité et périodicité . . . . □
- les extrema d'une fonction . . . . □

② savoir déterminer les limites de fonctions :

- par opérations usuelles, par composées . . . . □
- en lien avec le taux d'accroissement . . . . □

③ savoir maîtriser les dérivées et primitives :

- connaître dérivées usuelles et formules de dérivations . . . . □
- étudier les variations d'une fonction avec la dérivée . . . . □
- utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer l'existence de solutions à des équations . . . . □

④ connaître les fonctions usuelles (variations, dérivées, limites, représentation graphique) :

- fonctions affines et trinômes du second degré . . . . □
- fonctions valeur absolue, racine carrée et inverse . . . . □
- fonction partie entière . . . . □
- fonctions ln, exp et puissances . . . . □
- fonctions trigonométriques (cos, sin, tan) . . . . □

⑤ savoir étudier complètement une fonction . . . . □

I. Généralités sur les fonctions

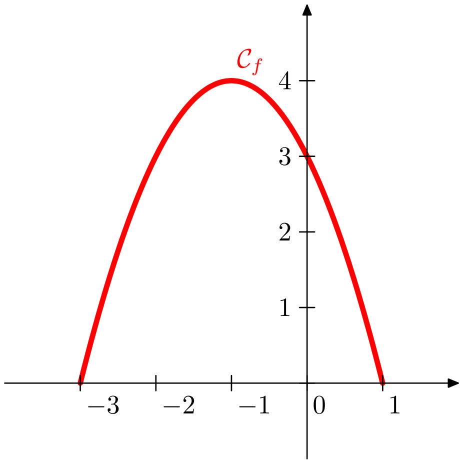
1. Notion de fonction

Définition 5.1.

On appelle **fonction** f, définie sur un domaine I, un objet qui, à partir d'un nombre x de I donné, associe **une unique image** noté $f(x)$.
On note $x \longmapsto f(x)$ pour dire « à x, on associe le nombre $f(x)$ ».

Exemple 5.1

- Fonction définie graphiquement :



- Fonction définie par une formule : $g(x) = 3x^2 + 1$
- Fonction définie par un tableau :

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	1	-3	2	$\frac{1}{2}$	0

Définition 5.2.

On appelle **ensemble de définition** d'une fonction f, noté $\mathcal{D}_f$ en général, l'ensemble de tous les réels x où on peut calculer $f(x)$ (c'est à dire, où $f(x)$ est définie).

Exemple 5.2

En reprenant les fonctions de l'exemple 1 :

- f est définie graphiquement sur $[-3;1]$: en effet, on ne peut calculer $f(x)$ que si $-3 \leqslant x \leqslant 1$.
- g est définie sur $\mathbb{R}$: en effet, pour tout nombre réel x, on peut calculer $3x^2 + 1$, et donc $g(x)$.
- h est définie sur $\{-2;-1;0;1;2\}$.

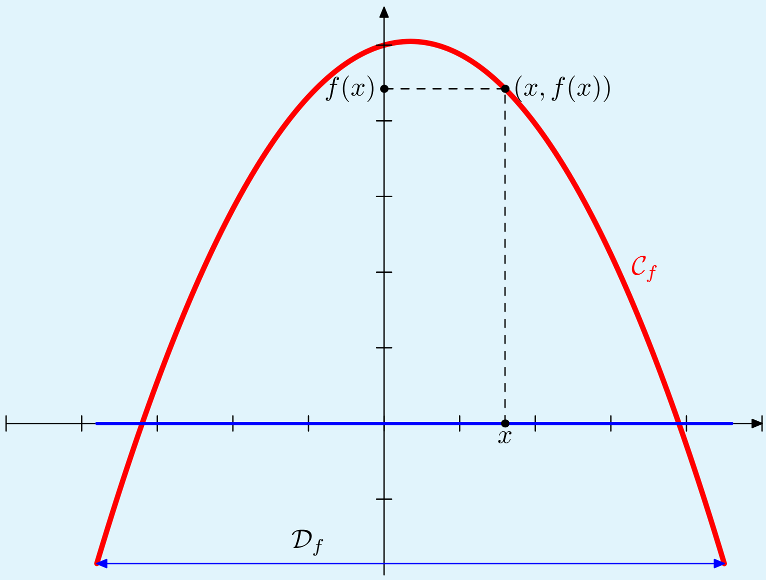
⚠ **Attention**

$f(x)$ est un nombre et non une fonction ! Ainsi, on n'écrira **jamais** « soit $f(x)$ la fonction », mais bien « soit f la fonction ». De même, on dira f est définie sur A et non $f(x)$ est défini sur A.

2. Courbe représentative

Définition 5.3.

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit $(O; I; J)$ un repère (en général orthonormé) du plan. Le **graphe** (ou **courbe représentative**) de f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points $(x; f(x))$ où x décrit l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.



3. Opérations sur les fonctions

Définition 5.4.

Soient f et g deux fonctions définies sur le <u>même ensemble</u> E. Soit λ un réel.

- On appelle $f+g$ la fonction définie sur E par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
- On appelle $f \times g$ la fonction définie sur E par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
- On appelle λf la fonction définie sur E par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- On appelle $f+\lambda$ la fonction définie sur E par $(f+\lambda)(x) = f(x)+\lambda$.
- Si g **ne s'annule pas** sur E, on appelle $\frac{f}{g}$ la fonction définie sur E par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple 5.3

Soient f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x + 1$. Déterminer $f+g$ et $\frac{f}{g}$.

Solution

Par définition, $f+g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(f+g)(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 1$ et $\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x+1}$.

Définition 5.5.

Soit f une fonction définie sur E et prenant ses valeurs dans F. Soit g une fonction définie sur F et à valeur dans G.

La fonction qui, à tout réel x de E, fait correspondre le réel $g(f(x))$ est appelée **fonction** …

composée de f suivie de g. On a ainsi

$$\begin{array}{cccc} E \to & F & \to G \\ x \mapsto & f(x) & \mapsto g(f(x)) \end{array}$$

Cette fonction est notée $g \circ f$.

Exemple 5.4

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-1 \end{array} \right.$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Solution

On a, pour tout réel x,

$$g \circ f(x) = x^2 - 1 \text{ et } f \circ g(x) = (x-1)^2$$

Remarque

Dans le résultat précédent, on remarque que $g \circ f \neq f \circ g$. On dit que la composée n'est pas **commutative**.

Méthode

Pour déterminer la composée de deux fonctions, on étudiera d'abord les domaines de définition pour déterminer le domaine de définition de la fonction composée.

Exemple 5.5

Soit $f : x \mapsto x^2 - 1$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$. Déterminer $g \circ f$.

Solution

$g \circ f(x)$ n'est définie que si $f(x) \geqslant 0$ (car g est la fonction racine, définie sur $\mathbb{R}^+$). Or

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

Ainsi, $g \circ f$ est définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Remarque

On retiendra que, pour que $g \circ f$ soit définie, il faut que f le soit, et que les images des éléments de f soit dans le domaine de définition de g : ainsi,

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) \in \mathcal{D}_g \right\}$$

Proposition 5.1. associativité

Si $f : E \to F,\ g : F \to G,\ h : G \to H$ sont trois fonctions, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

4. Parité et imparité

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

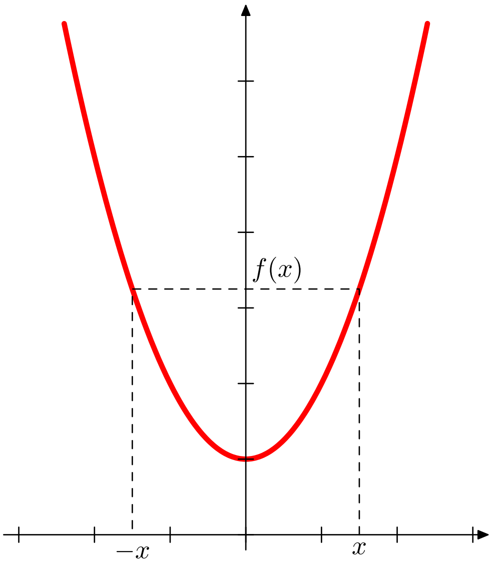
Définition 5.6. Fonction paire

f est dite **paire** si

- $\forall\ x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ (le domaine de définition est symétrique par rapport à 0).
- $\forall\ x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x)$

Remarque

f est paire si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



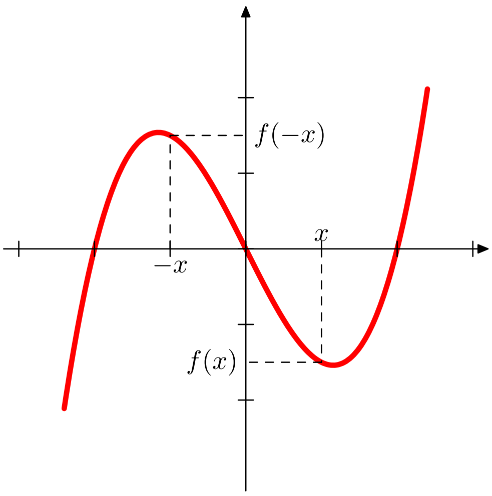
Définition 5.7.

f est dite **impaire** si

- $\forall\ x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ (le domaine de définition est symétrique par rapport à 0).
- $\forall\ x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$

Remarque

f est impaire si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.



Exemple 5.6

La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est une fonction paire ; la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est une fonction impaire. En effet, elles sont définies sur des domaines symétriques par rapport à 0, et

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ (-x)^2 = x^2 \quad \text{et} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

Méthode

Pour déterminer la parité d'une fonction, on procède en deux étapes :

- On vérifie que le domaine est bien symétrique par rapport à 0.
- Pour un certain x dans $\mathcal{D}_f$ on calcule $f(-x)$ et on essaie de retrouver $f(x)$ ou $-f(x)$.

Exercice 5.7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Déterminer la parité de f.

Solution

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ qui est bien symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$f(-x) = \mathrm{e}^{-(-x)^2} = \mathrm{e}^{-x^2} = f(x)$$

La fonction f est donc paire.

Méthode

Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire, ni impaire, on exhibe un contre-exemple : on cherche deux réels x et y dans $\mathcal{D}_f$ tels que $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-y) \neq -f(y)$ (selon le cas, cela peut être le même réel)

Exercice 5.8

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 + x$ n'est ni paire, ni impaire.

Solution

En effet, on constate que, pour $x = 1$, on a

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 0$$

alors que $f(1) = 1^2 + 1 = 2$. Donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$: la fonction n'est ni paire, ni impaire.

5. Périodicité

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

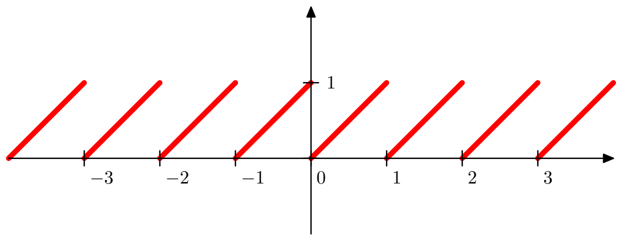
Définition 5.8.

On dit que f est **périodique** de période $T > 0$ si :

- $\forall\ x \in \mathcal{D}_f, \quad x+T \in \mathcal{D}_f$
- $\forall\ x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x+T) = f(x)$

Remarque

La courbe représentative d'une fonction périodique n'est donc qu'une répétition de sa représentation sur $[0;T]$. La fonction suivante est périodique, de période 1 :



Exemple 5.9

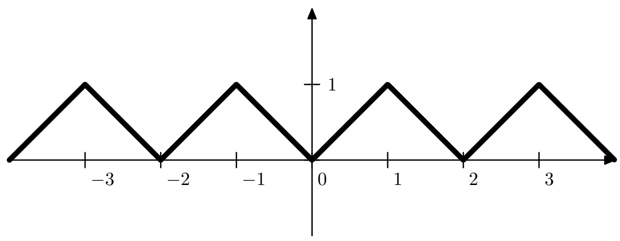
Nous verrons que les fonctions trigonométrique cos, sin, et tan sont périodiques, de période 2π pour cos et sin, π pour tan.

Exercice 5.10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 2, définie pour tout $x \in [0;1]$ par $f(x) = x$. Représenter f.

Solution

La fonction étant paire, on la représente sur $[0;1]$ puis par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, sur $[-1;1]$. On obtient ainsi la courbe représentative sur une période, qu'il suffit de répéter. On obtient la courbe représentative suivante :



6. Sens de variation

Définition 5.9.

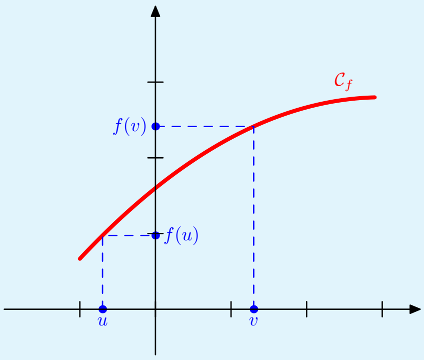
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère.

···

On dit que f est **croissante** sur I si, pour tous nombres réels u et v de l'intervalle I on a

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) \leqslant f(v)$$

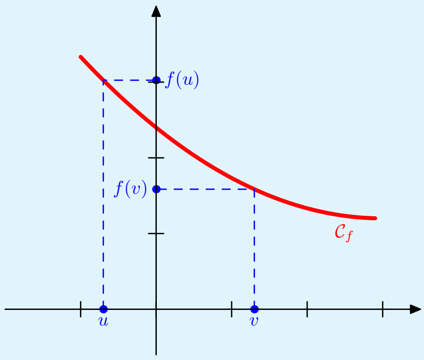
Une fonction croissante conserve l'ordre



On dit que f est **décroissante** sur I si, pour tous nombres réels u et v de l'intervalle I on a

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) \geqslant f(v)$$

Une fonction décroissante change l'ordre



Remarque

On définit également la croissance stricte et la décroissance stricte. Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **strictement croissante** lorsque pour tout u, v de l'intervalle I

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) < f(v)$$

Propriété 5.2.

- La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissante) est croissante (resp. décroissante).
- La composée de deux fonctions ayant le même sens de variation est croissante.
- La composée de deux fonctions ayant des sens de variations contraires est décroissante.

Démonstration

- Soit $x < y$. Si f et g sont croissantes, alors $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$. En additionnant les inégalités, $f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y)$: $f + g$ est bien croissante.
- Soit $x < y$ et f, g deux fonctions croissantes. Alors $f(x) \leqslant f(y)$. Puisque g est croissante, on a également $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$: $g \circ f$ est bien croissante.

Les autres inégalités se démontrent de la même manière.

7. Majorant-Minorant

Définition 5.10.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est dite **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que,

$$\forall\ x \in I, \quad f(x) \leqslant M$$

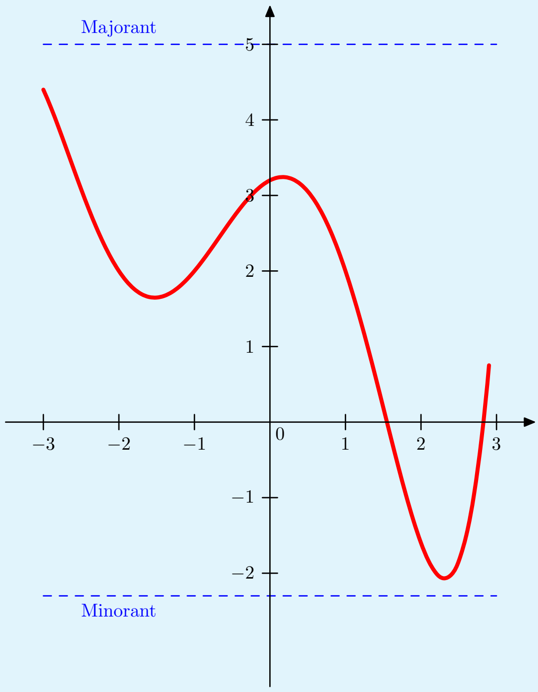
M est appelé un **majorant** de f sur I.

···

- f est dite **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que,

$$\forall\ x \in I, \quad f(x) \geqslant m$$

  m est appelé un **minorant** de f sur I.
- f est dite **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée.



Remarque

Une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est bornée. Ainsi, pour borner f, il peut souvent être judicieux de borner $|f|$.

Exemple 5.11

Soit $f : x \longmapsto 2\sin(x^2+1)$. Alors, pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant 2$. Ainsi, f est bornée.

8. Maximum-Minimum

Définition 5.11.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un nombre réel de l'intervalle I.

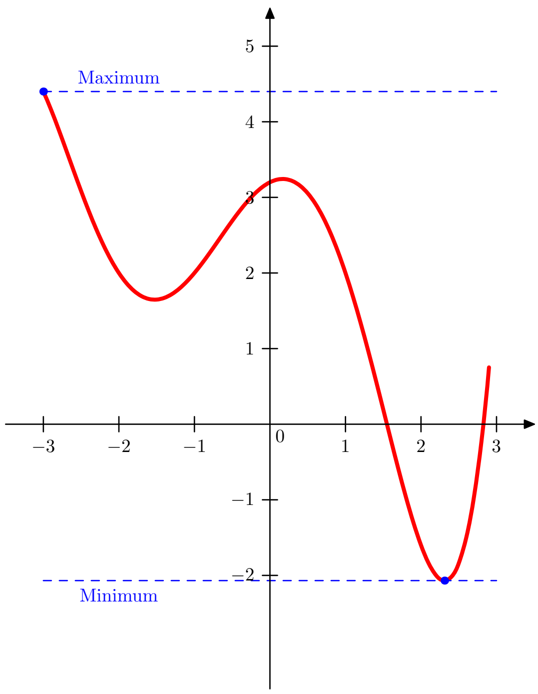
- On dit que f admet un **maximum** en a si, pour tout réel x de I, on

$$f(x) \leqslant f(a)$$

  On note $\max_{x \in I} f(x) = f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum** en a si, pour tout réel x de I, on

$$f(x) \geqslant f(a)$$

  On note $\min_{x \in I} f(x) = f(a)$.



Remarque

On dit que $f(a)$ est un **extremum** de f sur I si $f(a)$ est un minimum ou un maximum de f sur I.
Si $f(a)$ est un extremum sur un intervalle ouvert contenant a, mais pas sur I tout entier, on dit que $f(a)$ est un **extremum local** en a.

9. Image directe, image réciproque

Définition 5.12.

Soit $f : E \to F$ une fonction.

- Si $A \subset E$, on appelle **image directe** de A par f, et on note $f(A)$, l'ensemble composé par les images par f des éléments de A :
$$f(A) = \{y \in F,\ \exists x \in A, f(x) = y\}$$
- Si $B \subset F$, on appelle **image réciproque** de B par f, et on note $f^{-1}(B)$, l'ensemble composé par les antécédents par f des éléments de B :
$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$$

Exemple 5.12

Soit $f : x \mapsto x + 2$. Déterminer $f([0, 1])$ et $f^{-1}([0, 1])$.

Solution

On a :
$$f([0, 1]) = [2, 3] \quad \text{et} \quad f^{-1}([0, 1]) = [-2, -1]$$

10. Restriction

Définition 5.13.

Soit $f : E \to F$ une fonction, et $G \subset E$. On appelle **restriction** de f à G, et on note $f|_G$ l'application définie sur G par

$$\forall\ x \in G,\ f|_G(x) = f(x)$$

II. Limites

L'ensemble des éléments dans cette section sera revu dans l'année, de manière plus détaillée. Il s'agit ici de faire des rappels des années précédentes, dans le but de pouvoir faire des études fonctions.

1. Opérations sur les limites

Rappelons les résultats vu dans les classes précédentes. On suppose connues les limites de deux fonctions f et g.

a. Limite de $f + g$

$\lim g$ / $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Exemple 5.13

$$\lim_{x\to+\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$$

Solution

En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$.

b. Limite de $f \times g$

$\lim g$ / $\lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	signe(ℓ').∞	-signe(ℓ').∞
$+\infty$	signe(ℓ).∞	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	-signe(ℓ).∞	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

Si $\ell = 0$ (et/ou $\ell' = 0$), seul le résultat $\lim(fg) = \ell.\ell' = 0$ est déterminé. Toutes les autres limites (du type "$0 \times \infty$") sont **indéterminées**.

Exemple 5.14

$$\lim_{x\to+\infty} (x\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} 3x\mathrm{e}^{x} = 0$$

Solution

En effet, $\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par produit, $\lim_{x\to+\infty} (x\sqrt{x}) = +\infty$.
De même, $\lim_{x\to 0} 3x = 0$ et $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$. Par produit, $\lim_{x\to 0} 3x\mathrm{e}^x = 0$.

c. Limite de $\frac{f}{g}$

$\lim g$ / $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	signe$(\ell').\infty$	-signe$(\ell').\infty$
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

Si $\lim g = 0$, il faut tout d'abord préciser si $\lim g = 0^+$ (g tend vers 0 en restant positif) ou si $\lim g = 0^-$, et on applique :

$\lim g$ / $\lim f$	0	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	signe$(\ell).\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	-signe$(\ell).\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 5.15

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

Solution

En effet, $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ par somme, et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par quotient, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$.

De même, $\lim_{x\to 0^+} x^2 + 1 = 1$ par somme et $\lim_{x\to 0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$.

2. Limite d'une fonction composée

Théorème 5.3.

Soient f, g, h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$ sur un intervalle I. Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.
Si $\lim_{x\to a} h(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

Démonstration

Admis.

Méthode

Pour déterminer la limite d'une fonction composée $f(x) = g(h(x))$ en x_0 :

- On pose $X = h(x)$.
- On détermine la limite b de X en x_0.

- On détermine la limite c de g en b, et on conclut : la limite de f en x_0 vaut c.

Exemple 5.16

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1}$.

Solution

- On pose $X = x^2+1$. On a

$$\lim_{x \to +\infty} X = +\infty$$

- On a

$$\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Par composée, on a donc

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

Exercice 5.17

Montrer que $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} \dfrac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$.

Solution

Posons $X = 3x-1$. Alors :

- On a $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} 3x-1 = 0^+$.
- De plus, $\lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$ par quotient.

Par composée,

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$$

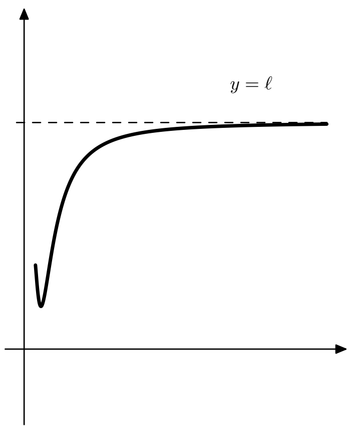
3. Limites et asymptotes

Les asymptotes sont très utiles pour pouvoir tracer au mieux l'allure de la courbe d'une fonction.

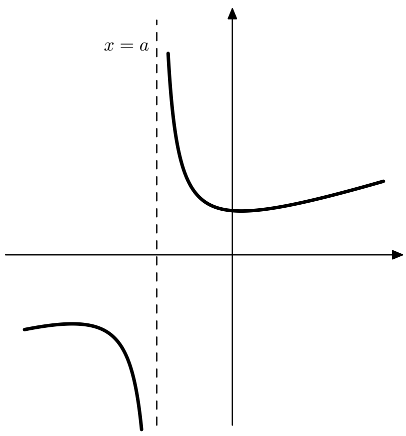
Définition 5.14.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$).

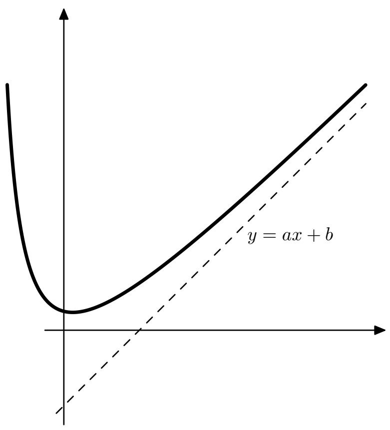
- On dit que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$.
- On dit que la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$).
- On dit que la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax+b) = 0$).



Asymptote horizontale



Asymptote verticale



Asymptote oblique

Remarque

On verra une méthode pour déterminer le comportement asymptotique (incluant les asymptotes obliques) plus tard dans l'année.

III. Continuité, dérivabilité

L'ensemble des éléments dans cette section sera revu dans l'année, de manière plus détaillée. On fait des rappels avec quelques compléments.

1. Continuité

La notion de continuité sera vue ultérieurement, dans le chapitre sur les limites. On rappelle quelques propriétés importantes (théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection).

Définition 5.15.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est continue en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
f est dite continue sur I si elle est continue en tout point de a.

Remarque

En utilisant les propriétés des limites, on en déduit que la somme, le produit, le quotient (quand il existe) et la composée de fonctions continues est continue.

Exemple 5.18

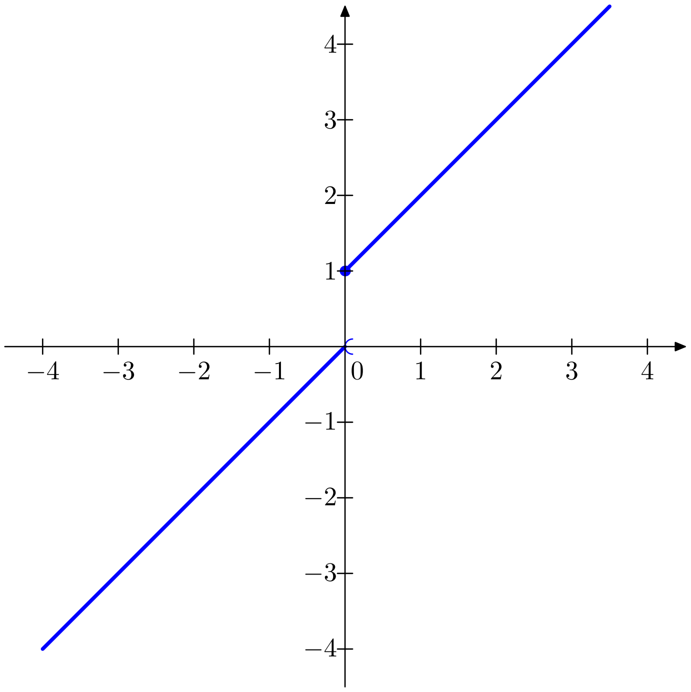
Il y a plusieurs types de discontinuité.

- Un « saut » ou discontinuité de première espèce. Par exemple, la fonction

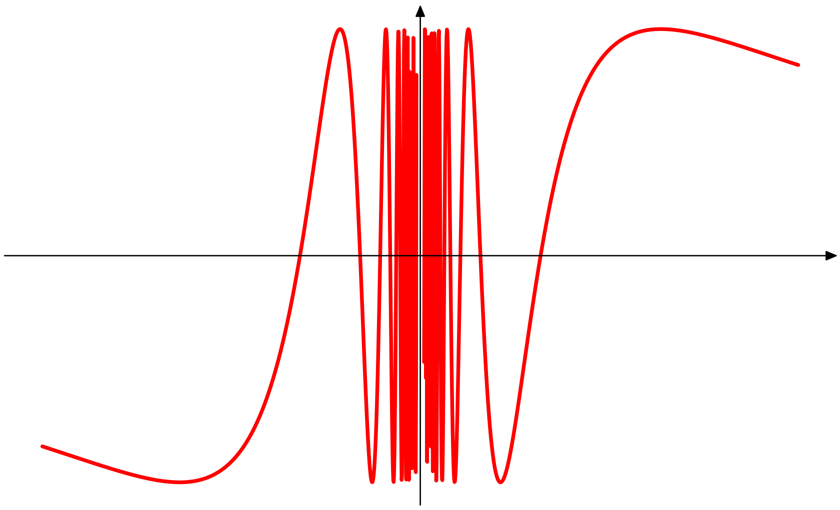
$$f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

  n'est pas continue en 0. En effet,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1 \neq 0$$



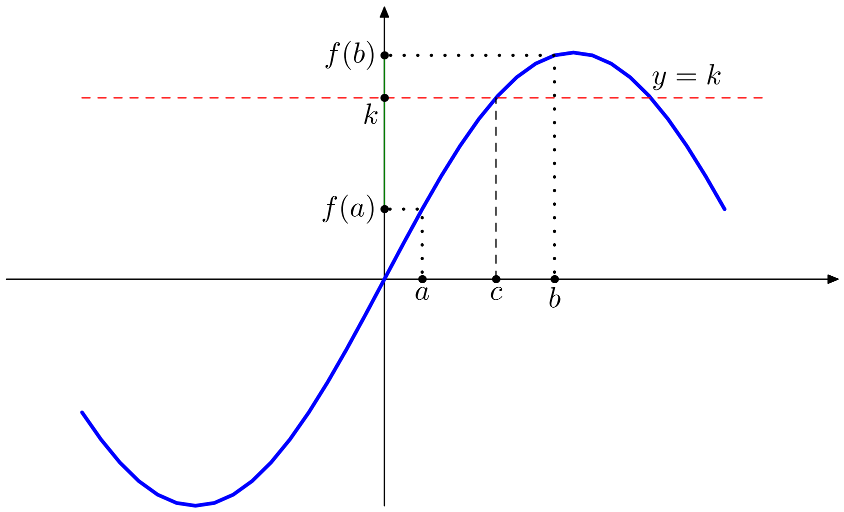
- Une des limites (à gauche ou droite) est infinie ou n'existe pas. On parle de discontinuité de deuxième espèce. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0. En effet, la limite de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ en 0^+ est $+\infty$, et sin n'a pas de limite en $+\infty$.



La continuité est lié à un théorème essentiel : le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 5.4. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel k pris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c de l'intervalle $[a;b]$, tel que $f(c) = k$.



Le théorème suivant est très souvent utilisé, lorsque la fonction est strictement monotone.

Théorème 5.5. Théorème de la bijection

Soit f une fonction **continue strictement monotone** sur l'intervalle $I=[a,\, b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ possède une **unique solution** dans $[a;b]$.

Remarque

Si on est sur un intervalle non borné (par exemple, $[0;+\infty[$), le résultat reste valable, en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites en a et en b.

Exercice 5.19

Prouver que l'équation $(E) : x\sqrt{x}=1-x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Solution

On se ramène à une écriture $f(x)=k$: $x+x\sqrt{x}=1$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x)=x+x\sqrt{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée vaut

$$f'(x)=1+\frac{3}{2}\sqrt{x}>0$$

La fonction f est donc strictement croissante, et continue sur $]0;+\infty[$. L'image de $]0;+\infty[$ est donc

$$\left]\lim_{x\to 0} f(x);\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]0;+\infty[$$

qui contient 1.
L'équation $f(x)=1$ possède donc une unique solution sur $]0;+\infty[$.

Corollaire 5.6.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel positif y, il existe un unique réel positif x tel que $x^n=y$. Ce réel est appelé racine n-ième et est noté $y^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{y}$.

Démonstration

La fonction $f : x\mapsto x^n$ est continue, strictement croissante sur $[0,\, +\infty[$. On a $f(0)=0$

et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection) garantit alors que pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) = x^n = y$.

2. Nombre dérivé et tangente

Intuitivement, la tangente à la courbe d'une fonction f en un point M est la droite qui « colle » au mieux la courbe au voisinage de M. Elle permet d'avoir une idée de l'évolution de la courbe de f autour du point, et permet ainsi d'avoir un tracé précis au voisinage de ce point.

Définition 5.16.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **nombre dérivé** de f au point d'abscisse x, et on note $f'(x)$, la limite, lorsque celle-ci existe, du taux d'accroissement :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

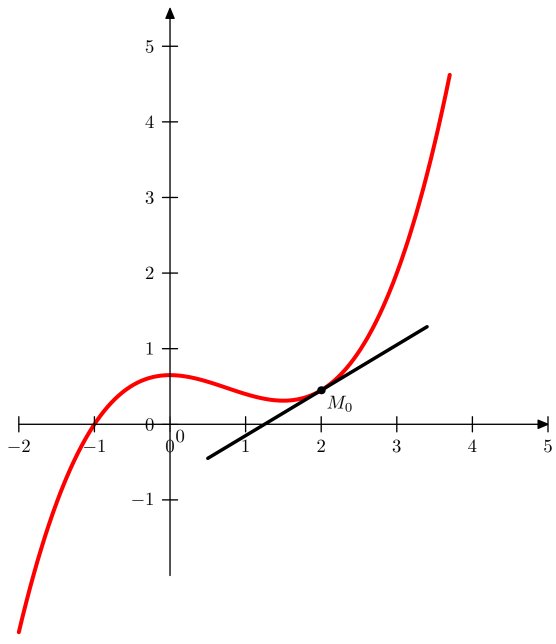
On le note également $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$.

Définition 5.17.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La **tangente** à la courbe de f au point M_0 d'abscisse x_0 est, quand le nombre dérivé $f'(x_0)$ existe, la droite d'équation

$$T_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

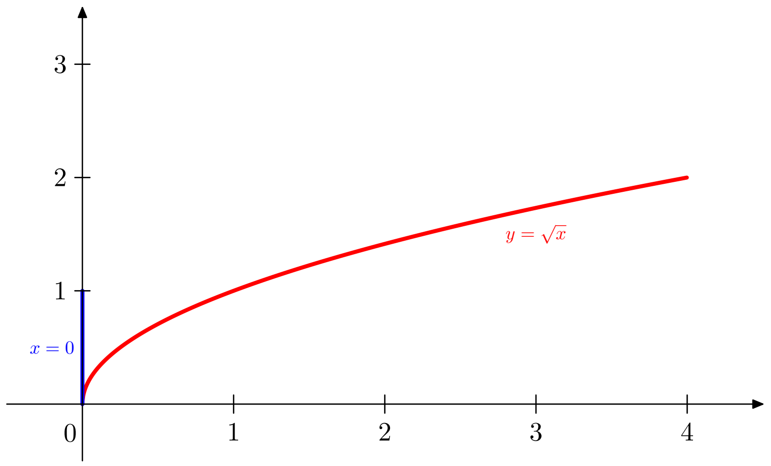
Le nombre $f'(x_0)$ représente ainsi le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0.



Remarque

Si la limite du taux d'accroissement quand x tend vers a (ou $a^{\pm}$) est infini, la courbe de f admet au point d'abscisse a une tangente verticale (ou demi-tangente) d'équation $x = a$.

Exemple 5.20
Par exemple, la fonction racine n'est pas dérivable en 0, et le taux d'accroissement a pour limite $+\infty$ en 0 : la courbe admet donc une demi-tangente verticale.



3. Formules de dérivation

On rappelle quelques résultats sur la dérivation : dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, et les applications de la dérivation.

Proposition 5.7.

On dispose des dérivées suivantes :
- $x \longmapsto a$ $(a \in \mathbb{R})$ a pour dérivée $x \longmapsto 0$.
- $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ a pour dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$.
- $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et a pour dérivée $x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.
- $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ se dérive en elle-même, et $x \longmapsto \ln(x)$ se dérive en $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
- $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

Proposition 5.8.

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
- Si k est un réel, alors ku est dérivable sur I, et $(ku)' = ku'$.
- $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
- uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exercice 5.21

Déterminer la dérivée des fonctions $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 1}$.

Solution

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$, mais dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car la fonction racine n'est pas dérivable en 0). La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas). En appliquant les formules, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= \sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \\ \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= \frac{(2x-2)(x^2+1)-(x^2-2x+2)(2x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Proposition 5.9.

Soient $u : I \longrightarrow J$ et $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors $v \circ u$ est dérivable sur I, et $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$.

Exercice 5.22

Déterminer la dérivée de la fonction $f : t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $g : x \longmapsto \sin(x^2+1)$, définies sur $\mathbb{R}$.

Solution

Toutes les fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

- f peut s'écrire $v \circ u$ avec $u : t \longmapsto \omega t + \varphi$ et $v : t \longmapsto \cos(t)$. En appliquant la formule précédente, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall\ t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = u'(t) \times v'(u(t)) = \omega \times (-\sin(\omega t + \varphi))$$
- De même, g peut s'écrire $v \circ u$ avec $u : x \longmapsto x^2+1$ et $v : x \longmapsto \sin(x)$. En appliquant la formule précédente, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 2x\cos(x^2+1)$$

4. Variations et dérivations

Rappelons le résultat important liant la dérivation et les variations.

Proposition 5.10.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ sauf en un nombre fini de réel, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ sauf en un nombre fini de réel, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exercice 5.23

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$. Etudier les variations de f.

Solution

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2+6x+3 = 3(x^2+2x+1) = 3(x+1)^2$. Ainsi, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf en -1 où elle s'annule. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Plan d'étude d'une fonction

Nous y reviendrons dans un prochain chapitre, mais le plan d'étude d'une fonction f est le suivant :

① On détermine le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

② On essaie de réduire le domaine de définition en cherchant des symétrie (périodicité, parité).

③ On précise les intervalles de $\mathcal{D}_f$ sur lesquels f est continue et les intervalles sur lesquels elle est dérivable.

④ On calcule f' et on étudie son signe sur chacun des intervalles où elle est dérivable.

> ⚠ **Attention**
>
> Déterminer l'ensemble des points où la dérivée s'annule **ne suffit pas**. Il faut étudier son signe. On pourra penser à la fonction cube, dont la dérivée s'annule en 0 sans pour étant qu'elle ne change de signe en 0.

⑤ On construit le tableau de variations, et on étudie les limites de f aux bornes des intervalles de $\mathcal{D}_f$.

⑥ On détermine des équations de tangente en des points particuliers, ainsi que les asymptotes si elles existent.

⑦ Enfin, on trace la courbe représentative de f, en utilisant quelques points particuliers, mais également les tangentes et asymptotes.

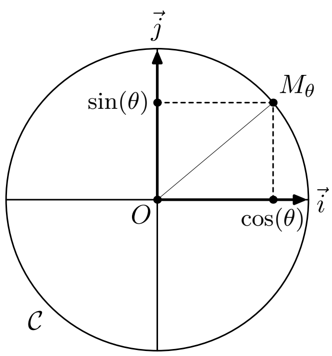
IV. Fonctions trigonométrique

1. Cercle trigonométrique

Rappel

On se donne un repère orienté $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1.

A tout réel θ, on associe son point image M_θ en parcourant une distance θ sur le cercle à partir du point $(1;0)$, dans le sens trigonométrique (le sens inverse des aiguilles d'une montre) si $\theta > 0$, ou une distance $-\theta$ dans le sens inverse si $\theta < 0$.



Les coordonnées du point M_θ sont alors $(\cos(\theta); \sin(\theta))$.

Réciproquement, tout point M du cercle trigonométrique est l'image M_θ pour un certain réel θ.

Remarque

Puisque le cercle trigonométrique est de périmètre 2π, on en déduit que le point θ et le point $\theta+2\pi$ ont la même image M_θ sur le cercle, et ainsi $\cos(\theta+2\pi) = \cos(\theta)$, et $\sin(\theta+2\pi) = \sin(\theta)$. Ainsi, les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

Propriété 5.11.

Pour tout réel x, on a $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$. Ainsi, cos est paire, sin est impaire.

Solution

En effet, x et $-x$ ont une image symétrique par rapport à l'axe des abscisses sur le cercle trigonométrique. Ils ont donc même abscisses, mais des ordonnées opposées.

Définition 5.18.

Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), on définit la **tangente** de x par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Remarque

tan n'est définie que si $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Propriété 5.12.

tan est impaire.

Démonstration

Pour tout réel x ne s'écrivant pas $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (ce qu'on note $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$), on a

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

2. Formules

L'ensemble de ces formules et résultats sont à savoir retrouver. Les formules indiquées d'un ♡ sont à connaître par-coeur.

Proposition 5.13.

On dispose des cosinus, sinus et tangente particuliers suivants :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	0

Proposition 5.14.

Soient a et b deux réels. Alors

① ♡ $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1.$

② Symétries :

$$\cos(-a) = \cos(a), \quad \sin(-a) = -\sin(a)$$
$$\cos(a+\pi) = -\cos(a), \quad \sin(a+\pi) = -\sin(a)$$
$$\cos(\pi - a) = -\cos(a), \quad \sin(\pi - a) = \sin(a)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$$
$$\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a), \quad \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)$$

③ Pour $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$:

$$\tan(-x) = -\tan(x), \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x), \quad \tan(x+\pi) = \tan(x)$$
$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\tan(x)} \quad \text{et} \quad \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

④ ♡ Formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

⑤ Formule de duplication :

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

⑥ Formule de factorisation :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

⑦ ♡ Tangente : pour $a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

...

⑧ Tangente de l'angle moitié : soit $a \in]-\pi;\pi[$, et $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$. Alors

$$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Démonstration

Les formules d'addition se démontrent à l'aide du produit scalaire. On note $\vec{u}(\cos(b), \sin(b))$ et $\vec{v}(\cos(a), \sin(a))$ et on calcule le produit scalaire de deux manières différentes :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(a-b)$$

et puisque $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1$, on en déduit le résultat. Les trois autres relations s'obtiennent à l'aide des formules de symétries ②.

Pour ⑤, on utilise les formules d'addition et la relation $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$:

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - (1-\cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1$$

et

$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Pour ⑥, on utilise la définition de tan et les formules d'addition :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

en divisant par $\cos(a)\cos(b)$ numérateur et dénominateur (non nul) :

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b}} = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

Proposition 5.15.

tan est π-périodique.

Démonstration

Pour tout réel $x \in \mathcal{D}_{\tan}$, $x + \pi \in \mathcal{D}_{\tan}$, et on a

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

Ainsi, tan est π-périodique.

3. Equations

Ces résultats se déduisent directement du cercle trigonométrique, qu'on privilégiera.

Proposition 5.16.

Soit a un réel.

- L'équation $\cos(x) = \cos(a)$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou $x = -a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- L'équation $\sin(x) = \sin(a)$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou $x = \pi - a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- L'équation $\tan(x) = \tan(a)$ équivaut à $x = a + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Exemple 5.24
Résoudre l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Solution
L'équation équivaut à $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ainsi, $\cos(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si

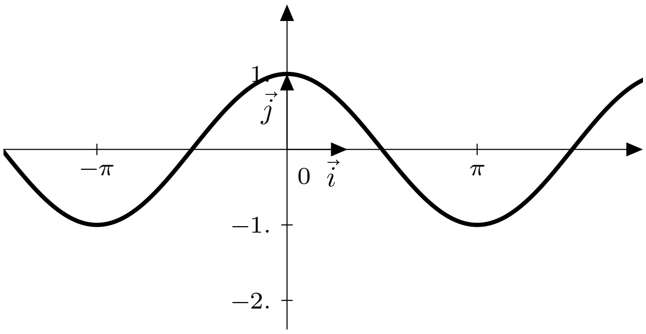
$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4. Fonctions trigonométriques

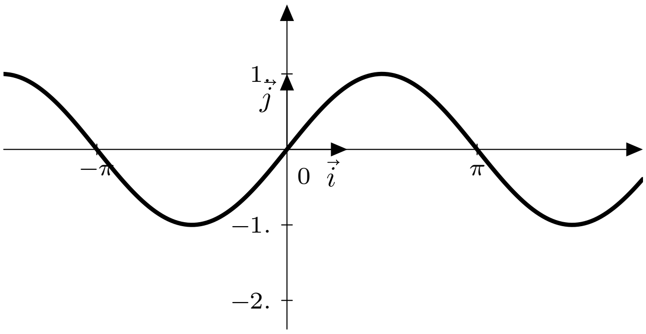
Proposition 5.17.
Les fonctions sinus, cosinus, et tangente sont dérivables sur leur domaine de définition, et on a :

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

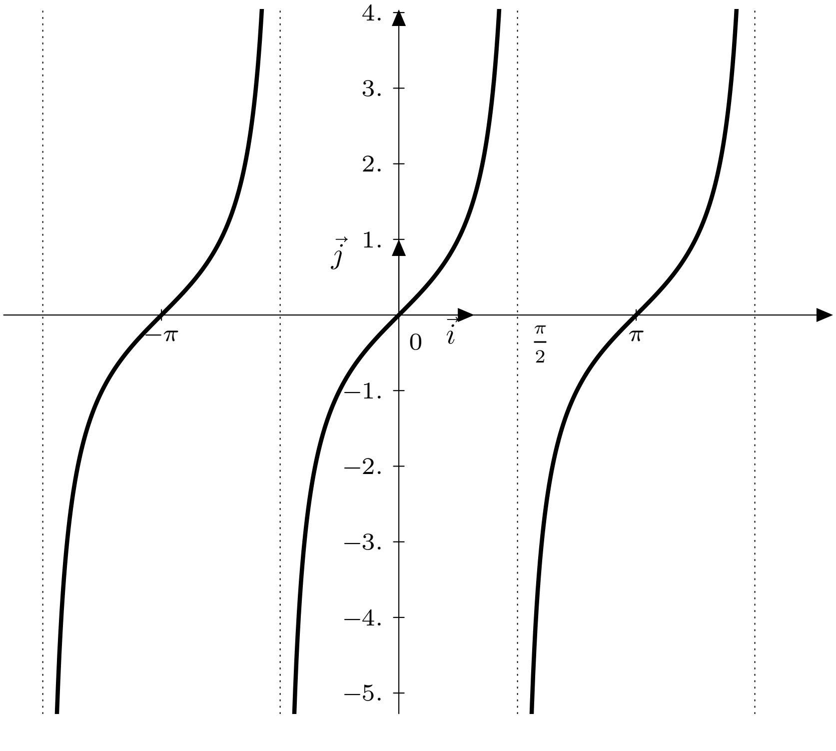
Sinus et cosinus sont 2π-périodiques, et tangente est π-périodique.



Fonction cosinus



Fonction sinus



Fonction tangente

Démonstration

On admet les dérivées de sin et cos (qui peuvent se faire en admettant les nombres dérivés en 0). Pour tan, par quotient de deux fonctions dérivables, tan est dérivable sur son domaine de définition et pour tout $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$:

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

On peut également écrire $\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en utilisant la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Enfin, pour la π-périodicité de tan, remarquons que pour tout réel x, $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$. Par quotient, pour $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a donc

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

Proposition 5.18.

On dispose des limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty$.
- (taux d'accroissement) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Démonstration

On remarque rapidement que

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos(x) = 0^+$$

Par quotient, $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty$.

De même,

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \sin(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \cos(x) = 0^+$$

Par quotient, $\displaystyle\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty$.

V. Fonctions de référence

1. Fonctions affines

Définition 5.19.

Une fonction affine est une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax+b$, où a et b sont des réels fixés. a est appelé le **coefficient directeur** de f et b son **ordonnée à l'origine**.

Proposition 5.19.

Sa courbe représentative est une droite.

On rappelle le tableau de signe et variations :

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de f		$-$	0	$+$	
Variation de f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de f		$+$	0	$-$	
Variation de f		$\searrow$	0	$\searrow$	

2. Fonction trinômes

Définition 5.20.

On appelle fonction **trinôme du second degré** à coefficients réels une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$, avec a, b et c trois réels fixes et $a \neq 0$.

Proposition 5.20.

Sa courbe représentative est une parabole.
On rappelle son tableau de variations :

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Variation de f		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

Proposition 5.21.

On appelle **discriminant** du trinôme $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

…

- Si $\Delta > 0$, f admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Il se factorise en $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ et son tableau de signe est donné par (en supposant ici que $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de f		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, f admet une racine $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Il se factorise en $f(x) = a(x-x_0)^2$ et son tableau de signe est donné par

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de f		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$, f n'admet pas de racine réelle et ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$. Son tableau de signe est donné par

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de f		signe de a	

3. Fonction valeur absolue

Définition 5.21.

La fonction **valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

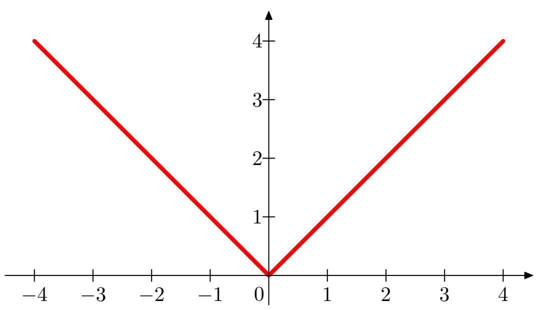
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Exemple 5.25

$|3| = 3$ et $|-4| = 4$.

Remarque

Par construction, la valeur absolue est une fonction paire, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.



Propriété 5.22.

On a

$$\lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} |x| = +\infty$$

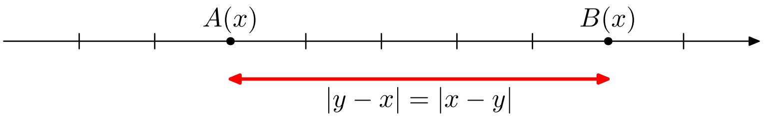
Théorème 5.23. Inégalité triangulaire

Pour tous réels x et y,

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{et} \quad ||x| - |y|| \leqslant |x-y|$$

Remarque

Si x et y sont des réels, $|x-y|$ représente la distance entre les points A d'abscisse x et B d'abscisse y.



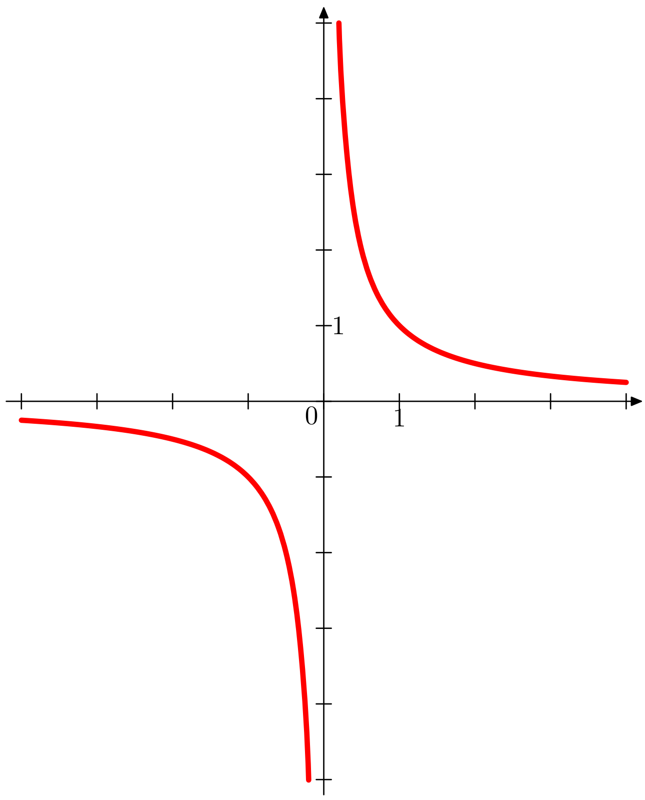
Ainsi $|4-1| = 3$ car la distance entre le point $A(1)$ et le point $B(4)$ est de 3.

4. Fonctions racine carrée et inverse

a. Fonction inverse

Définition 5.22.

La fonction **inverse** est la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$, par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



Propriété 5.24.

- La fonction inverse est impaire : $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$.
- La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
- On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

- Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 0$

- Pour tout réel $a \neq 0$, $\dfrac{1}{x} = a \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{a}$.

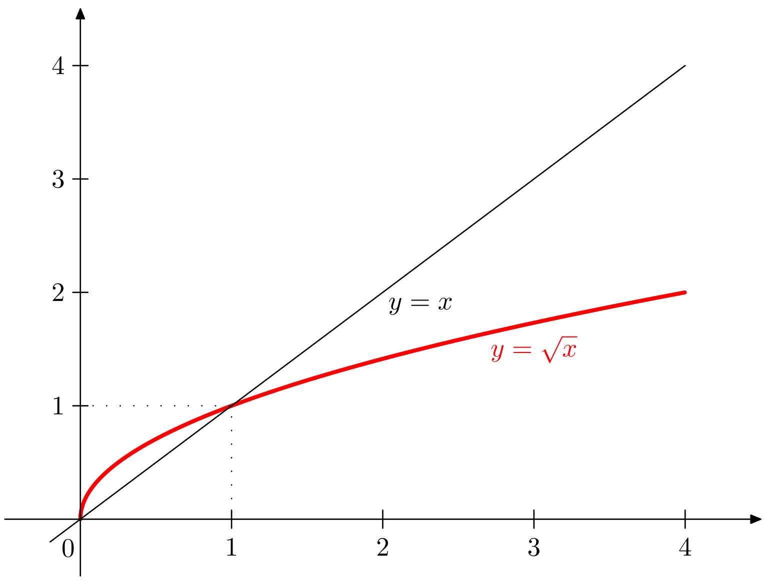
b. Fonction racine carrée

Définition 5.23.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ est l'unique réel positif dont le carré est x :

$$\sqrt{x} > 0 \quad \text{et} \quad (\sqrt{x})^2 = x$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est appelée **fonction racine carrée**.



Propriété 5.25.

- $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$.
- Pour tous réels positifs x et y :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \qquad \text{et si } y \neq 0,\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.
- La fonction racine est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- On a

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \infty$$

Méthode

Pour déterminer une limite avec une racine carrée, on peut multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjugué.

Exemple 5.26

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x$.

Solution

La limite est indéterminée. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2-1} - x = \frac{(\sqrt{x^2-1} - x)(\sqrt{x^2-1} + x)}{\sqrt{x^2-1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x}$$

La limite n'est plus indéterminée, et par quotient :

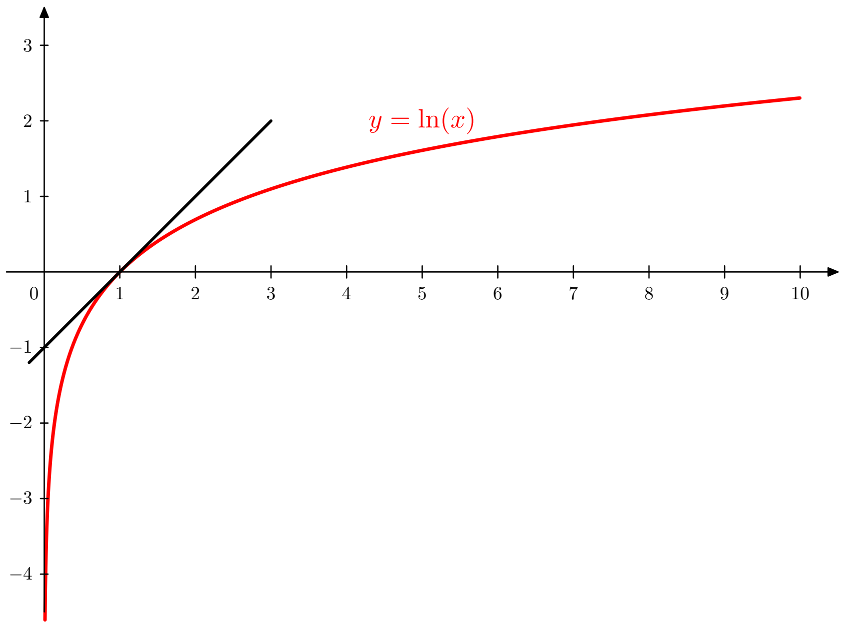
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x = 0$$

5. Fonction logarithme népérien

Définition 5.24.

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall \ x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0$$



Propriété 5.26.

- La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tous réels x et y de $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$$

Ainsi,

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z},\quad \ln(x^n) = n\ln(x)$$

$$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

- Grâce à la stricte croissance de ln, pour tous réels x, y strictement positifs :

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y \quad \text{et} \quad \ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$$

En particulier $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$ avec $\mathrm{e} \approx 2,718$.

- On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

- On a également (croissances comparées)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

et (taux d'accroissement)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

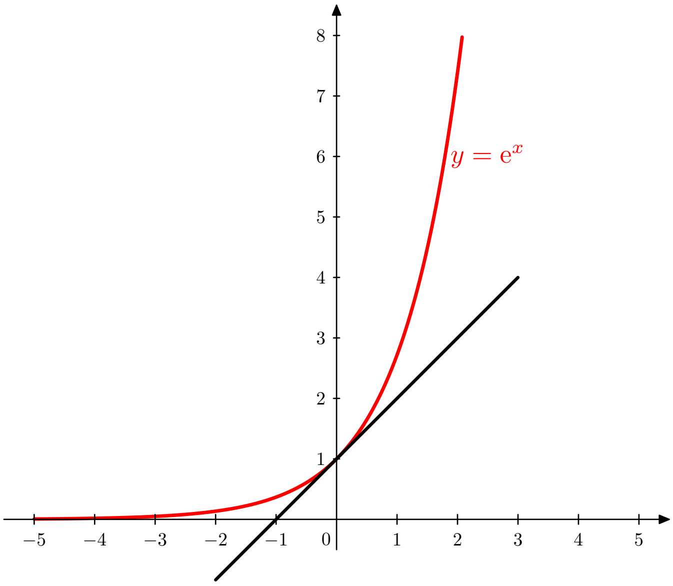
RÉFÉRENCE HISTORIQUE

John Neper inventa les logarithmes vers 1613. Le logarithme le plus utilisé (dit en « base e ») porte ainsi son nom.

6. Fonction exponentielle

Définition 5.25.

La fonction **exponentielle**, noté exp, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est elle-même, et telle que $\exp(0) = 1$. On note $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.



♡ **Propriété 5.27.**

- Par définition, exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- La fonction exp est strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}$.
- Par définition, $e^0 = 1$, et $e^1 = e$.
- Pour tous réels x et y,

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{et} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

  Ainsi,

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad \text{et} \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}, \quad (\exp(x))^n = \exp(nx)$$

- Grâce à la stricte croissance de exp, pour tout réels x et y :

$$\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y \quad \text{et} \quad \exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$$

- On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

- On a également (croissances comparées)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$$

  et (taux d'accroissement)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Le mot « exponentiel » a été introduit pour la première fois par **Jean Bernoulli** en 1694, dans une correspondance avec **Leibniz**. La notation e est due à **Leonhard Euler**, utilisée pour la première fois en 1728.

Remarque

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien :

- Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout réel x, et tout réel $y > 0$, $\mathrm{e}^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$.

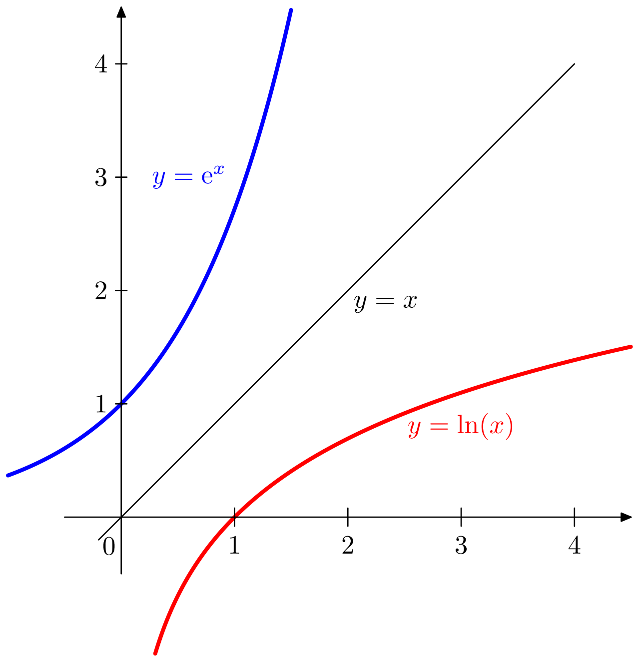
Ainsi, on retiendra également que $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Propriété 5.28. Comparaison $\ln$, $\exp$, $x \mapsto x$

Pour tout réel $x > 0$, on a

$$\ln(x) \leqslant x \leqslant \exp(x)$$

et les courbes représentatives de exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



7. Fonctions puissances

Les fonctions puissances généralisent les fonctions $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Définition 5.26.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note

$$x^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$$

Remarque

Attention : l'écriture x^α n'est qu'une notation. En pratique, on repassera toujours à l'écrire $\mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.

♡ **Propriété 5.29.**

Les fonctions puissances possèdent les mêmes règles de calcul que les puissances entières :

- $\forall \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta.$

…

- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad (x \times y)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad \text{et} \quad x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Ainsi,
$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$$

Démonstration

Les démonstrations sont toutes sur le même modèle. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $x > 0$. Alors
$$x^{\alpha+\beta} = \mathrm{e}^{(\alpha+\beta)\ln(x)} = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)+\beta\ln(x)} = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}\mathrm{e}^{\beta\ln(x)} = x^\alpha x^\beta$$
où on utilise les propriétés de la fonction exponentielle.

Remarque

Ainsi, pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$$
En particulier, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ pour $x > 0$. Par abus d'écriture, on confondra les deux écritures pour $x \geqslant 0$.

Les fonctions puissances étant des composées de fonctions dérivables, on peut les dériver :

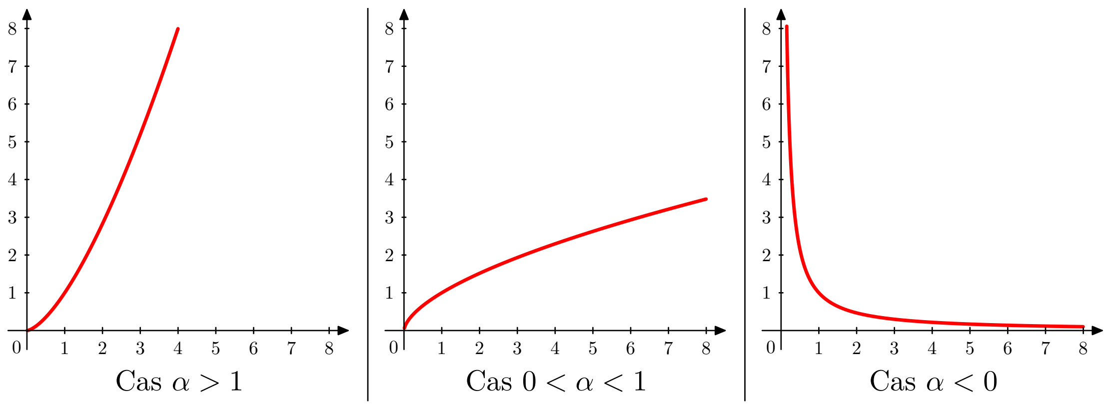
Proposition 5.30.

Pour tout réel α, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est $x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

La représentation graphique des fonctions puissances dépend de α :

♡

Propriété 5.31.



Remarque

On dispose d'autres fonctions puissances, dans le cas où la variable x est un exposant. Pour tout réel $a > 0$, on définit la fonction $x \mapsto a^x$ par
$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$$
Ces fonctions sont appelées **exponentielles de base** a.
Ainsi, les fonctions du type $x \mapsto x^\alpha$ sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$, alors que les fonctions du type $x \mapsto a^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Dans les deux cas, elles vérifient les propriétés sur les puissances.

8. Fonction partie entière

Définition 5.27.

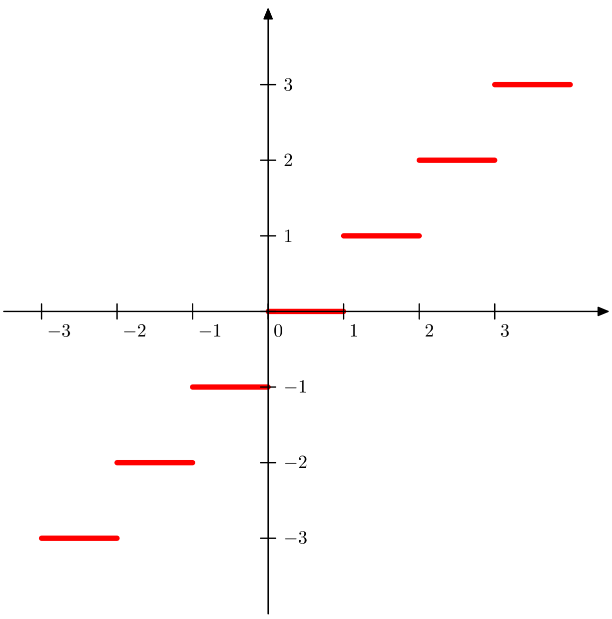
Soit x un nombre réel. On appelle **partie entière** de x, et on note $E(x)$, $[x]$ ou $\lfloor x \rfloor$, le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

Remarque

On utilisera en général la notation $[x]$, voire $\lfloor x \rfloor$.

Exemple 5.27

Ainsi, $[3,2] = 3,\ [\pi] = 3,\ [-3,2] = -4$.



Propriété 5.32.

- On a
$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad [x] \leqslant x < [x] + 1$$
On a également la relation
$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < [x] \leqslant x$$
- La fonction partie entière est constante par morceaux : pour tout $x \in [n; n+1[$ (où $n \in \mathbb{Z}$), $[x] = n$.

9. Maximum, minimum de deux fonctions

Définition 5.28.

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I.

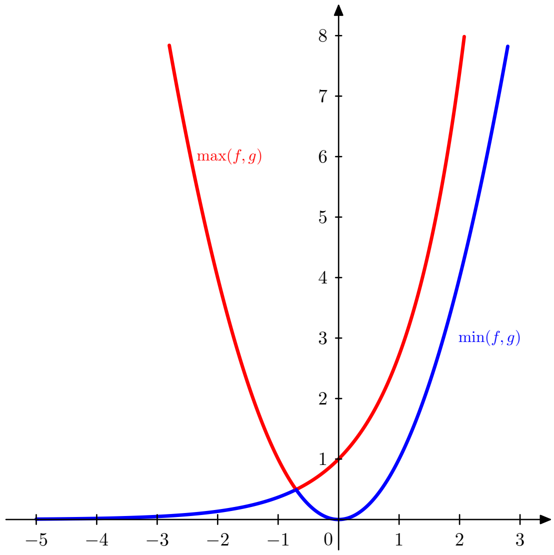
- On appelle **maximum** de f et g, et on note $\max(f, g)$ l'application qui à tout réel $x \in I$ associe le plus grand des deux nombres $f(x)$ et $g(x)$.

…

- On appelle **minimum** de f et g, et on note $\min(f,g)$ l'application qui à tout réel $x \in I$ associe le plus petit des deux nombres $f(x)$ et $g(x)$.

Exemple 5.28

Si $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto e^x$, on obtient la figure suivante :



Théorème 5.33.

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. Alors, pour tout réel $x \in I$:

$$\max(f,g)(x) = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \quad \text{et} \quad \min(f,g)(x) = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

Démonstration

Si $f(x) \geqslant g(x)$, alors $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$ et donc

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2} = f(x) = \max(f,g)(x)$$

$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-(f(x)-g(x))}{2} = g(x) = \min(f,g)(x)$$

Si cette fois-ci $f(x) < g(x)$ alors $|f(x)-g(x)| = |g(x)-f(x)| = g(x)-f(x)$. Ainsi :

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+g(x)-f(x)}{2} = g(x) = \max(f,g)(x)$$

$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-(g(x)-f(x))}{2} = f(x) = \min(f,g)(x)$$

VI. Représentation d'une fonction en Python

Pour représenter en PYTHON des fonctions utilisant les fonctions usuelles, il va nous falloir importer deux bibliothèques usuelles :

- la bibliothèque `numpy` qui contient des implémentations des fonctions usuelles et une multitude de commandes qui permettent de manipuler des tableaux de nombres (on y reviendra). Pour l'importer on utilisera systématiquement l'instruction suivante :

Code Python
```python
import numpy as np
```

- la bibliothèque `matplotlib.pyplot` qui permet de réaliser des représentations graphiques. Pour l'importer on utilisera systématiquement l'instruction suivante :

Code Python
```python
import matplotlib.pyplot as plt
```

1. Fonctions usuelles en Python

Les fonctions exp, ln, sin, cos, tan, racine carrée, valeur absolue et partie entière sont implémentées en Python respectivement par `np.exp`, `np.log`, `np.sin`, `np.cos`, `np.tan`, `np.sqrt`, `np.abs` et `np.floor`.

Attention

`log` désigne le logarithme népérien, que l'on note en France ln. Il s'agit de l'écriture anglo-saxonne.

L'intérêt des fonctions précédentes est qu'on peut les appliquer sur des flottants, mais aussi sur des listes de nombres : on dit qu'elles s'appliquent **vectoriellement**.

Par exemple :

Console Python
```
>>> np.log(np.e) # np.e désigne e
np.float64(1.0)
>>> np.sin([0, np.pi, np.pi/2]) # np.pi désigne π
array([0., 0., 1.])
```

Si l'on souhaite utiliser la racine n-ième, on pourra simplement utiliser l'exponentiation :

Console Python
```
>>> 4**(1/4)
1.4142135623730951
```

2. Instruction `plt.plot`

Python permet de relier des points du plan simplement, grâce à l'instruction `plt.plot`.

Si on se donne des points du plan dont on connaît les abscisses et les ordonnées, par exemple $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$, on peut relier les points $A_1, \dots, A_n$ en indiquant à `plt.plot` la liste des abscisses, et la liste des ordonnées. Ainsi, on introduit :

- `X = [x1, ..., xn]` la liste des abscisses ;
- `Y = [y1, ..., yn]` la liste des ordonnées.

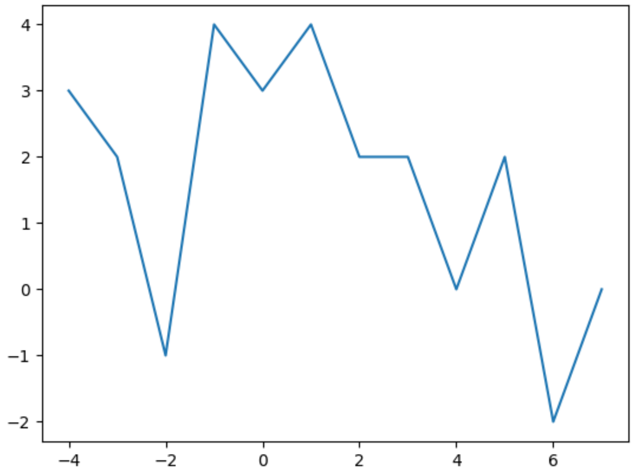
Alors l'instruction `np.plot(X,Y)` relie les points $A_1, \dots, A_n$ dans cet ordre.

Pour afficher la représentation graphique, il faut, ensuite, utiliser `plt.show()`, qu'on placera en général après toutes les représentations.

Par exemple :

Code Python
```python
X=range(-4,8)
Y=[3 ,2 , -1 ,4 ,3 ,4 ,2 ,2 ,0 ,2 , -2 ,0]
plt.plot (X,Y)
plt.show()
```

renvoie la figure suivante :



3. Représenter la courbe représentative d'une fonction

Tracer la courbe représentative d'une fonction sur un intervalle, revient à tracer une infinité de points. Or il n'est évidemment pas possible pour un ordinateur de réaliser une infinité d'instructions. L'approche de PYTHON pour tracer une courbe est de représenter un nombre fini de points et de les relier par une ligne continue. La puissance de calcul des ordinateurs permet de considérer un très grand nombre de points et d'obtenir ainsi une très bonne approximation de la courbe par une ligne brisée dont les abscisses sont très proches afin de donner l'illusion de courbe.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $[a, b]$ avec a et b deux réels tels que $a < b$. Supposons que l'on ait implémenté a, b, f en Python par `a`, `b`, `f` respectivement. Représenter graphiquement le graphe de f sur $[a, b]$ se fait en 3 étapes :

- On « discrétise » l'intervalle $[a, b]$ en un grand nombre de points régulièrement espacés. En général, on prend $n = 1000$ ou $n = 10000$ comme nombre de points. Pour cela, on utilise l'instruction `np.linspace` :

  </> Code Python
  ```python
  X=np.linspace(a,b,n)
  ```
  Cette instruction créé un tableau de n points entre a et b régulièrement espacés.
  Ce sera le vecteur des abscisses.
- On crée le vecteur des ordonnées qui contient les images de tous les points du vecteur X par la fonction f via la commande

  </> Code Python
  ```python
  Y=[f(x) for x in X]
  ```
  Cela créé une liste des images $f(x)$ pour tous les éléments x de la liste X.
- Enfin, on trace la courbe via la commande `plt.plot(X,Y)` puis on l'affiche avec `plt.show()`.

Exemple 5.29

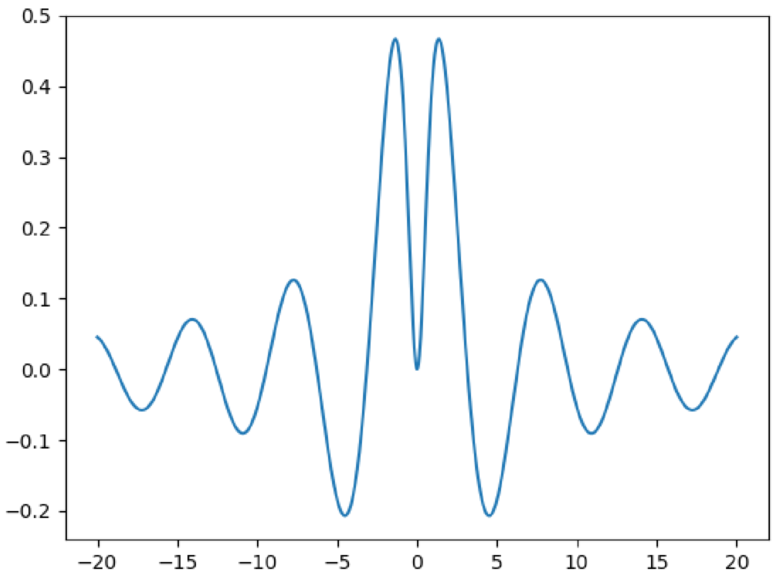
Pour représenter la fonction $x \longmapsto \frac{x\sin(x)}{1+x^2}$ sur $[-20, 20]$, on écrit le code suivant :

Code Python

```python
def f(x):
  return x*np.sin(x)/(1+x**2) # On créé la fonction f

X= np.linspace(-20, 20, 1000) # Liste des abscisses
Y = [f(x) for x in X] # Liste des ordonnées
plt.plot(X,Y) # On créé la figure
plt.show() # On affiche
```

Cela donne :



4. Options des tracés

Les commandes de ce paragraphe ne sont pas au programme. Il est inutile le jour des concours de mettre de la couleur à des courbes, ou des légendes. Mais on pourra les utiliser, par exemple en entraînement pour différencier les tracés lorsqu'on en superpose.

- Il est possible de préciser la couleur, le style de ligne et de symbole en ajoutant une chaîne de caractères en option dans la commande `plt.plot` :
  - pour la couleur : b (bleu), g (vert), r (rouge), c (cyan), m (magenta), y (jaune), k (noir), w (blanc).
  - pour le style : - (ligne continue), -- (tirets), : (ligne en pointillé), -. (tirets points).
  - pour les symboles : . (point), , (pixel), o (cercle), v (triangle bas), ^ (triangle haut), $<$ (triangle gauche), $>$ (triangle droit), s (carré), p (pentagone), h (hexagone), d (diamant), D (gros diamant), * (étoile), + (plus), x (croix), etc.

Par exemple `plt.plot(X,Y,'r:*')` affiche la courbe avec des étoiles rouges à chaque point et les relie en pointillés rouges.

On peut également afficher des éléments secondaires sur le graphique :

- Pour afficher une légende à une courbe, on ajoute l'option `label('Légende_courbe')` à l'intérieur de la commande `plt.plot` qui trace la courbe, où `'Légende_courbe'` est une chaîne de caractères contenant la légende. Ensuite on place la commande `plt.legend()`.
- Pour afficher un titre à une fenêtre graphique, on ajoute la commande

Code Python

```
plt.title('Titre_graphique')}
```

où `'Titre_graphique'` est une chaîne de caractères contenant le titre.

- Si on fait appelle plusieurs fois à la commande `plt.plot`, les courbes successives seront tracées dans la même fenêtre. Si on veut changer de fenêtre, on utilise la commande `plt.figure()`. Dorénavant les tracés se feront dans une nouvelle fenêtre (la même tant qu'on ne fait pas appel de nouveau à `plt.figure()`).

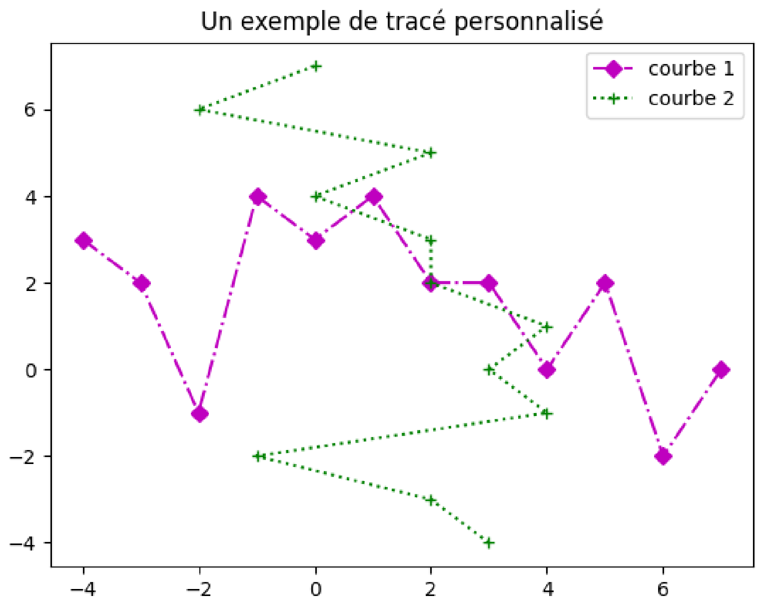
Exemple 5.30

Un exemple regroupant ce qui précède :

Code Python

```
X=range(-4,8)
Y=[3 ,2 , -1 ,4 ,3 ,4 ,2 ,2 ,0 ,2 , -2 ,0]
plt.plot(X,Y, 'm-.D', label='courbe 1')
plt.plot(Y,X, 'g:+', label='courbe 2')
plt.legend()
plt.title('Un exemple de tracé personnalisé')
plt.show()
```

renverra



Exercices
5

Exercices

Généralités

●○○ **Exercice 1 Images et antécédents** (10 min.)

1. Déterminer les antécédents éventuels de $-\sqrt{\pi}$, 0 et 121 par $f : x \longmapsto (x+1)^2$.
2. Déterminer les antécédents éventuels de 343 et -216 par $x \mapsto x^3$.
3. Déterminer $f(A)$ dans les cas suivants :

a) $f : x \mapsto x^2$ et $A =]-2, +\infty[$,
b) $f : x \mapsto |1+x|$ et $A =]-1, -\frac{1}{2}]$,
c) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $A =]-1, 0[\cup]0, 2]$,
d) $f : x \mapsto \ln(x^2+1)$ et $A = [-4, 2[$.

●○○ **Exercice 2 Des puissances de -1** (5 min.)

Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout entier x par $f(x) = (-1)^x$. Déterminer l'image de la fonction f, $f(\mathbb{Z})$. Déterminer l'image réciproque par f de $\{1\}$.

●○○ **Exercice 3 Des composées** (5 min.)

On considère les fonctions $f : x \longmapsto x^2, g : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $h : x \longmapsto x-2$. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression des fonctions suivantes :

$$f \circ g, f \circ h, g \circ h, h \circ f, h \circ g, g \circ f$$

●○○ **Exercice 4 Re des composée** (15 min.)

Déterminer, pour les fonctions f et g suivantes, le domaine de définition et une expression de $g \circ f$ et $f \circ g$.

a) $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \ln(x)$,
b) $f : x \mapsto \tan(x)$ et $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$,
c) $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \ln(x^2-1)$,
d) $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $g : x \mapsto x - \frac{1}{x}$.

●○○ **Exercice 5 Décomposée** (5 min.)

Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+1}$ et $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Déterminer quatre fonctions u, v, w, et z telles que $f = u \circ v$ et $g = w \circ z$.

Études de fonctions

●○○ **Exercice 6 Des domaines de définitions** (10 min.)

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2+5x+6} \qquad g : x \longmapsto \ln\left(2x^2+2x-12\right)$$

●○○ **Exercice 7 Pair, impair ou manque** (10 min.)

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{\ln(x^2+1)}{x^4+1} \qquad g : x \longmapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad h : x \longmapsto x(x^2+2)^3(\mathrm{e}^{x^2+1}+3)$$

●○○ **Exercice 8 Toujours se méfier des inconnues** (10 min.)

Soit $(E) : mx^2 + x(2m-1) - 2 = 0$ où x et m sont des réels.

1. Soit m fixé. Résoudre l'équation (E) d'inconnue x.
2. Soit x fixé. Résoudre l'équation (E) d'inconnue m.

●○○ **Exercice 9 Je dérive, je dérive** (15 min.)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée :

$$f : x \mapsto \cos(x)\sin(2x)\mathrm{e}^x \qquad g : x \mapsto \frac{\tan(x)}{2+\sin(x)} \qquad h : x \mapsto \sqrt{x}\ln(1+x)$$

●○○ **Exercice 10 Études de fonctions** (40 min.)

Etudier et représenter les fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} \qquad g : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$$

$$h : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad i : x \longmapsto \frac{x^3+x^2-2x-3}{2x^2-6}$$

On montrera que i admet la droite d'équation $y = \frac{x+1}{2}$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

●●○ **Exercice 11 Des sinus et des x** (20 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(x) + x$.

1. Etudier f sur $[-\pi;\pi]$.
2. Montrer que la courbe de f est invariante par translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\pi\\2\pi\end{pmatrix}$ (on montrera pour cela que pour tout réel x, $f(x+2\pi) = f(x) + 2\pi$).
3. Représenter f sur $[-2\pi;4\pi]$.
4. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Equations, inéquations

●○○ **Exercice 12 Des équations à prendre au second degré** (15 min.)

Résoudre les équations suivantes :

a) $(E_1) : x^4 + x^2 - 2 = 0$
b) $(E_2) : \exp(2x) + \exp(x) - 6 = 0$
c) $(E_3) : \ln(x)^2 + 2\ln(x) - 3 = 0.$
d) $(E_4) : x = \sqrt{x} + 2$
e) $(E_5) : \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2$

●○○ **Exercice 13 Des inégalités en tout genre** (20 min.)

Résoudre les inégalités suivantes :

a) $(2x+1)(3x-1) > 0$
b) $\dfrac{4x+3}{2x+1} \geqslant 0$
c) $\dfrac{1-2x}{x+1} > 0$
d) $5x^2 - 10x + 4 \leqslant 0$
e) $\ln(2x+1) \leqslant \ln(x+7)$
f) $2x^3 + 2x \leqslant -2x$
g) $2^x \geqslant 3^{x-1}$

●○○ **Exercice 14 Des inégalités sympathiques** (10 min.)

Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x, \quad \forall\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin(x) \geqslant \frac{2x}{\pi}$$

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. Déterminer les antécédents éventuels, c'est résoudre l'équation $f(x) = a$ où a représente le réel dont on cherche les antécédents. Puisque $(x+1)^2 \geqslant 0$ pour tout x, on en déduit déjà que $-\sqrt{\pi}$ n'a pas d'antécédent par f. Ensuite, on résout :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (x+1)^2 = 0 \\ &\iff x = -1 \\ f(x) = 121 &\iff (x+1)^2 = 121 \\ &\iff x+1 = 11 \text{ ou } x+1 = -11 \\ &\iff x = 10 \text{ ou } x = -12 \end{aligned}$$

Ainsi, l'antécédent de 0 est -1, et les antécédents de 121 sont 10 et -12.
2. De la même manière, on résout $x^3 = 343 \iff x = 7$ et $x^3 = -216 \iff x = -6$. L'antécédent de 343 est donc 7 et l'antécédent de -216 est -6.
3. a) On obtient $f(A) = \mathbb{R}^+$ (en effet, tout élément de $\mathbb{R}^+$ admet au moins un antécédent dans $\mathbb{R}^+$, donc dans A).
b) De même, si $-1 < x \leqslant -\frac{1}{2}$ alors $0 < 1+x \leqslant \frac{1}{2}$ et finalement $0 < |1+x| \leqslant \frac{1}{2}$. Réciproquement, si $y \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, alors il y a au moins un antécédent dans A de y : $y-1$. Finalement $f(A) = \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.
c) Remarquons que $-1 < x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < -1$ et $0 < x \leqslant 2 \iff x \geqslant \frac{1}{2}$. Ainsi

$$f(A) =]-\infty, -1[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

d) Enfin, $-4 \leqslant x < 2$ donne $0 \leqslant x^2 < 16$ puis $0 = \ln(1) \leqslant f(x) < \ln(17)$. Réciproquement, si $y \in [0, \ln(17)[$, il existera au moins un antécédent dans A par f. Ainsi,

$$f(A) = [0, \ln(17)[.$$

Exercice 2

Par définition, f prend deux valeurs : 1 et -1. Donc

$$f(\mathbb{Z}) = \{-1; 1\}$$

Enfin, l'image réciproque de 1 est composé de tous les éléments de $\mathbb{Z}$ ayant pour image 1, c'est-à-dire les nombres pairs. Ainsi, $f^{-1}(\{1\}) = 2\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Remarquons tout d'abord que f est définie sur $\mathbb{R}$, g est définie sur $\mathbb{R}^+$ et h est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f est toujours positive, et h est positive sur $[2, +\infty[$. Ainsi :

- $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $x \geqslant 0$, $f \circ g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
- $f \circ h$ est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ h(x) = (x-2)^2$.
- $g \circ h$ est définie sur $[2, +\infty[$, et pour tout $x \geqslant 2$, $g \circ h(x) = \sqrt{x-2}$.

- $h \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h \circ f(x) = x^2 - 2$.
- $h \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $x \geqslant 0$, $h \circ g(x) = \sqrt{x} - 2$.
- $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

Exercice 4

On fera toujours bien attention de justifier le domaine de définition avant de déterminer la composée.

1. $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g \circ f : x \mapsto \ln(x^2)$.
ln quant à elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et f est définie sur $\mathbb{R}$, donc $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f \circ g : x \mapsto (\ln(x))^2$.
2. f est définie sur $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R},\, x = \frac{\pi}{2}\,[\pi]\right\}$. g est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $1 + x^2 \geqslant 2$ donc $0 < \frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $g \circ f$ est définie sur $\mathcal{D}_{\tan}$, et on a
$$f \circ g : x \mapsto \tan\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \quad \text{et} \quad g \circ f : x \mapsto \frac{1}{1+\tan^2(x)}.$$
3. cos est définie sur $\mathbb{R}$, et g est définie sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Remarquons que pour tout x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et donc $g \circ f$ n'est jamais définie. $f \circ g$, quant à elle, est définie sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et
$$f \circ g : x \mapsto \cos\left(\ln\left(x^2 - 1\right)\right).$$
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ et g sur $\mathbb{R}^*$. Comme f est strictement positive, on peut conclure que $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et
$$f \circ g : x \mapsto \mathrm{e}^{x - \frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad g \circ f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}.$$

Exercice 5

On peut écrire f sous la forme $\frac{1}{v}$ avec $v : x \longmapsto x^2 + 1$. Ainsi, $f = u \circ v$ avec $u : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $v : x \longmapsto x^2 + 1$.
De même, g s'écrit e^z avec $z : x \longmapsto -x^2$. Ainsi, $g = w \circ z$ avec $w : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $z : x \longmapsto -x^2$.

Exercice 6

Méthode

Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction, on détermine toutes les conditions d'existence (racine, dénominateur, logarithme,...). On conclut ensuite.

Pour la fonction f, nous avons deux conditions :

- $\sqrt{2x+1}$ n'est défini que si $2x + 1 \geqslant 0$ soit $x \geqslant -\frac{1}{2}$.
- Le quotient n'a un sens que si $x^2 + 5x + 6 \neq 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 1$. Ce trinôme possède donc deux racines : $x_1 = \frac{-5-1}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$. Il faut donc également que $x \neq -2$ et $x \neq -3$.

Bilan : la fonction f est donc définie sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Pour la fonction g, celle-ci n'est définie que si $2x^2 + 2x - 12 > 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 100$. Le trinôme possède donc deux racines, $x_1 = \frac{-2-10}{4} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+10}{4} = 2$. Ainsi, nous avons le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$2x^2 + 2x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$$\mathcal{D}_g =]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$$

Exercice 7

> **Remarque**
> On détermine d'abord le domaine de définition, avant de déterminer sa parité.

1. Puisque, pour tout réel x, $x^2+1>0$ et $x^4+1>0$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Enfin, pour tout réel x,

$$f(-x) = \frac{\ln((-x)^2+1)}{(-x)^4+1} = \frac{\ln(x^2+1)}{x^4+1} = f(x)$$

Ainsi, la fonction f est paire.
2. g n'est définie que si le quotient est strictement positif. Dressons le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

Ainsi, g est définie sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Enfin, pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$:

$$g(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -g(x)$$

Ainsi, g est une fonction impaire.
3. La fonction h est clairement définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0, et on a

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad h(-x) = (-x)((-x)^2+2)^3(\mathrm{e}^{(-x)^2+1}+3) = -x(x^2+2)^3(\mathrm{e}^{x^2+1}+3) = -h(x)$$

Ainsi, h est impaire.

Exercice 8

1. Pour m fixé **non nul**, il faut donc résoudre l'équation du second degré $mx^2+x(2m-1)-2=0$ d'inconnue x. Son discriminant vaut

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4m(-2) = 4m^2-4m+1+8m = 4m^2+4m+1 = (2m+1)^2$$

L'équation possède donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(2m-1)-(2m+1)}{2m} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(2m-1)+(2m+1)}{2m} = \frac{1}{m}$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left\{-2;\frac{1}{m}\right\}$$

Si $m=0$ l'équation devient $-x-2=0$ qui admet -2 comme unique solution.

Bilan : si $m \neq 0$, alors $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-2;\frac{1}{m}\right\}}$, et si $m=0$, $\boxed{\mathcal{S} = \{-2\}}$.

2. Pour x fixé, c'est une équation du premier degré en m. Ainsi

$$(E) \iff m(x^2+2x) = 2+x$$

Soit $m(x(x+2)) = x+2$. Si $x \neq 0$ et $x \neq -2$ alors, on dispose d'une unique solution :

$$\frac{x+2}{x(x+2)} = \frac{1}{x}$$

Si $x = 0$, l'équation (E) devient $-2 = 0$ ce qui est absurde, donc l'équation n'admet aucune solution.
Si $x = -2$, l'équation (E) devient $0 = 0$, donc est vraie pour tout $m \in \mathbb{R}$.
Bilan : si $x = 0$, l'équation n'admet aucune solution. Si $x = -2$, l'équation admet comme solution $\mathbb{R}$. Sinon,

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{x}\right\}}$$

Exercice 9

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions trigonométrique et d'exponentielle. On dérive en deux temps puisqu'on a un triple produit. On pose $u : x \mapsto \cos(x)\sin(2x)$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\ &= (-\sin(x)\sin(2x) + \cos(x)2\cos(2x))\,\mathrm{e}^x + \cos(x)\sin(2x)\mathrm{e}^x\\ &= \mathrm{e}^x\,(2\cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) + \cos(x)\sin(2x))\end{aligned}$$

tan est définie et dérivable sur son domaine de définition $\mathcal{D}_{\tan} = \left\{x \in \mathbb{R},\ x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\right\}$, et sin l'est sur $\mathbb{R}$. Puisque pour tout x, $2+\sin(x) \neq 0$, on en déduit par quotient que g est définie et dérivable sur $\mathcal{D}_{\tan}$. On a alors :

$$\forall\ x \in \mathcal{D}_{\tan},\ g'(x) = \frac{(1+\tan^2(x))(2+\sin(x)) - \tan(x)\cos(x)}{(2+\sin(x))^2}$$

Enfin, racine est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$. Ainsi, h est définie sur $\mathbb{R}^+$ et est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\forall\ x \in R >,\ h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+x) + \sqrt{x}\frac{1}{1+x}$$

Exercice 10

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables (exp) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = 0 \quad \text{par quotient} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1 \quad \text{par quotient}$$

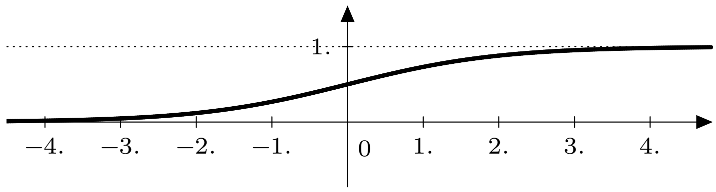
La courbe de f admet donc deux asymptotes horizontales, une d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$, et une d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1) - \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\end{aligned}$$

f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient le tableau de variations suivante :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
var de f	0	$\nearrow$	1

et la courbe représentative suivante :



$g : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ et de l'exponentielle.

Par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$. Par composée,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

De même, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Par composée,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

Pour tout réel $x > 0$, on pose $u(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Par quotient,

$$u'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)(1)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

et par composée :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} \\ &= \frac{1-\ln(x)}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x}} \end{aligned}$$

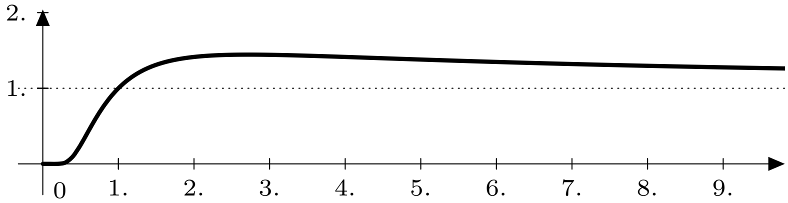
Puisque pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x}} > 0$, g' est du signe de $\frac{1-\ln(x)}{x^2}$, donc de $1-\ln(x)$. Or

$$\begin{aligned} 1-\ln(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 > \ln(x) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e} > x \quad \text{par stricte croissance de ln} \end{aligned}$$

avec $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{\frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$. Ainsi, on dispose du tableau de variation suivant :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
var de g	‖ 0	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$	$\searrow$	1

et de la courbe représentative suivante :



h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de deux fonctions dérivables. Sa dérivée est

$$h' : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

dont le signe est, en utilisant la croissance de la fonction ln :

$$\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{x} \geqslant \mathrm{e}^{-x} \iff x \geqslant -x \iff x \geqslant 0.$$

Par somme et produit

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

et la courbe représentative :

Enfin, i est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$ et y est dérivable. Par factorisation classique :

$$\lim_{x\to-\infty} i(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} i(x) = +\infty.$$

Enfin,

$$\lim_{x\to(\sqrt{3})^+} 2x^2 - 6 = 0^+, \quad \lim_{x\to(\sqrt{3})^-} 2x^2 - 6 = 0^-, \quad \lim_{x\to(-\sqrt{3})^+} 2x^2 - 6 = 0^-, \quad \lim_{x\to(-\sqrt{3})^-} 2x^2 - 6 = 0^+,$$

et

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} x^3 + x^2 - 2x - 3 = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\sqrt{3}} x^3 + x^2 - 2x - 3 = -\sqrt{3}.$$

et par quotient :

$$\lim_{x\to(-\sqrt{3})^-} i(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to(-\sqrt{3})^+} i(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to(\sqrt{3})^-} i(x) = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to(\sqrt{3})^+} i(x) = +\infty$$

La dérivée de i est

$$x \longmapsto \frac{(3x^2 + 2x - 2)(2x^2 - 6) - (x^3 + x^2 - 2x - 3)(4x)}{(2x^2 - 6)^2} = \frac{2(x^4 - 7x^2 + 6)}{(2x^2 - 6)^2}$$

On déterminer le signe de $x^4 - 7x^2 + 6$ par la méthode classique. On pose $X = x^2$. Les solutions de $X^2 - 7X + 6$ sont 6 et 1. On peut alors écrire

$$X^4 - 7X^2 + 6 = (X - 1)(X + 1)(X - \sqrt{6})(X + \sqrt{6}).$$

Le tableau de signe est alors

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		-1		1		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$X^4 - 7X^2 + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$i(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
var de i	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3-4\sqrt{6}}{6}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	$\frac{3+4\sqrt{6}}{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 11

1. $[-\pi;\pi]$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout réel $x \in [-\pi;\pi]$, on a

$$f(-x) = 2\sin(-x) - x = -2\sin(x) - x = -(2\sin(x) + x) = -f(x)$$

f est donc impaire. Etudions f sur $[0;\pi]$. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et on a pour tout $x \in [0;\pi]$

$$f'(x) = 2\cos(x) + 1$$

On a alors, sur $[0;\pi]$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos(x) + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(x) > -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}$	$\searrow$	π

et par imparité :

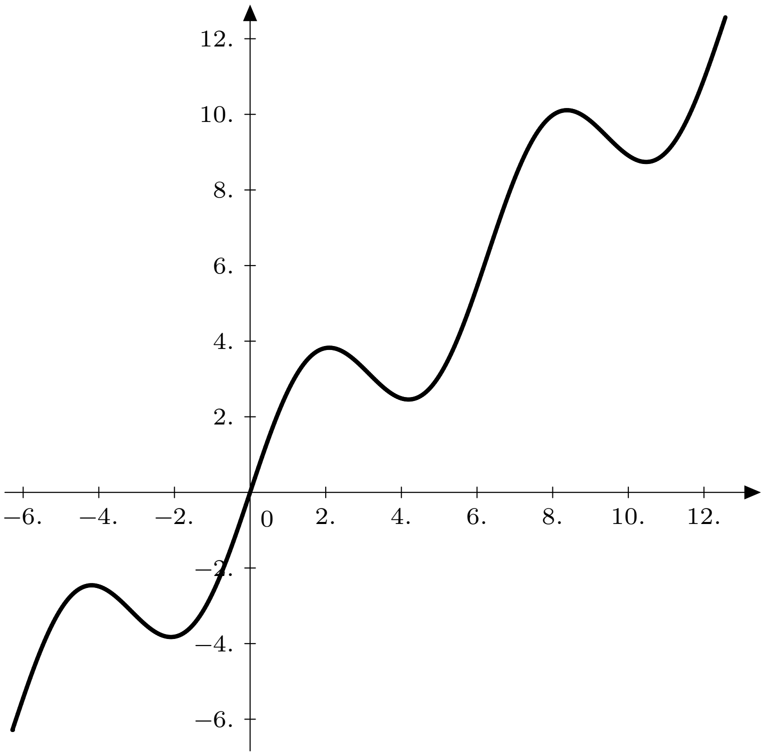
x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$		$+$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\pi$	$\searrow$	$-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}$	$\searrow$	π

2. Pour tout réel x, on a

$$f(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) + x + 2\pi = 2\sin(x) + x + 2\pi = f(x) + 2\pi$$

Ainsi, la courbe de f est invariante par translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$.

3. En utilisant le tableau de variations sur $[-\pi;\pi]$, puis par translation, on obtient la courbe suivante sur $[-2\pi;4\pi]$.



4. Pour tout réel x, on a

$$-2 \leqslant 2\sin(x) \leqslant 2 \quad \text{et donc} \quad -2+x \leqslant 2\sin(x) \leqslant 2+x$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} -2+x = +\infty$, par comparaison,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2+x = -\infty$ et donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Exercice 12

Méthode

Dans le cas d'équation proche d'une équation du second degré, on change de variable inconnue pour se ramener à une équation de ce type.

1. On pose $X = x^2$. (E_1) s'écrit alors $X^2 + X - 2 = 0$.
Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times -2 = 9$, et le trinôme possède donc deux solutions : $X_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.
On revient à l'inconnue de départ. Nous avons donc $X = 1$ soit $x^2 = 1$, ce qui nous donne finalement deux solutions : $x = 1$ ou $x = -1$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1; 1\}}$$

2. (E_2) s'écrit également $(\mathrm{e}^x)^2 + \mathrm{e}^x - 6 = 0$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. (E_2) devient alors $X^2 + X - 6 = 0$.
Ce trinôme possède deux solutions, qui sont -3 et 2.
On revient à l'inconnue de départ : nous avons donc $\mathrm{e}^x = -3$, ce qui est impossible, ou $\mathrm{e}^x = 2$ soit $x = \ln(2)$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\ln(2)\}}$$

3. On pose $X = \ln(x)$. (E_3) devient $X^2 + 2X - 3 = 0$. Ce trinôme possède deux solutions : -3 et 1.
On revient à l'inconnue de départ : on a donc $\ln(x) = -3$, soit $x = \mathrm{e}^{-3}$, ou $\ln(x) = 1$, soit $x = \mathrm{e}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\mathrm{e}^{-3}; \mathrm{e}\}}$$

4. On constate que (E_4) s'écrit $(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 2 = 0$. On pose alors $X = \sqrt{x}$. (E_4) s'écrit alors $X^2 - X - 2 = 0$. Ce trinôme possède deux solutions : -1 et 2.
On revient à l'inconnue de départ : $\sqrt{x} = -1$, ce qui est impossible, ou $\sqrt{x} = 2$, c'est-à-dire $x = 4$. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4\}}$$

5. (E_5) s'écrit également $(\mathrm{e}^x)^2 + 1 - 2\mathrm{e}^x = 0$ en multipliant par $\mathrm{e}^x \neq 0$. On pose alors $X = \mathrm{e}^x$. (E_5) s'écrit alors $X^2 - 2X + 1 = 0$ qui possède une unique solution : 1.
On revient à l'inconnue de départ : $\mathrm{e}^x = 1$, c'est-à-dire $x = 0$. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0\}}$$

Exercice 13

Méthode

Dans la plupart des cas, pour déterminer le signe d'une expression, on essaie de factoriser au maximum puis de faire un tableau de signe.

1. On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+1)(3x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

2. On dresse le tableau de signe, en oubliant pas les doubles barres en cas de non-définition.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{4x+3}{2x+1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

3. On dresse le tableau de signe.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{1-2x}{x+1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left]-1; \frac{1}{2}\right[$$

4. Pour les trinômes du second degré, on dispose d'un théorème. Le discriminant ici vaut $\Delta = 20$, donc le trinôme dispose de deux racines : $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{20}}{10}$ et $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{20}}{10}$. Ainsi, puisque $5 > 0$, on dispose du tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$5x^2-10x+4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi

$$\mathcal{S} = [x_1, x_2]$$

5. L'équation n'a de sens que si $2x+1 > 0$ et $x+7 > 0$, c'est-à-dire $x > -\frac{1}{2}$ et $x > -7$. On se place donc sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Par stricte croissance de la fonction logarithme :

$$\ln(2x+1) \leqslant \ln(x+7) \Leftrightarrow 2x+1 \leqslant x+7 \Leftrightarrow x \leqslant 6$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{2}; 6\right]$$

6. On a

$$2x^3 + 2x \leqslant -2x \Leftrightarrow 2x^3 + 4x \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x(x^2+2) \leqslant 0$$

$x^2 + 2 > 0$ pour tout réel x, donc ce produit est du signe de $2x$. Ainsi

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}^-$$

7. Les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$2^x \geqslant 3^{x-1} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x\ln(2)} \geqslant \mathrm{e}^{(x-1)\ln(3)}$$

et par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$2^x \geqslant 3^{x-1} \Leftrightarrow x\ln(2) \geqslant (x-1)\ln(3)$$

soit

$$2^x \geqslant 3^{x-1} \Leftrightarrow x(\ln(2)-\ln(3)) \geqslant -\ln(3) \Leftrightarrow x \leqslant \frac{-\ln(3)}{\ln(2)-\ln(3)} = \frac{\ln(3)}{\ln(3)-\ln(2)} \text{ car } \ln(2)-\ln(3) < 0$$

Ainsi

$$\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{\ln(3)}{\ln(3)-\ln(2)}\right]$$

Exercice 14

Posons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (exponentielle et polynôme) et on

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

Remarquons que $f'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$ par stricte croissance d'exponentielle. On obtient alors le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit ainsi que 0 est un minimum de f, et donc

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x - 1 - x \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x}.$$

De même, posons g la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g : x \mapsto \sin(x) - \frac{2x}{\pi}$. g est dérivable sur son domaine de définition (comme somme de sin et de fonction affine) et on a

$$\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ g'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi}$$

g' est à nouveau dérivable pour les mêmes raisons, et on a

$$\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ g''(x) = -\sin(x)$$

g' est donc négative sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On en déduit le tableau de variations de g' suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$		$-$	
g'	$1 - \frac{2}{\pi}$	$\searrow$	$-\frac{2}{\pi}$

g' est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et est strictement décroissante. Puisque $g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(a) = 0$. On peut alors écrire :

x	0		a		$\frac{\pi}{2}$
g'	$1 - \frac{2}{\pi}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{\pi}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g(a)$	$\searrow$	0

Ce qui nous permet de conclure que, pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(x) \geqslant 0$, ce qui donne le résultat.