Chapitre 4

Sommes et produits de réels

Résumé

Le but de ce chapitre est d'introduire les symboles Σ et Π que l'on utilisera régulièrement au cours de l'année. Nous en profitons pour définir rigoureusement factorielle et coefficients binomiaux.

Plan du cours

> *« Le tout est plus grand que la somme des parties. »*

Confucius (-551 – -479)

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① connaître les manipulations sur les sommes et produits :

- connaître la définition de la somme sur une partie finie . . . . ☐
- savoir passer d'une notation en extension à une notation avec le symbole $\sum$ . . . . . . ☐
- connaître la définition de produit . . . . ☐
- connaître les sommes usuelles . . . . ☐
- savoir utiliser la linéarité, la relation de Chasles, la sommation par paquets . . . . ☐
- connaître les différentes propriétés des sommes et produits . . . . ☐

② savoir utiliser les méthodes de calcul de sommes et produits :

- le changement de variable . . . . ☐
- les sommes et produits télescopiques . . . . ☐

③ concernant les notions factorielles et coefficients binomiaux :

- connaître définitions et propriétés de la factorielle . . . . ☐
- connaître définitions et propriétés des coefficients binomiaux . . . . ☐
- savoir utiliser la formule du binôme de Newton . . . . ☐

④ concernant les sommes doubles :

- connaître la définition d'une somme double . . . . ☐
- savoir utiliser le théorème de Fubini suivant les cas . . . . ☐

I. Définitions et propriétés

1. Familles finies d'entiers

Définition 4.1.

Soient n et p deux entiers tels que $p < n$. On note $[\![p, n]\!] = \{p; p+1; \cdots; n\}$.

Exemple 4.1

Par exemple, $[\![2, 5]\!] = \{2, 3, 4, 5\}$.

Remarque

Il y a n entiers dans $[\![1, n]\!]$, et $n+1$ entiers dans $[\![0, n]\!]$. Il y a $n-p+1$ entiers dans $[\![p, n]\!]$.

Exemple 4.2

Il y a 7 entiers dans $[\![2, 8]\!]$.

Plus généralement, on peut définir des familles d'entiers indexées par des parties finies de $\mathbb{N}$:

Définition 4.2. Familles finies de réels

Soit I une partie **finie** de $\mathbb{N}$. On appelle **famille de nombres réels indexée par** I la donnée, pour chaque entier i de I, d'un unique réel x_i. On la note $(x_i)_{i\in I}$.
L'ensemble I est appelé **ensemble des indices** de la famille.

Exemple 4.3

La famille $(i^2)_{i\in[\![1,6]\!]}$ est la famille constituée des réels $1, 4, 9, 16, 25, 36$.
Si $I = \{1, 3, 5\}$, la famille $(2i)_{i\in I}$ est la famille constituée des réels $2, 6, 10$.

Remarque

- Si $I = [\![p, n]\!]$, avec $p \leqslant n$, la famille $(x_i)_{i\in[\![p,n]\!]}$ est également notée $(x_i)_{p\leqslant i\leqslant n}$.
- Si $A = \{x_i,\ i \in I\}$ où I est finie non vide, A admet un maximum et un minimum, et on les notera $\max\limits_{i\in I} x_i$ et $\min\limits_{i\in I} x_i$ plutôt que $\max\ A$ et $\min\ A$. Si $I = [\![p, n]\!]$, on les notera également $\max\limits_{p\leqslant i\leqslant n} x_i$ et $\min\limits_{p\leqslant i\leqslant n} x_i$.

2. Somme et produit sur des familles finies

Définition 4.3.

- Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des réels. On note
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots a_n$$
et on lit "somme de $k = 0$ à n des a_k". 0 et n sont appelées les **bornes** de la somme.
- Soient $a_p, \cdots, a_n$ des réels ($p \leqslant n$). On note
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + \cdots + a_n$$
et on lit "somme de $k = p$ à n des a_k". p et n sont appelées les **bornes** de la somme. ···

- Plus généralement, on noter $\sum_{i \in I} x_i$ la somme de tous les nombres de la famille $(x_i)_{i\in I}$ indexée par une partie finie I de $\mathbb{N}$.

Remarque

Par convention, si la somme est vide, elle vaut 0. Si elle n'est composée que d'un terme, elle vaut ce terme :

$$\sum_{k=n}^{n} x_k = x_n$$

Exemple 4.4

Par exemple, $\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$.

Exercice 4.5

Ecrire la notation en extension de $\sum_{k=2}^{30} k$ et $\sum_{n=1}^{p} \sqrt{n}$.

Ecrire à l'aide du symbole $\sum$ l'expression $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et $2 + 4 + 6 + \cdots + 18$.

Solution

On a, rapidement :

- $\sum_{k=2}^{30} k = 2 + 3 + \cdots + 30$,
- $\sum_{n=1}^{p} \sqrt{n} = 1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{p}$,
- $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,
- $2 + 4 + \cdots + 18 = \sum_{k=1}^{9} 2k$.

Remarque

L'ordre de la sommation n'a pas d'importance. Ainsi $\sum_{k=1}^{n} k^2$ représente la même somme que $\sum_{k=n}^{1} k^2$. En effet, la même partie finie de $\mathbb{N}$ est parcourue : il s'agit de $[\![1, n]\!]$.

Définition 4.4.

On définit de la même manière $\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_n$, et plus généralement, $\prod_{i \in I} x_i$ représente le produit de tous les termes de la famille $(x_i)_{i\in I}$, où I est une partie finie de $\mathbb{N}$.

Remarque

Par convention, si le produit est vide, celui-ci vaut 1.

Attention

Lorsqu'on somme ou qu'on fait un produit sur une famille $(x_i)_{i\in I}$, il faut **absolument** que I soit fini. Sinon, la somme et le produit ne sont pas définis dans le cas général. Nous verrons, au second semestre, une définition lorsque $I = \mathbb{N}$, qui nécessitera des conditions supplémentaires sur les $(x_i)_{i\in I}$.

Remarque (Variable muette)

Lorsqu'on écrit $\sum_{i\in I} x_i$, la variable i est appelée **variable muette** : on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre non utilisée :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in I} x_k = \sum_{z\in I} x_z$$

3. Sommes usuelles

Proposition 4.1.

On dispose des résultats suivants :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Démonstration

La première et la dernière ont été vues dans le chapitre 1. Montrons la deuxième par récurrence. On note P la proposition définie pour tout entier n par P_n : « $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, la somme est composée d'un élément : 0. D'autre part,

$$\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0.$$

Ainsi, P_0 est vraie.

- **Hérédité** : supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. On a alors, par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=0}^{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) \\ &= (n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6} \\ &= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} \\ &= (n+1)\frac{(2n+3)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

On a ainsi montré par récurrence le résultat.

Proposition 4.2. Somme géométrique

Pour tout entier naturel n et tout réel q, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ n+1 & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

Démonstration

Le cas général a été vu dans le chapitre 1. Pour le cas $q = 1$, on a rapidement que

$$\sum_{k=0}^{n} q = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

4. Première propriétés

Les propositions suivantes se montrent toutes par récurrence sur le nombre d'éléments de l'ensemble des indices de la sommes.

Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles finies de réels.

Proposition 4.3. Propriétés de la somme

- Linéarité : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I}(\lambda x_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i$$
- Relation de Chasles : pour tous entiers p, m et n, tels que $p \leqslant m \leqslant n$, on a
$$\sum_{i=p}^{n} x_i = \sum_{i=p}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i$$
- Sommation par paquets : soient deux parties finies J et K de $\mathbb{N}$, tels que $J \cap K = \varnothing$, et $I = J \cup K$. Alors
$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in K} x_i$$

Remarque

On vérifiera, lors de l'utilisation de la linéarité, que les bornes des deux sommes sont les mêmes. Si ce n'est pas le cas, on commencera par se ramener aux mêmes bornes, quitte à sortir de la somme quelques termes.

Par exemple :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i &= x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n \\ &= x_0 + y_n + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + y_i) \end{aligned}$$

Remarque

L'exemple classique d'utilisation de la sommation par parquet est de séparer les termes pairs et les termes impairs d'une somme.

Propriété 4.4.

Si pour tout $i \in I$, $x_i \leqslant y_i$, alors
$$\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$$
Si de plus il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} < y_{i_0}$, alors
$$\sum_{i\in I} x_i < \sum_{i\in I} y_i$$

Propriété 4.5. Inégalité triangulaire

On a
$$\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i|$$

Proposition 4.6. Propriétés du produit

- Si $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\prod_{i\in I}(x_i)^n = \left(\prod_{i\in I} x_i\right)^n$$
Ce résultat est valable si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et si les x_i sont tous non nuls.
- Pour tout réel λ, on a
$$\prod_{i\in I}(\lambda x_i) = \lambda^q \prod_{i\in I} x_i$$
où q désigne le nombre d'éléments de I.
- Séparation : on a
$$\prod_{i\in I}(x_i y_i) = \left(\prod_{i\in I} x_i\right)\left(\prod_{i\in I} y_i\right).$$
- $\left|\prod_{i\in I} x_i\right| = \prod_{i\in I} |x_i|$.

Propriété 4.7.

Si, pour tout $i \in I$, on a $0 \leqslant x_i \leqslant y_i$, alors
$$\prod_{i\in I} x_i \leqslant \prod_{i\in I} y_i$$

Enfin, nous avons le résultat suivant, sur lequel nous reviendrons plus tard :

Propriété 4.8. Exponentielle et logarithme

- On a
$$\exp\left(\sum_{i\in I} x_i\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{e}^{x_i}$$
- Si les $(x_i)_{i\in I}$ sont tous strictement positifs :
$$\ln\left(\prod_{i\in I} x_i\right) = \sum_{i\in I} \ln(x_i)$$

☞ *Exercices 1, 2 et 3.*

5. Avec Python

On peut utiliser Python pour calculer des sommes ou des produits, à l'aide d'une boucle `for`.
Par exemple, pour calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$, on peut introduire la fonction suivante :

Code Python

```
def somme_carre(n):
    res = 0                     # Variable gardant le résultat
    for i in range(1, n+1):     # Attention : range(a,b) va de
        res = res + i*i         # a inclus à b exclus.
    return res
```

Cela donne alors :

Console Python

```
>>> somme_carre(10)
385
>>> 10*(10+1)*(2*10+1)/6
385.0
```

L'opérateur `range` permet d'énumérer les nombres suivant une certaine régularité :

- `range(a,b)` énumère tous les entiers de a (inclus) à $b-1$ (b est donc exclus)
- `range(a,b,p)` énumère tous les entiers de a inclus à $b-1$ par pas de p :

Console Python

```
>>> for i in range(1,8,2): print(i)
...
1
3
5
7
```

On peut également utiliser une fonction du module `numpy` qui permet de faire la somme des termes d'une liste efficacement :

Console Python

```
>>> import numpy as np # On importe le module numpy sous le nom np
>>> L = [ k**2 for k in range(11) ]  # On construit la liste des carrés de 1 à 10
>>> np.sum(L)
np.int64(385)
```

On dispose également de `np.prod` qui calcule le produit des termes d'une liste :

Console Python

```
>>> import numpy as np
>>> np.prod([1,2,3,4])
np.int64(24)
```

II. Calculs de sommes et produits

1. Changement de variable

Puisque la variable d'une somme est muette, on peut faire un changement de variable, qui consiste à ré-écrire la somme différemment.

Proposition 4.9.

Soient $p \leqslant n$ deux entiers, l un entier, et $a_{p+l}, \cdots a_{n+l}$ des réels. Alors

$$\sum_{k=p+l}^{n+l} a_k = \sum_{j=p}^{n} a_{j+l}$$

On a effectué le changement de variable $j = k - l$: ainsi, si $k = p + l$, alors $j = p$. De même, $k = n + l$ amène $j = n$.

Méthode

Pour faire un changement de variable $j = f(k)$, on procède en remplaçant toutes les occurrences de k par son expression en fonction de j, mais on n'oublie pas de changer les bornes en conséquence !

Exemple 4.6

Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)$ en posant $j = n - k$.

Solution

Posons $j = n - k$. Alors

$$S = \sum_{j=n}^{0} j = \sum_{j=0}^{n} j$$

car l'ordre de la somme des termes n'importe pas. On a donc

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Remarque

On pourrait vouloir faire d'autres changements de variables, mais tous ne sont pas autorisés. Par exemple, poser $k = 2i$ est interdit, car $2i$ ne parcourt que les nombres pairs, alors que k parcourt des valeurs y compris impaires.

2. Sommes et produits télescopiques

a. Définition

Définition 4.5.

Soit $p \leqslant n$. Soient $a_p, \cdots, a_{n+1}$ des réels. On appelle **somme télescopique** une somme de la forme

$$\sum_{k=p}^{n} a_{k+1} - a_k$$

Exemple 4.7

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ est une somme télescopique.

b. Simplification

Proposition 4.10.

Soit $S_n = \sum_{k=p}^{n} a_{k+1} - a_k$. Alors

$$S_n = a_{n+1} - a_p$$

Démonstration

En effet,

$$S_n = (a_{p+1} - a_p) + (a_{p+2} - a_{p+1}) + (a_{p+3} - a_{p+2}) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = -a_p + a_{n+1}$$

Exemple 4.8

La somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ se simplifie en

$$S_n = \frac{1}{n+1} - 1$$

Exercice 4.9

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$. Simplifier S_n.

Solution

On constate en effet, en utilisant les propriétés du logarithme, que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$$

La somme S_n est donc télescopique. On a donc

$$S_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

c. Produits télescopiques

On peut définir également les produits télescopiques, avec un résultat assez similaire à celui des sommes télescopiques.

Définition 4.6.

Soit $p \leqslant n$. Soient $a_p, \cdots a_{n+1}$ des réels tous non nuls. On appelle **produit télescopique** un produit de la forme

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Exemple 4.10

Le produit

$$\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$$

est un produit télescopique.

Proposition 4.11.

Soit $P_n = \prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ avec $a_p, \cdots a_{n+1}$ tous non nuls. Alors $P_n = \frac{a_{n+1}}{a_p}$

☞ *Exercices 4 et 6.*

III. Factorielles et coefficients binomiaux

1. Factorielle

Définition 4.7. Factorielle

Soit n un entier non nul. On appelle **factorielle** de n, et on note $n!$, le nombre $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Par convention, $0! = 1$.

Remarque

On a ainsi $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$ et $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

Proposition 4.12.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

Démonstration

En effet, par définition,

$$(n+1)! = \underbrace{1 \times 2 \times \cdots \times n}_{=n!} \times (n+1) = n! \times (n+1)$$

Exercice 4.11

Pour $n \geqslant 1$, simplifier $\frac{(n+2)!}{n!}$.

Solution

On a

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

Exercice 4.12 (Produit des nombres pairs et nombres impairs)

Écrire, à l'aide des factorielles, les produits

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n}(2k+1).$$

Solution

L'astuce est de factoriser chaque terme par 2 pour la première :

$$2 \times 4 \times \ldots \times (2n) = \prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$$

Pour la deuxième, nous allons ré-écrire le produit en ajoutant les termes manquants :

$$\begin{aligned}1\times 3\times \ldots \times (2n+1) = \prod_{k=1}^{n}(2k+1) &= \frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times \ldots \times (2n)\times (2n+1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2n)}\\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n n!}\end{aligned}$$

en utilisant le résultat précédent.

En Python, on utilisera ce qu'on a vu précédemment : une boucle `for`, ou bien `np.prod` :

Version avec for

```python
def fact(n):
    res = 1
    for k in range(1,n+1):
        res = res*k
    return res
```

ou bien

Version avec numpy

```python
import numpy as np

def fact(n):
    return np.prod([k for k in range(1,n+1)])
```

On obtient alors :

Console Python

```
>>> fact(4)
np.int64(24)
>>> fact(5)
np.int64(120)
```

2. Coefficients binomiaux

Nous reviendrons sur une autre définition des coefficients binomiaux plus tard. Nous allons les définir de manière analytique :

Définition 4.8. Coefficients binomiaux

Soient $n\in\mathbb{N}$, et $p\in[\![0,\,n]\!]$. On note

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

et on lit « p parmi n ».

Remarque

Si n et p sont deux entiers tels que $2\leqslant p\leqslant n$, on a

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-p+1)\times(n-p)\times(n-p-1)\times\ldots\times 1}{p!\times(n-p)\times(n-p-1)\times\ldots\times 1}\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\times(n-p+1)}{p!}\end{aligned}$$

C'est cette formule que nous utiliserons, en pratique, pour déterminer $\binom{n}{p}$.

Exemple 4.13

Par exemple,

$$\binom{11}{4} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 11 \times 10 \times 3 = 330$$

Proposition 4.13. Propriétés des coefficients binomiaux

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- Si $n \geqslant 1$, alors $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
- Si $n \geqslant 2$, alors $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
- Formule du chef : si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, alors
$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$
- Formule de Pascal : si $1 < p < n$, alors
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Démonstration

Les trois premiers résultats s'obtiennent par calcul en utilisant les propriétés des factorielles :

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$
$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$
$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Pour la symétrie, cela découle rapidement de la définition du coefficient binomial :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

Pour l'avant-dernier point, on calcule séparément les deux produits :

$$p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{p!(n-p)!} = p\frac{n!}{p(p-1)!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$$

$$n\binom{n-1}{p-1} = n\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$$

On a bien égalité. Enfin, pour la formule du triangle de Pascal, on part de la somme et on met au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p-1)!(n-p)} \\ &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.\end{aligned}$$

Remarque

Par convention, on étend la définition en posant $\binom{n}{p} = 0$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \notin [\![0, n]\!]$.

Dans ce cas, la formule de Pascal est valable pour tous n et p.

La formule de Pascal permet de déduire un élément qui n'était pas évident en utilisant la définition des coefficients binomiaux :

Conséquence 4.14.

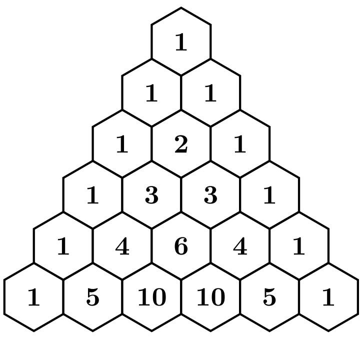
Pour tous entier $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant p \leqslant n$, alors $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Elle se fait par récurrence sur n, en utilisant la formule de Pascal.

Remarque

La formule de Pascal permettent de calculer, de proche en proche, les coefficients binomiaux. On place sur un triangle les côtés qui valent 1 (puisque $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$), et on complète de haut en bas en utilisant la formule du triangle :



En appliquant le résultat de la formule du Chef, remarquons, puisque $\binom{n}{0}=1$, que l'on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\frac{n-1}{p-1}\cdots\frac{n-p+1}{1}\binom{n-p}{0} = \prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k}.$$

On obtient alors le programme Python suivant :

Code Python

```python
def coeff_bin(n,p):
    if n<0 or p<0: return 0           # Cas négatif, convention : 0
    resultat = 1                      # initialisation
    for k in range(p):
        resultat = (n-k)/(p-k) * resultat    # formule du Chef
    return resultat
```

Algorithme 4.15.

La formule de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux en utilisant une fonction « recursive », c'est-à-dire qui s'appelle elle-même. On créé ainsi une fonction `coeff_bin n p` qui prend deux arguments et renvoie :

- 1 si $p=0$ ou $n=p$ (car $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$)
- Sinon, puisque $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$, on calcule ces deux coefficients.

Puisqu'à chaque étape, n ou p diminue, la fonction s'arrêtera (c'est ce qu'on appelle la **terminaison**).

Code Python

```python
def coeff_bin(n,p):
    if n<0 or p<0: return 0                         # Cas négatif, convention: 0
    if p==0 or p==n: return 1                       # Cas $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$
    return coeff_bin(n-1,p-1)+coeff_bin(n-1,p)      # Formule de Pascal
```

☞ *Exercices 7, 8 et 9.*

3. Formule du binôme de Newton

Une application importante des coefficients binomiaux est la formule du binôme de Newton :

Théorème 4.16. Formule du binôme de Newton

Soient a et b deux nombres réels, et n un entier naturel. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Démonstration

Même si on dispose de tous les outils pour la démontrer, on repousse cette preuve à un prochain chapitre.

Pour $n=2$, on retrouve les identités remarquables classiques

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad \text{et} \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

Pour $n=3$ et $n=4$, on obtient ces identités qu'il peut être judicieux de retenir :

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\qquad$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ $\qquad$ $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

Exercice 4.14

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer la formule du binôme de Newton, en prenant $a = b = 1$ pour la première, et $a = 1$ et $b = -1$ pour la seconde. On obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0 \text{ si } n \geqslant 1, \quad 1 \text{ sinon.}$$

☞ *Exercices 11 et 12*

IV. Sommes doubles

La somme $\sum_{i \in I} x_i$, où $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de réels indexée par une partie finie I, est appelée **somme simple**.

1. Notion de somme double

Définition 4.9. Couple d'entiers

On appelle **couple** d'entiers naturels la donnée de deux entiers naturels x et y, dans cet ordre, noté (x, y).

L'ensemble des couples d'entiers naturels est noté $\mathbb{N}^2$.

Remarque

Graphiquement, l'ensemble $\mathbb{N}^2$ est représenté par un quadrillage infini, où un couple (a, b) est représenté par un point à l'intersection de la droite d'équation $x = a$ et $y = b$.

Définition 4.10. Somme double

Soit A une partie finie de $\mathbb{N}^2$. On appelle **famille de nombres réels** indexée par A la donnée, pour chaque couple d'entiers naturels (i, j) de A, d'un unique nombre réel $x_{i,j}$. On la note $(x_{i,j})_{(i,j) \in A}$.

On note $\sum_{(i,j) \in A} x_{i,j}$ la somme des éléments de la famille. On dit qu'il s'agit d'une **somme double**.

Exemple 4.15

Par exemple, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \{(i, j),\ i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, n]\!]\}$, la famille $(3ij^2)_{(i,j) \in A}$ est une famille de nombres réels indexée par A.

En général, le calcul d'une somme double consiste en le calcul successif de sommes simples.

2. Le cas d'un domaine rectangulaire

Un domaine de $\mathbb{N}^2$ est rectangulaire s'il peut s'écrire

$$A = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2,\ m \leqslant i \leqslant n,\ p \leqslant j \leqslant q\}$$

avec m, n, p, q des entiers naturels tels que $m \leqslant n$ et $p \leqslant q$.
On note alors, en général, $(x_{i,j})_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$, et la somme est notée

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} x_{i,j} \quad \text{au lieu de} \quad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

Si $m = p$ et $n = q$, on note encore plus simplement $(x_{i,j})_{p\leqslant i,j\leqslant q}$ la famille et $\sum\limits_{p\leqslant i,j\leqslant q} x_{i,j}$.

Le domaine est dit rectangulaire car les éléments de la famille peuvent être rangés dans un tableau :

$i \backslash j$	p	$p+1$	...	$q-1$	q
m	$x_{m,p}$	$x_{m,p+1}$	...	$x_{m,q-1}$	$x_{m,q}$
$m+1$	$x_{m+1,p}$	$x_{m+1,p+1}$	...	$x_{m+1,q-1}$	$x_{m+1,q}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$x_{n-1,p}$	$x_{n-1,p+1}$	...	$x_{n-1,q-1}$	$x_{n-1,q}$
n	$x_{n,p}$	$x_{n,p+1}$	...	$x_{n,q-1}$	$x_{n,q}$

Pour sommer les éléments de la famille, on peut le faire de deux manières différentes :

- ajouter d'abord chaque élément d'une ligne, c'est-à-dire calculer $\sum\limits_{j=p}^{q} x_{i,j}$ pour tout entier $i \in [\![m, n]\!]$, puis de sommer tous les résultats, pour finalement calculer
$$\sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=p}^{q} x_{i,j}\right)$$
- ajouter d'abord chaque élément d'une colonne, c'est-à-dire calculer $\sum\limits_{i=m}^{n} x_{i,j}$ pour tout entier $j \in [\![p, q]\!]$, puis de sommer tous les résultats, pour finalement calculer
$$\sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=m}^{n} x_{i,j}\right)$$

Ces deux calculs sont valides, et on obtient le théorème suivant :

Théorème 4.17. Théorème de Fubini

Soit $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ m \leqslant i \leqslant n,\ p \leqslant j \leqslant q\}$, et $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ une famille indexée par A. Alors

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} x_{i,j} = \sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=p}^{q} x_{i,j}\right) = \sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=m}^{n} x_{i,j}\right)$$

Remarque

Dans cette somme, il y a autant de termes qu'il y a de termes dans le tableau, c'est-à-dire $(n-m+1)(q-p+1)$.

Exemple 4.16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, on pose $x_{i,j} = ij^2$. On souhaite calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_{i,j}$.

- Première méthode. On fixe $i \in [\![1, n]\!]$. On calcule alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} &= \sum_{j=1}^{n} ij^2\\ &= i\sum_{j=1}^{n} j^2 = i\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

  On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(i\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}\end{aligned}$$

- Deuxième méthode. On fixe $j \in [\![1, n]\!]$. On calcule alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n} ij^2\\ &= j^2\sum_{i=1}^{n} i = j^2\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

  On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_{i,j} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(j^2\frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}\end{aligned}$$

Remarque

L'exemple précédent est un cas particulier où on peut factoriser les termes. De manière plus générale :

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} x_i y_j = \left(\sum_{i=m}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=p}^{q} y_j\right)$$

Démonstration

En effet, en utilisant le théorème de Fubini et par linéarité :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} x_i y_j &= \sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=p}^{q} x_i y_j\right)\\ &= \sum_{i=m}^{n}\left(x_i\left(\sum_{j=p}^{q} y_j\right)\right)\\ &= \left(\sum_{j=p}^{q} y_j\right)\left(\sum_{i=m}^{n} x_i\right)\end{aligned}$$

3. Le cas d'un domaine triangulaire

Un domaine de $\mathbb{N}^2$ est triangulaire s'il peut s'écrire

$$A = \{(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ p\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}$$

avec n et p des entiers naturels tels que $p\leqslant n$.
On note alors, en général, $(x_{i,j})_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$, et la somme est notée

$$\sum_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{i,j} \quad \text{au lieu de} \quad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

Le domaine est dit triangulaire car les éléments de la famille peuvent être rangés dans un tableau de cette manière :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$\dots$	$n-1$	n
p	$x_{p,p}$	$x_{p,p+1}$	$\dots$	$x_{p,n-1}$	$x_{p,n}$
$p+1$		$x_{p+1,p+1}$	$\dots$	$x_{p+1,n-1}$	$x_{p+1,n}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$				$x_{n-1,n-1}$	$x_{n-1,n}$
n					$x_{n,n}$

Pour sommer les éléments de la famille, on peut le faire de deux manières différentes :

- ajouter d'abord chaque élément d'une ligne, c'est-à-dire calculer $\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}$ pour tout entier $i\in[\![p,\,n]\!]$, puis de sommer tous les résultats, pour finalement calculer
$$\sum_{i=p}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}\right)$$
- ajouter d'abord chaque élément d'une colonne, c'est-à-dire calculer $\sum_{i=p}^{j} x_{i,j}$ pour tout entier

$j \in [\![p, n]\!]$, puis de sommer tous les résultats, pour finalement calculer

$$\sum_{j=p}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j} x_{i,j}\right)$$

Ces deux calculs sont valides, et on obtient le théorème suivant :

Théorème 4.18. Théorème de Fubini

Soit $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$, et $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ une famille indexée par A. Alors

$$\sum_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{i,j} = \sum_{i=p}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{j=p}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j} x_{i,j}\right)$$

Remarque

Dans cette somme, il y a autant de termes qu'il y a de termes dans le tableau, c'est-à-dire $\dfrac{(n-p+1)(n-p+2)}{2}$.

On dipose d'un autre cas particulier : le cas de la somme des termes sur-diagonaux stricts. Dans ce cas :

$$A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant i < j \leqslant n\}$$

avec n et p des entiers naturels tels que $p \leqslant n$.
On note alors, en général, $(x_{i,j})_{p\leqslant i<j\leqslant n}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$, et la somme est notée

$$\sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} x_{i,j} \quad \text{au lieu de} \quad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

Cela donne le tableau suivant :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$p+2$	$\dots$	$n-1$	n
p		$x_{p,p+1}$	$x_{p,p+2}$	$\dots$	$x_{p,n-1}$	$x_{p,n}$
$p+1$			$x_{p+1,p+2}$	$\dots$	$x_{p+1,n-1}$	$x_{p+1,n}$
$\vdots$				$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2$					$x_{n-2,n}$	$x_{n-2,n}$
$n-1$						$x_{n-1,n}$
n						

Le théorème de Fubini s'applique à nouveau :

Théorème 4.19. Théorème de Fubini

Soit $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant i < j \leqslant n\}$, et $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ une famille indexée par A. Alors

$$\sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} x_{i,j} = \sum_{i=p}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{j=p+1}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j-1} x_{i,j}\right)$$

Remarque

Dans cette somme, il y a autant de termes qu'il y a de termes dans le tableau, c'est-à-dire

$\dfrac{(n-p+1)(n-p)}{2}$.

Exemple 4.17

On souhaite calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$.

- Première méthode.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} ij\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i\left(\sum_{j=i+1}^{n} j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i\left(\sum_{j=0}^{n} j-\sum_{j=0}^{i} j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{i(i+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(i^3+i^2)\\
&= \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4}-\frac{n^2(n-1)^2}{8}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{12}=\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}
\end{aligned}$$

- Deuxième méthode.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} ij\right)\\
&= \sum_{j=2}^{n} j\sum_{i=1}^{j-1} i\\
&= \sum_{j=2}^{n} j\frac{(j-1)j}{2}\\
&= \sum_{j=2}^{n} \frac{j^2-j}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=2}^{n} j^3-\sum_{j=2}^{n} j^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^3-1-\left(\sum_{j=1}^{n} j^2-1\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}
\end{aligned}$$

Exercice 4.18 (Carré d'une somme)

Démontrer que, pour tous réels $x_1,\dots,x_n$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$$

Solution

On part du théorème de Fubini et on réécrit :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i x_i + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} x_i x_j\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j.\end{aligned}$$

☞ *Exercices 13 et 14.*

Exercices
4

Exercices

Manipulations et calculs

●○○ **Exercice 1 Réécriture** (5 min.)

Réécrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$:

1. $1+3+5+\dots+2021$.
2. $2+4+8+16+\dots+1024$.
3. $x^1-x^2+x^3-\dots-x^{10}$.
4. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\dots+\frac{2021}{2022}$.

●○○ **Exercice 2 Premiers calculs** (10 min.)

Soient x un réel, et $0 \leqslant p \leqslant n$ des entiers. Déterminer

$$\sum_{k=0}^{p} k, \quad \sum_{k=p}^{n} k, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} x^k.$$

●○○ **Exercice 3 Des factorisations sympathiques** (15 min.)

Soient x et y deux réels.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a
$$x^n-y^n=(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k$$
2. En déduire que, pour tout entier naturel impair n, on a
$$x^n+y^n=(x+y)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{n-1-k}y^k$$

●○○ **Exercice 4 Des calculs** (20 min.)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{3n} 2^i, \qquad \sum_{j=0}^{n} \frac{3^j-3\times 5^j}{2^{2j}}, \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}+\sqrt{j+1}}, \qquad \sum_{a=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{3^j}, \qquad \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{1}{k}\right), \qquad \sum_{j=1}^{n} nj,$$

●●○ **Exercice 5 Une somme plus difficile** (15 min.)

Soit n un entier naturel non nul.

1. Exprimer, en fonction de n, le plus grand entier naturel m tel que $2m \leqslant n$ et le plus grand entier naturel p tel que $2p+1 \leqslant n$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$.

●○○ **Exercice 6 Des produits** (20 min.)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les produits suivants :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k+1} \qquad \prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right) \qquad \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

Factorielle et coefficients binomiaux

●○○ **Exercice 7 Produits et factorielles** (5 min.)

Soit n un entier naturel non nul. Exprimer les produits suivants à l'aide de factorielles :

$$\prod_{i=0}^{n}(i+1) \qquad \prod_{k=2}^{n}(k-1) \qquad \prod_{k=1}^{n}(n-k+1) \qquad \prod_{b=1}^{n} b^2(b+1)^2$$

●○○ **Exercice 8 Un autre produit** (10 min.)

Exprimer le produit suivant à l'aide de factorielles :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k\right)$$

●○○ **Exercice 9 Une somme combinatoire** (10 min.)

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Montrer que

$$\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

●○○ **Exercice 10 Retour de l'inégalité de Bernoulli** (10 min.)

Montrer, sans récurrence, l'inégalité de Bernoulli dans le cas où $q \geqslant 0$:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^+, \quad (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

●○○ **Exercice 11 Formule du binôme** (10 min.)

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$$

●●● **Exercice 12 Des sommes combinatoires plus difficiles** (20 min.)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k\binom{n}{k}$$

Sommes doubles

●○○ **Exercice 13 Des sommes doubles** (30 min.)

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i$

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i$

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} n^{i+j}$

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)$

e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j)$

f) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A_n} (i+j)$ où $A_n = \{(i,j)\in\mathbb{N}^2, \quad i+j=n\}$.

●●● Exercice 14 Des sommes plus compliquées (20 min.)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{1+j} \qquad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \max(i,j) \qquad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) \qquad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 3^{-|i-j|}$$

Pour aller plus loin

●●○ Exercice 15 Inégalité de Cauchy-Schwarz (20 min.)

Soit n un entier naturel non nul. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n$ des réels.

1. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{i=1}^{n} \left(|x_i| + t|y_i|\right)^2 = at^2 + bt + c$$
où a, b et c sont trois réels à exprimer en fonction des (x_i) et des (y_i).
2. En déterminant le signe du trinôme du second degré précédent de deux manières différentes, montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$
Cette inégalité est appelée **inégalité de Cauchy-Schwarz**.
3. En appliquant la précédente inégalité à des réels bien choisis, montrer que
$$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

●●○ Exercice 16 Formule de Koenig-Huygens (15 min.)

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels. On note $m = \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ la moyenne des (x_i).

Montrer la formule de Koenig-Huygens :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - m^2$$

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

Rapidement :

$$\begin{aligned}
1+3+5+\ldots+2021 &= \sum_{k=1}^{1010} 2k+1 \\
2+4+8+16+\ldots+1024 &= \sum_{k=1}^{10} 2^k \\
x^1-x^2+x^3-\ldots-x^{10} &= \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1}x^k \\
\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{2021}{2022} &= \sum_{k=1}^{2021} \frac{k}{k+1}
\end{aligned}$$

Exercice 2

On utilise les sommes usuelles. Si la somme ne commence pas à 0, on peut utiliser la relation de Chasles pour s'y ramener :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} k &= \frac{p(p+1)}{2} \\
\sum_{k=p}^{n} k &= \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{p-1} k \\
&= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2} \\
\sum_{k=0}^{n} x^k &= \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ n+1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \\
\sum_{k=p}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{p-1} x^k \\
&= \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} - \dfrac{1-x^p}{1-x} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ (n+1)-p & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{x^p-x^{n+1}}{1-x} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. On part du membre de droite, et on va développer, puis faire un changement de variable :
$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k &= x\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k - y\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^k - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^{k+1}}_{i=k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^k - \sum_{i=1}^{n} x^{n-i}y^i \\ &= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k}y^k - \left(\sum_{i=1}^{n-1} x^{n-i}y^i + y^n\right) \\ &= x^n - y^n\end{aligned}$$

2. On utilise le cas précédent, en remplaçant y par $-y$, et en utilisant le fait que n est impair :
$$\begin{aligned}x^n - (-y)^n &= (x-(-y))\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}(-y)^k \\ &= (x+y)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{n-1-k}y^k\end{aligned}$$

Or, n étant impair, $(-y)^n = (-1)^n y^n = -y^n$, d'où le résultat.

Exercice 4

On se ramène autant que possible à des sommes usuelles. Ainsi :
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3n} 2^i &= \sum_{i=0}^{3n} 2^i - 1 \\ &= \frac{1-2^{3n+1}}{1-2} - 1 = 2^{3n+1} - 2\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{3^j} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sqrt{3}\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\sqrt{3}\right)^j - 1 \\ &= \frac{1-\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}{1-\sqrt{3}} - 1\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \frac{3^j - 3\times 5^j}{2^{2j}} &= \sum_{j=0}^{n} \frac{3^j}{2^{2j}} - 3\frac{5^j}{2^{2j}} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^j - 3\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{5}{4}\right)^j \\ &= \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} - 3\frac{1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{4}} \\ &= 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + 12\left(1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} nj &= n\sum_{j=1}^{n} j\\ &= n\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}\end{aligned}$$

On peut ré-écrire les sommes pour simplifier :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n} -\ln(k)\\ &= -\sum_{k=2}^{n}\ln(k)\\ &= -\ln\left(\prod_{k=2}^{n} k\right) = -\ln(n!)\end{aligned}$$

Dans les autres cas, on essaie de se ramener à une somme télescopique :

$$\begin{aligned}\boxed{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j}+\sqrt{j+1}}} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{j}-\sqrt{j+1}}{\left(\sqrt{j}+\sqrt{j+1}\right)\left(\sqrt{j}-\sqrt{j+1}\right)}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{j}-\sqrt{j+1}}{j-(j+1)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{j}-\sqrt{j+1}}{-1}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sqrt{j+1}-\sqrt{j} = \sqrt{n+1}-\sqrt{1} = \boxed{\sqrt{n+1}-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\boxed{\sum_{a=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)} &= \sum_{a=2}^{n}\ln\left(\frac{a-1}{a}\right)\\ &= \sum_{a=2}^{n}\ln(a-1)-\ln(a) = \ln(1)-\ln(n) = \boxed{-\ln(n)}\end{aligned}$$

Exercice 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ est le plus grand entier tel que $m \leqslant \frac{n}{2}$, soit $2m \leqslant n$, et $p = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ est le plus grand entier tel que $p \leqslant \frac{n-1}{2}$, soit $2p+1 \leqslant n$.
2. On sépare, dans la somme, termes pairs et termes impairs. On fixe n et on note m et p tels que définis dans la question précédente. Remarquons que si n est pair, $p = m-1$ et si n est impair, $m = p$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k &= \sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k \text{ pair}}}(-1)^k k + \sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k \text{ impair}}}(-1)^k k \\
&= \sum_{i=1}^{m} 2i - \sum_{i=0}^{p}(2i+1) \\
&= \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} 2i - \sum\limits_{i=0}^{m-1}(2i+1) & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ \sum\limits_{i=1}^{p} 2i - \sum\limits_{i=0}^{p}(2i+1) & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m-1} 2i + 2m - \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{m-1}(2i+1)\right) & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ \sum\limits_{i=1}^{p} 2i - \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{p}(2i+1)\right) & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2m - 1 - \sum\limits_{i=1}^{m-1} 1 = m & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ -1 - \sum\limits_{i=1}^{p} 1 = -p-1 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \end{cases}
\end{aligned}$$

En remarquant que si n est pair, $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ et si n est impair, $p = \left[\frac{n-1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]$, on en déduit le résultat :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \left[\frac{n}{2}\right] \text{ si } n \text{ est pair, } -\left[\frac{n}{2}\right] - 1 \text{ si } n \text{ est impair.}}$$

Exercice 6

Pour le premier, on remarque un produit télescopique :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k+1} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2(k+1)+1}{2k+1} \\
&= \frac{2(n+1)+1}{2\times 1+1} = \frac{2n+3}{3}
\end{aligned}$$

Pour le deuxième, on ré-écrit pour faire apparaître deux produit télescopiques :

$$\begin{aligned}
\boxed{\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)} &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k} \\
&= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k\times k} \\
&= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \boxed{\frac{n+1}{2n}}
\end{aligned}$$

Pour le dernier produit, on fait apparaître un produit télescopique en ajoutant un terme :

$$\begin{aligned}
\boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}} &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{k}}{k^{k}} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k}}\times\frac{1}{k+1} \\
&= \underbrace{\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k}}}_{\text{telescopage}}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}}{1^{1}}\times\frac{1}{(n+1)!} = \boxed{\frac{(n+1)^{n}}{n!}}
\end{aligned}$$

Exercice 7

On obtient :

$$\prod_{i=0}^{n}(i+1) = 1\times\ldots\times(n+1) = (n+1)!$$

$$\prod k = 2^{n}(k-1) = 1\times\ldots\times(n-1) = (n-1)!$$

$$\prod_{k=1}^{n}(n-k+1) = n\times(n-1)\times\ldots\times 1 = n!$$

$$\prod_{b=1}^{n}b^{2}(b+1)^{2} = \left(\prod_{b=1}^{n}b\right)^{2}\left(\prod_{b=1}^{n}(b+1)\right)^{2} = n!^{2}((n+1)!)^{2}$$

Exercice 8

On ré-écrit :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k\right) &= \prod_{k=1}^{n}\frac{1-2k}{2} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}-(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}2} \\
&= \frac{(-1)^{n}\times 1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2^{n}} \\
&= \frac{(-1)^{n}\times 1\times 2\times\ldots\times(2n-1)\times 2n}{2\times 4\times\ldots\times(2n)\times 2^{n}} \\
&= \frac{(-1)^{n}\times(2n)!}{2^{n}\times 1\times 2\times\ldots\times n\times 2^{n}} \\
&= \frac{(-1)^{n}(2n)!}{2^{2n}n!}
\end{aligned}$$

Exercice 9

On fixe p. On démontre le résultat par récurrence sur n, pour $n \geqslant p$.

- **Initialisation** : pour $n = p$, la somme vaut $\binom{p}{p} = 1$ et $\binom{p+1}{p+1} = 1$: la proposition est donc vérifiée pour $n = p$.
- **Hérédité** : supposons que l'égalité est vraie pour un certain entier $n \geqslant p$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=p}^{n+1}\binom{i}{p} &= \sum_{i=p}^{n}\binom{i}{p} + \binom{n+1}{p}\\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \text{ par hypothèse de récurrence}\\ &= \binom{n+2}{p+1} \text{ par la formule de Pascal}\end{aligned}$$

Ainsi, la proposition est vérifiée au rang $n + 1$.
Conclusion : on a bien montré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant p$, on a

$$\sum_{i=p}^{n}\binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Exercice 10

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\\ &= \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k\\ &= 1 + nx + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k \geqslant 1 + nx\end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant vraie car $x \geqslant 0$ et les coefficients binomiaux sont positifs, donc la somme elle-même est positive.

Exercice 11

Dans tous les cas, on utilise la formule du binôme de Newton avec des réels bien choisis :

$$\begin{aligned}2^n = (1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\\ 1 = 1^n = ((1-x)+x)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k\\ \text{si } n \geqslant 1, \quad 0 = (1-1)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\\ 3^n = (1+2)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\end{aligned}$$

Exercice 12

Remarque

De prime abord, on ne peut pas déterminer les sommes de cette exercice – elles ne correspondent ni à des sommes usuelles, ni à des formules du binôme de Newton. L'idée est d'utiliser des formules du cours pour se ramener à de telles sommes. La principale formule qu'on utilisera ici est

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

On fera attention aux bornes des sommes, en enlevant des termes génants (qui souvent sont nuls)

$$\begin{aligned}
\forall\ n \geqslant 1,\quad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} && \text{(premier terme nul)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} && \text{(formule rappelée)}\\
&= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} && \text{par linéarité}\\
&= n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} && \text{en posant } i = k-1\\
&= n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} 1^i 1^{n-1-i} && \text{pour faire apparaître la formule du binôme}\\
&= n\,(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}
\end{aligned}$$

On traite à part le cas $n = 0$ (car on a appliqué la formule du chef, donc n doit être supérieur ou égal à 1) : on obtient 0, ce qui implique que le résultat précédent est en réalité valable pour $n = 0$:

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}}$$

Autre méthode que l'on peut utiliser ensuite : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

En dérivant par rapport à x :

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}.$$

En prenant $x = 1$, on obtient bien le résultat précédent. De même, en dérivant une deuxième fois, pour $n \geqslant 2$:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}.$$

Ainsi
$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^{k-2} = n(n-1)3^{n-2}\\
\text{soit } &\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^{k-2} = n(n-1)3^{n-2} \text{ en ajoutant les termes nuls.}\\
\text{et donc } &\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^{k} = 4n(n-1)3^{n-2} \text{ en multipliant par } 2^2.
\end{aligned}$$

Remarquons que ce résultat convient pour $n=0$ et $n=1$ (la somme est nulle). Ainsi

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^{k} = 4n(n-1)3^{n-2}.}$$

On peut le faire bien sûr avec la formule du Chef, pour $n \geqslant 2$ et $2 \leqslant k \leqslant n$:

$$k(k-1)\binom{n}{k} = (k-1)n\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

Ainsi
$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^{k} &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}2^{k}\\
&= n(n-1)\sum_{p=0}^{n-2}\binom{n-2}{p}2^{p+2} \text{ en posant } p=k-2\\
&= n(n-1)2^2\,(1+2)^{n-2} = 4n(n-1)3^{n-2}.
\end{aligned}$$

Pour la troisième somme, appliquons à nouveau la formule du Chef, mais au rang $k+1$ et $n+1$:

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$$

soit

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$$

Ainsi
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n+1}\binom{n+1}{p} \text{ en posant } p=k+1\\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p} - \binom{n+1}{0}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.}$$

La dernière se fait comme la première.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k n\binom{n-1}{k-1} \\
&= n\sum_{p=0}^{n-2}(-1)^{p+1}\binom{n-1}{p} \text{ en posant } p=k-1 \\
&= -n\left(\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\binom{n-1}{p} - (-1)^{n-1}\right) \\
&= -n\left((1-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Si $n=1$, alors la somme vaut 0. Sinon,

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k} = n(-1)^{n-1}.}$$

Exercice 13

Pour chacune des sommes, on applique le théorème de Fubini (y compris lorsqu'une des variables n'intervient pas !) :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} = n\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{2}+\frac{j}{2}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} n^{i+j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} n^j n^i\\ &= \sum_{j=1}^{n} n^j\frac{n-n^{n+1}}{1-n} = \left(\frac{n-n^{n+1}}{1-n}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i+j &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(i+j)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=1}^{n} j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}+nj = n\frac{n(n+1)}{2}+n\frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(i+j) && \text{par Fubini}\\ &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i+\sum_{i=1}^{j-1} j\right) && \text{par linéarité}\\ &= \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2}+(j-1)j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2}+(j-1)j\right) && \text{car pour } j=1\text{, le terme est nul}\\ &= \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^2-j)\\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(n-1)}{2}\end{aligned}$$

Pour la dernière somme, on constate que $(i,j)\in A_n$ si et seulement si $i\in[\![0,\ n]\!]$ et $j=n-i$. On peut alors écrire

$$\sum_{(i,j)\in A_n}(i+j) = \sum_{i=0}^{n} i+(n-i) = \sum_{i=0}^{n} n = n(n+1)$$

Exercice 14

On va appliquer le théorème de Fubini, en essayant de simplifier :

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{1+j}} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{1+j}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+j} \sum_{i=1}^{j} i\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+j} \frac{j(j+1)}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{4}}
\end{aligned}$$

Pour la deuxième, on utilise le fait que $\max(i,j) = j$ si $j \geqslant i$:

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \max(i,j)} & \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \max(i,j)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j = \sum_{j=1}^{n} j \times j\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}
\end{aligned}$$

Pour la troisième, on écrit par sommation par parquet puisque $1 \leqslant i,j \leqslant n$ si et seulement si $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ ou $1 \leqslant i < j \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)} &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1\leqslant j< i\leqslant n} \max(i,j)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} i\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \sum_{i=1}^{n} i(i-1) \text{ car le terme est nul pour } i=1\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= n(n+1)\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}
\end{aligned}$$

De même, $|i-j| = j-i$ si $j \geqslant i$:

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 3^{-|i-j|}} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 3^{-|i-j|} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 3^{-(j-i)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} 3^{-j}\sum_{i=1}^{j} 3^{i} = \sum_{j=1}^{n} 3^{-j}\frac{3-3^{j+1}}{1-3} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(3-3^{-j+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} 3 - 3\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(3n - 3\frac{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(3n-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)\right)}
\end{aligned}$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 15

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On développe :

$$(|x_i| + t|y_i|)^2 = |x_i|^2 + 2|x_i|\cdot|y_i|t + t^2|y_i|^2 = x_i^2 + 2|x_iy_i|t + t^2y_i^2$$

soit, en sommant

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(|x_i| + t|y_i|)^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2|x_iy_i|t + t^2y_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| + t^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\
&= at^2 + bt + c
\end{aligned}$$

avec $a = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$, $b = 2\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|$, et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

2. Tout d'abord, puisque $|x_i + ty_i|^2 \geqslant 0$, par somme,

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i| + t|y_i|)^2 \geqslant 0$$

Ainsi, le trinôme du second degré est de signe constant. Cela signifie que son discriminant Δ est négatif. Or

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

et cela donne

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

puis, en appliquant la fonction racine croissante sur $\mathbb{R}^+$, et par positivité des termes

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

3. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $x_i = \frac{1}{i}$ et $y_i = i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Cela donne :

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{1}{i} i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}.$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$
$$\text{et } \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et l'inégalité devient

$$n \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

soit, en appliquant la fonction carré, croissante sur $\mathbb{R}^+$

$$n^2 \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$

et finalement

$$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}.$$

Exercice 16

On va développer, en constatant que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n \times m$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i m + m^2) \\
&= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \frac{2m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m^2 \\
&= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \frac{2m(nm)}{n} + \frac{1}{n} (nm^2) \\
&= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - m^2.
\end{aligned}$$