

1

Chapitre

Éléments de logique et raisonnement

Résumé

*C*ette chapitre a pour objectif de mettre en place de manière rigoureuse différentes choses vues les années précédentes :

- des éléments de logiques ;
- des rappels et compléments sur les ensembles, et les quantificateurs ;
- différentes méthodes de raisonnement, dont le raisonnement par récurrence.

Plan du cours

Chapitre 1. Éléments de logique et raisonnement

I. Éléments de logique	3
II. Ensembles et quantificateurs	10
III. Raisonnements classiques	15
Exercices	23
Corrigés	26

« J'ai trouvé cette chose étonnante : on peut représenter par les nombres toutes sortes de vérités. »

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1717)

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① connaître les bases de logique :

- l'équivalence ☐
- la négation ☐
- la conjonction ☐
- la disjonction ☐
- l'implication ☐

② concernant les ensembles :

- la notion d'ensemble ☐
- l'union, l'intersection ☐
- l'inclusion et le complémentaire ☐

③ maîtriser les quantificateurs ☐

④ concernant les raisonnements, savoir maîtriser et rédiger :

- le raisonnement direct ☐
- le raisonnement par contraposée ☐
- le raisonnement par l'absurde ☐
- le raisonnement par disjonction de cas ☐
- le raisonnement par analyse et synthèse ☐
- le raisonnement par récurrence ☐

En mathématiques, on doit très souvent **rédigé** pour répondre à une question, ou pour démontrer un résultat par exemple.

Pour ce faire, on va utiliser des raisonnements logiques : c'est l'objectif de la première partie de ce chapitre.

Pour bien rédiger, on va devoir (et souvent, il s'agit de la première chose que l'on fera) **quantifier** les objets que l'on va manipuler. Il s'agit probablement de la chose la plus importante à faire.

Enfin, pour démontrer un résultat, on va utiliser un des raisonnements usuels en mathématiques : direct, par contraposée, par l'absurde, par disjonction de cas, par analyse et synthèse ou par récurrence. C'est l'objectif de la dernière partie de ce chapitre.

I. Éléments de logique

1. Proposition

Définition 1.1.

On appelle **proposition** (également appelé **assertion**, ou **prédicat**) un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

Remarque

Par convention, quand on énonce une proposition, c'est que l'on affirme qu'elle est vraie.

Exemple 1.1

Voici quelques exemples de propositions vraies ou fausses :

Propositions vraies

- 25 est le carré d'un nombre entier
- exp est définie sur $\mathbb{R}$
- Il y a de l'eau sur Mars

Propositions fausses

- 24 est le carré d'un nombre entier
- ln est définie sur $\mathbb{R}$
- La Terre est plate

On dispose d'un certain nombre de mots selon la nature de la proposition :

Définition 1.2. Vocabulaire

- Un **axiome** est une proposition que l'on admet vraie (et que l'on ne cherche pas à, ou que l'on ne peut pas, démontrer).
- Un **théorème** est une proposition vraie. Il s'agit, en général, d'une proposition particulièrement importante, que l'on peut démontrer.
- Un **lemme** est une proposition vraie, et qui est un premier résultat utile à la démonstration d'une proposition plus importante.
- Un **corollaire** est une proposition vraie qui est une conséquence d'une autre proposition vraie.
- Une **conjecture** est une proposition que l'on suppose vraie, mais dont on n'a pas donné la preuve.

Exemple 1.2

- Le théorème de Pythagore est la proposition « dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés ».
- La conjecture de Goldbach est la proposition « tout nombre entier pair supérieur à 3

peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers ». Contrairement à ce que l'on peut croire, il reste beaucoup de conjectures non démontrées. Celle de Goldbach a été formulée en 1742 et n'est toujours pas démontrée (ou infirmée).

~ RÉFÉRENCE HISTORIQUE ~



Certaines conjectures, appelées les *sept problèmes du millénaire*, sont tellement célèbres qu'un institut propose un million de dollars à toute personne en démontrant une.

A l'heure actuelle, une seule l'a été : la **conjecture de Poincaré**, démontrée par Grigori Perelman. Celui-ci a été récompensé par la médaille Fields, qu'il a déclinée.

A part les axiomes, tous les résultats doivent être démontrés. On en fait une **preuve** à l'aide des **hypothèses**, d'axiomes et d'autres propositions déjà démontrées, en utilisant les règles de logique que nous allons voir.

2. Propositions équivalentes

Définition 1.3. Équivalence

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition « $\mathcal{A}$ est **équivalente** à $\mathcal{B}$ » est la proposition, notée $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, qui est vraie lorsque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont toutes les deux vraies, ou toutes les deux fausses, et fausse sinon.

Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont **équivalentes**.

Remarque

On peut représenter la proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ par la **table de vérité** suivante :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque

L'équivalence pour les propositions joue le rôle de l'égalité pour les nombres. Par exemple, 2×3 et 6 sont des expressions différents, et on écrit pourtant $2 \times 3 = 6$. De façon analogue, les propositions $x^2 = 4$ et $x = 2$ ou $x = -2$ ne sont pas identiques, mais on écrira $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

3. Négation, conjonction, et disjonction

a. Négation

Définition 1.4. Négation

Soit $\mathcal{A}$ une proposition. La **négation** de $\mathcal{A}$, notée non $\mathcal{A}$ ou $\neg \mathcal{A}$, est la proposition qui est vraie quand $\mathcal{A}$ est fausse, et qui est fausse quand $\mathcal{A}$ est vraie.

Propriété 1.1.

Sa table de vérité est la suivante :

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
V	F
F	V

Exemple 1.3

Déterminer la négation des propositions $\mathcal{A}$: « x est un rationnel », $\mathcal{B}$: « aucun chat n'est gris » et $\mathcal{C}$: « $x \geq 1$ ».

Solution

On a, rapidement :

- $\neg\mathcal{A}$: « x n'est pas un rationnel » ;
- $\neg\mathcal{B}$: « au moins un chat est gris » ;
- $\neg\mathcal{C}$: « $x < 1$ ».

Proposition 1.2.

Soit $\mathcal{A}$ une proposition. Alors non (non $\mathcal{A}$) $\Leftrightarrow \mathcal{A}$.

Démonstration

On le démontre à l'aide d'une table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg(\neg\mathcal{A})$
V	F	V
F	V	F

Ainsi $\mathcal{A} \Leftrightarrow \neg(\neg\mathcal{A})$.

b. Conjonction**Définition 1.5. Conjonction**

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La **conjonction** de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, notée $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, est la proposition qui est vraie quand $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont toutes les deux vraies, et qui est fausse quand l'une des deux au moins est fausse.

Propriété 1.3.

Sa table de vérité est la suivante :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.4

Déterminer la conjonction des propositions $\mathcal{A}$: « $x \geq 1$ », et $\mathcal{B}$: « $x < 3$ ».

Solution

On obtient rapidement que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est la proposition : « $1 \leq x < 3$ ».

Proposition 1.4. Propriétés

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. Les équivalences suivantes sont vraies :

- IDEMPOTENCE : $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A}) \iff \mathcal{A}$.
- COMMUTATIVITÉ : $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \iff (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{A})$.
- ASSOCIATIVITÉ : $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}) \iff (\mathcal{A} \text{ et } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$.

 Exercice 1.**4. Disjonction****Définition 1.6. Disjonction**

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La **disjonction** de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, notée $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$, est la proposition qui est vraie quand $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, ou les deux sont vraies, et qui est fausse quand les deux sont fausses.

Remarque

Il y a une différence entre le « ou » en français, qui est un ou **exclusif** (ainsi, quand on dit « fromage ou dessert », on peut en prendre un seul des deux), et le « ou » mathématique, qui est un ou **inclusif**, qui est vrai même lorsque les deux sont vraies.

Propriété 1.5.

Sa table de vérité est la suivante :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.5

Déterminer la disjonction des propositions $\mathcal{A}$: « $x \in [0, 1]$ », et $\mathcal{B}$: « $x > \frac{1}{2}$ ».

Solution

On obtient rapidement que $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est la proposition : « $x \geq 0$ », c'est-à-dire « $x \in \mathbb{R}^+$ ».

Proposition 1.6. Propriété

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. Les équivalences suivantes sont vraies :

- IDEMPOTENCE : $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{A}) \iff \mathcal{A}$.
- COMMUTATIVITÉ : $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \iff (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{A})$.
- ASSOCIATIVITÉ : $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \iff (\mathcal{A} \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}))$.
- TIERS EXCLU : $\mathcal{A} \text{ ou } (\text{non } \mathcal{A}) \iff \text{Vrai}$.

 Exercice 2.

5. Propriétés

On dispose de différentes propositions liant les différents connecteurs :

Proposition 1.7. Distributivité

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. On dispose des équivalences suivantes :

- $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C} \iff (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C})$. On dit que *ou* est distributif sur le *et*.
- $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C} \iff (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C})$. On dit que *et* est distributif sur le *ou*.

Démonstration

On va démontrer le premier point, le deuxième se démontrant de la même manière.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C})$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

On en déduit l'équivalence.

Proposition 1.8. Lois De Morgan

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.

- $\text{non } (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \iff (\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{B})$.
- $\text{non } (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \iff (\text{non } \mathcal{A}) \text{ et } (\text{non } \mathcal{B})$.

Démonstration

On va démontrer le premier point à nouveau, le deuxième se démontrant de la même manière.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}$	$\text{non } (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B})$	$\text{non } \mathcal{A}$	$\text{non } \mathcal{B}$	$(\text{non } \mathcal{A}) \text{ et } (\text{non } \mathcal{B})$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

On en déduit l'équivalence.

Exemple 1.6

On lance un dé à 6 faces. On considère les propositions suivantes :

- $\mathcal{A}$: « obtenir un chiffre pair »
- $\mathcal{B}$: « obtenir un chiffre supérieur ou égal à 4 »

Déterminer $\text{non } (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B})$ de deux manières différentes.

Solution

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est la proposition « obtenir 4 ou 6 » et donc non ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) est la proposition « obtenir 1, 2, 3 ou 5 ».

En utilisant les lois de Morgan : non $\mathcal{A}$ est la proposition « obtenir un chiffre impair » et non $\mathcal{B}$ est la proposition « obtenir un chiffre inférieur strict à 4 ». Ainsi, (non $\mathcal{A}$) ou (non $\mathcal{B}$) est la proposition « obtenir un nombre impaire ou inférieur strict à 4 », ce qui donne bien 1, 2, 3 ou 5.

6. Implication**a. Définition****Définition 1.7. Implication**

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition « $\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$ », notée $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, est la proposition qui est vraie si $\mathcal{A}$ est fausse, ou si les deux sont vraies, et qui est fausse sinon.

Propriété 1.9.

Sa table de vérité est la suivante :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque

Dans la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, on dit que $\mathcal{A}$ est la condition **suffisante** de $\mathcal{B}$ (en effet, il suffit d'avoir $\mathcal{A}$ pour avoir $\mathcal{B}$), et $\mathcal{B}$ est la condition **nécessaire** de $\mathcal{A}$ (il faut avoir $\mathcal{B}$ pour avoir $\mathcal{A}$).

On peut, de manière équivalente, dire :

- $\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$;
- Si $\mathcal{A}$ est vraie alors $\mathcal{B}$ est vraie ;

Exemple 1.7

On se fixe trois points A, B et C du plan. Prenons les deux propriétés suivantes :

- $\mathcal{A}$: « Le triangle ABC est rectangle en A » ;
- $\mathcal{B}$: « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ».

Alors on a l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$: il s'agit du théorème de Pythagore. Dans cette implication :

- $\mathcal{A}$ est la condition suffisante et $\mathcal{B}$ est la condition nécessaire ;
- Il suffit d'avoir d'avoir un triangle rectangle en A pour avoir la relation $AB^2 + AC^2 = BC^2$;
- Il est nécessaire d'avoir $AB^2 + AC^2 = BC^2$ si on a un triangle rectangle en A .

**Attention**

La proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ne signifie pas « $\mathcal{A}$ est vraie donc $\mathcal{B}$ est vraie » ! En effet, si $\mathcal{A}$ est fausse, alors $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est toujours vraie.

Ainsi, dans l'implication « s'il pleut, on prend un parapluie », s'il ne pleut pas, on peut prendre, ou pas, un parapluie !

En revanche, s'il pleut, on est **sûr** que l'on prend un parapluie.

Exercice 1.8

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On note $\mathcal{A}$ la proposition « f est continue sur I » et $\mathcal{B}$ la proposition « f est dérivable sur I ». Quelle est l'implication vraie ?

Solution

Un théorème d'analyse qu'on reverra plus tard indique que toute fonction dérivable est continue. Ainsi $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$. En revanche, on peut avoir une fonction continue sur I qui n'est pas dérivable sur I ; par exemple, la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ sans être dérivable sur $\mathbb{R}$: l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est fausse.

Définition 1.8. Réciproque

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. L'implication $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ est appelée la **réciproque** de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.



Attention

L'exemple précédent montre qu'une implication peut être vraie, mais pas sa réciproque.

Proposition 1.10.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition $((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } \mathcal{B})$.

Démonstration

On démontre rapidement que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } \mathcal{B})$ ont même table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	non $\mathcal{A}$	non $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

b. Négation, contraposée

Proposition 1.11. Négation d'une implication

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La négation de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est $\mathcal{A}$ et (non $\mathcal{B}$).

Démonstration

D'après le résultat précédent, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ s'écrit $((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } \mathcal{B})$. En passant à la négation et en utilisant les lois de Morgan :

$$\text{non } ((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\text{non } (\text{non } \mathcal{A})) \text{ et } (\text{non } \mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ et non } (\mathcal{B})$$

Définition 1.9. Contraposée d'une implication

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $(\text{non } \mathcal{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{A})$ est appelée **contraposée** de la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Proposition 1.12.

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $(\text{non } \mathcal{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{A})$ sont équivalentes.

Démonstration

En utilisant une définition équivalente :

$$((\text{non } \mathcal{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{A})) \Leftrightarrow ((\text{non } (\text{non } \mathcal{B})) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{A})) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \text{ ou } (\text{non } \mathcal{A})) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$$

Exercice 1.9

Déterminer les contraposées des propositions « si f dérivable alors f continue » et « si ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ».

Solution

Rapidement, on obtient respectivement « si f n'est pas continue alors f n'est pas dérivable » et « si $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$ alors ABC n'est pas rectangle en A ».

c. Double implication et équivalence

Proposition 1.13. Double implication

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.

Démonstration

On le démontre à l'aide d'une table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Pour démontrer une équivalence, on peut ainsi procéder soit par équivalences successives, soit par double implication, ce qui est en général plus simple.

 Exercices 3 et 4.

II. Ensembles et quantificateurs

1. Ensemble et éléments

Définition 1.10. Ensemble

On appelle **ensemble** toute *collection* d'objets, appelés **éléments** de cet ensemble.
Pour signifier que l'élément x appartient à un ensemble E , on note $x \in E$. Si x n'appartient

pas à E , on écrit $x \notin E$.

Deux ensembles E et F sont égaux, ce que l'on note $E = F$, s'ils ont les mêmes éléments.

Exemple 1.10

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont des ensembles usuels. On a $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.
 $\{x_1, \dots, x_n\}$ est l'ensemble constitué uniquement de $x_1, \dots, x_n$.

Remarque

Comme dans l'exemple précédent, un ensemble peut être défini par **extension**, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades. Dans ce cas, l'ordre des éléments n'importe pas, et chaque élément n'apparaît qu'une seule fois.

On peut également définir un ensemble par **compréhension**; par exemple, l'ensemble F défini par $F = \{x \in E / P(x)\} = \{x \in E, P(x)\}$ constitue l'ensemble des éléments x de E tels que la propriété $P(x)$ est vraie.

Définition 1.11. Ensemble vide

L'ensemble constitué d'aucun élément est appelé **ensemble vide**, et est noté $\emptyset$.



Attention

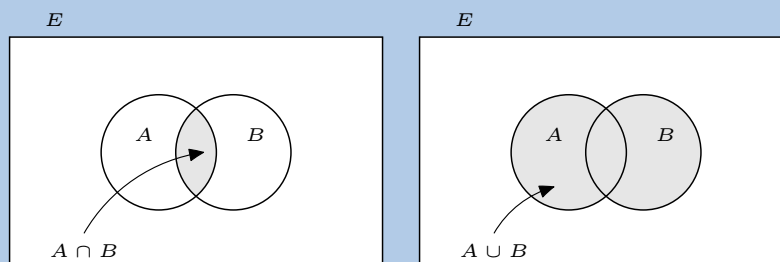
On note $\emptyset$ et non $\{\emptyset\}$. $\{\emptyset\}$ représente l'ensemble contenant l'ensemble vide.

2. Union, intersection

Définition 1.12.

Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **intersection** de E et de F , noté $E \cap F$, l'ensemble constitué des éléments qui sont à la fois dans E et dans F .
- On appelle **réunion** (ou **union**) de E et de F , noté $E \cup F$, l'ensemble constitué des éléments qui sont dans E ou dans F (voire dans les deux).



On dit que E et F sont **disjoints** si $E \cap F = \emptyset$. Dans ce cas, on dit que $E \cup F$ est une **union disjoint**, et est parfois notée $E \sqcup F$.

Exemple 1.11

Si $A = \{1, 2, 4\}$ et $B = \{2, 4, 5\}$ alors

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{2, 4\}$$

3. Inclusion, sous-ensemble, complémentaire

Définition 1.13.

Soit E un ensemble. On dit que F est **inclus** dans E , et on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E . On dit alors que F est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de E .

Exemple 1.12

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}$.

Méthode

Pour montrer que $E \subset F$, on se donne $x \in E$ et on démontre que $x \in F$.

Exercice 1.13

Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 1\} \subset \mathbb{Z}$.

Solution

Après résolution, $E = \{-1, 1\}$ et en effet, $-1 \in \mathbb{Z}$ et $1 \in \mathbb{Z}$, donc $E \subset \mathbb{Z}$.

Proposition 1.14. Double inclusion

Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Méthode

Pour montrer une égalité entre deux ensembles, on peut utiliser la double inclusion pour conclure.

Exercice 1.14

Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

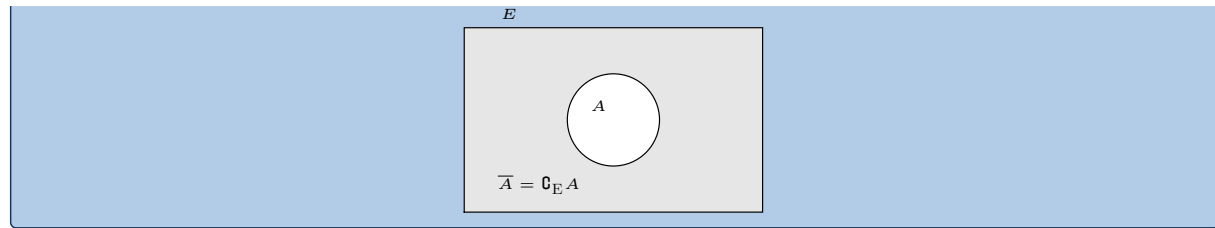
Solution

On raisonne par double inclusion.

- $\subset$ Si $x \in A \cap (B \cup C)$, alors $x \in A$ et $x \in B \cup C$. Ainsi, $x \in A$ et $x \in B$ ou bien $x \in A$ et $x \in C$, c'est-à-dire $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $\supset$ Réciproquement, si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Ainsi, $x \in A$ et $x \in B$ ou $x \in C$ et finalement $x \in A \cap (B \cup C)$.

Définition 1.14.

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E . On appelle **complémentaire** de A , et on note $\bar{A}$ ou ${}_{C_E}A$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A : $\bar{A} = E \setminus A$.

**Exemple 1.15**

Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{1, 2, 4\}$ alors $\bar{A} = \{3, 5\}$.

Proposition 1.15. Lois de Morgan

Soient A et B deux sous-ensembles de E . Alors $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Démonstration

- Soit $x \in \overline{A \cup B}$. Cela veut dire qu'il n'est pas dans $A \cup B$. Donc il n'est ni dans A , ni dans B : il est donc dans $\bar{A} \cap \bar{B}$.
- Soit $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Il n'est donc pas dans A , et il n'est pas dans B : il n'est donc pas dans $A \cup B$. Ainsi, $x \in \overline{A \cup B}$.

L'autre égalité se montre de la même manière.

 Exercice 5.

4. Quantificateurs**Définition 1.15. Quantificateurs**

Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E .

- « $\forall x \in E, P(x)$ » signifie que tous les éléments de E vérifient la propriété P .
On dit que $\forall$ est le **quantificateur universel** et se lit « pour tout » ou « quel que soit ».
- « $\exists x \in E, P(x)$ » signifie qu'il existe au moins un élément de E vérifiant la propriété P .
On dit que $\exists$ est le **quantificateur existentiel** et se lit « il existe ».
- « $\exists! x \in E, P(x)$ » signifie qu'il existe un **et un seul** élément de E vérifiant P .
 $\exists!$ se lit « il existe un unique ».

Ils ne doivent être utilisés **que dans des phrases mathématiques!** Ce ne sont pas des abréviations.

Remarque

Dans une proposition, on utilise $/$, $|$ ou simplement « , » pour signifier « tel que ».

Exercice 1.16

Traduire les phrases mathématiques suivantes :

- $\forall x \geq 0, \exists! y \geq 0, y^2 = x$
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = x^2 + x$

Solution

- La première se traduit par « pour tout réel x positif, il existe un unique y positif tel que $y^2 = x$ ». Ainsi, cette phrase traduit l'existence de $\sqrt{x}$ pour tout réel x positif.
- La deuxième se traduit par « il existe un réel x tel que $x^2 + 1 = x^2 + x$ ». Elle traduit donc l'existence d'une solution à l'équation $x^2 + 1 = x^2 + x$.

Exercice 1.17

Traduire les propositions suivantes mathématiquement :

- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\ln$ n'a pour image 1 qu'une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution

On peut écrire par exemple :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$
- $\exists ! x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) = 1$.

Remarque

Dans les propositions $\forall x \in E, P(x)$, $\exists x \in E, P(x)$ et $\exists ! x \in E, P(x)$, la variable x est dite *muette*. Ainsi :

- on peut remplacer x par n'importe quel autre symbole (alphabet latin, grec, ...) qui n'intervient pas encore dans la proposition. On pourra ainsi écrire « $\forall z \in E, P(z)$ » ou « $\forall \gamma \in E, P(\gamma)$ ».
- la variable muette x n'existe pas avant sa quantification, et est liée au quantificateur. Ainsi, si « $\exists x \in E, P(x)$ » est vraie, et qu'on souhaite utiliser x , on commencera par écrire « soit x un élément de E tel que $P(x)$ ». Une fois cela fait, on peut utiliser la variable x pour démontrer une autre proposition : on dit qu'on a **quantifié** x .

**Attention**

L'ordre des quantificateurs est importante ! Si P est une propriété portant sur les éléments de deux ensembles E et F , alors « $\forall x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$ » et « $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y)$ » n'ont, a priori, pas la même signification.

La première signifie que pour chaque élément x de E , il existe un élément y de F (dépendant donc de x) tel que $P(x, y)$ est vrai ; la seconde signifie qu'il existe un y de F tel que, quel que soit l'élément x de E , $P(x, y)$ est vrai : dans ce deuxième cas, y est *universel* et est le même pour tous les x de E .

En revanche, on peut échanger l'ordre de deux quantificateurs universels, ou de deux quantificateurs existentiels.

Exemple 1.18

La propriété « $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}^+, x = y^2$ » est vraie (c'est la définition de la racine carrée). En revanche, « $\exists y \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, x = y^2$ » est fausse (puisque dans ce cas, tous les réels de $\mathbb{R}^+$ seraient égaux).

Proposition 1.16. Négation des quantificateurs

Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E .

- La négation de la proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \text{non } (P(x))$ ».



- La négation de la proposition « $\exists x \in E, P(x)$ » est « $\forall x \in E, \text{non } (P(x))$ ».

Exercice 1.19

Déterminer la négation des propriétés suivantes :

- « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ » ;
- « $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = 0$ ».

Solution

Rapidement, les négations sont

- « $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$ » ;
- « $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \neq 0$ ».

5. Méthode de démonstration

Lorsqu'on souhaite démontrer la véracité d'une propriété, on regarde les quantificateurs de celle-ci. On se donne une propriété P portant sur les éléments d'un ensemble E .

- Pour démontrer qu'une proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » est vraie, on montre que chaque élément x de E vérifie la propriété P .
- ✎ On commencera la rédaction par : « Soit x un élément de E . Montrons que $P(x)$ (est vraie). ».
- Pour démontrer qu'une proposition « $\exists x \in E, P(x)$ » est vraie, on cherchera un exemple. Ce n'est pas toujours simple, et on peut être amené à appliquer des théorèmes, ou résoudre des équations/inéquations.
- Pour démontrer qu'une proposition « $\exists! x \in E, P(x)$ » est vraie, on commence par chercher un exemple. On montre ensuite que tous les autres éléments ne vérifient pas P .
- ✎ Pour démontrer l'unicité, on écrira souvent : « Soient x et y deux éléments de E vérifiant P . Montrons que $x = y$. ».
- En faisant cela, on démontre que tous les éléments vérifiant P sont égaux, c'est-à-dire qu'il n'y en a qu'un (si on l'a exhibé avant).
- Pour démontrer qu'une proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » est fausse, on exhibera un élément x dans E ne vérifiant pas la propriété P (on montre ainsi que sa négation est vraie). Un tel x est appelé un **contre-exemple**.
- Pour démontrer qu'une proposition « $\exists x \in E, P(x)$ » est fausse, on démontre que chaque élément de E ne vérifie pas P (on montre ainsi que sa négation est vraie).
- ✎ On écrit alors « Soit x un élément de E . Montrons que $P(x)$ est faux. ».

Exemple 1.20

La proposition « tout entier naturel est la somme de deux carrés de nombres entiers » est fausse. En effet, 3 est un contre-exemple : c'est un entier naturel, qui ne peut pas s'écrire comme somme de deux carrés de nombres entiers (on peut obtenir $0^2 + 0^2 = 0$, $0^2 + 1^2 = 1$, $1^2 + 1^2 = 2$ et $2^2 + 0^2 = 4$ mais pas 3).

III. Raisonnements classiques

1. Raisonnement direct

Le raisonnement direct est le premier raisonnement qu'on essaie en général. On se donne deux propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On veut démontrer que $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$. Puisque si $\mathcal{A}$ est faux, alors $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$ est vraie, il reste à démontrer que si $\mathcal{A}$ est vraie alors nécessairement $\mathcal{B}$ aussi : c'est le raisonnement

direct.

- ✎ On commencera par écrire « supposons que la proposition $\mathcal{A}$ est vraie. Alors ... » (en adaptant à la proposition $\mathcal{A}$) et on essaie de démontrer que $\mathcal{B}$ est vraie.

Exemple 1.21

Montrer que la somme de deux nombres entiers pairs est paire.

Solution

On veut ici démontrer que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ avec $\mathcal{A}$: « le deux nombres pris sont pairs » et $\mathcal{B}$: « la somme des deux nombres est paire ». On commence par supposer $\mathcal{A}$ vraie et on démontre que $\mathcal{B}$ est vraie. La rédaction est la suivante :

Soient p et q deux nombres entiers pairs. On peut écrire $p = 2k$ et $q = 2\ell$ (avec k et ℓ deux nombres entiers) puisque p et q sont pairs. Mais alors

$$p + q = 2k + 2\ell = 2 \underbrace{(k + \ell)}_{\in \mathbb{Z}}$$

et ainsi, $p + q$ est pair.

Exercice 1.22

Montrer que la somme de deux nombres entiers impairs est paire.

Solution

Soient p et q deux nombres impairs. On peut écrire $p = 2k + 1$ et $q = 2\ell + 1$ avec k et ℓ deux nombres entiers. Alors

$$p + q = 2k + 1 + 2\ell + 1 = 2 \underbrace{(k + \ell + 1)}_{\in \mathbb{Z}}$$

et $p + q$ est pair.

2. Raisonnement par contraposée

Ce raisonnement repose sur la contraposée d'une implication. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux propositions, alors $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à sa contraposée $\text{non } \mathcal{B} \Rightarrow \text{non } \mathcal{A}$.

Raisonnement par contraposée, c'est démontrer cette deuxième implication $\text{non } \mathcal{B} \Rightarrow \text{non } \mathcal{A}$ pour démontrer que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

- ✎ On commencera par écrire « on veut montrer que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ par contraposée. Supposons que $\text{non } \mathcal{B}$ est vraie » et on essaie de démontrer que $\text{non } \mathcal{A}$ est vraie.

Exemple 1.23

Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

Solution

On va raisonner par contraposée. Supposons que n ne soit pas pair, c'est-à-dire qu'il soit impair. On peut alors écrire $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Mais alors

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

et ce nombre n^2 est impair.

Ainsi, n impair $\Rightarrow n^2$ impair : on a bien démontré par contraposée que si n^2 est pair, alors n est pair.

3. Raisonnement par l'absurde

Ce raisonnement repose sur la négation d'une implication : si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux propositions, alors $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à non ($\mathcal{A}$ et (non $\mathcal{B}$)).

Raisonnement par l'absurde, c'est supposer que $\mathcal{A}$ et non $\mathcal{B}$ sont toutes les deux vraies, et aboutir à une contradiction (une absurdité). Ainsi, $\mathcal{A}$ et (non $\mathcal{B}$) sera fausse, et donc non ($\mathcal{A}$ et (non $\mathcal{B}$)) sera vraie.

✎ On commencera par écrire « on veut montrer par l'absurde que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Supposons que $\mathcal{A}$ et non $\mathcal{B}$ sont vraies » et on essaie d'aboutir à une contradiction.

Exemple 1.24

Montrer que si a et b sont deux nombres entiers vérifiant $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$.

Solution

On va raisonner par l'absurde : on suppose que $a + b\sqrt{2} = 0$ et au moins l'un de deux nombres a et b sont non nuls.

Si $a = 0$ alors nécessairement $b = 0$ ce qui est absurde. De même, si $b = 0$ alors $a = 0$. On a donc a et b non nuls. On peut écrire $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Or $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc la relation précédente est impossible : c'est absurde.

On a ainsi démontré par l'absurde que si $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$.

Remarque

L'irrationalité de $\sqrt{2}$ se démontre également par l'absurde. Rappelons le principe : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel ; on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec la fraction irréductible. On élève au carré : $2q^2 = p^2$. Ainsi, p^2 est pair. D'après un résultat précédent, p lui-même est pair et on peut écrire $p = 2k$. Mais alors

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow 2q^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

Ainsi, q^2 est également pair, et q aussi : $q = 2\ell$. Mais c'est absurde puisque la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible, or on a montré qu'elle ne l'était pas $\frac{p}{q} = \frac{2k}{2\ell} = \frac{k}{\ell}$.

✎ Exercice 6.

4. Raisonnement par disjonction de cas

Proposition 1.17. Disjonction de cas

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. On suppose que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et (non $\mathcal{A}$) $\Rightarrow \mathcal{B}$ sont vraies. Alors $\mathcal{B}$ est vraie.

Démonstration

Dressons la table de vérités de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et (non $\mathcal{A}$) $\Rightarrow \mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	non $\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	(non $\mathcal{A}$) $\Rightarrow \mathcal{B}$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	F

On remarque que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et (non $\mathcal{A}$) $\Rightarrow \mathcal{B}$ sont vraies toutes les deux lorsque $\mathcal{B}$ est

vraie. Ainsi, $\mathcal{B}$ est bien vraie.

Exemple 1.25

Montrer que, pour tout entier n , $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Solution

On va raisonner par disjonction de cas :

- si n est pair, on peut écrire $n = 2k$ avec k un entier. Alors

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{Z}$$

- si n est impair, on peut écrire $n = 2k+1$ avec k un entier. Alors

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+1+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, pour tout entier n , $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

5. Raisonnement par analyse et synthèse

Le raisonnement par analyse et synthèse est assez particulier. Il sert, en général, à démontrer l'existence (ou non) d'une solution à un problème et de donner la (ou les) solution(s) éventuelle(s).

Le principe se fait en trois étapes :

- **ANALYSE** : on suppose que le problème admet une solution, et on raisonne par implication, pour essayer d'obtenir explicitement les solutions potentielles.
- **SYNTHÈSE** : on part des solutions trouvées lors de l'analyse, et on vérifie qu'elles vérifient (ou pas) les hypothèses du problème.
- **CONCLUSION** : on donne les solutions (s'il y en a).

Remarque

Si, lors de l'analyse, on démontre qu'il y a un unique candidat solution, alors on aura montré qu'il y a unicité. Il restera à montrer que ce candidat est bien solution.

Exemple 1.26

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Rappel

Une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire si elle vérifie, pour tout réel x , $g(-x) = g(x)$. Elle est impaire si, pour tout réel x , $g(-x) = -g(x)$.

Solution

On va raisonner par analyse et synthèse. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- **Analyse** : on suppose qu'il existe une fonction paire g et une fonction impaire h telles que $f = g + h$. On peut donc écrire, pour tout réel x :

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

mais aussi, en utilisant la parité de g et l'impairité de f :

$$\begin{aligned} f(-x) &= g(-x) + h(-x) \\ &= g(x) - h(x) \end{aligned}$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

En le résolvant, on obtient

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

On a donc trouvé un unique candidat (g, h) . Si on montre qu'il convient, il y aura unicité.

- **Synthèse** : posons g et h les deux fonctions définies comme précédemment :

$$g : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Montrons que g est paire, h est impaire et $g + h = f$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g(-x) &= \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} \\ &= \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \\ h(-x) &= \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} \\ &= \frac{f(-x) - f(x)}{2} \\ &= -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x) \end{aligned}$$

Ainsi, g est paire et h est impaire. Enfin, pour tout réel x :

$$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

- **Conclusion** : il existe bien un unique couple (g, h) de fonctions, telles que g est paire, h est impaire et $f = g + h$.

 Exercices 8 et 9.

6. Raisonnement par récurrence

a. Principe de récurrence

Axiome 1.16.

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier, et n_0 un entier fixé.

- INITIALISATION : si $P(n_0)$ est vraie,
- HÉRÉDITÉ : et si pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n) \implies P(n+1)$,

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Démonstration

À notre niveau, c'est un **axiome des mathématiques** : c'est une propriété de base, qui

ne se démontre pas, et qui découle de la construction de $\mathbb{N}$.

L'idée est simple : si on peut poser la première brique d'un mur, et si à chaque fois qu'on a posé une brique, on peut en poser une autre par dessus, on peut effectivement construire un mur complet (infini, certes).

Remarque

Si, pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n) \implies P(n+1)$, on dit que la propriété P est **héréditaire**.



La rédaction de la récurrence est très importante et source d'erreurs régulières. Si on souhaite démontrer la proposition « $\forall n \geq n_0, P(n)$ » :

- **Initialisation.** On vérifie que $P(n_0)$ est vraie (dans la pratique $n_0 = 0$ ou 1). Une fois prouvée, on annonce explicitement « la proposition $P(n_0)$ est vraie ».
- **Hérédité.** On écrit la phrase :
« Supposons que la proposition $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq n_0$ fixé. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. »
On vérifie ensuite que $P(n+1)$ est vraie, en utilisant $P(n)$ qu'on appelle **l'hypothèse de récurrence**. On conclut en disant « $P(n+1)$ est vraie et la proposition P est héréditaire ».
- **Conclusion :** on conclut en écrivant :
« D'après le principe de récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ ».

Exemple 1.27

Monter que pour tout entier naturel n , $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solution

Soit P la proposition définie pour tout $n \geq 0$ par P_n : « $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a d'une part la somme qui est réduite à un élément, 0, et d'autre part $\frac{0(0+1)}{2} = 0$. Donc P_0 est vraie.
- **Hérédité** : supposons la proposition P_n vraie pour un certain $n \geq 1$ fixé, et montrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Or, $0 + 1 + 2 + \dots + (n+1) = (0 + 1 + 2 + \dots + n) + (n+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$\begin{aligned} 0 + 1 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= (n+1) \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, la proposition P_{n+1} est vraie, et la propriété P est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$:

$$\forall n \geq 0, 0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

❧ RÉFÉRENCE HISTORIQUE ❧



Même si des traces de principe de récurrence ont été trouvées dans les travaux de Pascal (XVII^e siècle), ce sont **Richard Dedekind** en 1888 et indépendamment **Giuseppe Peano** en 1889 qui énoncent le principe de récurrence tel qu'on le connaît.



7. Récurrence double, récurrence forte

Dans certains cas, la récurrence précédente ne peut être utilisée, car on a besoin de plus d'informations. On peut utiliser alors un des deux principes suivants :

Axiome 1.17. Principe de récurrence double

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n .

- Si $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
- et si, pour tout entier naturel n , $(P(n) \text{ et } P(n+1)) \implies P(n+2)$

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier n .

Axiome 1.18. Principe de récurrence forte

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n .

- Si $P(0)$ est vraie.
- et si, pour tout entier naturel n , $(P(0), P(1), \dots, P(n)) \implies P(n+1)$

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier n .

Remarque

On utilisera souvent la récurrence double lorsqu'une relation fait intervenir à la fois n , $n+1$ et $n+2$.

Exemple 1.28

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + 2^n$.

Solution

Soit P la proposition définie pour tout entier n par $P(n) : « u_n = 1 + 2^n »$.

- **Initialisation** : pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 = 1 + 2^0$ et pour $n = 1$ on a $u_1 = 3 = 1 + 2^1$. Ainsi $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
- **Hérédité** : supposons que les propositions $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies pour un certain entier n fixé. Par hypothèse de récurrence, on a donc que $u_n = 1 + 2^n$ et $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$. Alors, par définition de u , on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &\stackrel{\text{H.R.}}{=} 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) \\ &= 3 + 3 \cdot 2^{n+1} - 2 - 2 \cdot 2^n = 1 + 3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} = 1 + 2 \cdot 2^{n+1} = 1 + 2^{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi, $P(n+2)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$:

$$\forall n, \quad u_n = 1 + 2^n$$

Enfin, on a un dernier principe de récurrence, plus rare, mais qui peut être utile :

Axiome 1.19. Principe de récurrence descendante

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n . On suppose que :

- $P(n)$ est vraie pour un certain n_0 .
- si $1 \leq n \leq n_0$, $P(n) \implies P(n-1)$

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $0 \leq n \leq n_0$.



Exercice 7.

Exercices

1

Exercices flash

Exercice A.

Déterminer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0 \implies x^2 > 0)$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1 = 0)$.
3. Si n est pair, alors n^2 est pair.
4. Si n^2 est pair, alors n est pair.
5. $x^2 = 4 \iff x = 2$.
6. $(A \subset B) \implies \overline{B} \subset \overline{A}$.
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
8. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n^2$.

Exercice B.

Répondre rapidement, sans rédaction complète.

1. Donner la table de vérité de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.
2. Quelle est la contraposée de : « Si n est divisible par 6 alors n est divisible par 3 » ?
3. Donner la négation de : « Tout entier naturel est premier ».
4. Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$. Calculer $A \cup B$ et $A \cap B$.
5. Vrai ou faux : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$.
6. Donner un exemple d'ensemble fini et d'ensemble infini.
7. Traduire : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ en français.
8. Écrire la négation de : $\exists ! x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$.
9. Quel type de raisonnement utilise-t-on pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel ?
10. Compléter : pour prouver une proposition par récurrence, on doit montrer ...

Exercice C.

Pour chaque question, indiquer si la proposition est vraie ou fausse (aucune justification demandée, mais il est conseillé de vérifier par un exemple ou une propriété du cours.)

1. A ou (non A) est toujours vrai.
2. La négation de « $x \geq 2$ » est « $x \leq 2$ ».
3. $A \Rightarrow B$ est équivalent à $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.
4. $\emptyset \subset E$ pour tout ensemble E .
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
6. Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
8. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$.
9. La négation de « $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$ » est « $\forall x \in \mathbb{N}, \text{non } P(x)$ ».
10. La preuve que $\sqrt{2}$ est irrationnel est une preuve par contraposée.
11. Pour une récurrence, il suffit de vérifier l'hérédité, pas l'initialisation.
12. Si n est pair, alors n^2 est impair.

Exercices

Logiques

●○○ Exercice 1 Sur la conjonction (5 min.)

Démontrer l'idempotence, la commutativité et l'associativité de la conjonction, à l'aide de tables de vérité.

●○○ Exercice 2 Sur la disjonction (10 min.)

Démontrer l'idempotence, la commutativité, l'associativité et le tiers exclu de la disjonction, à l'aide de tables de vérité.

●○○ Exercice 3 Des équivalences (10 min.)

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. Montrer les équivalences suivantes à l'aide de tables de vérité :

1. $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \iff ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}))$.
2. $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}) \iff ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$.

●○○ Exercice 4 Négation et traduction (10 min.)

Traduire en français, puis écrire la négation des propositions suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$.
2. $\forall x > 1, \exists n \in \mathbb{N}, x^n \geq 2021$.
3. $\forall x \in X, \forall y \in Y, xy = 0 \implies (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.
4. $\exists ! x \in E, f(x) = 0$.

Ensembles

●○○ Exercice 5 Ensembles (5 min.)

Soient les ensembles suivants :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7\}, \quad C = \{2, 4, 6\}, \quad \text{et} \quad D = \{3, 6\}$$

Déterminer $B \cap D, C \cap D, B \cup C, B \cup D$. Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D .

Raisonnements

●●○ Exercice 6 Absurde ou contraposée (15 min.)

Démontrer les propositions suivantes par l'absurde ou par contraposée.

1. En admettant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer que si a et b sont deux entiers tels que $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Si x est un irrationnel positif, alors $\sqrt{x}$ est un irrationnel.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.
4. Soit x un réel. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon$, alors $x = 0$.

●○○ Exercice 7 Récurrences (40 min.)

Démontrer par récurrence les résultats suivants :

1. $\forall n \geq 1, \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$
2. Si a est un réel fixé $a \geq -1$,

$$\forall n, \quad (1+a)^n \geq 1+na \quad (\text{inégalité de Bernoulli})$$

3. Si u est la suite définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 2u_n - 3$, alors

$$\forall n, \quad u_n = 2^{n+2} + 3$$

4. Si $q \neq 1$, alors

$$\forall n, \quad 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

5. $\forall n \geq 1, \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

●●○ Exercice 8 Analyse et synthèse (10 min.)

A l'aide d'un raisonnement par analyse et synthèse, déterminer toutes les fonction f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, telles que, pour tout réels x et y , $f(x + y) = f(y) + x$.

●●○ Exercice 9 Analyse et synthèse (10 min.)

A l'aide d'un raisonnement par analyse et synthèse, déterminer toutes les fonction f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, telles que, pour tout réels x et y , $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Corrigés

Corrigés des exercices flash

Exercice A

1. **Vrai.** Si $x > 0$, alors $x^2 = x \cdot x > 0$.
2. **Faux.** Sur $\mathbb{R}$, $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution (discriminant négatif).
3. **Vrai.** $n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ est pair.
4. **Vrai.** Par contraposée : si n est impair, $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair.
5. **Faux.** $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$ (équivalence incomplète).
6. **Vrai.** Si $A \subset B$ et $x \in \overline{B}$, alors $x \notin B$ donc $x \notin A$, donc $x \in \overline{A} : \overline{B} \subset \overline{A}$.
7. **Faux.** Par De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ en général.
8. **Faux.** Contre-exemple : $n = 3$, $2^3 = 8 < 9 = 3^2$ (et $n = 2$ donne l'égalité $4 = 4$).

Exercice B

1. Table de vérité de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

2. Contraposée : « Si n n'est pas divisible par 3 alors n n'est pas divisible par 6 ».
3. Négation : « Il existe un entier naturel qui n'est pas premier ».
4. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$.
5. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: Vrai ; $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$: Faux.
6. Exemple : $\{1, 2, 3\}$ est fini, $\mathbb{N}$ est infini.
7. Traduction : « Pour tout réel x , x^2 est positif ou nul ».
8. Négation : « Il existe aucun ou au moins deux réels x tels que $x^2 = 1$ ».
9. On utilise un raisonnement par l'absurde.
10. Initialisation (cas de base), hérédité (passage de n à $n + 1$), puis conclusion.

Exercice C

1. Vrai. Principe du tiers exclu.
2. Faux. La négation de $x \geq 2$ et $x < 2$.
3. Vrai. Principe de la contraposée.
4. Vrai. Attention, $\emptyset \subset E$ mais $\emptyset \notin E$ en général.
5. Faux. Lois de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
6. Vrai. Transitivité de l'inclusion.
7. Vrai. Positivité du carré d'un réel.
8. Faux. Contredit la précédente.
9. Faux. La négation de $\forall$ est $\exists$.
10. Faux. C'est une preuve par l'absurde.
11. Faux. Surtout pas : une proposition peut être héréditaire sans être vraie.
12. Faux. Si n est pair, n^2 également.

Corrigés des exercices

Exercice 1

En écrivant les tables de vérités :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A}$
V	V
F	F

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{A}$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

et

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \text{ et } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C})$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Exercice 2

En écrivant les tables de vérités :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{A}$
V	V
F	F

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{A}$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

$\mathcal{A}$	non $\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \text{ ou non } \mathcal{A}$
V	F	V
F	V	V

et

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C})$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Exercice 3

En écrivant les tables de vérités :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}$	$((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}$	$((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Exercice 4

1. Pour tout réel positif x , il existe un réel y tel que $y^2 = x$. C'est la définition d'une racine carrée. Sa négation :

$$\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \neq x$$

2. Pour tout $x > 1$, il existe un entier n tel que $x^n \geq 2021$. Sa négation :

$$\exists x > 1, \forall n \in \mathbb{N}, x^n < 2021$$

3. Pour tous éléments $x \in X$ et $y \in Y$, si $xy = 0$ alors $x = 0$ ou $y = 0$. C'est le « théorème du produit nul » (appelé **intégrité** du corps des réels). Sa négation :

$$\exists x \in X, \exists y \in Y, xy = 0 \text{ et pourtant } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0$$

4. Il existe un unique élément $x \in E$ tel que $f(x) = 0$. Cela traduit l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$. Sa négation :

$$\forall x \in E, f(x) \neq 0 \text{ ou } \exists x \in E, \exists y \in E, x \neq y, f(x) = 0, f(y) = 0$$



Attention

La négation d'un « il existe un unique » est « il n'existe pas ou bien il en existe au moins 2 ».

Exercice 5

Exercice rapide pour bien maîtriser les différents concepts. On obtient :

$$B \cap D = \{3\}, \quad C \cap D = \{6\}, \quad B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = A, \quad B \cup D = \{1, 3, 5, 6, 7\}$$

Enfin, dans A , on a :

$$\overline{B} = \{2, 4, 6\} = C, \quad \overline{C} = \{1, 3, 5, 7\} = B, \quad \overline{D} = \{1, 2, 4, 5, 7\}$$

Exercice 6

1. Soient a et b deux entiers tels que $b \neq 0$. Supposons par l'absurde que $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $a + b\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Mais alors

$$b\sqrt{2} = \frac{p}{q} - a \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{bq} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$

ce qui est absurde. Ainsi, $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2. Raisonnons par contraposée. Supposons que $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{x} = \frac{p}{q}$ soit, en élevant au carré,

$$x = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Q}.$$

On a montré que $\sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$. Par contraposée, $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$.

3. Raisonnons par contraposée. Prenons n un entier impair. On écrit alors $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Mais alors :

$$n^2 - 1 = (2p + 1)^2 - 1 = 4p^2 + 4p = 4p(p + 1)$$

Or, $p(p + 1)$ est pair : on écrit $p(p + 1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et alors $n^2 - 1 = 8k$: $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Par contraposée, si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

4. Raisonnons par l'absurde. On suppose que $x \neq 0$. Mais alors, $\frac{|x|}{2} > 0$. On peut donc prendre $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ et on a

$$|x| \leq \frac{|x|}{2} \Rightarrow \frac{|x|}{2} \leq 0$$

et cela implique donc que $|x| = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 7

1. Soit P_n la propriété " $1^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ " définie pour tout entier $n \geq 1$, et montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

• **Initialisation** : Pour $n = 1$, la somme vaut $1^3 = 1$ et

$$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$$

La propriété P_1 est donc vraie.

• **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain $n \geq 1$, et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que

$$1^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

donc

$$1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

Or

$$\begin{aligned} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 &= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) \\ &= (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}\right) \\ &= (n+1)^2 \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

2. *L'inégalité de Bernoulli nous sera utile plus tard. Elle est donc à retenir.*

Soit P_n la propriété " $(1+a)^n \geq 1+na$ " définie pour tout entier $n \geq 0$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n .

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $(1+a)^0 = 1$ et $1+0 \times a = 1$. Ainsi, $(1+a)^0 \geq 1+0 \times a$. La propriété P_0 est donc vraie.

• **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain n , et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

En multipliant par $(1+a) > 0$ par hypothèse, on a

$$(1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na)$$

soit

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2$$

Or $na^2 \geq 0$, donc

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n .

3. Soit P_n la propriété " $u_n = 2^{n+2} + 3$ " définie pour tout entier $n \geq 0$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n .

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 7$ et $2^{0+2} + 3 = 2^2 + 3 = 7$.

La propriété P_0 est donc vraie.

• **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain n , et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que

$$u_n = 2^{n+2} + 3$$

Or, par définition, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Donc, par hypothèse de récurrence (H.R.) :

$$u_{n+1} = 2 \left(\underbrace{2^{n+2} + 3}_{\text{H.R.}} \right) - 3 = 2 \times 2^{n+2} + 6 - 3 = 2^{n+3} + 3 = 2^{(n+1)+2} + 3$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n .

4. *Cette démonstration peut se faire sans récurrence, en calculant $(1-q)(1+q+\dots+q^n)$.*

Soit P_n la propriété " $1+q+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ " définie pour tout entier $n \geq 0$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n .

• **Initialisation** : pour $n = 0$, la somme est réduite à $q^0 = 1$ et $\frac{1-q^1}{1-q} = 1$.

La propriété P_0 est donc vraie.

• **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain n , et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que

$$1+q+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Donc

$$1+q+\dots+q^n+q^{n+1} = \underbrace{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}_{\text{H.R.}} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n .

5. Soit P_n la propriété " $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ " définie pour tout entier $n \geq 1$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

- **Initialisation** : pour $n = 1$, la somme est réduite à 1 et $1^2 = 1$.

La propriété P_1 est donc vraie.

- **Hérédité** : supposons la propriété P_n vraie pour un certain $n \geq 1$, et montrons que P_{n+1} est vraie. On sait donc que

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Donc,

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = \underbrace{n^2}_{\text{H.R.}} + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Bilan : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 8

Raisonnons par analyse et synthèse.

- **Analyse**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant, pour tous x et y , $f(x + y) = f(y) + x$. Pour $y = 0$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + f(0)$. La fonction f peut donc s'écrire $f : x \mapsto x + a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On a bien réduit l'étendue des possibilités ; on passe à la synthèse.

- **Synthèse**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto x + a$. On remarque alors :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) &= (x + y) + a \\ &= (y + a) + x = f(y) + x \end{aligned}$$

Ainsi, la f vérifie bien l'équation fonctionnelle.

Bilan : l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant pour tous réels x et y , $f(x + y) = f(y) + x$ est

$$\{x \mapsto x + a, a \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 9

Raisonnons par analyse et synthèse.

- **Analyse**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant, pour tous x et y , $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Pour $x = y = 0$, on obtient $f(0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0$.

Fixons $y \in \mathbb{R}$, et dérivons par rapport à x (f est dérivable). On obtient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x + y) = f'(x)$$

En prenant $x = 0$, cela donne $f'(y) = f'(0)$. Ceci étant valable pour tout $y \in \mathbb{R}$, on en déduit que f' est une fonction constante. On écrit alors $f' : x \mapsto a$, avec $a \in \mathbb{R}$, ce qui donne, en prenant une primitive :

$$f : x \mapsto ax + b$$

avec a et b deux réels. Mais puisque $f(0) = 0$, on en déduit que $b = 0$.

On a bien réduit l'étendue des possibilités ; on passe à la synthèse.

- **Synthèse**

Soient $a \in \mathbb{R}$, et $f : x \mapsto ax$. On remarque alors :

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) &= a(x + y) \\ &= ax + ay = f(x) + f(y)\end{aligned}$$

Ainsi, la f vérifie bien l'équation fonctionnelle.

Bilan : l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant pour tous réels x et y , $f(x + y) = f(x) + f(y)$ est

$$\{x \mapsto ax, a \in \mathbb{R}\}$$