

33

Chapitre

Convergence et approximation

Résumé



DANS ce dernier chapitre de l'année, nous revenons sur les probabilités en s'intéressant à la notion de convergence de variables aléatoires. Nous verrons qu'il y a plusieurs convergences, et nous reviendrons sur l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Plan du cours

Chapitre 33. Convergence et approximation

I. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	3
II. Loi faible des grands nombres	7
III. Convergence en loi et approximation	10
Exercices	17
Corrigés	21

« Un livre, c'est pendant des semaines, pendant des mois, la pensée qui se recueille et se concentre : c'est ce corps qui fait converger ses muscles et ses nerfs vers un seul point... vers le bout de la plume. »

Antoine de Rivarol (1753–1801).

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

- ① Connaître les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev ☐
- ② Savoir manipuler la convergence en probabilité ☐
- ③ Connaître la loi faible des grands nombres ☐
- ④ Connaître la définition de la convergence en loi ☐
- ⑤ Savoir manipuler la convergence en loi dans le cas des variables à valeurs entières ☐
- ⑥ Savoir approximer une loi binomiale par une loi de Poisson ☐

Dans ce chapitre, on suppose que toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, et soit X une variable aléatoires. On s'intéresse à la manière de définir la convergence de la suite (X_n) vers X .

La plus intuitive serait de dire que (X_n) converge vers X si

$$\mathbb{P}\left(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega, \quad X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Intuitivement, cela veut dire que pour presque toute valeur de $\omega \in \Omega$, la suite réelle $(X_n(\omega))$ tend vers $X(\omega)$. On appelle cette convergence la convergence **presque sûre**. Cette convergence n'est pas au programme de Mathématiques approfondies. Deux autres convergences sont au programme de deuxième année, que nous allons introduire ici avec des résultats de probabilités classiques : la **convergence en loi** et la **convergence en probabilité**.

I. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

1. Fonction indicatrice

Avant de commencer, on introduit une fonction très importante : la fonction indicatrice :

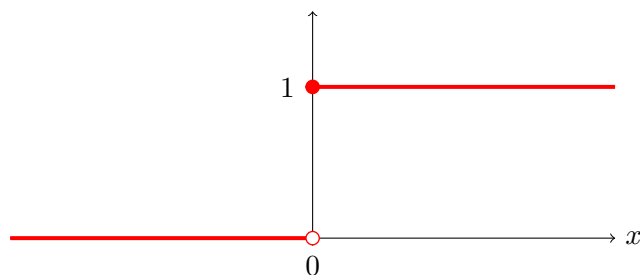
Définition 33.1. Fonction indicatrice

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle **indicatrice** de A , et on note $\mathbb{1}_A$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Exemple 33.1

La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ a pour courbe représentative :



2. Inégalité de Markov



Théorème 33.1. Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle discrète **positive** admettant une espérance. On a alors

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration

Nous allons le démontrer dans le cas énoncé. Par définition :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x < a}} x \mathbb{P}(X = x) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} x \mathbb{P}(X = x).$$

Par positivité de la variable aléatoire X , pour tout $x \in X(\Omega)$, $x\mathbb{P}(X = x) \geq 0$. Ainsi

$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} x\mathbb{P}(X = x).$$

Enfin, pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $x \geq a$, alors

$$x\mathbb{P}(X = x) \geq a\mathbb{P}(X = x)$$

et par linéarité de la somme :

$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} x\mathbb{P}(X = x) \geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} a\mathbb{P}(X = x) \geq a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} \mathbb{P}(X = x) = a\mathbb{P}(X \geq a).$$

Puisque $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Corollaire 33.2.

Soit X une variable aléatoire possédant un moment d'ordre m . Alors, pour tout réel $a > 0$, nous avons

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^m)}{a^m}.$$

Démonstration

En utilisant l'inégalité de Markov avec $|X|^m$, nous avons

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) = \mathbb{P}(|X|^m \geq a^m) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^m)}{a^m}.$$

3. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev



Théorème 33.3. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire possédant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout réel $a > 0$, nous avons

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}.$$

Démonstration

En utilisant le corollaire 33.2 avec $m = 2$ et $Y = X - \mathbb{E}(X)$, nous avons

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^2)}{a^2} = \frac{\text{Var}(X)}{a^2}.$$

Exemple 33.2

On interroge 1000 personnes dans la rue (de façon indépendante) et on leur demande s'ils ont voté pour le candidat A ou le candidat B. On sait que le candidat A a gagné avec un score de 66%.

On note X la variable aléatoire désignant le nombre de personnes interrogées ayant voté pour A. On suppose que, par équiprobabilité des sondages, X suit une loi binomiale de paramètre $n = 1000$ et $p = 0,66$.

On a $\mathbb{E}(X) = np = 660$ et $\text{Var}(X) = np(1-p) = 224,4$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

implique que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(600 < X < 720) &= \mathbb{P}(-60 < X - 660 < 60) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < 60) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 60) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{60^2} \approx 0,938.\end{aligned}$$

On peut alors en déduire que la probabilité que le nombre de personnes interrogées ayant voté pour A se situe entre 600 et 720 est supérieure à 0,938.

Exercice 33.3

Soit p la proportion (inconnue) de foyers d'un département disposant d'un poste de télévision et désireux de recevoir les émissions par câble.

Ne voulant pas procéder à un recensement complet de la population, on se propose d'estimer cette proportion p via un sondage.

On construit un échantillon de taille n de la population en piochant n fois au hasard dans l'annuaire un foyer du département. On suppose qu'un même foyer peut être sondé plusieurs fois, ce qui correspond à un tirage avec remise, et que les tirages sont indépendants. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i -ème foyer sondé possède un téléviseur et est intéressé par le câble, et 0 sinon. Enfin, on note

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

1. Quelle est la loi de X_i , pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$? Déterminer son espérance et sa variance.
2. Préciser l'espérance et la variance de $\bar{X}_n$.
3. Justifier que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.
4. Déduire de ce qui précède et de l'inégalité de Bienaymé-Tchbychev que, pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - p| \geq \alpha) \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}.$$

5. Sur $n = 500$ foyers sondés, 60% d'entre eux sont possesseurs d'un téléviseur et intéressés par le câble.
 - a) Vérifier que le réel $\alpha_0 = 0.1$ est solution de

$$\frac{1}{4\alpha_0^2 n} = 0.05.$$

- b) En déduire qu'avec une probabilité d'au moins 95%, la proportion de foyers disposant d'un poste de télévision et désireux de recevoir les émissions par câble, se trouve dans l'intervalle

$$]50\%, 70\%[.$$

Solution

1. La variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p . Nous avons $\mathbb{E}(X_i) = p$ et $\text{Var}(X_i) = p(1-p)$.
2. Nous avons, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\bar{X}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n}[\mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n)] = p.\end{aligned}$$

Par indépendance des variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et les propriétés de la variance,

il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}(\bar{X}_n) &= \mathbb{V}\text{ar}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\text{ar}(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2} [\mathbb{V}\text{ar}(X_1) + \dots + \mathbb{V}\text{ar}(X_n)] = \frac{p(1-p)}{n}.\end{aligned}$$

3. La fonction $p \mapsto p(1-p)$ est une fonction trinôme dont la dérivée est $1-2p$. On a alors le tableau de variations suivant

p	0	$\frac{1}{2}$	1
$1-2p$		+	0
$p(1-p)$	0	$\frac{1}{4}$	0

On a bien $p(1-p) \leq 1/4$.

4. La variable aléatoire $\bar{X}_n$ possède un moment d'ordre 2. Par Bienaymé-Tchebychev, il vient

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - p| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{V}\text{ar}(\bar{X}_n)}{\alpha^2} = \frac{p(1-p)}{n\alpha^2} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

5. a) On a $\alpha_0^2 = 0.01$ puis $4\alpha_0^2 n = 20$.
b) On a alors

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - p| \geq \alpha_0) \leq \frac{1}{4\alpha_0^2 n} = 0.05,$$

d'où

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_{500} - p| < 0.1) \geq 95\%.$$

Or, on a

$$\{|\bar{X}_{500} - p| < 0.1\} = \{\bar{X}_{500} - 0.1 < p < \bar{X}_{500} + 0.1\} = \{p \in]\bar{X}_{500} - 0.1, \bar{X}_{500} + 0.1[\}.$$

Avec une probabilité d'au moins 95%, la proportion de foyers disposant d'un poste de télévision et désireux de recevoir les émissions par câble, se trouve dans l'intervalle

$$]\bar{X}_{500} - 0.1, \bar{X}_{500} + 0.1[=]0.5, 0.7[.$$

Théorème 33.4. Inégalité de Jensen, hors programme

Soient X une variable aléatoire admettant une espérance et f une fonction telle que $f(X)$ admette une espérance. Si la fonction f est **convexe**, alors

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Démonstration

Soit $\mu = \mathbb{E}(X)$ un réel. Puisque f est convexe, il existe un réel λ tel que

$$f(x) \geq f(\mu) + \lambda(x - \mu), \quad \text{pour tout réel } x.$$

Par exemple, dans le cas où f est dérivable en μ , nous avons $\lambda = f'(\mu)$, puisque f est au-dessus de sa tangente en μ . En passant à l'espérance, nous obtenons

$$\mathbb{E}(f(X)) \geq f(\mu) + \lambda(\mathbb{E}(X) - \mu) = f(\mu).$$

II. Loi faible des grands nombres

Nous considérons une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et une variable aléatoire « limite » X définie sur le même espace de probabilité.

1. Convergence en probabilité

Nous rappelons qu'une suite (u_n) à valeurs réelles converge vers le réel ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Nous avons alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Nous allons à présent définir une notion de convergence pour une suite de variables aléatoires : la convergence *en probabilité*.

Définition 33.2. Convergence en probabilité

On dit que la suite (X_n) **converge en probabilité** vers X , et on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Exemple 33.4

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli telles que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que (X_n) converge en probabilité vers 0.
2. La suite $(\mathbb{E}(X_n))$ est-elle convergente ?

Solution

1. Soit $\varepsilon > 1$. Puisque pour tout entier $n \geq 1$, nous avons X_n à valeurs dans $\{0, 1\}$, on en déduit que $\{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = \emptyset$, et que $\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$. En particulier, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$.
Soit ε dans $]0, 1[$. Nous avons alors $\{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{X_n = 1\}$, pour tout entier n , et on en déduit que $\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \frac{1}{n}$. En particulier, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$.
On a bien prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0.$$

2. Nous avons $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n}$, ce qui entraîne que la suite $(\mathbb{E}(X_n))$ converge vers 0.



Attention

Si la suite (X_n) converge en probabilité vers X , la suite $(\mathbb{E}(X_n))$ ne converge pas toujours vers $\mathbb{E}(X)$.

Exemple 33.5

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que

$$\mathbb{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que (X_n) converge en probabilité vers 0.
2. La suite $(\mathbb{E}(X_n))$ est-elle convergente ?

Solution

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier $n \geq \sqrt{\varepsilon}$, nous avons $\{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{X_n = n^2\}$, et on en déduit que $\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \frac{1}{n}$. En particulier, nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$.
2. Nous avons $\mathbb{E}(X_n) = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n$, ce qui entraîne que la suite $(\mathbb{E}(X_n))$ tend vers $+\infty$ et n'est donc pas convergente.

Exemple 33.6

Montrer que si les variables aléatoires X_n et X admettent une espérance et que

$$\mathbb{E}(|X_n - X|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

alors (X_n) converge en probabilité vers X .

Solution

Soit $\varepsilon > 0$, d'après l'inégalité de Markov, nous avons

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_n - X|)}{\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Loi faible des grands nombres**Théorème 33.5. Loi faible des grands nombres**

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires **indépendantes**, et admettant une espérance μ et une variance σ^2 **communes**.

Alors la suite $(\bar{X}_n)$, définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

converge en probabilité vers μ .

Démonstration

Puisque les variables aléatoires X_n admettent un moment d'ordre 2, on en déduit que $\bar{X}_n$ admet un moment d'ordre 2. Par ailleurs, nous avons

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \mu,$$

et par indépendance des X_k ,

$$\mathbb{V}\text{ar}(\bar{X}_n) = \mathbb{V}\text{ar}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}\text{ar}(X_k) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur $\bar{X}_n$, il vient

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}\text{ar}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$



RÉFÉRENCE HISTORIQUE



Ce résultat a été conjecturé par Jacques Bernoulli (1654–1705) dans son livre *Ars Conjectandi* (Arts de la conjecture), et démontré par Siméon Denis Poisson (1781–1840), dans *Recherches sur les probabilités des jugements*, dans le cas où les (X_n) suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p .



Il a ensuite été démontré, tel qu'énoncé précédemment, au début du XX^e siècle grâce à l'inégalité de Markov, entre autre par Kolmogorov et Tchebychev. Alexandre Khintchine (1894–1959), mathématicien russe, a montré que l'hypothèse d'existence d'une variance était inutile. Cet intitulé est hors-programme.

**Exemple 33.7**

Soit p dans $]0, 1[$ et soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p .

Montrer que $(\overline{X}_n)$ converge en probabilité vers p .

Solution

Une loi de Bernoulli de paramètre p admet une espérance qui vaut p et une variance qui vaut $p(1 - p)$. D'après la loi faible des grands nombres, on a bien $(\overline{X}_n)$ qui converge en probabilité vers p .

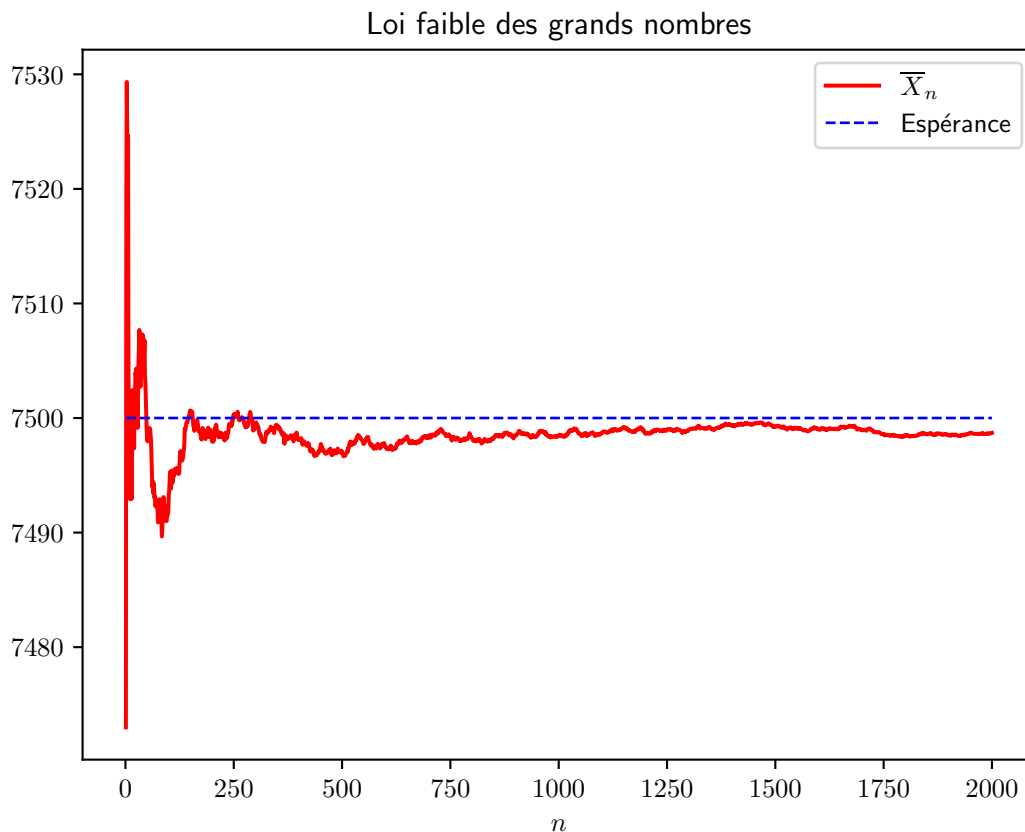
3. Application en Python

Voici un programme pour mettre en évidence la convergence en probabilité de la moyenne empirique de Bernoulli vers leur paramètre. On répète 2000 fois l'expérience consistant à effectuer 15 000 pile ou face, et on observe l'évolution de $(\overline{X}_n)_n$.

</> Code Python

```
1 import matplotlib.pyplot as plt      # Pour représenter l'histogramme
2 import numpy as np                  # Pour l'aléatoire
3 plt.rcParams['text.usetex'] = True  # Pour afficher du latex
4
5 n=15000 # nombre de lancers dans une expérience
6 m=2000  # nombre de répétitions de l'expérience
7 p=0.5   # proba de succès
8
9 # Simulation de m tirages d'une binomiale de paramètre n et p
10 simu = np.random.binomial(n,p,m)
11
12 # On calcule (X_1+...+X_n)/n
13 X_mean = np.cumsum(simu)/np.arange(1,m+1)
14
15 # On représente
16 plt.plot(range(1, m+1), X_mean, "r", label="$\overline{X}_n$") # (X_n)
17 plt.plot((1,m),(n*p,n*p),"b--",label="Espérance", linewidth=1) # espérance
18 plt.xlabel("$n$")                                     # Pour améliorer
19 plt.legend(loc='best')                                 # la représentation
20 plt.title("Loi faible des grands nombres")             # graphique
21 plt.savefig('loi_faible_grands_nombres.pdf',dpi=300)  # On enregistre
22 plt.show()                                             # On affiche
```

ce qui donne :



III. Convergence en loi et approximation

Nous considérons une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires (pouvant être définies sur des espaces de probabilité différents) et une variable aléatoire « limite » X . Nous notons F_n la fonction de répartition de X_n , pour tout entier $n \geq 1$, et F celle de X .

1. Convergence en Loi

Rappelons le résultat suivant.

Proposition 33.6.

Deux variables aléatoires ont la même loi si, et seulement si, leurs fonctions de répartition coïncident sur $\mathbb{R}$.

La fonction de répartition caractérise donc la loi d'une variable aléatoire. Ce n'est pas l'unique objet qui possède cette propriété, mais c'est le seul au programme.

Définition 33.3.

On dit que la suite (X_n) **converge en loi** vers X , et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si, pour tout point x où F est **continue**, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x).$$

Proposition 33.7.

Si X_n est à valeurs **entières**, pour tout entier n , ainsi que X , la suite (X_n) converge en loi vers X si, et seulement si,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k).$$

Démonstration

Puisque X est à valeurs entières, sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Si $x < 0$, nous avons $F_n(x) = 0 = F(x)$, ce qui prouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x), \quad \text{pour tout réel } x < 0.$$

Soit $x > 0$ un réel non entier. Nous avons

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(X_n = k) \quad \text{et} \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(X = k).$$

Ainsi, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$, pour tout entier k , On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(X_n = k) \right) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \right) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(X = k) = F(x).$$

Réciproquement, si pour tout point $x > 0$ non entier, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x),$$

en remarquant que

$$\mathbb{P}(X_n = k) = F_n\left(k + \frac{1}{2}\right) - F_n\left(k - \frac{1}{2}\right), \quad \text{pour tout entier } k,$$

il vient alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n\left(k + \frac{1}{2}\right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n\left(k - \frac{1}{2}\right) = F\left(k + \frac{1}{2}\right) - F\left(k - \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(X = k).$$

.

Exemple 33.8

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli telles que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Montrer que (X_n) converge en loi vers 0.

Solution

Chaque variable aléatoire X_n est à valeurs entières et nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 0, \quad \text{pour tout entier naturel } k \geq 1.$$

Ceci prouve que (X_n) converge en loi vers 0.

Exemple 33.9

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que

$$\mathbb{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Montrer que (X_n) converge en loi vers 0.

Solution

Chaque variable aléatoire X_n est à valeurs entières. Soit k un entier non nul. Nous avons $\mathbb{P}(X_n = k) = 0$, pour tout entier $n > \sqrt{k}$, ceci prouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 0, \quad \text{pour tout entier naturel } k \geq 1.$$

D'autre part, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1.$$

Tout ceci prouve que (X_n) converge en loi vers 0.

Exercice 33.10

Soit un réel $\lambda > 0$ et un entier $n \geq 1$ tels que $0 < \lambda < n$. On considère n variables aléatoires $(U_j)_{1 \leq j \leq n}$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre λ/n .

On a donc, pour tout entier j de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\mathbb{P}(U_j = 1) = \frac{\lambda}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(U_j = 0) = 1 - \frac{\lambda}{n}, \quad \text{pour tout entier } j \geq 1.$$

1. Quelle est la loi de $X_n = \sum_{j=1}^n U_j$?
2. Soit k un entier naturel.
 - a) Donner l'expression de $\mathbb{P}(X_n = k)$, pour tout $n \geq k$.
 - b) Étudier la limite de $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$ quand n tend vers l'infini.
 - c) Étudier la limite de $\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k$, quand n tend vers l'infini.
 - d) En déduire que (X_n) converge en loi vers X , où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Solution

1. La variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{\lambda}{n}$.
2. a) Nous avons

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}, \quad \text{pour tout } n \geq k.$$

- b) Remarquons que

$$n \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\lambda.$$

Ceci montre, par composition de limites, que

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \exp \left[n \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \right] \rightarrow e^{-\lambda}, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

- c) Nous avons

$$\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left[\lambda \frac{n-i}{n} \right].$$

À i fixé, nous avons $\frac{n-i}{n} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$, et on en déduit que

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left[\lambda \frac{n-i}{n} \right] \rightarrow \lambda^k, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

On en déduit que

$$\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

d) Par produit, nous avons

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ , nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k), \quad \text{pour tout entier } k,$$

ce qui prouve que (X_n) converge en loi vers X .



Attention

Toute suite qui converge en loi vers X ne converge pas forcément en probabilité vers X .

Exemple 33.11

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Rademacher, c'est à dire telle que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Soit X une variable aléatoire de Rademacher indépendante des (X_n)

Montrer que (X_n) converge en loi vers X , mais pas en probabilité.

Solution

Remarquons que X_n et X ont la même loi, ce qui signifie que F_n et F coïncide sur $\mathbb{R}$, pour tout entier n . On a en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x),$$

pour tout point x où F est continue.

Montrons à présent que (X_n) ne converge pas en probabilité vers X . Pour cela, il nous faut exhiber un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \neq 0.$$

Remarquons que du fait que X_n et X sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$, nous avons $|X_n - X|$ à valeurs dans $\{0, 2\}$, et

$$\mathbb{P}(|X_n - X| = 2) = \mathbb{P}(X_n = 1, X = -1) + \mathbb{P}(X_n = -1, X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \text{pour tout entier } n.$$

Ainsi, nous avons, avec $\varepsilon = 2$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \frac{1}{2}, \quad \text{pour tout entier } n,$$

ce qui prouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Remarque

En revanche, si la suite (X_n) converge en probabilité vers X , alors elle converge en loi. Ce résultat est hors-programme, et fait l'objet de l'exercice 14.

2. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On va démontrer un résultat qui va justifier, a posteriori, un résultat vu précédemment : sous certaines circonstances, on peut approcher une loi binomiale par une loi de Poisson :

Théorème 33.8. Approximation binomiale / Poisson

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $]0, 1[$ telle que $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda > 0$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$.

Alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Toutes les variables aléatoires en jeu sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. On peut donc utiliser le critère du paragraphe précédent.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

On a :

- $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$
- $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$ donc par exponentiation, $p_n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{n^k}$.
- $(1 - p_n)^{n-k} = e^{(n-k)\ln(1-p_n)}$. Puisque $-p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$(n-k)\ln(1-p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n-k)(-p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\lambda$$

Comme $\exp$ est continue en $-\lambda$, on obtient $(1 - p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda}$. Finalement

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(X = k)$$

Ainsi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

En utilisant un programme Python, on peut mettre en exergue ce résultat :

</> Code Python

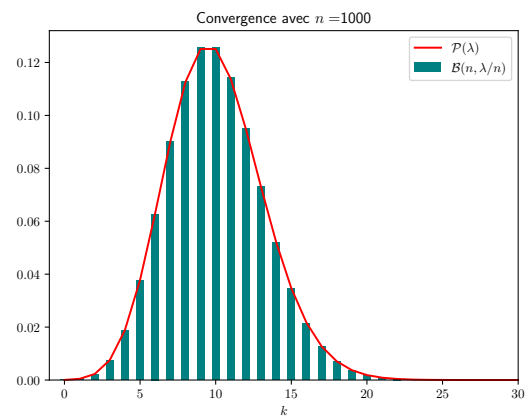
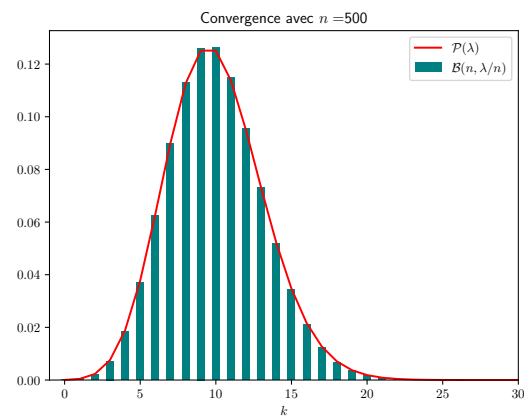
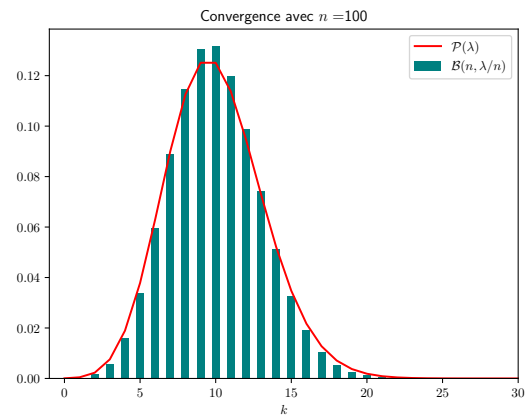
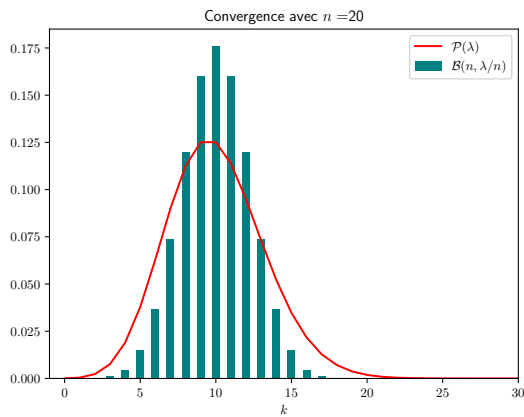
```
1 import matplotlib.pyplot as plt      # Pour représenter l'histogramme
2 import numpy as np                  # Pour l'aléatoire
3 import math                         # Pour les combinaisons et factoriels
4 plt.rcParams['text.usetex'] = True  # Pour afficher du latex
5
6 lamb = 10
7
8 list_n = [20, 100, 500, 1000]
9
10 prob_bino = [[math.comb(n, k)*((lamb/n)**k) * ((1-lamb/n)**(n-k)) for k in range(n+1)] for n \
+ ↪ in list_n]
11 prob_poi = [math.exp(-lamb)* (lamb**k)/math.factorial(k) for k in range(101)]
12
13 for i in range(len(list_n)):
14     plt.clf()
15     plt.bar(range(list_n[i]+1), prob_bino[i], color="#008080",
16             width=.5, label="$\mathcal{B}(n, \lambda/n)$")
17     plt.plot(range(100+1), prob_poi, "r", label="$\mathcal{P}(\lambda)$")
18     plt.xlabel("$k$")                # Pour améliorer
19     plt.legend(loc='best')           # la représentation
```

```

20 plt.title("Convergence avec $n = $" + str(list_n[i])) # graphique
21 plt.xlim(-1, 30)
22 plt.savefig('conv_bino_poi_' + str(list_n[i]) + ".pdf", dpi=300)
23
24

```

On voit alors bien la convergence en loi :



Remarque

En pratique, En pratique, si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $np \leq 15$, on peut approximer la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Exercices

33

Exercices

Convergences

●○○ Exercice 1 Une convergence en loi (10 min.)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donnons-nous une variable aléatoire X_n telle que $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n+2}{(n+1)(k+1)(k+2)}$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X discrète dont on explicitera la loi. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

●○○ Exercice 2 Une autre convergence en loi (10 min.)

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on pose $X = 1$ (respectivement $X = -1$) si la pièce tombe sur Pile (resp. sur Face).

On dispose d'une urne contenant n boules dont une seule rouge. On tire uniformément une boule dans cette urne, indépendamment du résultat du lancer de pièce.

Si on obtient la boule rouge, on pose $X_n = e^n$, sinon on pose $X_n = X$. Déterminer les lois de X_n et $X_n - X$ puis étudier la convergence de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers X (en probabilité et en loi).

●○○ Exercice 3 Dans l'attente d'un bus (15 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une expérience est tentée à chaque temps $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots$. À chaque essai, le résultat est un succès avec probabilité $p_n \in]0, 1[$ ou un échec avec probabilité $1 - p_n$, indépendamment des autres essais (l'exemple classique : on demande après chaque intervalle de temps de longueur $\frac{1}{n}$ si le bus est passé). On appelle T_n le temps à attendre avant le premier succès.

1. Quelle est la loi de nT_n ?
2. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$. Montrer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi en fonction de λ .

●●○ Exercice 4 Loi hypergéométrique (15 min.)

On considère une urne composée de N boules dont une proportion p de boules rouges. On effectue n tirages d'une boule sans remise (avec $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$) et on note X_N le nombre de boules rouges obtenues.

1. Justifier que $X_N(\Omega) = \llbracket \max(0, n - N \times (1 - p)), \min(n, N \times p) \rrbracket$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_N = k)$ pour tout $k \in X_N(\Omega)$.
On dit que X_N suit une loi hypergéométrique de paramètre (N, n, p) .
3. Montrer que la suite $(X_N)_{N \geq n}$ converge vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$.

●●● Exercice 5 Une convergence difficile (20 min.)

Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on obtient un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Nous avons vu, dans un exercice du chapitre 10 que $X_n(\Omega) = \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ et que

$$\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.
2. Comparer $\mathbb{E}(X)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$

●●○ **Exercice 6 Des boules et des urnes, encore** (30 min.)

On considère $n \geq 1$ urnes numérotées de 1 à n et $N = a \times n$ boules numérotées de 1 à N , où a est un entier non nul.

On place au hasard chacune des N boules dans une des n urnes, indépendamment les unes des autres.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère la variable aléatoire T_i égale à 1 si l'urne numérotée i est vide et 0 sinon. On note également Y_n le nombre d'urnes vides et $S_n = Y_n/n$.

1. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donner la loi de T_i et préciser son espérance.
2. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, calculer $\text{Cov}(T_i, T_j)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et sa limite lorsque $n \rightarrow \infty$.
4. Calculer $\text{Var}(S_n)$ et sa limite lorsque $n \rightarrow \infty$.
5. a) Justifier que :

$$\forall n \geq 1, \quad |S_n - e^{-a}| \leq |S_n - \mathbb{E}(S_n)| + |\mathbb{E}(S_n) - e^{-a}|.$$

- b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \mathbb{P}(|S_n - e^{-a}| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

- c) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|S_n - e^{-a}| \geq \varepsilon) = 0$$

- d) Interpréter le résultat précédent.

Estimations

●●○ **Exercice 7 Le dé est-il équilibré ?** (10 min.)

On dispose d'un dé équilibré à six faces. Quel est le nombre de lancers nécessaires pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du numéro 1 au cours de ces n lancers diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus 10^{-2} .

On appliquera l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Commenter.

●●○ **Exercice 8 Un avion pas trop rempli** (15 min.)

Un avion comporte 500 places. La probabilité qu'un passager ayant réservé une place ne se présente pas à l'embarquement est de 5%. Estimer le nombre de places que la compagnie aérienne peut vendre pour que la probabilité de voir se présenter plus de passagers que de places disponibles soit inférieure ou égale à 1%.

●●○ **Exercice 9 Des vaches bien rangées** (15 min.)

Un éleveur possède 100 vaches qui se répartissent au hasard entre deux étables contenant chacune n places avec $n \in \llbracket 50, 100 \rrbracket$. Déterminer une valeur de n permettant à chaque vache de trouver une place avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

●○○ Exercice 10 Une usine efficace (10 min.)

Un fabricant de composants électroniques sait que 0,2% de composants sortent défectueux de l'usine. Quelle est la probabilité pour que, parmi un lot de 1000 composants, il y en ait au plus 4 défectueux ? On utilisera une approximation par une loi bien choisie.

Pour aller plus loin

●○○ Exercice 11 Convergence quadratique (10 min.)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes, admettant un moment d'ordre 2.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant aussi un moment d'ordre 2.

On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n - X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(X_n - X) = 0.$$

On dit que X_n converge vers X en moyenne quadratique.

1. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X .
2. Étudier la réciproque.

On pourra considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n}$.

●○○ Exercice 12 Généralisation de l'inégalité de Markov (10 min.)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathbb{P}(|X| \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^r)}{x^r}.$$

●●○ Exercice 13 Inégalités de concentrations (30 min.)

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.
2. Soit Z une variable aléatoire réelle discrète d'espérance nulle et de variance σ^2 .
 - a) Montrer que, pour tous $a > 0$ et $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}.$$

- b) En déduire que $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}$. A-t-on fait le choix optimal pour x ?

- c) En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{1 + \lambda}$ et commenter.

3. a) Montrer que la fonction $G_X : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \mathbb{P}(X = k)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et donner-en une expression. On appelle G_X la fonction génératrice de la variable aléatoire X .
b) Montrer que, pour tous $t > 1$ et $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}.$$

- c) Étudier le minimum de $t \mapsto \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}$ sur $]1, +\infty[$.

- d) En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$ et commenter.

●●● Exercice 14 La convergence en probabilité implique la convergence en loi (35 min.)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers une variable aléatoire réelle X .

1. Soient Y et Z deux variables aléatoires réelles quelconques. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(Y \leq a) \leq \mathbb{P}(Z \leq a + \varepsilon) + \mathbb{P}(Z - Y > \varepsilon).$$

2. Soient $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$F_X(t - \varepsilon) - \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq F_{X_n}(t) \leq F_X(t + \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon).$$

3. En déduire que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X .

4. a) **Réciproque partielle.** Supposons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $a \in \mathbb{R}$ (une variable aléatoire presque sûrement constante égale à a). Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers a .

On commencera par montrer que, $\mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) = 1 - F_{X_n}(a + \varepsilon) + F_{X_n}(a - \varepsilon)$ pour tous $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

- b) **La réciproque est fausse en général.** On lance une pièce de monnaie équilibrée et on note $X = 1$ (resp. $X = 0$) si on tombe sur Pile (resp. Face). On définit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{2n} = 1 - X$ et $X_{2n+1} = X$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X mais pas en probabilité.

●●○ Exercice 15 Opérations sur la convergence en probabilité (15 min.)

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires réelles qui convergent en probabilité vers des variables aléatoires respectives X et Y . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\alpha X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha X \quad \text{et} \quad X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y.$$

Pour la deuxième convergence, on pourra commencer par montrer que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, si $|x + y| > \varepsilon$, alors $|x| > \varepsilon/2$ ou $|y| > \varepsilon/2$

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

Soit $k \in \mathbb{N}$. Remarquons que, pour $n \geq k$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n+2}{(n+1)(k+1)(k+2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Soit X la variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Alors, d'après ce qui précède et puisque X_n et X sont à valeurs entières :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

X n'admet pas d'espérance. En effet, X à valeurs positives donc $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ est absolument convergente si et seulement si elle est convergente. De plus :

$$k\mathbb{P}(X = k) = k \frac{1}{(k+1)(k+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k}.$$

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique). Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{k \geq 1} k\mathbb{P}(X = k)$ diverge, et donc X n'admet pas d'espérance.

Exercice 2

Tout d'abord, X suit une loi dite de Rademacher : $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Remarquons tout d'abord que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$X_n(\Omega) = \{-1, 1, e^n\}.$$

On note R_n l'événement « obtenir la boule rouge lors du lancer dans l'urne à n boules ». D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} [X_n = e^n] &= R_n \\ [X_n = 1] &= \overline{R_n} \cap [X = 1] \\ [X_n = -1] &= \overline{R_n} \cap [X = -1] \end{aligned}$$

Ainsi, par indépendance des tirages dans l'urne et de la pièce

$$\mathbb{P}(X_n = e^n) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{n-1}{2n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{n-1}{2n}.$$

De même, notons $Y_n = X_n - X$. Alors

$$Y_n(\Omega) = \{e^n - 1, e^n + 1, 0\}.$$

Par le même raisonnement que précédemment :

$$\begin{aligned} [Y_n = e^n - 1] &= R_n \cap [X = 1] \\ [Y_n = e^n + 1] &= R_n \cap [X = -1] \\ [Y_n = 0] &= \overline{R_n}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Y_n = e^n - 1) = \frac{1}{2n}, \quad \mathbb{P}(Y_n = e^n + 1) = \frac{1}{2n}, \quad \mathbb{P}(Y_n = 0) = \frac{n-1}{n}.$$

- CONVERGENCE EN LOI. Remarquons que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{n-1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = 1) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{n-1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = -1)$$

Ainsi, (X_n) converge en loi vers X .

- CONVERGENCE EN PROBABILITÉ. Soit $\varepsilon > 0$. Constatons que

$$\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|Y_n| > 0)$$

$$\text{soit } \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq 1 - \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{n-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, (X_n) converge en loi vers X .

Exercice 3

1. Remarquons que, si on a au moins un succès, $T_n(\omega) \in \left\{ \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}, \frac{n+1}{n}, \dots \right\}$, et sinon, $T_n(\omega) = \infty$ (temps d'attente infini, car pas de succès). Ainsi

$$nT_n(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Notons S_i l'événement « obtenir un succès lors de la i -ième expérience ». Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad [nT_n = k] = \overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k$$

et par indépendance des tirages

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(nT_n = k) &= \mathbb{P}(\overline{S_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(\overline{S_{k-1}}) \times \mathbb{P}(S_k) \\ &= (1 - p_n) \times (1 - p_n) \times p_n = (1 - p_n)^{k-1} p_n. \end{aligned}$$

Enfin, par le même raisonnement et par limite monotone :

$$\mathbb{P}(nT_n = \infty) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - p_n)^k = 0 \text{ car } p_n \in]0, 1[.$$

2. Remarquons que si $r \in \mathbb{N}$ est fixé, et si $k \in \llbracket rn, r(n+1) - 1 \rrbracket$, alors

$$\frac{k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, les seules valeurs que peut prendre la limite en loi des (T_n) sont des entiers strictement positifs

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} F_{T_n}(r) &= \mathbb{P}(T_n \leq r) \\ &= \mathbb{P}(nT_n \leq rn) \\ &= \sum_{k=1}^{rn} \mathbb{P}(nT_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{rn} (1 - p_n)^{k-1} p_n \\ &= p_n \frac{1 - (1 - p_n)^{rn}}{1 - (1 - p_n)} = 1 - (1 - p_n)^{rn} \end{aligned}$$

Or

$$(1 - p_n)^{rn} = e^{rn \ln(1 - p_n)} = e^{rn \ln\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)}.$$

Par hypothèse, $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$ donc $\frac{np_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors :

$$\begin{aligned} (1 - p_n)^{rn} &= e^{rn\left(-\frac{np_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{-rn p_n + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-r\lambda}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_{T_n}(r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-r\lambda}$$

Notons T la variable aléatoire telle que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $F_T(r) = 1 - e^{-r\lambda}$. Le résultat précédent garantit que (T_n) converge en loi vers T .

Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = r) &= F_T(r) - F_T(r-1) = e^{-(r-1)\lambda} - e^{-r\lambda} \\ &= (e^{-\lambda})^{r-1} (1 - e^{-\lambda}). \end{aligned}$$

On reconnaît que $T \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$.

Exercice 4

1. On effectue un tirage de n boules sans remise. Il y a N boules, et une proportion p de boules rouges, donc pN boules rouges. Au minimum, on ne tire que des boules non rouges, sauf si on est obligé d'en tirer (i.e. si $n \geq N \times (1-p)$, $N \times (1-p)$ désignant le nombre de boules non rouges). Ainsi, au minimum on tire 0 (si $n \leq N \times (1-p)$) ou $n - N \times (1-p)$ (si $n \geq N \times (1-p)$) boules rouges.

Au maximum, on tire soit n boules rouges si $n \leq N \times p$, ou alors toutes les boules rouges, c'est-à-dire $N \times p$ si $n \geq N \times p$.

Tous les cas intermédiaires étant possibles :

$$X_N(\Omega) = [\max(0, n - N \times (1-p)), \min(n, N \times p)].$$

2. Soit $k \in X_N(\Omega)$. $[X_N = k]$ désigne l'événement « tirer k boules rouges dans un tirage à n boules sans remise ».

On effectue du dénombrement. $[X_N = k]$ revient à choisir les k boules rouges dans les pN boules rouges, et les $n-k$ autres boules dans les $(1-p)N$ boules. Par équiprobabilité des tirages de n boules sans remise :

$$\mathbb{P}(X_N = k) = \frac{\binom{pN}{k} \times \binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

3. Lorsque N tend vers $+\infty$,

$$\max(0, n - N \times (1-p)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \min(n, N \times p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} n.$$

Soit $k \in [0, n]$. D'après le résultat précédent, pour $N \geq n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_N = k) &= \frac{\frac{(pN)!}{k!(pN-k)!} \frac{((1-p)N)!}{(n-k)!((1-p)N-(n-k))!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(pN)!}{(pN-k)!} \frac{((1-p)N)!}{((1-p)N-(n-k))!} \frac{(N-n)!}{N!}. \end{aligned}$$

Remarquons que, par équivalence, le nombre de terme étant fixe :

$$\begin{aligned} \frac{(pN)!}{(pN-k)!} &= pN(pN-1) \dots (pN-k+1) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} (pN)^k \\ \frac{((1-p)N)!}{((1-p)N-(n-k))!} &= ((1-p)N)((1-p)N-1) \dots ((1-p)N-n+k+1) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} ((1-p)N)^{n-k} \\ \frac{(N-n)!}{N!} &= \frac{1}{N(N-1) \dots (N-n+1)} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{N^n}. \end{aligned}$$

Finalement, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_N = k) &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \binom{n}{k} (pN)^k ((1-p)N)^{n-k} \frac{1}{N^n} \\ &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} N^k N^{n-k} \frac{1}{N^n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_N = k) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ainsi, $(X_N)_{N \geq n}$ converge en loi vers une loi binomiale de paramètre n et p .

Exercice 5

1. Soit $k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Pour $n \geq k$, on a d'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = k) &= \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} \\ &= \frac{k-1}{n^k} \frac{(n+1) \dots (n+1-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k-1}{n^k} \frac{n^k}{k!} = \frac{k-1}{k!}. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = 1 \text{ par télescopage.}$$

Ainsi, (X_n) converge en loi vers X , définie par $X(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ et telle que

$$\forall k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{k-1}{k!}.$$

2. Calculons les espérances. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1) \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k. \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton, pour tout réel x :

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k.$$

Ces expressions étant des polynômes, on peut dériver deux fois et on a :

$$\begin{aligned} (n+1)(1+x)^n &= \sum_{k=1}^{n+1} k \binom{n+1}{k} x^{k-1} \\ (n+1)n(1+x)^{n-1} &= \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1) \binom{n+1}{k} x^{k-2}. \end{aligned}$$

En utilisant ce résultat dans l'espérance de X_n :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1) \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \\ &= \frac{1}{n^2} n(n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Par un calcul utilisant les séries exponentielles, sous réserve de convergence (car à termes positifs) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} = e.$$

Or, par un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e \text{ par continuité d'exp.} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).}$$

On dit que (X_n) converge en moyenne vers X .

Exercice 6

Exercice 7

On effectue une infinité de lancer. On note X_n la variable aléatoire valant 1 si le dé tombe sur 1 au n -ième lancer, et 0 sinon. Alors, pour tout n , $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right)$. On note $S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

S_n désigne la fréquence d'apparition, sur n lancers, du nombre 1.

Par indépendance des (X_i) , pour tout n ,

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\text{ar}(S_n) = \frac{1}{n^2} n \mathbb{V}\text{ar}(X_1) = \frac{5}{36n}.$$

On veut donc rendre S_n le plus proche de $\frac{1}{6}$ possible.

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev à S_n :

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{1}{6}\right| \geq 10^{-2}\right) \leq \frac{\mathbb{V}\text{ar}(S_n)}{(10^{-2})^2} = \frac{5}{36n \times 10^{-4}}.$$

Ainsi, pour rendre la probabilité inférieure à 5%, il suffit d'avoir

$$\frac{5}{36n \times 10^{-4}} \leq \frac{5}{100} \implies n \geq \frac{10^6}{36}.$$

Finalement, si $n \geq \frac{10^6}{36} \approx 27778$ lancers, la probabilité que la fréquence d'apparition du numéro 1 diffère d'au plus 10^{-2} est supérieure ou égale à 95%.

Exercice 8

Exercice 9

Exercice 10

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 11

1. Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $Y_n = X_n - X$. Remarquons que, par hypothèse, Y_n admet un moment d'ordre 2 puisque X_n et X en admettent. alors

$$\mathbb{V}\text{ar}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - \mathbb{E}(Y_n)^2$$

soit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n^2) &= \mathbb{V}\text{ar}(Y_n) + \mathbb{E}(Y_n)^2 \\ &= \mathbb{V}\text{ar}(Y_n) + \mathbb{E}(X_n - X)^2\end{aligned}$$

Par hypothèse, les deux termes $\mathbb{V}\text{ar}(Y_n)$ et $\mathbb{E}(X_n - X)$ tendent vers 0, et donc $\mathbb{E}(Y_n^2)$ également. Mais alors, d'après l'inégalité de Markov appliqué à Y_n^2 et à ε^2 (légitime car d'après ce qui précède, Y_n^2 admet une espérance) :

$$\mathbb{P}(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}((Y_n)^2)}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, Y_n converge en probabilité vers 0.

2. On prend la proposition de l'énoncé. On remarque que (X_n) converge en probabilité vers $X = 0$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > \varepsilon \implies \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

pourtant, on remarque que

$$\mathbb{E}(X_n - X) = \mathbb{E}(X_n) = n \times \mathbb{P}(X_n = n) + 0 \times \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, (X_n) ne converge pas en moyenne quadratique vers X .

Exercice 12

Exercice 13

Exercice 14

Exercice 15