Chapitre 2

Généralités sur les nombres réels

Résumé

Dans ce chapitre, nous allons revenir sur les nombres réels, et voir toutes les propriétés qui en découlent :

- *un rappel sur le calcul fractionnaire et les puissances ;*
- *un retour sur les propriétés sur les inégalités ;*
- *une définition rigoureuse des intervalles de $\mathbb{R}$ et des propriétés sur les sous-ensembles de $\mathbb{R}$;*
- *la définition de la valeur absolue, la partie entière d'un nombre réel, et la racine n-ième d'un nombre réel positif.*

Plan du cours

> *« Borné dans sa nature, infini dans ses vœux, l'homme est un dieu tombé qui se souvient des cieux »*
>
> Alphonse de la Martine (1790 – 1869). *L'homme, Méditations poétiques*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Sur les ensembles de nombres :

- les ensembles classiques ☐
- les propriétés de l'addition et la multiplication des réels ☐
- la notion de parité d'un entier ☐
- les règles de calcul dans $\mathbb{Q}$ ☐
- les règles sur les puissances ☐
- les identités remarquables ☐

② Sur la relation d'ordre des réels :

- les propriétés de la relation d'ordre ☐
- les compatibilités ☐
- le cas des puissances ☐
- la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$ ☐
- les propriétés de la valeur absolue ☐
- les inégalités triangulaires ☐

③ Sur les extrema et différentes bornes :

- connaître la définition d'un majorant et d'un minorant ☐
- connaître la définition d'un maximum et d'un minimum ☐
- savoir déterminer qu'une partie de $\mathbb{Z}$ admet minimum et maximum ☐
- connaître la définition de la borne supérieure et de la borne inférieure ☐
- savoir utiliser le théorème de la borne supérieure ☐
- savoir caractériser la borne supérieure et la borne inférieure ☐
- savoir la caractérisation un intervalle ☐
- connaître les propriétés de la partie entière ☐

④ Sur les racines n-ièmes :

- connaître les propriétés des racines n-ièmes ☐
- savoir utiliser la quantité conjugée ☐
- savoir déterminer les solutions d'une équation du second degré, et le signe d'un trinôme ☐

I. Ensembles de nombres

1. Les ensembles classiques

Définition 2.1. Ensembles usuels

On dispose des cinq ensembles usuels suivants (dont on admet la construction) :

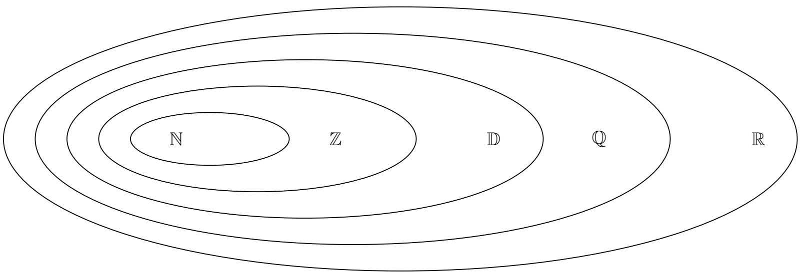
- L'ensemble $\mathbb{N}$ des **entiers naturels**
$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$$
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des **entiers relatifs**
$$\mathbb{Z} = \{... -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$$
- L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres ayant un nombre fini de chiffres après la virgule.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire les nombres s'écrivant sous la forme $\dfrac{p}{q}$, où p est un entier relatif, et q un entier naturel non nul.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ de l'ensemble des nombres réels.

Exemple 2.1

Par exemple,
$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad 0,41 \in \mathbb{D}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Propriété 2.1.

On dispose des inclusions suivantes :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Démonstration

Par définition, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ (car les entiers relatifs ont un nombre fini de chiffres après la virgule, à savoir 0). $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ par définition également. Il reste à voir que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Soit $a \in \mathbb{D}$. Alors a possède un nombre fini de chiffres après la virgule ; on note d le nombre de chiffres après la virgule. Alors,
$$b = 10^d a \in \mathbb{Z}$$
et donc
$$a = \frac{b}{10^d} \in \mathbb{Q}$$

Notation

Les différents ensembles contiennent 0. On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Remarque
L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est constitué des réels qui ne sont pas rationnels ; on l'appelle l'ensemble des **nombres irrationnels**.

☞ *Exercice 1.*

2. Propriétés des opérations

a. Le corps des réels

On admet les propriétés suivantes de l'addition et la multiplication des réels :

Proposition 2.2. Groupe additif

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est muni d'une opération, appelée **addition** et notée $+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- Commutativité : pour tous réels x et y, $x + y = y + x$.
- Associativité : pour tous réels x, y et z, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- Neutre : pour tout réel x, $0 + x = x + 0 = x$.
- Opposé : tout réel x admet un opposé, noté $-x$: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

L'ensemble de ces propositions font de $\mathbb{R}$, muni de l'addition, un **groupe commutatif**.

Par convention, pour tous réels x et y, on notera $x - y$ l'opération $x + (-y)$, et on l'appellera **soustraction** de x par y.

Proposition 2.3. Corps des réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ est également muni d'une opération, appelée **multiplication** et notée $\times$ (ou $\cdot$), qui vérifie les propriétés suivantes :

- Commutativité : pour tous réels x et y, $x \cdot y = y \cdot x$.
- Associativité : pour tous réels x, y et z, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- Neutre : pour tout réel x, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
- Inverse : tout réel x non nul admet un inverse, noté x^{-1} ou $\frac{1}{x}$: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.
- Distributivité : pour tous réels x, y et z, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

L'ensemble des ces propositions font de $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication, un **corps commutatif**.

Par convention, pour tout réels x et y, on notera xy au lieu de $x \cdot y$; si $y \neq 0$, on notera $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ et on l'appellera **division** de x par y.
Ces définitions amènent différentes propriétés, qui en sont simplement des ré-écritures :

Propriété 2.4.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ termes}}$.
- Pour tout réel x, $(-1)x = -x$.
- Pour tous réels x et y, $xy = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$.
- Pour tous réels x, y, z et t, on a :
  - Distributivité : $x(y - z) = xy - xz$.
  - Double distributivité : $(x + y)(z + t) = xz + xt + yz + yt$.
  - Si $x + y = x + z$ alors $y = z$.
  - Si $xy = xz$ alors $x = 0$ ou $y = z$.

Démonstration

Le premier point est immédiat. Concernant le deuxième point, $x+(-1)x = 1x+(-1)x = (1+(-1))x = 0x = 0$; par définition $(-1)x = -x$. Pour le troisième, on procède par double implication. Si $x = 0$ par exemple, alors $x \cdot y = (1-1)y = y - y = y + (-y) = 0$. Réciproquement, si $x \cdot y = 0$, soit $x = 0$, soit x est inversible et dans ce cas $x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0$ et donc $y = 0$. Pour les derniers points, on utilise les règles précédentes :

$$x(y-z) = x(y+(-z)) = xy + x(-z) = xy + (-xz) = xy - xz$$
$$(x+y)(z+t) = x(z+t) + y(z+t) = xz + xt + yz + yt$$
$$x+y = x+z \implies (-x)+x+y = (-x)+x+z \implies y = z$$

Pour le dernier, soit $x = 0$, soit x est inversible et alors $x^{-1}xy = x^{-1}xz$ soit $y = z$.

b. Stabilité des ensembles de nombres

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est stable par addition et multiplication : si x et y sont deux éléments de $\mathbb{N}$ alors $x+y$ et xy le sont également. En revanche, $\mathbb{N}$ n'est pas stable par soustraction et $\mathbb{N}^*$ n'est pas stable par division. En effet, $2-5 = -3 \notin \mathbb{N}$ et $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.
L'ensemble $\mathbb{Z}$ est stable par addition, soustraction et multiplication. En revanche, $\mathbb{Z}^*$ n'est pas stable par division, $\frac{1}{2}$ étant encore un contre-exemple.
$\mathbb{Q}$ est quant à lui stable par addition, soustraction et multiplication, et $\mathbb{Q}^*$ est stable par division.

c. Les entiers

On donne tout d'abord une définition générale de la parité :

Définition 2.2. Parité

Un nombre entier n est dit **pair** si $\frac{n}{2}$ est un entier, et impair sinon.

Exemple 2.2

2 est pair, puisque $\frac{2}{2} = 1 \in \mathbb{Z}$; en revanche, 3 ne l'est pas, puisque $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Une caractérisation importante :

Proposition 2.5.

Un nombre entier n est pair si et seulement s'il existe un entier p tel que $n = 2p$. Un nombre entier n est impair si et seulement s'il existe p tel que $n = 2p+1$.

Démonstration

Cela repose sur le théorème de la division euclidienne, que nous verrons ultérieurement

d. Propriétés des rationnels

Remarque

Si $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, on dit que a est le **numérateur**, et b le **dénominateur** de q.

⚠ L'écriture d'un rationnel n'est pas unique. En effet, pour tout $c \in \mathbb{Z}^*$

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

En revanche, si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ n'admettent pas de diviseur commun[1] autre que 1 et -1 dans $\mathbb{Z}$, on dit que l'écriture $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Les règles de calcul sur les fractions doivent être maitrisées :

Propriété 2.6.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{0}{b} = 0, \qquad \frac{a}{1} = a, \qquad \frac{a}{-1} = -a, \qquad \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \qquad \frac{a}{b} = a\frac{1}{b} = \frac{1}{b}a$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}, \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a};$$

pour $k \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$$

et si $c \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exercice 2.3

Calculer $A = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}}$, $B = \frac{\frac{2}{3}}{6}$, $C = 3 \times \frac{7}{18}$ et $D = \frac{4+17}{11+4}$.

Solution

En appliquant ce qui précède, on a rapidement :

$$A = \frac{15}{14}, \quad B = \frac{1}{9}, \quad C = \frac{7}{6}$$

Enfin, attention : on ne simplifie pas comme on le veut dans une fraction (il faut d'abord factoriser). Ici

$$D = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

☞ *Exercice 3.*

e. Puissances entières

Rappelons la définition de la puissance entière d'un nombre réel :

Définition 2.3.

Soit a un réel non nul, et $n \in \mathbb{N}$. On définit a^n de la manière suivante : ···

[1] C'est-à-dire un entier $d \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\frac{a}{d} \in \mathbb{Z}$ et $\frac{b}{d} \in \mathbb{Z}$.

- $a^0 = 1$;
- $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ si $n \geqslant 1$.

De plus, on note
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
On définit ainsi a^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2.4
On a $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$, $(-12)^1 = -12$ et $(1409091)^0 = 1$.

Remarque
Par définition, si $x \in \mathbb{R}^*$, $x^1 = x$ et $x^{n+1} = x \cdot x^n = x^n \cdot x$.
De plus, $x^n = 0$ si et seulement si $x = 0$.
Enfin, par convention, $0^0 = 1$.

On dispose d'un cas particulier remarquable : les puissances de -1 :

Proposition 2.7.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$$
En particulier, $(-1)^n = -(-1)^{n+1} = -(-1)^{n-1}$.

Propriété 2.8.
Soient a et b deux réels non nuls, et n, m deux entiers relatifs.
- (puissance négative)
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$
- (puissances différentes)
$$a^n \times a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm};$$
- (puissances identiques)
$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \quad \text{et} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Exercice 2.5
Simplifier
$$A = \frac{5^4 \times 3^2 \times 2^3}{15^3} \quad \text{et} \quad \frac{21 \times 10^{-3}}{3 \times 10^2}.$$

Solution
En utilisant la propriété précédente :
$$A = 5^1 \times 3^{-1} \times 2^3 = \frac{40}{3}$$

$$B = \frac{21}{3} \times \frac{10^{-3}}{10^2} = 7 \times 10^{-5}$$

☞ *Exercice 4.*

Propriété 2.9. Identités remarquables

On dispose des identités suivantes :

- Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b)\end{aligned}$$

- Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2)\end{aligned}$$

Exercice 2.6

Développer, pour tout réel x, $(x+1)^2, (x+1)^3, (1-x)^2$ et $(1-x)^3$. Factoriser $4-x^2$ et $8+x^3$.

Solution

En utilisant les identités remarquables :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= x^2 + 2x + 1 \\ (x+1)^3 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ (1-x)^2 &= x^2 - 2x + 1 \\ (1-x)^3 &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\ 4 - x^2 &= (2-x)(2+x) \\ 8 + x^3 &= (2+x)(4 - 2x + x^2)\end{aligned}$$

Remarque

Il est judicieux de connaître, ou en tout cas savoir retrouver rapidement, les identités remarquables suivantes :

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 &= (x+1)^2, & x^2 - 2x + 1 &= (x-1)^2 \\ x^2 + 4x + 4 &= (x+2)^2, & x^2 - 4x + 4 &= (x-2)^2 \\ 4x^2 + 4x + 1 &= (2x+1)^2, & 4x^2 - 4x + 1 &= (2x-1)^2\end{aligned}$$

☞ *Exercice 5.*

II. Comparaisons dans $\mathbb{R}$

1. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Donnons la définition, admise, de la notion de relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, que l'on manipule habituellement.

Définition 2.4. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre, notée $\leqslant$, qui vérifie les propriétés suivantes :

- Réflexivité : pour tout réel a, $a \leqslant a$.
- Antisymétrie : pour tous réels a et b, si on a $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, alors $a = b$.
- Transitivité : pour tous réels a, b et c, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$ alors $a \leqslant c$.

Remarque

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est **totale** : pour tous réels a et b, on a $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$.

À partir de cette relation d'ordre, on donne un nom aux différentes possibilités :

Définition 2.5. Comparaison

Soient x et y deux réels. On dit que :

- x est inférieur (ou égal) à y lorsque $x \leqslant y$.
- x est supérieur (ou égal) à y lorsque $x \geqslant y$.
- x est strictement inférieur à y, ce que l'on note $x < y$, lorsque $x \leqslant y$ et $x \neq y$.
- x est strictement supérieur à y, ce que l'on note $x > y$, lorsque $x \geqslant y$ et $x \neq y$.

⚠ **Attention**

En mathématiques (en France), lorsqu'on indique que « x est inférieur (respectivement supérieur) à y », on sous-entend systématiquement « x est inférieur ou égal (resp. supérieur ou égal) à y ».

Remarque

Si on a $x < y$ alors $x \leqslant y$. En revanche, la réciproque est fausse. De même, si $x > y$ alors $x \geqslant y$.

Définition 2.6. Positif et négatif

Un réel x est dit **positif** si $x \geqslant 0$, **strictement positif** si $x > 0$, **négatif** si $x \leqslant 0$ et **strictement négatif** si $x < 0$.

2. Compatibilités

Cette relation d'ordre est compatible avec l'addition, et en partie avec la multiplication :

Propriété 2.10. Règles sur les inégalités

Soient x et y deux réels.

- Compatibilité avec l'addition : pour tout réel z, $x \leqslant y$ si et seulement si $x + z \leqslant y + z$;
- Compatibilité avec la multiplication : pour tout réel **positif** z, si $x \leqslant y$ alors $z \times x \leqslant z \times y$;

3. Propriétés

À partir des différentes règles, on obtient d'autres propriétés de compatibilité qu'il faut savoir manipuler sans erreurs.

Proposition 2.11. Compatibilité I

Soient x, y, z et t des réels.

- Si $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$ alors $x + z \leqslant y + t$.
- Si $x \leqslant y$ et $z \leqslant 0$ alors $z \times x \geqslant z \times y$.
- $xy \geqslant 0$ si et seulement si x et y sont de même signe.
- Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $x \leqslant y$ si et seulement si $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$. Ceci est valable également si $x < 0$ et $y < 0$.

On retiendra que multiplier par un nombre strictement positif conserve l'ordre, alors que multiplier par un nombre strictement négatif renverse l'ordre.

⚠ **Attention**

On ne peut pas soustraire, multiplier ou diviser des inégalités membres à membres. Par exemple, $-1 \leqslant 1$ et $-3 \leqslant 2$ et pourtant $-3 \times (-1) \geqslant 1 \times 2$ et $-1 - (-3) \geqslant 1 - 2$.

En revanche, si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant z \leqslant t$ alors $0 \leqslant x \times z \leqslant y \times t$.

On dispose de propriétés spécifiques sur les inégalités strictes :

Proposition 2.12. Compatibilité II

Soient x, y, z et t des réels.

- Si $x < y$ et $y \leqslant z$, ou bien si $x \leqslant y$ et $y < z$ alors $x < z$.
- Si $x < y$ et $z \leqslant t$ alors $x + z < y + t$.
- Si $x < y$ et $z > 0$ alors $xz < yz$. Si $x < y$ et $z < 0$ alors $xz > yz$. En particulier, $-x > -y$.
- $xy > 0$ si et seulement si x et y sont tous deux strictement positifs, ou strictement négatifs.
- $a > 0$ si et seulement si $\frac{1}{a} > 0$.
- Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $x < y$ si et seulement si $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$. Ceci est valable également si $x < 0$ et $y < 0$.

Enfin, on dispose de propriétés sur les puissances (que l'on peut démontrer par récurrence) :

Proposition 2.13. Puissances I

Soient x et y deux réels, et $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si n est pair, et $0 \leqslant x < y$ alors $x^n < y^n$.
- Si n est pair, et $x < y \leqslant 0$ alors $x^n > y^n$.
- Si n est impair et $x < y$ alors $x^n < y^n$.

Proposition 2.14. Puissances II

Soient x et y deux réels, et $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

- Si n est pair, et $0 \leqslant x < y$ alors $x^n > y^n$.
- Si n est pair, et $x < y \leqslant 0$ alors $x^n < y^n$.
- Si n est impair, et $0 \leqslant x < y$ alors $x^n > y^n$.
- Si n est impair, et $x < y \leqslant 0$ alors $x^n > y^n$.

⚠ **Attention**

On ne peut pas élever les termes d'une inégalité à une puissance entière si ceux-ci sont de signe contraire. Ainsi, $-1 < 2$ donne $(-1)^2 < 2^2$, et $-5 < 3$ donne $(-5)^2 > 3^2$.

4. Intervalles de $\mathbb{R}$

A partir de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, on peut définir différents parties, que l'on appelle **intervalles**.

Définition 2.7. Intervalles bornés

Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. On note :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$ (intervalle fermé borné, appelé également segment),
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\}$ (intervalle semi-ouvert borné),
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\}$ (intervalle semi-ouvert borné),
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ (intervalle ouvert borné).

On peut également dire semi-fermé au lieu de semi-ouvert. a et b sont appelés les **extrémités** de l'intervalle.

Définition 2.8. Intervalles non bornés

Soient a un réel. On note :

- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant a\}$ (intervalle fermé non borné),
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R},\ x < a\}$ (intervalle ouvert non borné),
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant a\}$ (intervalle fermé non borné),
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x > a\}$ (intervalle ouvert non borné),
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ (intervalle fermé et ouvert non borné).

Remarque

Pour tout réel a, l'intervalle $[a, a]$ est simplement constitué de l'élément a : $[a, a] = \{a\}$. En revanche, $[a, a[$, $]a, a]$ et $]a, a[$ sont vides. Si $a > b$, l'intervalle $[a, b]$ (ainsi que les intervalles semi-ouverts et ouvert associés) sont vides en utilisant la définition. Par abus de notation, on écrira parfois que $[a, b] = [b, a]$ dans ce cas-là.

On dispose de notations pour certains intervalles particuliers :

Définition 2.9.

On note :

- $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ l'ensemble des réels positifs,
- $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ l'ensemble des réels strictement positifs,
- $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$ l'ensemble des réels négatifs,
- $\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$ l'ensemble des réels strictement négatifs.

Remarque

On peut utiliser la notation $+$ et $-$ pour les autres ensembles vus précédemment.

Exercice 2.7

Décrire les ensembles $\mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{N}^-$ et $\mathbb{Q}^-$.

Solution

Rapidement, $\mathbb{Z}_-^*$ sont les entiers strictement négatifs, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_- = \{0\}$ et $\mathbb{Q}^-$ sont les rationnels négatifs.

5. Valeur absolue

Définition 2.10.

Pour tout réel x, on appelle **valeur absolue** de x, que l'on note $|x|$, le nombre

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Exemple 2.8

$|3| = 3$ et $|-4| = 4$.

♡ **Propriété 2.15. Opérations**

Soient x, y deux réels, et $n \in \mathbb{N}$.

- $|-x| = |x| \qquad |xy| = |x| \cdot |y| \qquad |x^n| = |x|^n \qquad |x|^2 = x^2 \qquad |x-y| = |y-x|$
- Si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

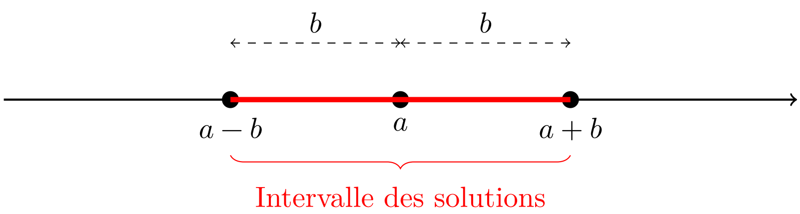
♡ **Propriété 2.16. Equations**

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\begin{array}{ccccc} |x| = |a| & \Longleftrightarrow & x = a \text{ ou } x = -a & & \\ |x| \leqslant a & \Longleftrightarrow & -a \leqslant x \leqslant a & \Longleftrightarrow & x \in [-a,\ a] \\ |x| < a & \Longleftrightarrow & -a < x < a & \Longleftrightarrow & x \in\ ]-a,\ a[\\ |x| \geqslant a & \Longleftrightarrow & x \leqslant -a \text{ ou } x \geqslant a & \Longleftrightarrow & x \in\ ]-\infty,\ -a] \cup [a,\ +\infty[\\ |x| > a & \Longleftrightarrow & x < -a \text{ ou } x > a & \Longleftrightarrow & x \in\ ]-\infty,\ -a[\cup]a,\ +\infty[\end{array}$$

Remarque

Graphiquement, on peut représenter les solutions d'une inéquation avec une valeur absolue sur une droit réelle. Par exemple, l'inéquation, d'inconnue x, $|x-a| \leqslant b$ est représentée sur la droite graduée ainsi :



La valeur absolue intervient dans un cas particulier d'équation du second degré :

Proposition 2.17.

Soient x et a deux réels. Alors

$$x^2 = a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| = |a| \quad \Longleftrightarrow \quad x = a \text{ ou } x = -a$$

Enfin, $x^2 \leqslant y^2$ si et seulement si $|x| \leqslant |y|$.

♡ **Théorème 2.18. Inégalité triangulaire I**

Pour tous réels x et y,

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Démonstration

Calculons $(|x|+|y|)^2-|x+y|^2$:

$$\begin{aligned}(|x|+|y|)^2-|x+y|^2 &= (|x|^2+2|x|\cdot|y|+|y|^2)-(x+y)^2\\ &= x^2+2|x|\cdot|y|+y^2-(x^2+2xy+y^2)\\ &= 2(|xy|-xy)\end{aligned}$$

Or, par définition de la valeur absolue, $|xy|-xy\geqslant 0$. Donc $(|x|+|y|)^2-|x+y|^2\geqslant 0$, c'est-à-dire

$$(|x|+|y|)^2\geqslant|x+y|^2$$

Puisque les deux nombres $|x|+|y|$ et $|x+y|$ sont positifs, cela implique que $|x|+|y|\geqslant|x+y|$.

Remarque

On a de même

$$|x-y|\leqslant|x|+|y|$$

puisque $|x-y|\leqslant|x|+|-y|=|x|+|y|$.

♡ **Théorème 2.19. Inégalité triangulaire II**

Pour tous réels x et y,

$$||x|-|y||\leqslant|x-y|$$

Démonstration

On applique l'inégalité précédente à $x=x-y+y$:

$$|x|=|x-y+y|\leqslant|x-y|+|y|$$

et donc

$$|x|-|y|\leqslant|x-y|.$$

De manière symétrique,

$$|y|=|y-x+x|\leqslant|y-x|+|x|=|x-y|+|x|$$

et donc $|y|-|x|\ \leqslant|x-y|$, soit $|x|-|y|\geqslant-|x-y|$. On obtient ainsi

$$-|x-y|\leqslant|x|-|y|\leqslant|x-y|.$$

Ces deux inégalités nous garantissent que $||x|-|y||\leqslant|x-y|$.

III. Majorant, maximum, et borne supérieure

Nous allons introduire, pour les parties de $\mathbb{R}$, différentes notions qui se ressemblent. Il faudra bien les différencier.

1. Majorant, minorant

Définition 2.11. Majorant, minorant

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $a\in\mathbb{R}$.

- On dit que a est un **majorant** de A si, pour tout $x\in A$, $x\leqslant a$.
  Si A admet un majorant, on dit que A est une partie **majorée**.
- On dit que a est un **minorant** de A si, pour tout $x\in A$, $x\geqslant a$.

Si A admet un minorant, on dit que A est une partie **minorée**.

Exemple 2.9

$\mathbb{N}$ est minoré par 0 (mais également par tout réel négatif). Les parties $B = [2, +\infty[$, $C =]-6, 8[$ sont minorées, et les parties $D = [-12, 2]$ et $E =]-\infty, 1[$ sont majorées.

Remarque

Un majorant (respectivement un minorant), s'il existe, n'est pas unique.

Définition 2.12. Partie bornée

Une partie de $\mathbb{R}$ est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 2.10

Les parties C et D de l'exemple 2.9 sont bornées.

Proposition 2.20.

Une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant a$.

Démonstration

On procède par double implication.
S'il existe un tel $a \in \mathbb{R}^+$, on a donc pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant a$, c'est-à-dire $-a \leqslant x \leqslant a$: la partie A est donc bornée.
Réciproquement, si A est bornée, il existe un minorant m et un majorant M tels que, pour tout $x \in A$, $m \leqslant x \leqslant M$. Notons alors a le maximum de $|m|$ et $|M|$. Par définition :

$$m \geqslant -|m| \geqslant -a \quad \text{et} \quad M \leqslant |M| \leqslant a.$$

Ainsi, pour tout $x \in A$:

$$-a \leqslant m \leqslant x \leqslant M \leqslant a$$

c'est-à-dire $|x| \leqslant a$.

2. Maximum, minimum

Un maximum est un majorant appartenant à la partie. C'est donc un majorant particulier :

Définition 2.13. Maximum, minimum

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que $a \in A$ est un **maximum** (ou **plus grand élément**) de A si, pour tout $x \in A$, $x \leqslant a$. Si A admet un maximum a, celui-ci est unique et est appelé le maximum de A, noté $a = \max(A)$.
- On dit que $a \in A$ est un **minimum** (ou **plus petit élément**) de A si, pour tout $x \in A$, $x \geqslant a$. Si A admet un minimum a, celui-ci est unique et est appelé le minimum de A, noté $a = \min(A)$.

Remarque

On retiendra qu'un maximum (ou un minimum) est élément appartenant à la partie, alors qu'un majorant peut ne pas appartenir à la partie.

Démonstration

Démontrons l'unicité du maximum. On suppose qu'on dispose de deux maximums a et b de la partie A. Par définition :

- a est un maximum, donc pour tout $x \in A$, $x \leqslant a$. En particulier, pour $x = b$, on a $b \leqslant a$.
- De même, b est un maximum, donc pour tout $x \in A$, $x \leqslant b$. En particulier, pour $x = a$, on a $a \leqslant b$.

Ces deux inéaglités nous donnent $a = b$, et ainsi l'unicité du maximum. La démonstration pour l'unicité du minimum est similaire.

Exemple 2.11

2 est le maximum de $A = [0, 2]$, -1 est le minimum de $B = [-1, +\infty[$.

Attention

Une partie A peut avoir des majorants mais aucun maximum. Par exemple, $A = [0, 1[$ est majorée par 1 (et par tout nombre réel supérieur ou égal à 1), mais n'a pas de maximum. En effet, supposons que A admette un maximum, que l'on note a. Par définition, $a < 1$ puisqu'il appartient à A. Mais alors, on constate que :

$$\frac{a+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad a < \frac{a+1}{2}.$$

Ainsi, $\frac{a+1}{2} \in A$ et pourtant il est plus grand que le maximum a : c'est absurde.

Exercice 2.12

Déterminer, s'ils existent, les maximums et minimums de $A = \mathbb{N}^*$, $B =]-1, 2]$, et $C = \left\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Solution

Rapidement, A admet un minimum (1) mais pas de maximum, B admet un maximum (2) mais pas de minimum, et C admet un maximum (1) mais pas de minimum. En effet :

- $1 \in C$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$, donc 1 est bien le maximum de C.
- Supposons qu'il existe un minimum, que l'on note a. Par définition de C, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = \dfrac{1}{n}$. Mais alors, $\dfrac{1}{n+1} \in C$ et $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} = a$, ce qui est absurde. Il n'y a donc pas de minimum.

On dispose enfin de théorèmes permettant d'établir l'existence de minimum ou maximum dans certains cas.

Théorème 2.21.

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum.
- Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.

Démonstration
Ces théorèmes sont admis (car ils découlent de la construction de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$).

3. Borne supérieure, borne inférieure

Dans les exemples précédents, nous avons vu des parties de $\mathbb{R}$ majorée mais ne possédant pas de maximum, par exemple $[0, 1[$. 1 est le plus petit des majorants, mais n'est pas le maximum de la partie. Nous allons donner un nom particulier à ce nombre : c'est le concept de borne supérieure.

a. Définitions

Définition 2.14. Borne supérieure, borne inférieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- Si l'ensemble des majorants de A est non vide et admet un minimum, celui-ci est appelé **borne supérieure** de A, et est noté $\sup(A)$.
- Si l'ensemble des minorants de A est non vide et admet un maximum, celui-ci est appelé **borne inférieure** de A, et est noté $\inf(A)$.

Exemple 2.13
Si on reprend $A = [0, 1[$, l'ensemble des majorants de A est $[1, +\infty[$, qui possède un minimum : 1. 1 est donc la borne supérieure de A.

Remarque (Convention)
Par convention, si une partie A est non vide et non majorée, il n'y a pas de majorant, et on décide de dire que $\sup(A) = +\infty$.
Par un raisonnement équivalent, si A est non vide et non minorée, $\inf(A) = -\infty$.

Exercice 2.14
Déterminer, s'ils existent, les bornes supérieures et inférieures de $A = \mathbb{N}^*$, $B =]-1, 2]$, $C = \left\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Solution
Sans difficulté, A admet une borne inférieure (1, qui est un minimum) mais pas de borne supérieure (donc $\sup(A) = +\infty$), et B admet une borne inférieure (-1) et une borne supérieure (2 qui est un maximum). Pour C, l'ensemble des minorants est $]-\infty, 0]$, ayant comme maximum 0 : 0 est donc la borne inférieure de C. 1 est la borne supérieure (qui est un maximum) de C.

b. Théorème de la borne supérieure

On dispose d'un théorème fondamental d'existence de borne supérieure et inférieure :

♡ **Théorème 2.22. Théorème de la borne supérieure**

On dispose de deux résultats fondamentaux :
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Démonstration

Ce théorème est admis et découle de la construction de $\mathbb{R}$.

c. Caractérisations

Pour démontrer qu'un élément a est la borne supérieure d'une partie A, il faut démontrer que a est le plus petit des majorants. C'est-à-dire :

- a est un majorant : pour tout $x \in A$, $x \leqslant a$.
- a est le plus petit des majorants : si on prend un $b < a$, il ne peut pas être majorant de A, c'est-à-dire qu'il existe un $x \in A$ tel que $b < x$.

On en déduit la caractérisation suivante :

Théorème 2.23. Caractérisation de la borne supérieure

Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Alors $a = \sup(A)$ si et seulement si

- $\forall\, x \in A,\ x \leqslant a$ (a est un majorant de A) ;
- $\forall\, b < a,\ \exists\, x \in A,\ x > b$ (a est le plus petit des majorants de A).

On obtient de manière similaire :

Théorème 2.24. Caractérisation de la borne inférieure

Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Alors $a = \inf(A)$ si et seulement si

- $\forall\, x \in A,\ x \geqslant a$ (a est un minorant de A) ;
- $\forall\, b > a,\ \exists\, x \in A,\ x < b$ (a est le plus grand des minorants de A).

Grâce à cette caractérisation, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.25.

Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet un maximum, celui-ci est la borne supérieure de A. De même, si A admet un minimum, celui-ci est la borne inférieure de A.

d. Caractérisation des intervalles

Le théorème de la borne supérieure nous permet d'obtenir une caractérisation importante des intervalles :

Théorème 2.26. Caractérisation des intervalles

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous réels x et y de I tels que $x \leqslant y$, alors le segment $[x, y]$ est inclus dans I.

Ainsi, un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui ne possède pas de « trou » : pour tout x et y de I, tout nombre réel compris entre x et y est encore dans I.

Démonstration

Le sens direct est vérifié : il suffit de s'en assurer sur chacun des 9 intervalles. Pour le sens réciproque, celui-ci est traité dans l'exercice 10.

☞ *Exercices 9 et 10.*

4. Partie entière

Le théorème de la borne supérieure va donner une application intéressante : l'existence du plus grand entier inférieur ou égal à un réel, que l'on appelle partie entière.

Définition 2.15.

Soit x un nombre réel. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. L'entier n est appelé **partie entière** de x, et est noté $E(x)$, $[x]$ ou $\lfloor x \rfloor$

Démonstration

Commençons par prouver l'existence de la partie entière.

- Si $x \in \mathbb{Z}$, on pose $[x] = x$.
- Si $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, introduisons la partie $A = \{p \in \mathbb{N},\, p \leqslant x\}$. A est une partie majorée (par x) de $\mathbb{N}$. Elle contient 0 (car x est positif), et est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$: elle admet un maximum p.
  Puisque $p \in A$, on a $p \leqslant x$. Mais par définition de p, $p+1 \notin A$, et donc $p+1 > x$. On pose alors $[x] = p$.
- Si $x \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$, alors $-x$ est positif. D'après ce qui précède, il existe un entier n tel que $n < -x < n+1$, et donc $-n-1 < x < -n$. On pose alors $[x] = -n-1$.

On a, ainsi, démontré l'existence de la partie entière dans tous les cas.

Pour l'unicité : supposons qu'il existe deux entiers n et m tels que $n \leqslant x < n+1$ et $m \leqslant x < m+1$. On a donc

$$-m-1 < -x \leqslant -m \text{ soit } n-m-1 < 0 < n-m+1$$

On obtient donc $-1 < n-m < 1$, mais $n-m \in \mathbb{Z}$, donc $n-m = 0$ et $n = m$, ce qui montre bien l'unicité de la partie entière.

Remarque

On utilisera en général la notation $[x]$, voire $\lfloor x \rfloor$.
Par définition, la partie entière de x est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

Exemple 2.15

Ainsi, $[3,2] = 3$, $[\pi] = 3$, $[-3,2] = -4$.

♡ **Propriété 2.27.**

- $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad [x] \in \mathbb{Z}$.
- $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad [x] \leqslant x$ par définition. Ainsi,

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad [x] \leqslant x < [x]+1$$

  On a également la relation

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad x-1 < [x] \leqslant x$$

Définition 2.16.

Soit x un nombre réel. On appelle **partie entière supérieure**, et on note $\lceil x \rceil$, le plus petit nombre entier supérieur ou égal à x.

Remarque
On dispose également d'une inégalité pratique : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$.

☞ *Exercice 19 et 20.*

IV. Racines

1. Racine n-ièmes

Définition 2.17.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout réel positif x, il existe un **unique** réel **positif** y tel que $y^n = x$.
Ce réel est appelé **racine n-ième** de x et noté $x^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{x}$.

Démonstration
Nous démontrerons l'existence et l'unicité dans un chapitre ultérieur.

Remarque
Dans le cas où $n = 2$, on note plus simplement $\sqrt{x}$ au lieu de $\sqrt[2]{x}$ la racine carée de x.

Exemple 2.16
On a $\sqrt[5]{243} = 3$ car $3^5 = 243$ et $3 > 0$, et $\sqrt[6]{64} = 2$.

Remarque
- Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{1} = 1$.
- Pour tout réel positif x, et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.
- Pour tout réel x, et tout entier naturel $n \geqslant 2$ **pair**, on a $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.

La racine n-ième vérifie les mêmes propriétés que la racine carrée vue les années précédentes, similaires aux puissances :

Proposition 2.28.

Soient x et y deux réels positifs, et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$.
- Si $y \neq 0$, $\sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$ et $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.
- Si $p \in \mathbb{Z}$ et $x \neq 0$, alors $\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$.
- Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2 :
$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x}.$$

Démonstration
On utilise les propriétés sur les puissances et l'unicité de la racine n-ième.
- On remarque que
$$xy = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = \left(\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}\right)^n$$

Par unicité de la racine n-ième, et puisque $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \geqslant 0$, on a bien $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$.

- Se fait de la même manière.
- On peut écrire

$$\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^p\right)^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{pn} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\right)^p = x^p$$

Par unicité de la racine n-ième, on en déduit le résultat.

- De la même manière que précédemment, on montre que

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}\right)^{np} = x$$

et on utilise l'unicité de la racine np-ième du réel positif x.

Remarque

En utilisant la notation de puissances, on obtient les mêmes règles que sur les puissances, plus simples à retenir. Par exemple

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{1/n} = \frac{x^{1/n}}{y^{1/n}}$$

Proposition 2.29. Quantité conjugée

Pour tous réels strictement positifs x et y, on a

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

L'expression $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est appelée **quantité conjuguée** de $\sqrt{x} - \sqrt{y}$.

Cette quantité conjuguée sera régulièrement utile lorsqu'on travaillera avec des sommes ou différences de racines carrées.

☞ *Exercices 6, 7 et 8.*

2. Équations du second degré

Soient trois réels a, b et c, tels que $a \neq 0$. On s'intéresse au trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$. On constate que l'on peut ré-écrire ce trinôme ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)
\end{aligned}$$

On obtient une forme particulière :

Définition 2.18. Forme canonique

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$. L'expression

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

est appelée la **forme canonique** de $ax^2 + bx + c$.

Cette forme canonique nous permet de déterminer la forme factorisée du trinôme du second degré :

Proposition 2.30. Forme factorisée

Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c. alors

- Si $\Delta = 0$, on peut écrire $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$, avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, on peut écrire $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration

Si $\Delta = 0$, on obtient

$$ax^2+bx+a = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - 0 = a(x-x_0)^2$$

Si $\Delta > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a(x-x_2)(x-x_1) \end{aligned}$$

De ce résultat, on en déduit d'une part l'ensemble des racines d'un trinôme du second degré, et d'autre part, son signe :

Théorème 2.31.

On note (E) l'équation ax^2+bx+c, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solution :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, (E) n'admet pas de solutions réelles.

Proposition 2.32.

On note $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$.

- Si $\Delta > 0$, le tableau de signe de f est donné par (en supposant ici que $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de f		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, le tableau de signe de f est donné par

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de f		signe de a	0	signe de a	

...

- Si $\Delta < 0$, le tableau de signe de f est donné par

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de f	signe de a

☞ *Exercices 11, 12, 14, 15, 16, 17 et 18.*

Exercices 2

Exercices flash

Exercice A.

Pour chaque question, indiquer si la proposition est vraie ou fausse (aucune justification demandée, mais il est conseillé de vérifier par un exemple ou une propriété du cours.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$.
2. $|a+b| = |a| + |b|$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}^2$.
3. $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$.
4. Il existe un plus grand nombre rationnel.
5. Si $a < b$, alors $a^2 < b^2$.
6. L'intervalle $]0,\ 1[$ contient un nombre irrationnel.
7. $|x| = x$ si et seulement si $x \geqslant 0$.
8. La borne supérieure d'un ensemble est toujours un élément de cet ensemble.

Exercice B.

Déterminer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $a < b$, alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a $a \times c < b \times c$.
2. $|a - b| = |a + b|$ pour tous réels a, b.
3. Tout intervalle borné de $\mathbb{R}$ contient un nombre rationnel.
4. Si $E \subset \mathbb{R}$ est non vide et majoré, alors $\sup(E)$ existe.
5. La borne inférieure d'un ensemble est toujours atteinte.

Exercice C.

Répondre rapidement, sans rédaction complète.

1. Calculer $|-3+5|$.
2. Calculer $|2-7|$.
3. Que vaut $|-\pi| + |\pi - 2|$?
4. Donner un exemple d'intervalle fermé, ouvert, et demi-ouvert.
5. Donner un exemple de rationnel compris entre $1,41$ et $1,42$.
6. Donner un exemple d'irrationnel compris entre 1 et 2.
7. Traduire en français : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant 0$.
8. Traduire en symboles : « Si deux réels a et b sont tels que $a < b$, alors il existe un rationnel entre a et b ».
9. Compléter l'inégalité triangulaire : $|x+y| \leqslant\ \ldots$
10. Quelle est la borne supérieure de l'ensemble $E = \left\{1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$?
11. Quelle est la borne inférieure de l'ensemble $F = \{(-1)^n + 1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$?

Exercices

Ensembles de nombres

●○○ Exercice 1 Non inclusion (5 min.)

Montrer que $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, $\mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{D}$.

●●○ Exercice 2 (5 min.)

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Calculs

●○○ Exercice 3 Fractions (5 min.)

Calculer les expressions suivantes. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{4}{3} \times \left(\frac{13}{4} - \frac{12}{6}\right) \qquad B = \frac{4}{3} - 1$$

$$C = \frac{\frac{1}{3} + 2}{\frac{5}{6} - 1} \qquad D = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{5} + \frac{3}{8}}$$

●○○ Exercice 4 Puissances (10 min.)

Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \frac{4 \times 10^{12} \times 9 \times 10^{-5}}{1,2 \times 10^2} \qquad B = \frac{4 \times 7^2 - 2^5 \times 3}{4^4 - 4^3}$$

$$C = \frac{3^2 \times 27}{81^2} \qquad D = 4 \times (2^2 - 2^4)^2 - 64$$

●○○ Exercice 5 Factorisation (10 min.)

Factoriser chacune des expressions littérales suivantes :

$A = 64\,x^2 - 100$

$B = -(9\,x - 2) \times (4\,x + 9) + (3\,x - 8) \times (9\,x - 2)$

$C = 16\,x^2 - 24\,x + 9$

$D = (x + 5)^2 - 81$

$E = (-8\,x + 2)^2 + (-8\,x + 2) \times (8\,x + 4)$

$F = (9\,x + 7) \times (3\,x + 3) + 9\,x + 7$

●○○ Exercice 6 Racines (15 min.)

1. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b le plus petit possible.

$$A = \sqrt{54} - 3\sqrt{96} - 5\sqrt{24} \qquad B = \sqrt{160} \times \sqrt{40} \times \sqrt{90}$$

2. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers.

$$C = \left(3\sqrt{10} - 5\sqrt{3}\right)^2 \qquad D = \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{6}\right)^2$$

3. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'un nombre entier.

$$E = \left(3 - 2\sqrt{5}\right)\left(3 + 2\sqrt{5}\right) \qquad F = \frac{24\sqrt{45}}{9\sqrt{80}}$$

●●○ **Exercice 7** (5 min.)

Soient x et y deux réels positifs tels que $y \leqslant x^2$. Montrer que

$$\sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}}.$$

●●● **Exercice 8** (10 min.)

Simplifier $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.

Inégalités et parties de $\mathbb{R}$

●○○ **Exercice 9** (15 min.)

Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer, s'ils existent, le minimum, maximum, borne inférieure et borne supérieure.

1. $]1,\, 3]$,
2. $\mathbb{R}_-^*$,
3. $[1,\, 3] \cup]4,\, 5[$,
4. $\{1 + 2n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$,
5. $\left\{\frac{1+(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
6. $\left\{\frac{1}{1-x},\ x \in]1,\, +\infty[\ \right\}$.

●○○ **Exercice 10 Des inégalités** (10 min.)

Soient x et y deux réels.

1. Montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ avec égalité si et seulement si $x = y$.
2. Montrer que $(x + y)^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$ avec égalité si et seulement si $x = y$.
3. On suppose désormais que x et y sont strictement positifs. Montrer que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.

Équations et inéquations

●○○ **Exercice 11 Une inégalité secondaire** (10 min.)

Soient a, b, c et x des réels tels que $a \neq 0$. A quelle condition a-t-on $ax^2 + bx + c > 0$?

●○○ **Exercice 12 Équations** (20 min.)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x.

1) $|2x - 1| = |3 - x|$.
2) $|x + 1| = |x - 4|$.
3) $3x^2 + 6x = 24$.
4) $(-2 - x)(x - 4) = 5$.
5) $3x^4 - 9x^2 - 12 = 0$.
6) $\sqrt{x - 1} = \sqrt{2 - x}$.

●○○ **Exercice 13 Équations de valeurs absolues** (10 min.)

Résoudre les équations suivantes :

$$|x + 3| + |2x - 4| = 3, \quad |4x + 8| - |x - 3| = 3 \quad \text{et} \quad |x^2 - x - 1| = |2x - 1|.$$

●○○ **Exercice 14 Inéquation** (10 min.)

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{(x + 1)(x - 2)}{2x + 1} > 0$$

●○○ **Exercice 15** **Inéquations et valeurs absolues** (10 min.)

Résoudre les inéquations

$$|2x-5| \leqslant |x+3| \quad \text{et} \quad |x^2-6x+7| < 1$$

●○○ **Exercice 16** **Un air de second degré** (10 min.)

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\mathrm{e}^x < 1+6\mathrm{e}^{-x} \quad x^2-5x \geqslant 6 \quad x^2-4|x| \leqslant 5$$

●●○ **Exercice 17** **Second degré – sans les racines** (15 min.)

On note (E) l'équation $2x^2+11x-4=0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet deux solutions, qu'on notera x_1 et x_2 et qu'on ne calculera pas.
2. Donner les valeurs de x_1+x_2 et x_1x_2.
3. En déduire la valeur de $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.
4. Calculer $x_1^2+x_2^2$.
5. Calculer $x_1^3+x_2^3$.
6. Calculer $\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}$.

●●○ **Exercice 18** **Inéquation et racines** (15 min.)

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue y :

$$2y-5-\sqrt{4y-7} \leqslant 0$$

Parties entières

●●○ **Exercice 19** (5 min.)

Soit $f : x \mapsto x-[x]$. Que représente $f(x)$ pour un réel x ?

●○○ **Exercice 20** **Partie entière** (10 min.)

Soient x et y deux réels.

1. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
2. Montrer que $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0,1\}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
4. Soit n un entier naturel non nul. À quelle condition sur x a-t-on $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$?

Pour aller plus loin

●●● **Exercice 21** **Sur la somme de deux ensembles** (15 min.)

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On pose

$$A+B = \{a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$$

l'ensemble formé des réels qui s'écrivent comme la somme d'un réel de A et d'un réel de B.

On suppose de plus que A et B sont majorées.

1. Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A+B) \leqslant \sup(A)+\sup(B)$.
2. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$.

●●○ Exercice 22 Caractérisation des intervalles (30 min.)

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall\ x \in I,\ \forall\ y \in I,\ x \leqslant y \implies [x,\, y] \subset I$$

L'objectif est de démontrer que I est un intervalle.

1. On suppose que I est majorée et non minorée.
   a) Montrer qu'il existe un réel a tel que $I \subset]-\infty,\, a]$.
   b) Soit $x \in]-\infty,\, a[$. Montrer qu'il existe y et z dans I tels que $y \leqslant x \leqslant z$.
   c) En déduire que $]-\infty,\, a[\subset I$ puis que I est un intervalle.
2. Traiter de même les trois autres cas.

●●● Exercice 23 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ (30 min.)

Soient a et b deux entiers relatifs, tels que $b \neq 0$. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe deux entiers q et r, uniques, tels que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < |b|$.

1. Montrer que, sous réserve d'existence, q et r sont uniques.
2. On suppose que a et b sont deux entiers naturels non nuls. On note $A = \{n \in \mathbb{N},\ nb > a\}$.
   a) Justifier que A admet un minimum, que l'on note m.
   b) On pose $q = m - 1$ et $r = a - bq$. Montrer que $0 \leqslant r < b$ et conclure.
3. Montrer l'existence dans le cas général.

Corrigés

Corrigés des exercices flash

Exercice A

1. Vrai. Par définition de la valeur absolue.
2. Faux. Contre-exemple $a = 1$ et $b = -1$, $|a+b| = 0$ et $|a| + |b| = 2$.
3. Vrai.
4. Faux. On peut le montrer par l'absurde : si $q \in \mathbb{Q}$ est le plus grand des rationnels, alors $q+1 \in \mathbb{Q}$ et est plus grand, c'est absurde.
5. Faux. Attention le signe est important : $-2 < 1$ et pourtant $(-2)^2 > 1^2$.
6. Vrai. Par exemple $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]0, 1[$ est irrationnel.
7. Vrai. Par définition de la valeur absolue.
8. Faux. Il ne faut pas confondre borne supérieure et maximum.

Exercice B

1. Faux. Contre-exemple avec $c = 0$ ou $c = -1$.
2. Faux. Contre-exemple : $a = b = 1$. $|a - b| = 0$ et $|a + b| = 2$.
3. Faux. Petit piège : $\{\sqrt{2}\}$ est un intervalle non vide et majoré... mais ne contient pas de rationnel.
4. Faux. Exemple : $]0, 1[$ admet 0 comme borne inférieure, qui n'est pas atteinte.

Exercice C

1. $|-3+5| = 2$.
2. $|2-7| = 5$.
3. $\pi \geqslant 2$ donc $|\pi - 2| = \pi - 2$. Ainsi $|-\pi| + |\pi - 2| = 2\pi - 2$.
4. $[1, 2]$ est un intervalle fermé, $]\pi, 2\pi[$ est un intervalle ouvert et $]-1, 1]$ est un intervalle demi-ouvert.
5. $1,415$ convient et est décimal, donc rationnel.
6. $\sqrt{2}$ convient.
7. Pour tout réel x, la valeur absolue $|x|$ est positive.
8. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^2, \quad a < b \implies \exists\, q \in \mathbb{Q}, a \leqslant q \leqslant b$.
9. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
10. Rapidement, $\sup(E) = 1$ (et n'est d'ailleurs pas atteint).
11. Rapidement, $\inf(F) = -1$ (et n'est d'ailleurs pas atteint).

Corrigés des exercices

Exercice 1

On donne un contre exemple pour chaque cas. Ainsi :

$$-1 \in \mathbb{Z} \text{ mais } -1 \notin \mathbb{N}$$

$$0,1 \in \mathbb{D} \text{ mais } 0,1 \notin \mathbb{Z}$$
$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \text{ mais } \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

Le dernier résultat venant du fait qu'il y a une infinité de chiffres après la virgule pour $\frac{1}{3}$.

Exercice 2

On raisonne par l'absurde. On écrit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p et q deux entiers non nuls, premiers entre eux (c'est-à-dire que la fraction est irréductible). On a alors $q\sqrt{2} = p$, soit $2q^2 = p^2$. p^2 est pair, et donc p aussi d'après un résultat vu dans le cours. On peut alors écrire $p = 2k$, ce qui donne
$$2q^2 = (2k)^2 \Leftrightarrow 2q^2 = 4k^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$$
Ainsi, q^2 est pair, et donc q aussi. Mais alors, p et q sont pairs, et donc ne sont pas premiers entre eux : c'est absurde.
On peut conclure que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 3

On utilise les propriétés des fractions. On obtient alors :
$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{3}\left(\frac{39-24}{12}\right) \\ &= \frac{4}{3}\frac{15}{12} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$
De même $B = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$,
$$\begin{aligned} C &= \frac{\frac{1}{3} + \frac{6}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{6}{6}} \\ &= \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{1}{6}} \\ &= \frac{7}{3} \times (-6) = -14 \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} D &= \frac{\frac{2}{6} - \frac{3}{6}}{\frac{16}{40} + \frac{15}{40}} \\ &= \frac{-1}{6} \times \frac{40}{31} = -\frac{20}{93} \end{aligned}$$

Exercice 4

On utilise les régles sur les puissances et les fractions. On obtient ainsi :
$$\begin{aligned} A &= \frac{4 \times 9 \times 10^7}{\frac{6}{5} \times 10^2} \\ &= \frac{36 \times 5}{6} \times 10^5 = 30 \times 10^5 = 3 \times 10^6 \\ B &= \frac{2^2(7^2 - 2^3 \times 3)}{4^3(4-1)} \\ &= \frac{7^2 - 2^3 \times 3}{4^2 \times 3} = \frac{25}{48} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} C &= \frac{3^2 \times 3^3}{((3^2)^2)^2} \\ &= \frac{3^5}{3^8} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \\ D &= (2^3 - 2^5)^2 - 8^2 \\ &= (2^3 - 2^5 - 8)(2^3 - 2^5 + 8) \\ &= (-2^5)(2^4 - 2^5) = 2^{10} - 2^9 = 2^9(2-1) = 2^9 = 512 \end{aligned}$$

Exercice 5

On utilise les identités remarquables, ou les méthodes de factorisation usuelles. Cela donne ainsi :

$$\begin{aligned} A &= (8x)^2 - 10^2 = (8x-10)(8x+10) \\ B &= (9x-2)\left[-(4x+9) + (3x-8)\right] = (9x-2)(-x-17) \\ C &= (4x)^2 - 2 \times (4x) \times 3 + 3^2 = (4x-3)^2 \\ D &= (x+5)^2 - 9^2 = (x+5-9)(x+5+9) = (x-4)(x+14) \\ E &= (-8x+2)\left[(-8x+2) + (8x+4)\right] = 6(-8x+2) \\ F &= (9x+7)\left[(3x+3)+1\right] = (9x+7)(3x+4) \end{aligned}$$

Exercice 6

1. On utilise la règle $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ pour a et b deux réels positifs. Ainsi :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2 \times 3^3} - 3\sqrt{3 \times 2^5} - 5\sqrt{2^3 \times 3} \\ &= 3\sqrt{6} - 12\sqrt{6} - 10\sqrt{6} = -19\sqrt{6} \\ B &= \sqrt{5 \times 2^5} \times \sqrt{2^3 \times 5} \times \sqrt{3^2 \times 2 \times 5} \\ &= \sqrt{5^3 \times 2^9 \times 3^2} = 240\sqrt{10} \end{aligned}$$

2. On développe par l'identité remarquable et on conclut :

$$\begin{aligned} C &= (3\sqrt{10})^2 - 2 \times 3\sqrt{10} \times 5\sqrt{3} + (5\sqrt{3})^2 \\ &= 90 - 30\sqrt{30} + 75 = 165 - 30\sqrt{30} \\ D &= (3\sqrt{5})^2 + 2 \times 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{6} + (2\sqrt{6})^2 \\ &= 45 + 12\sqrt{30} + 24 = 69 + 12\sqrt{30} \end{aligned}$$

3. On développe et utilise les formules sur les racines.

$$\begin{aligned} E &= 3^2 - (2\sqrt{5})^2 = 9 - 20 = -11 \\ F &= \frac{24}{9}\sqrt{\frac{45}{80}} \\ &= \frac{8}{3}\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{8}{3}\frac{3}{4} = 2 \end{aligned}$$

Exercice 7

Les termes étant positifs, on va comparer leurs carrés. On part du membre de droite :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}+\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}\right)^2+2\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}\times\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}+\left(\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}\right)^2\\ &= \frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}+2\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}\\ &= x+2\sqrt{\frac{x^2-(x^2-y)}{4}}=x+\sqrt{y}\end{aligned}$$

Puisque $x+\sqrt{y}$ et $\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}+\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}$ sont positifs, on en déduit le résultat par passage à la racine.

Exercice 8

On note $a=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$. On élève au cube et on utilise les propriétés des racines (cubiques, ici) :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3 &= \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^3-3\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^2\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}+3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^2-\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3\\ &= \left(5\sqrt{2}+7\right)-3\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)}\\ &\quad+3\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)}-\left(5\sqrt{2}-7\right)\\ &= 14-3\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(\left(5\sqrt{2}\right)^2-7^2\right)}+3\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(\left(5\sqrt{2}\right)^2-7^2\right)}\\ &= 14-3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+3\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=14-3\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $a^3=14-3a$. Il faut trouver les solutions de cette équation. On constate que 2 est une solution.

- **Première méthode** : on factorise :

$$a^3+3a-14=(a-2)(a^2+2a+7)$$

et l'équation $a^2+2a+7=0$ n'admet pas de solution ($\Delta=-24$). La seule solution possible est donc 2.

- **Deuxième méthode** : notons $f : x \longmapsto x^3+3x-14$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \longmapsto 3x^2+3>0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, par somme :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection) garantit alors que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution. Or $f(2)=0$, donc 2 est l'unique solution sur $\mathbb{R}$.

On peut en déduire — peu importe la méthode — que

$$\boxed{\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2.}$$

Exercice 9

Pour les trois premiers, on utilise les propriétés des intervalles vues dans le cours. Ainsi :
1. $]1, 3]$ admet une borne supérieure qui est un maximum (3), et une borne inférieure qui n'est pas un minimum (1).
2. $\mathbb{R}_-^*$ admet une borne supérieure (0) qui n'est pas un maximum, mais pas de borne inférieure.
3. $[1, 3] \cup]4, 5[$ admet une borne inférieure (1) qui est un minimum, et une borne supérieure 5 qui n'est pas un maximum.

Pour le quatrième, on a d'une part que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2n \geqslant 1 + 2 = 3$ donc 3 est un minorant, qui un minimum car présent dans l'ensemble (donc un minimum). En revanche, l'ensemble n'est pas majorée (par exemple, parce que la suite $(1 + 2n)$ a pour limite $+\infty$), donc n'a pas de borne supérieure.

Pour le cinquième, on a, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$0 \leqslant \frac{1 + (-1)^n}{n} \leqslant \frac{2}{n} \leqslant 1$$
On remarque que 1 est dans l'ensemble (pour $n = 2$) donc 1 est un maximum, et 0 est dans l'ensemble (pour $n = 1$ par exemple), donc 0 est un minimum.

Enfin, pour le dernier, on constate que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $1 - x < 0$ et donc $\dfrac{1}{1-x} < 0$. Ainsi, 0 est un majorant. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-x} = 0$. 0 est donc la borne supérieure mais n'est pas atteinte, donc n'est pas un maximum. Pour terminer, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$ donc la partie n'admet pas de minorant, ni de borne inférieure.

Exercice 10

Soient x et y deux réels.
1. On a
$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2}{2} - xy &= \frac{x^2+y^2-2xy}{2}\\ &= \frac{(x-y)^2}{2} \geqslant 0\end{aligned}$$
avec égalité si et seulement si $(x - y)^2 = 0$, c'est-à-dire $x = y$.
2. On a
$$\begin{aligned}2(x^2+y^2) - (x+y)^2 &= 2(x^2+y^2) - (x^2+2xy+y^2)\\ &= x^2+y^2-2xy = (x-y)^2\end{aligned}$$
et on conclut de la même manière.
3. Enfin, si x et y sont strictement positifs :
$$\begin{aligned}\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 &= \frac{x^2+y^2}{xy} - 2\\ &= \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy}\end{aligned}$$
ce qui nous donne le résultat puisque $xy > 0$ car x et y sont strictement positifs.

Exercice 11

Attention
Ici, la condition va porter sur x, a, b et c !

- Si $x = 0$, alors l'inégalité est vraie si et seulement si $c > 0$.
- On note Δ son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

– Si $b^2 < 4ac$, l'inéquation est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $a > 0$.
– Si $b^2 = 4ac$, l'inéquation est vérifiée pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$ si et seulement si $a > 0$.
– Si $b^2 > 4ac$, l'inéquation est vérifiée pour $x \in \left]x_1, x_2\right[$ si $a < 0$, et pour $x \in \left]-\infty, x_1\right[\cup \left]x_2, +\infty\right[$ si $a > 0$.

Exercice 12

On applique les différentes propriétés des fonctions qui apparaissent.

1. Par définition de la valeur absolue, $|2x - 1| = |3 - x|$ si et seulement si ($2x - 1 = 3 - x$ ou $2x - 1 = x - 3$), c'est-à-dire $x = \frac{4}{3}$ ou $x = -2$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{4}{3}, -2\right\}}$.
2. De même, $|x + 1| = |x - 4|$ si et seulement si ($x + 1 = x - 4$ ou $x + 1 = 4 - x$), c'est-à-dire $x = \frac{3}{2}$ (la première équation n'ayant pas de solution). Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$.
3. Cette équation s'écrit également $3x^2+6x-24 = 0$, soit encore $x^2+2x-8 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36$ et ses racines sont donc

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2} = 2$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \{-4, 2\}}$.
4. On développe. Cette équation devient $-x^2 + 2x + 3 = 0$, dont les solutions sont 3 et -1. Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \{3, -1\}}$.
5. On pose $X = x^2$. L'équation s'écrit alors $3X^2 - 9X - 12 = 0$, soit encore $X^2 - 3X - 4 = 0$, dont les solutions sont $X_1 = 4$ et $X_2 = -1$. On revient à la variable de départ : l'équation de départ est équivalente à $x^2 = 4$ ou $x^2 = -1$, c'est-à-dire $x = 2$ ou $x = -2$ (la deuxième équation n'ayant pas de solution). Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \{-2, 2\}}$.
6.

Attention
On commence toujours par déterminer le domaine de définition des fonctions présentes.

$\sqrt{x - 1}$ a un sens si et seulement si $x - 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant 1$. De même, $\sqrt{2 - x}$ a un sens si et seulement si $2 - x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 2$. On résout donc sur $[1, 2]$.
Sur $[1, 2]$, l'équation s'écrit $\sqrt{x - 1}^2 = \sqrt{2 - x}^2$, c'est-à-dire $x - 1 = 2 - x$, ou encore $x = \frac{3}{2}$. De plus, $\frac{3}{2} \in [1, 2]$.
Bilan : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$.

Exercice 13

Méthode
Il faut enlever les valeurs absolues. Pour cela, on fera des disjonctions de cas, suivant le signe des termes dans les valeurs absolues.

Pour la première, remarquons que $|x+3| = x+3$ si et seulement si $x+3 \geqslant 0$, et $|x+3| = -(x+3)$ sinon. De même, $|2x-4| = 2x-4$ si et seulement si $2x-4 \geqslant 0$, et $|2x-4| = -(2x-4)$ sinon. On traite donc les cas :

- Si $x \in]-\infty, -3[$, alors $|x+3| = -(x+3)$ et $|2x-4| = -(2x-4)$. L'équation devient

$$-(x+3)-(2x-4) = 3 \iff -3x+1 = 3 \iff x = -\frac{2}{3}.$$

Or $-\frac{2}{3} \notin]-\infty, -3[$, donc l'équation n'a pas de solution sur $]-\infty, -3[$.

- Si $x \in [-3, 2[$, alors $|x+3| = x+3$ et $|2x-4| = -(2x-4)$, et l'équation devient

$$(x+3)-(2x-4) = 3 \iff -x+7 = 3 \iff x = 4.$$

Or $4 \notin [-3, 2[$, donc l'équation n'a pas de solution sur $[-3, 2[$.

- Enfin, si $x \in [2, +\infty[$, l'équation devient

$$x+3+2x-4 = 3 \iff 3x-1 = 3 \iff x = \frac{4}{3}.$$

Or $\frac{4}{3} \notin [2, +\infty[$ donc l'équation n'a pas de solution sur $[2, +\infty[$.

On peut conclure : l'équation $|x+3| + |2x-4| = 3$ n'a aucune solution sur $\mathbb{R}$.

Par le même raisonnement :

- Si $x \in]-\infty, -2]$, alors l'équation $|4x+8| - |x-3| = 3$ s'écrit

$$-(4x+8)-(-(x-3)) = 3 \iff -3x-11 = 3 \iff x = -\frac{14}{3} \in]-\infty, -2].$$

- Si $x \in]-2, 3]$, l'équation s'écrit

$$4x+8-(-(x-3)) = 3 \iff 5x+5 = 3 \iff x = -\frac{2}{5} \in]-2, 3].$$

- Enfin, si $x \in [3, +\infty[$, l'équation s'écrit

$$4x+8-(x-3) = 3 \iff 3x+11 = 3 \iff x = -\frac{8}{3} \notin [3, +\infty[.$$

Ainsi, l'équation $|4x+8| - |x-3| = 3$ a pour solution $\mathcal{S} = \left\{-\frac{14}{3}, -\frac{2}{5}\right\}$.

Pour la troisième, on procède de même. Tout d'abord, le trinôme x^2-x-1 a comme racine $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2-x-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

Par disjonction de cas :

- Si $x \in]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}]$, alors l'équation devient

$$x^2-x-1 = -(2x-1) \iff x^2+x-2 = 0$$

dont les racines sont 1 et -2. Or $-2 \in]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}]$ et $1 \notin]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}]$.

- Si $x \in]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}]$, l'équation devient

$$-(x^2-x-1) = -(2x-1) \iff -x^2+3x = 0$$

dont les racines sont 0 et 3. Or $0 \in]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}]$ et $3 \notin]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}]$.

- Si $x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, l'équation devient
$$-(x^2 - x - 1) = 2x - 1 \iff -x^2 - x + 2 = 0$$
dont les racines sont 1 et -2. Or $1 \in \left]\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et $-2 \notin \left]\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.
- Enfin, si $x \in \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right]$, l'équation devient
$$x^2 - x - 1 = 2x - 1 \iff x^2 - 3x = 0$$
dont les racines sont 0 et 3. Or $0 \notin \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right]$ et $3 \in \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right]$.

On conclut : les solutions de $|x^2 - x - 1| = |2x - 1|$ sont
$$\mathcal{S} = \{-2, 0, 1, 3\}.$$
Pour la dernière, on aurait pu procéder autrement :
$$\begin{aligned} |x^2 - x - 1| = |2x - 1| &\iff (x^2 - x - 1)^2 = (2x - 1)^2 \\ &\iff (x^2 - x - 1)^2 - (2x - 1)^2 = 0 \\ &\iff (x^2 - x - 1 - (2x - 1))(x^2 - x - 1 + 2x - 1) = 0 \\ &\iff (x^2 - 3x)(x^2 + x - 2). \end{aligned}$$
On retrouve alors les solutions de $x^2 - 3x = 0$, à savoir 0 et 3, et de $x^2 + x - 2 = 0$, à savoir -2 et 1.

Exercice 14

On dresse le tableau de signes sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $-\frac{1}{2}$ étant une valeur interdite :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x+1)(x-2)}{2x+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est
$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]2, +\infty\right[}$$

Exercice 15

Remarque
L'équation $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ est équivalente à l'équation $(f(x))^2 \leqslant (g(x))^2$ car les termes sont positifs.

On utilise la remarque précédente :
$$\begin{aligned} |2x - 5| \leqslant |x + 3| &\Leftrightarrow (2x - 5)^2 \leqslant (x + 3)^2 \\ &\Leftrightarrow (2x - 5)^2 - (x + 3)^2 \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow ((2x - 5) - (x + 3))((2x - 5) + (x + 3)) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 8)(3x - 2) \leqslant 0 \end{aligned}$$
On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{3}$		8		$+\infty$
$x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-8)(3x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut conclure :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{2}{3},\, 8\right].}$$

Pour la deuxième inéquation, on utilise les propriétés de la valeur absolue :

$$|x^2 - 6x + 7| < 1 \iff -1 < x^2 - 6x + 7 < 1 \iff \left(0 < x^2 - 6x + 8 \quad \text{et} \quad x^2 - 6x + 6 < 0\right).$$

On résout les deux inéquations (trinôme du second degré) :

$$x^2 - 6x + 8 > 0 \iff x \in \left]-\infty,\, 2\right[\cup \left]4,\, +\infty\right[$$
$$x^2 - 6x + 6 < 0 \iff x \in \left]3 - \sqrt{3},\, 3 + \sqrt{3}\right[$$

Ainsi,

$$|x^2 - 6x + 7| < 1 \iff x \in \left(\left]-\infty,\, 2\right[\cup \left]4,\, +\infty\right[\right) \cap \left]3 - \sqrt{3},\, 3 + \sqrt{3}\right[.$$

Bilan :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]3 - \sqrt{3},\, 2\right[\cup \left]4,\, 3 + \sqrt{3}\right[.}$$

Exercice 16

> **Remarque**
> Pour chacune des inéquations, on se ramène, par changement de variable inconnue, à une inéquation du second degré, que l'on résout. On revient ensuite à la variable de départ.

Pour la première, on commence par multiplier par $e^x > 0$. L'inéquation devient $(e^x)^2 < e^x + 6$. On pose $X = e^x$. L'inéquation s'écrit alors $X^2 < X + 6$, c'est-à-dire $X^2 - X - 6 < 0$. Le tableau de signe de cette inéquation est :

X	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$X^2 - X - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On revient à la variable de départ : $e^x < 1 + 6e^{-x} \iff e^x \in \left]-2,\, 3\right[$, c'est-à-dire $x \in \left]-\infty,\, \ln(3)\right[$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty,\, \ln(3)\right[}$.

Pour la deuxième, il s'agit d'une inéquation du second degré. On obtient rapidement que $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty,\, -1\right] \cup \left[6,\, +\infty\right[}$.

Pour la dernière, on pose $X = |x|$. L'inéquation devient $X^2 - 4X - 5 \leqslant 0$, dont les solutions sont $[-1,\, 5]$. On revient à la variable de départ : $x^2 - 4|x| \leqslant 5$ est donc équivalente à $|x| \in [-1,\, 5]$, c'est-à-dire $x \in [-5,\, 5]$. Bilan : $\boxed{\mathcal{S} = [-5,\, 5]}$.

Exercice 17

1. On calcule le discriminant : $\Delta = 11^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 153$.
2. On peut alors factoriser $2x^2 + 11x - 4 = 2(x - x_1)(x - x_2)$. Si on développe et on identifie, on obtient

$$2x^2 + 11x - 4 = 2x^2 - 2(x_1 + x_2)x + 2x_1x_2$$

Ainsi, $x_1 + x_2 = -\frac{11}{2}$ et $x_1x_2 = -\frac{4}{2} = -2$.
3. On met au même dénominateur, et on utilise la question précédente :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} \\ &= \frac{-\frac{11}{2}}{-2} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

4. On développe $(x_1 + x_2)^2$. Cela donne $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$. Ainsi :

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{11}{2}\right)^2 - 2 \times (-2) = \frac{137}{4}$$

5. On factorise :

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

En utilisant les résultats précédents :

$$x_1^3 + x_2^3 = -\frac{11}{2}\left(\frac{137}{4} - (-2)\right) = -\frac{1595}{8}$$

6. On met au même dénominateur et on développe pour retrouver les résultats précédents.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} &= \frac{x_1 + x_2 + 2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + 2}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{-\frac{11}{2} + 2}{-2 - \frac{11}{2} + 1} = \frac{7}{13}$$

Exercice 18

On commence par déterminer le domaine de définition : cette inéquation n'a de sens que si $4y - 7 \geqslant 0$, c'est-à-dire $y \in \left[\frac{7}{4} + \infty\right[$.
On raisonne ensuite par disjonction de cas :

- Premier cas : $2y - 5 \leqslant 0$, c'est-à-dire $y \leqslant \frac{5}{2}$. Dans ce cas, l'inéquation est vérifiée (puisqu'une racine est toujours positive). Ainsi, l'inéquation est vérifiée si $y \in \left[\frac{7}{4}, \frac{5}{2}\right]$.
- Deuxième cas : $2y - 5 \geqslant 0$. Dans ce cas, l'inéquation est équivalente à $(2y - 5)^2 \leqslant \sqrt{4y - 7}^2$, c'est-à-dire

$$(2y - 5)^2 \leqslant 4y - 7 \iff 4y^2 - 24y + 32 \leqslant 0 \iff y^2 - 6y + 8 \leqslant 0$$

Les solutions de cette inéquation est $[2, 4]$, mais on a $2y - 5 \geqslant 0$, c'est-à-dire $y \geqslant \frac{5}{2}$. Ainsi, sur cet intervalle, les solutions sont $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$.
On conclut : l'ensemble des solutions de cette inéquation est donc

$$\boxed{\mathcal{S}} = \left[\frac{7}{4}, \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, 4\right] = \boxed{\left[\frac{7}{4}, 4\right]}$$

Exercice 19

Si $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x)$ représente la partie décimale d'un nombre :

$$f(1,4) = 0,4, \quad f(\pi) = 0,141592653\ldots.$$

Si $x \in \mathbb{R}^-$, $f(x)$ n'est pas égale à la partir décimale, mais à 1 moins la partie décimale :

$$f(-2,1) = -2,1 - (-3) = 0,9.$$

Exercice 20

1. Remarquons que, si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = x - x = 0$.
Première méthode : soit $x \notin \mathbb{Z}$. Par définition $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$, et donc

$$-\lfloor x \rfloor - 1 < -x < -\lfloor x \rfloor.$$

c'est-à-dire $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$, par définition de la partie entière ; dans ce cas $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.
Deuxième méthode : soit $x \notin \mathbb{Z}$. Par propriété de la partie entière :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor < x \quad \text{et} \quad -x - 1 < \lfloor -x \rfloor < -x.$$

En ajoutant ces inégalités

$$-2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor < 0.$$

Or $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \in \mathbb{Z}$. Le seul entier strictement compris entre -2 et 0 étant 1, on conclut que $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.
Bilan :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases}.$$

2. On applique le même raisonnement :

$$x + y - 1 < \lfloor x + y \rfloor \leqslant x + y, \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \quad \text{et} \quad y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$$

soit

$$x + y - 1 < \lfloor x + y \rfloor \leqslant x + y, \quad -x \leqslant -\lfloor x \rfloor < -x + 1 \quad \text{et} \quad -y \leqslant -\lfloor y \rfloor < -y + 1.$$

En ajoutant les trois inégalités :

$$-1 < \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < 2.$$

Puisque $\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$, on peut en déduire que

$$\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, on a

$$\lfloor x \rfloor + n \leqslant x + n < (\lfloor x \rfloor + n) + 1.$$

Puisque $\lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$, par définition de la partie entière,

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$. Cela équivaut à écrire, puisque $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$,

$$n\lfloor x \rfloor \leqslant nx < n\lfloor x \rfloor + 1$$

ou encore

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{n}.$$

soit finalement

$$0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$ si et seulement si $x \in \left[p, p + \frac{1}{n}\right[$, avec $p \in \mathbb{Z}$.
Bilan :

$$\boxed{\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor \iff x \in \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[p, p + \frac{1}{n}\right[.}$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 21

1. On suppose que A et B sont des parties non vides et majorées. Elles admettent donc toutes les deux des bornes supérieures. On a donc, pour tout $a \in A$, $a \leqslant \sup(A)$ et pour tout $b \in B$, $b \leqslant \sup(B)$. Mais alors :

$$\forall\,(a, b) \in A \times B, \quad a + b \leqslant \sup(A) + \sup(B)$$

Donc $A+B$ est une partie non vide (car A et B sont non vides), majorée par $\sup(A)+\sup(B)$: elle admet une borne supérieure. De plus, par définition de la borne supérieure,

$$\sup(A+B) \leqslant \sup(A) + \sup(B).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure :
- il existe $a_0 \in A$ tel que $a_0 \geqslant \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$;
- il existe $b_0 \in B$ tel que $b_0 \geqslant \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Mais alors $a_0 + b_0 \geqslant \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$.
On a donc démontré que

$$\forall\,\varepsilon > 0, \quad \sup(A+B) \geqslant \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$$

c'est-à-dire $\sup(A+B) \geqslant \sup(A) + \sup(B)$.
Finalement, $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 22

1. a) I est non vide (par hypothèse), et majorée. Elle admet une borne supérieure, que l'on note a. Ainsi, $I \subset \,]-\infty, a]$.
b) Soit $x \in \,]-\infty, a[$. Puisque I n'est pas minorée, il existe $y \in I$ tel que $y \leqslant x$ (sinon, I est minorée par y).
De plus, puisque $x < a$, par définition de la borne supérieure, il existe $z \in I$ tel que $x < z \leqslant a$.
Ainsi, il existe bien deux éléments y et z de I tels que $y \leqslant x \leqslant z$.
c) Finalement, pour tout $x \in \,]-\infty, a[$, il existe y et z dans I tels que $y \leqslant x \leqslant z$, c'est-à-dire $x \in [y, z]$. Or, par propriété de I, $[y, z] \subset I$, et donc $x \in I$.
On a ainsi démontré que

$$\forall\,x \in \,]-\infty, a[, \quad x \in I \iff \,]-\infty, a[\, \subset I.$$

Avec les deux inclusions démontrées en a) et c), on peut en déduire que $I = \,]-\infty, a[$ ou $I = \,]-\infty, a]$: I est bien un intervalle.
2. Les trois autres cas (majorée, minorée ; minorée non majorée ; non minorée non majorée) ce traite par le même principe.

Exercice 23

1. On suppose l'existence de q et r. Supposons que l'on ait deux couples, q_0, r_0 et q_1, r_1 vérifiant les hypothèses :

$$a = bq_0 + r_0 = bq_1 + r_1, \quad 0 \leqslant r_0 < |b| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r_1 < |b|.$$

Par soustraction,

$$b(q_1 - q_0) = r_0 - r_1 \quad \text{et} \quad -|b| < r_0 - r_1 < |b|.$$

$r_0 - r_1$ est donc un multiple de b, tel que $-|b| < r_0 - r_1 < |b|$: le seul multiple qui convient est 0. Ainsi

$$r_0 - r_1 = 0 \implies b(q_1 - q_0) = 0 \implies q_1 - q_0 = 0$$

et finalement $r_0 = r_1$ et $q_0 = q_1$. On a ainsi démontré l'unicité.

2. a) Soit $A = \{n \in \mathbb{N}, \quad nb > A\}$. A est une partie de $\mathbb{N}$. De plus, A est non vide ; en effet, $b \neq 0$ et donc $nb \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: nb dépassera a à partir d'un certain rang.
A étant une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet un minimum, que l'on note m.
b) On note $q = m - 1$ et $r = a - bq$. Tout d'abord, par définition de m qui est le minimum de A :

$$mb > a \quad \text{et} \quad (m-1)b \leqslant a.$$

Mais alors $a - qb \geqslant 0$ et

$$mb > a \implies (q+1)b > a \implies b > a - bq.$$

Ainsi, $0 \leqslant< b$.
On a ainsi trouvé deux entiers q et r tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.
3. Les trois autres cas se ramènent au premier :
- Si $a < 0$ et $b \geqslant 0$: $-a \in \mathbb{N}$ et d'après ce qui précède, il existe q et r tels que $-a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$. Mais alors

$$a = -bq - r = b(-q) - r$$

En revanche, $-b < -r \leqslant 0$. Si $r = 0$, le résultat est montré. Sinon, $-b < -r < 0 \implies 0 < -r + b < b$. Et alors

$$a = b(-q-1) - r + b \quad \text{et} \quad 0 < -r + b < b.$$

Cela démontre l'existence dans ce cas.
- Si $a > 0$ et $b < 0$, alors $-b \in \mathbb{N}$ et il existe q, r tels que

$$a = (-b)q + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < -b = |b|$$

ce qu'on peut écrire

$$a = b(-q) + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < |b|.$$

Cela démontre l'existence dans ce cas.
- Enfin, si $a < 0$ et $b < 0$, alors $-a \in \mathbb{N}$et $-b \in \mathbb{N}$: il existe q, r tels que

$$-a = (-b)q + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < -b = |b|$$

soit

$$a = bq - r$$

et par le même raisonnement qu'au premier point, on conclut quant à l'existence dans ce dernier cas.

