

32

Chapitre

Fonctions convexes

Résumé

OUS allons introduire la notion de convexité de fonctions. Cette notion nous permettra de représenter plus fidèlement des fonctions, mais aussi d'obtenir des inégalités intéressantes.

Plan du cours

Chapitre 32. Fonctions convexes

I. Paramétrisation	3
II. Convexité, concavité	4
III. Cas des fonctions dérivables	7
Exercices	13
Corrigés	16

« La différence entre les psychiatres et les autres malades mentaux, c'est un peu le rapport entre la folie convexe et la folie concave. »

Karl Kraus (1874–1936).

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

- ① connaître la définition ☐
- ② savoir démontrer une convexité dans le cas $\mathcal{C}^1$ ☐
- ③ savoir démontrer une convexité dans le cas $\mathcal{C}^2$ ☐
- ④ savoir déterminer des inégalités de convexité ☐
- ⑤ connaître l'inégalité des trois pentes et la croissance des pentes ☐

Dans l'ensemble de ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I. Paramétrisation

Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur I . On munit le plan d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

On peut *paramétriser* un segment :

Proposition 32.1.

L'ensemble des réels de la forme $(1-t)a + tb$, où t parcourt $[0, 1]$, est le segment $[a, b]$.

Démonstration

On procède par double inclusion :

- Si $t \in [0, 1]$, alors $(b-a)t \in [0, b-a]$ et finalement $(1-t)a + tb = a + t(b-a) \in [a, b]$.
- Réciproquement, si $u \in [a, b]$, alors $t = \frac{u-a}{b-a}$ vérifie

$$(1-t)a + tb = \frac{b-u}{b-a}a + \frac{u-a}{b-a}b = u \frac{b-a}{b-a} = u.$$

Remarque

De la même manière, $\{ta + (1-t)b, t \in [0, 1]\} = [a, b]$ également.

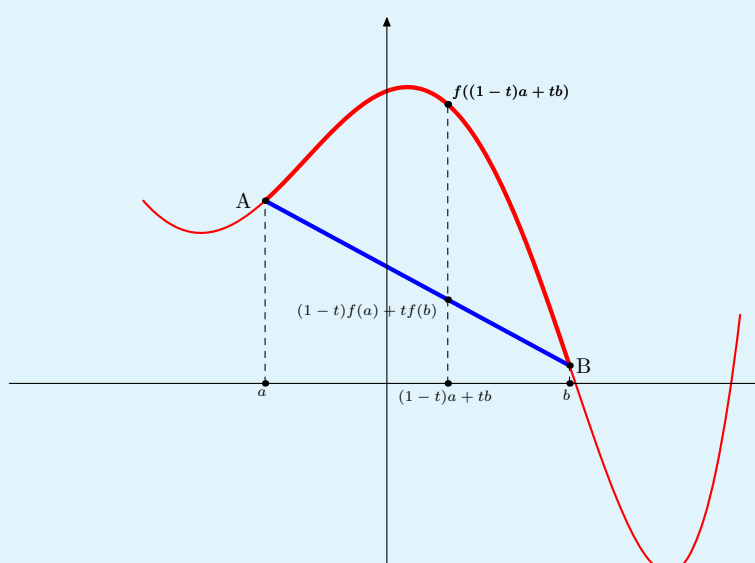
De la même manière, on a :

- $u \in f([a, b])$ si et seulement s'il existe $t \in [0, 1]$ tel que $u = f((1-t)a + tb)$.
- $u \in [f(a), f(b)]$ si et seulement s'il existe $t \in [0, 1]$ tel que $u = (1-t)f(a) + tf(b)$, en considérant que si $f(a) > f(b)$, $[f(a), f(b)] = [f(b), f(a)]$.

Définition 32.1.

Soient A et B les deux points du plan, de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

On appelle **arc** de $\mathcal{C}_f$ entre a et b la portion de $\mathcal{C}_f$ comprise entre A et B . On appelle **corde** de cet arc le segment $[A, B]$.



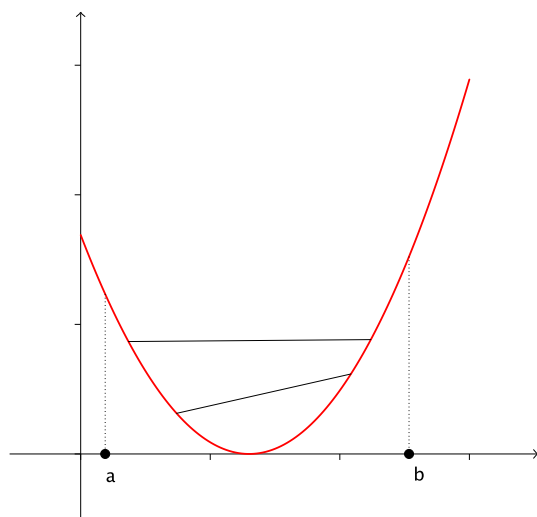
II. Convexité, concavité

1. Définition

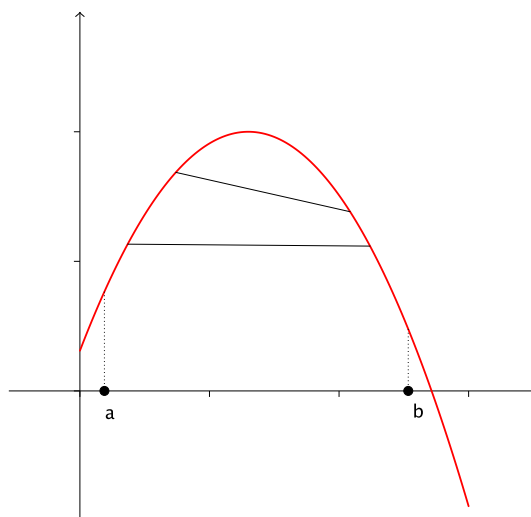
Définition 32.2.

Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- On dit que f est **convexe** si tout arc de $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa corde.
- On dit que f est **concave** si tout arc de $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa corde.



Fonction convexe



Fonction concave

En utilisant la paramétrisation des arcs et cordes :

Proposition 32.2. Convexité, concavité

Soit I un intervalle, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est convexe sur I , si, pour tout $a, b \in I$ tels que $a < b$ on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

- La fonction f est concave sur I , si, pour tout $a, b \in I$ tels que $a < b$ on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$

Remarque

De même, f est convexe sur I si, pour tout $(a, b) \in I^2$, tels que $a < b$, on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Exemple 32.1

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

En effet, soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $t \in [0, 1]$. On a

$$f(ta + (1-t)b) = (ta + (1-t)b)^2 = t^2a^2 + 2t(1-t)ab + (1-t)^2b^2$$

On a alors

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) - (tf(a) + (1-t)f(b)) &= t^2a^2 + 2t(1-t)ab + (1-t)^2b^2 - ta^2 - (1-t)b^2 \\ &= t(t-1)a^2 + t(1-t)2ab + (t-1)tb^2 \\ &= t(t-1)(a-b)^2 \leq 0 \text{ puisque } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Exercice 32.2

Démontrer que la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.

Solution

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, et $t \in [0, 1]$. On a, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |(1-t)a + tb| &\leq |(1-t)a| + |tb| \\ &\leq |1-t| \cdot |a| + |t| \cdot |b| = (1-t)|a| + t|b| \text{ puisque } t \geq 0 \text{ et } 1-t \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction valeur absolue est convexe.

Remarque

Une fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

⚠ Attention

Une fonction peut tout à fait être ni convexe, ni concave !

2. Convexité, continuité et dérivabilité

Théorème 32.3.

Une fonction convexe (ou concave) sur un intervalle ouvert I est continue, et admet des dérivées à droite et à gauche en tout point.

Démonstration

Résultat admis.

Remarque

Ainsi, par contraposée du théorème précédent, si une fonction n'est pas continue sur un intervalle I , elle ne peut *a fortiori* pas être convexe sur cet intervalle

3. Propriétés

a. Inégalités de convexité

Théorème 32.4. Inégalité de convexité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

f est convexe sur I si et seulement si pour tout $n \geq 2$, pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et pour tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ vérifiant $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration

Le sens réciproque est immédiat, en prenant $n = 2$, $\lambda_1 = 1 - t$ et $\lambda_2 = t$. On montre le sens direct par récurrence sur n .

- Pour $n = 2$, il s'agit de la définition de la convexité.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un certain $n \geq 2$ fixé. Soient $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0, 1]^{n+1}$ vérifiant $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$. Si $\lambda_{n+1} = 1$, l'inégalité est immédiate. Sinon, on pose $t_n = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ et

$$\alpha_n = \frac{1}{t_n} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

f étant convexe, et $t_n \in]0, 1]$, on a

$$f(\lambda_{n+1}x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1})\alpha_n) \leq \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1})f(\alpha_n)$$

soit, en remarquant que $1 - \lambda_{n+1} = t_n$

$$f(\lambda_{n+1}x_{n+1} + t_n\alpha_n) \leq \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + t_nf(\alpha_n)$$

soit encore, par définition de α_n

$$f\left(\lambda_{n+1}x_{n+1} + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + t_nf(\alpha_n).$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(x_1, \dots, x_n)$ et $\left(\frac{x_1}{t_n}, \dots, \frac{x_n}{t_n}\right)$ puisque, par définition de t_n , $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{t_n} = 1$. Ainsi,

$$f(\alpha_n) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{t_n} f(x_i).$$

On remplace alors dans l'inégalité précédente :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + t_n \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{t_n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

Le principe de récurrence permet de conclure que la propriété est vraie pour tout $n \geq 2$.

On dispose d'un corollaire qui est un cas particulier usuel :

Corollaire 32.5. Image de la moyenne

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application convexe. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \quad f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Exercice 32.3

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels. Montrer que

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2).$$

Solution

La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$. Pour tout réels $x_1, \dots, x_n$ on a alors

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}$$

ce qui donne le résultat.

b. Inégalité des trois pentes

Les fonctions convexes vérifient une inégalité visuellement très compréhensible :

Théorème 32.6. Inégalité des trois pentes

Soit f une fonction convexe sur I . Soient $(a, b, c) \in I^3$ tels que $a < c < b$. Alors

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Démonstration

Soit $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < c < b$. On pose $t = \frac{c-a}{b-a} \in]0, 1[$; ainsi, $c = (1-t)a + tb$. Puisque f est convexe, on a $f(c) = f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$. Or $c - a > 0$, donc

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{(1-t)f(a) + tf(b) - f(a)}{c - a} = \frac{t(f(b) - f(a))}{c - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

D'où la première inégalité. La deuxième se montre de la même manière, avec $t = \frac{b-c}{b-a}$.

Remarque

Graphiquement, en notant A le point de coordonnées $(a, f(a))$, B de coordonnées $(b, f(b))$ et C de coordonnées $(c, f(c))$ alors

$$\text{pente de } (AC) \leq \text{pente de } (AB) \leq \text{pente de } (BC)$$

On en déduit un résultat qui nous servira dans la section suivante :

Proposition 32.7. Croissance des pentes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. f est convexe si et seulement si pour tout $x_0 \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

Démonstration

- Si f est convexe sur I , alors la croissance de $T_{x_0} : x \in I \setminus \{x_0\} \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est une conséquence directe de l'inégalité des pentes.
- Réciproquement supposons que, pour tout $x_0 \in I$, la fonction T_{x_0} est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$. Soient $t \in [0, 1]$ et $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ (le cas $x = y$ est immédiat et le cas $x > y$ est analogue).
 - Si $t = 0$ ou $t = 1$, l'inégalité de convexité est immédiate.
 - Si $t \in]0, 1[$, alors $x < (1-t)x + ty < y$ et donc

$$\frac{f((1-t)x + ty) - f(x)}{t(y-x)} = \frac{f((1-t)x + ty) - f(x)}{(1-t)x + ty - x} = T_x((1-t)x + ty) \leq T_x(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Puisque $t > 0$ et $y - x > 0$, nous obtenons $f((1-t)x + ty) - f(x) \leq t(f(y) - f(x))$.

D'où l'inégalité de convexité.

Ainsi f est convexe sur I .

III. Cas des fonctions dérivables

1. Convexité et dérivée

Théorème 32.8.

Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Alors f est convexe (respectivement concave) sur I si, et seulement si, f' est croissante (resp. décroissante).

Démonstration

- Supposons f convexe. Soient $(x, y) \in I^2$ tels que $x < y$. Pour tout $z \in]x, y[$, d'après l'inégalité des trois pentes :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

En faisant tendre z vers x dans la première partie d'inégalité, on obtient

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

En faisant tendre z vers y dans la deuxième partie d'inégalité, on obtient

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y).$$

Ainsi, $f'(x) \leq f'(y)$: f' est bien croissante.

- Réciproquement, supposons f' croissante. Soient $(a, b) \in I$ tels que $a < b$ et $t \in [0, 1]$. Si $t = 0$ ou $t = 1$, le résultat est immédiat. Supposons $t \in]0, 1[$. Soit $z = (1-t)a + tb \in]a, b[$. On applique l'inégalité des accroissements finis sur $]a, z[$ et sur $]z, b[$: il existe $x \in]a, z[$ et $y \in]z, b[$ tels que

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(x) \quad \text{et} \quad \frac{f(b) - f(z)}{b - z} = f'(y).$$

Puisque $x < y$, par croissance de f' , on a

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \leq \frac{f(b) - f(z)}{b - z}$$

soit, en revenant à la définition de $z = (1-t)a + tb$:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(a)}{t(b-a)} \leq \frac{f(b) - f(z)}{(1-t)(b-a)} &\implies (1-t)(f(z) - f(a)) \leq t(f(b) - f(z)) \\ &\implies f(z) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \\ &\implies f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b). \end{aligned}$$

Ainsi, f est convexe.

Exemple 32.4

- La fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet, $\exp' = \exp$ qui est bien une fonction croissante.
- La fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Inégalité de convexité**Théorème 32.9.**

Une fonction dérivable est convexe si et seulement si elle est au dessus de chacune de ses tangentes. Elle est concave si et seulement si elle est en dessous de chacune de ses tangentes.

Démonstration

- Supposons f convexe. D'après l'inégalité des trois pentes appliquées à $x < z < x_0$:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(x_0) - f(z)}{x_0 - z}.$$

En faisant tendre z vers x_0 dans la partie droite :

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq f'(x_0) \implies f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Ainsi, la courbe de f est au dessus de sa tangente en x_0 à gauche. Le même raisonnement avec $x_0 < z < x$ montre que la courbe est au-dessus de sa tangente en x_0 à droite.

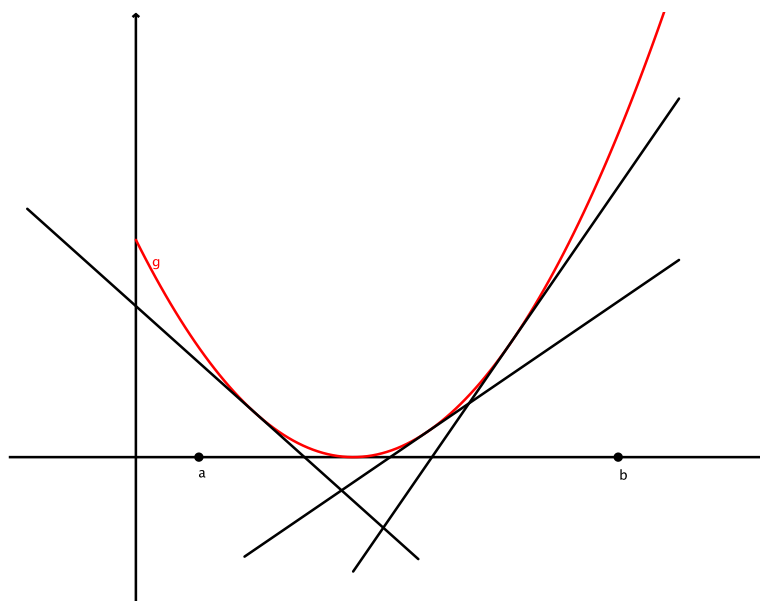
- Supposons que la courbe de f est au-dessus de ses tangentes. Soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Alors,

$$f(b) \geq f'(a)(b - a) + f(a) \quad \text{et} \quad f(a) \geq f'(b)(a - b) + f(b)$$

soit

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

Ainsi, f' est croissante, et donc f est convexe.

**Application 32.5**

Comme la fonction $\exp$ est convexe, la courbe de la fonction $\exp$ est toujours au dessus de ses tangentes. En particulier, elle est au-dessus de la tangente en 0, d'équation $y = x + 1$. Ainsi,

$$\forall x, e^x \geq 1 + x$$

De même, la fonction $f : x \mapsto \ln(x + 1)$ est concave sur $] -1; +\infty[$, donc la courbe de f est toujours en dessous de ses tangentes, et en particulier sa tangente en 0, d'équation $y = x$. Ainsi,

$$\forall x \in] -1; +\infty[, \ln(x + 1) \leq x$$

Exercice 32.6

Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) \leq x$.

Solution

Remarquons que, $\sin$ est dérivable et $\sin' = \cos$. Ainsi, $\sin'$ est décroissante sur $[0, \pi]$: $\sin$ est concave sur $[0, \pi]$. Déterminons l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 :

$$y = \sin'(0)(x - 0) + \sin(0) = x.$$

Ainsi, par concavité :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \sin(x) \leq x.$$

3. Convexité et signe de f'' **Théorème 32.10.**

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I . Alors f est convexe (respectivement concave) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).

Remarque

Le programme officiel ne précise ce théorème que sur des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, mais il est vrai sans que la fonction soit $\mathcal{C}^2$, mais simplement $\mathcal{D}^2$.

Démonstration

Supposons la fonction f deux fois dérivable sur I et convexe. D'après le théorème précédent, la fonction f' est donc croissante. Puisque f' est elle-même dérivable, f' est croissante si et seulement si f'' est positive.

Exemple 32.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 - \ln(x)$. Alors, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$$

La dérivée seconde étant positive sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Méthode**

Pour montrer qu'une fonction est convexe, ou concave, tout dépend de sa régularité :

- si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ (ou, au moins, deux fois dérivable), on calcule sa dérivée seconde, et on s'intéresse à son signe.
- si elle n'est pas deux fois dérivable, mais au moins dérivable, on la dérive et on vérifie le sens de variation de sa dérivée.
- si elle n'est pas dérivable, on part sur la définition de base, ou on se ramène à des fonctions connues.

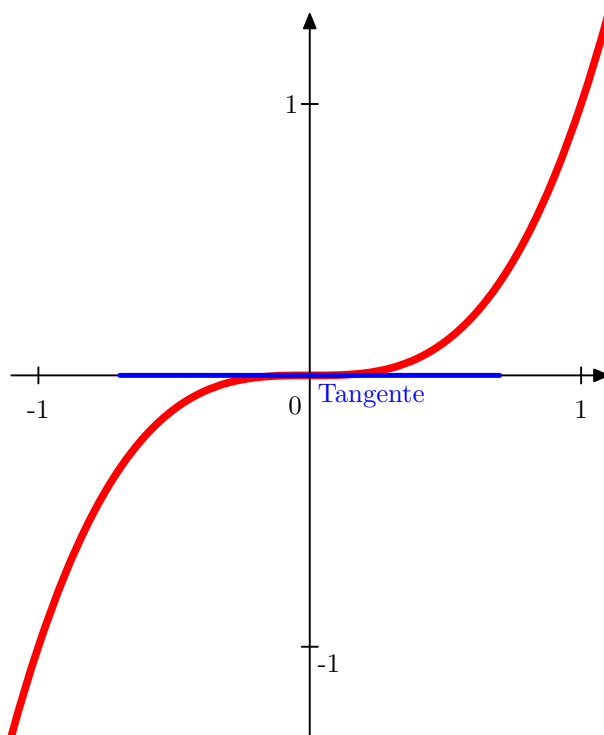
4. Point d'inflexion**Définition 32.3.**

Un **point d'inflexion** de la courbe $\mathcal{C}$ est un point où la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente en ...

ce point. Lorsque sa courbe franchit un point d'inflexion, la convexité change de sens.

Exemple 32.8

Soit $f : x \mapsto x^3$. Alors la tangente au point d'abscisse 0 coupe la courbe donc 0 est un point d'inflexion.



Théorème 32.11.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . Si la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en x_0 , alors le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 est un point d'inflexion.



Attention

Le point d'inflexion peut exister sans que la fonction soit de classe $\mathcal{C}^2$: c'est donc une condition suffisante, mais pas nécessaire.



Méthode

Pour déterminer l'existence potentielle d'un point d'inflexion, si la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$:

- on détermine la dérivée seconde de la fonction,
- on dresse le tableau de signe de la dérivée seconde
- on conclut, en cherchant les réels pour lesquels la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

Exemple 32.9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2$. Déterminer les éventuels points d'inflexion de f .

Solution

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme, et on a

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x - 1)(x + 1)$$

En dressant le tableau de signe de f'' , on constate que la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en -1 et en 1 . Ainsi, la courbe de f admet deux points d'inflexion.

Exercices

32

Exercices

Convexité, points d'inflexion

●○○ Exercice 1 Convexité, points d'inflexion (20 min.)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les intervalles où elle est convexe, concave et les éventuels points d'inflexion.

1. $x \mapsto e^{-x^2/2}$

2. $x \mapsto \arctan(x)$

3. $x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$

4. $x \mapsto |x - 1| + |3 - 2x|$

5. $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

6. $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

7. $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

8. $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$

●○○ Exercice 2 Polynôme de degré 3 (5 min.)

Soit P une fonction polynomiale de degré 3. Montrer que P admet un unique point d'inflexion, dont on déterminera l'abscisse.

Inégalités de convexité

●○○ Exercice 3 Inégalité de convexité - I (5 min.)

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, $x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$.

●○○ Exercice 4 Inégalité de convexité - II (10 min.)

Montrer que, pour tous x et y de $]1, +\infty[$,

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

●○○ Exercice 5 Inégalité de convexité - III (15 min.)

Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que, pour tous réels x, y, a et b strictement positifs

$$x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right).$$

●●○ Exercice 6 Inégalité de convexité - IV (15 min.)

Montrer que, pour tous réels a, b et c strictement positifs, on a

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

On pourra commencer par supposer que $a+b+c=1$.

●○○ Exercice 7 Comparaison des moyennes (15 min.)

Soient $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On appelle :

- moyenne arithmétique le nombre

$$A = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n},$$

- moyenne géométrique le nombre

$$G = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n},$$

- moyenne harmonique le nombre

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}},$$

- moyenne quadratique le nombre

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

En utilisant la concavité du logarithme, montrer que

$$H \leq G \leq A \leq Q.$$

Pour aller plus loin

●○○ Exercice 8 Convexe et croissante (10 min.)

Soient f et g deux fonctions convexes, sur des intervalles respectifs I et J . On suppose que $f(I) \subset J$.

Montrer que, si g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe. Que se passe-t-il si g n'est pas croissante ?

●●○ Exercice 9 Minimum localement global (15 min.)

Soit f une fonction convexe sur I , et $x_0 \in I$.

1. On suppose que f admet un minimum local en x_0 . Montrer qu'il s'agit d'un minimum global.
2. On suppose que f est dérivable sur I et que x_0 est un point critique (c'est-à-dire x_0 n'est pas une extrémité de I et $f'(x_0) = 0$). Montrer que f admet un minimum global en x_0 .

●●○ Exercice 10 Inégalité de Jensen (20 min.)

Soit φ une fonction continue, convexe sur $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (avec $a \neq b$). En utilisant les sommes de Riemann, montrer que

$$\varphi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt.$$

●●● Exercice 11 Inégalités de Hölder et de Minkowski (30 min.)

Soit $(p, q) \in]1, +\infty[^2$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que, pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.
2. Soient $u_1, \dots, u_n$ et $v_1, \dots, v_n$ des réels vérifiant $\sum_{i=1}^n |u_i|^p = \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1$.

Montrer que $\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq 1$.

3. Soient $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des réels. Montrer l'inégalité, appelée **inégalité de Hölder** :

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

On pourra poser, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$u_k = x_k \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{-1/p} \quad \text{et} \quad v_k = y_k \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{-1/q}.$$

4. En déduire l'inégalité suivante, appelée **inégalité de Minkowski** :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

On pourra remarquer que $|x_k + y_k|^p \leq |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} + |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1}$.

●●● **Exercice 12 Régularité des fonctions convexes** (15 min.)

Montrer que toute fonction convexe sur un intervalle I ouvert est dérivable à droite et à gauche en tout point de I .

En déduire que f est continue sur I .

●●● **Exercice 13 Fonction convexe bornée** (20 min.)

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ telle que $f(a) < f(b)$.
Montrer que

$$\forall x \in]b, +\infty[, \quad f(x) \geq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En déduire que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

2. Montrer qu'une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est une fonction constante.
On pourra raisonner par l'absurde en utilisant la question précédente.
3. Montrer qu'une fonction convexe et bornée sur $\mathbb{R}^+$ est décroissante.
4. Donner un exemple d'une fonction convexe bornée sur $\mathbb{R}^+$ mais qui n'est pas constante.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. $f : x \mapsto e^{-x^2/2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x ,

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2}$$

$$\text{et } f''(x) = e^{x^2/2}(-1 + x^2) = (x-1)(x+1)e^{x^2/2}.$$

On obtient le tableau de signe de f'' suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Bilan : f est convexe sur $]-\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, et concave sur $[-1, 1]$.

2. $f : x \mapsto \arctan(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{et } f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

f' est positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$.

Bilan : f est convexe sur $\mathbb{R}^-$ et concave sur $\mathbb{R}^+$.

3. $f : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x ,

$$f'(x) = \cos(x) + \sin(x)$$

$$\text{et } f''(x) = -\sin(x) + \cos(x).$$

f'' est 2π -périodique. On va étudier son signe sur $[-\pi, \pi]$. Remarquons que

$$\begin{aligned} f''(x) &= \cos(x) - \sin(x) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) \right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Sur $[-\pi, \pi]$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ si et seulement si $x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, soit $x \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Bilan : f est convexe sur tout intervalle de la forme $[-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, et est concave sur les intervalles $[-\pi + 2k\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi]$ et sur $[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. Attention : ici, $f : x \mapsto |x-1| + |3-2x|$ n'est pas dérivable sur tout $\mathbb{R}$. Remarquons que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 1-x+3-2x & \text{si } x < 1 \\ x-1+3-2x & \text{si } x \geq 1 \text{ et } x < \frac{3}{2} \\ x-1+2x-3 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4-3x & \text{si } x < 1 \\ 2-x & \text{si } x \geq 1 \text{ et } x < \frac{3}{2} \\ 3x-4 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Cela nous permettrait de montrer que sur chaque intervalle, elle est convexe (ou concave) puisqu'affine. Mais sur $\mathbb{R}$ tout entier, il faut revenir à la définition.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [0, 1]$. Alors, en constatant que $t + (1 - t) = 1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} f(tx + (1 - t)y) &= |tx + (1 - t)y - 1| + |3 - 2(tx + (1 - t)y)| \\ &= |tx + (1 - t)y - (t + (1 - t))| + |3(t + (1 - t)) - 2tx - 2(1 - t)y| \\ &= |t(x - 1) + (1 - t)(y - 1)| + |t(3 - 2x) + (1 - t)(3 - 2y)| \\ &\leq t|x - 1| + (1 - t)|y - 1| + t|3 - 2x| + (1 - t)|3 - 2y| \\ &\leq t(|x - 1| + |3 - 2x|) + (1 - t)(|y - 1| + |3 - 2y|) = tf(x) + (1 - t)f(y) \end{aligned}$$

Ainsi, f est convexe sur $\mathbb{R}$.

5. La fonction $\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} \text{ch}'(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \text{et } \text{ch}''(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, ch est convexe sur $\mathbb{R}$.

6. De même, la fonction $\text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} \text{sh}'(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \text{et } \text{sh}''(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} \geq 0 &\iff e^x \geq e^{-x} \\ &\iff x \geq -x \text{ par croissance de la fonction exp} \\ &\iff x \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, sh est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et concave sur $\mathbb{R}^-$.

7. La fonction $\text{th} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annulant jamais). Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} \text{th}'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \\ \text{et } \text{th}''(x) &= -4 \frac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = -8 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2}. \end{aligned}$$

Par le même raisonnement que précédemment, th est convexe sur $\mathbb{R}^-$ et concave sur $\mathbb{R}^+$.

8. Enfin, $f : x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Pour tout réel $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x \ln^2(x)} \\ \text{et } f''(x) &= \frac{\ln^2(x) + 2x \frac{1}{x} \ln(x)}{(x \ln^2(x))^2} = \frac{\ln(x)(\ln(x) + 2)}{(x \ln^2(x))^2}. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\ln(x) + 2 \geq 0 \iff x \geq e^{-2}.$$

On obtient finalement le tableau suivant :

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$	
$\ln(x)$		−	−	0	+
$\ln(x) + 2$		−	0	+	+
$f''(x)$		+	0	−	+

Bilan : f est convexe sur $]0, e^{-2}]$ et sur $]1, +\infty[$, et est concave sur $[e^{-2}, 1[$.

Exercice 2

On écrit $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $a \neq 0$. P est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P''(x) = 6ax + 2b.$$

Remarquons alors que, si $a > 0$

$$6ax + 2b > 0 \iff x > -\frac{b}{3a}$$

et si $a < 0$ alors

$$6ax + b > 0 \iff x < -\frac{b}{3a}.$$

Dans tous les cas, P est convexe puis concave ou concave puis convexe : elle admet un unique point d'inflexion, au point d'abscisse $-\frac{b}{3a}$.

Exercice 3

Traisons les cas $n = 0$ et $n = 1$ à part. Pour $n = 0$ l'inégalité devient $0 \geq 0$ qui est bien sûr vraie. Pour $n = 1$, l'inégalité s'écrit $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ qui est vraie car $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

Supposons donc $n \geq 2$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f : x \mapsto x^{n+1}$. On remarque que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ (en réalité, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ puisque polynomiale), et que $f'' : x \mapsto (n+1)nx^{n-1}$. f'' est positive sur $\mathbb{R}^+$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

En particulier, la courbe de f est au-dessus de sa tangente en 1 sur $\mathbb{R}^+$. Or, sa tangente en 1 a pour équation $T_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = (n+1)x - n$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x^{n+1} \geq (n+1)x - n \iff x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0.$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$ par composée, et on a

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{-\ln(x) - 1}{(x \ln(x))^2}.$$

Sur $]1, +\infty[$, $f'' < 0$ et la fonction f y est donc concave.

Ainsi, pour tout $(x, y) \in]1, +\infty[^2$, on a

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

c'est-à-dire

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geq \frac{\ln(\ln(x)) + \ln(\ln(y))}{2} = \ln\left(\sqrt{\ln(x) \ln(y)}\right).$$

On applique alors la fonction exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$ et on en déduit

$$\boxed{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}}.$$

Exercice 5

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto x \ln(x)$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \ln(x) + 1 \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, f'' est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Fixons alors (a, b, x, y) quatre réels positifs. On pose $u = \frac{x}{a}$, $v = \frac{y}{b}$ et $t = \frac{a}{a+b} \in [0, 1]$. Alors, par convexité :

$$\begin{aligned} f(tu + (1-t)v) &\leq tf(u) + (1-t)f(v) \iff \frac{x+y}{a+b} \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leq \frac{a}{a+b} \frac{x}{a} \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a}{a+b} \frac{y}{b} \ln\left(\frac{y}{b}\right) \\ &\iff (x+y) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leq x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \quad \text{car } a+b > 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{(x+y) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \geq x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right)}.$$

Exercice 6

Supposons, pour commencer, que $a+b+c=1$ avec $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. Ainsi, $0 < a < 1, 0 < b < 1$ et $0 < c < 1$. L'inégalité à démontrer devient alors

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3}{2}.$$

où encore

$$\frac{1}{3} \frac{a}{1-a} + \frac{1}{3} \frac{b}{1-b} + \frac{1}{3} \frac{c}{1-c} \geq \frac{1}{2}.$$

Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Remarquons que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle, et on a, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} > 0.$$

La fonction f est donc convexe. Ainsi, par convexité, puisque $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$:

$$f\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c\right) \leq \frac{1}{3}f(a) + \frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{3}f(c).$$

Or, $\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c = \frac{1}{3}(a+b+c) = \frac{1}{3}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$. Finalement

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{3} \frac{a}{1-a} + \frac{1}{3} \frac{b}{1-b} + \frac{1}{3} \frac{c}{1-c}$$

ce qui démontre le résultat dans le cas où $a+b+c=1$.

Si $a+b+c \neq 1$, on applique le résultat précédent à $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$ et $\frac{c}{a+b+c}$. Ces trois réels sont strictement positifs et de somme 1. D'après le cas précédent :

$$\frac{\frac{a}{a+b+c}}{\frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c}} + \frac{\frac{b}{a+b+c}}{\frac{a}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c}} + \frac{\frac{c}{a+b+c}}{\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c}} \geq \frac{3}{2}$$

ce qui donne le résultat après simplification.

Exercice 7

Tous les nombres sont strictement positifs, donc les moyennes considérés ont un sens et on peut appliquer le logarithme.

Par concavité du logarithme, on a

$$\ln \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) \geq \frac{\ln(x_1) + \dots + \ln(x_n)}{n}.$$

soit

$$\ln \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) \geq \ln \left(\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \right)$$

ou encore, en appliquant la fonction exponentielle, croissante : $A \geq G$.

Appliquons l'inégalité de concavité aux réels $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \right) &\geq \frac{\ln \left(\frac{1}{x_1} \right) + \dots + \ln \left(\frac{1}{x_n} \right)}{n} \\ &\geq \ln \left(\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \dots x_n}} \right) \end{aligned}$$

En multipliant par -1 , puis en appliquant la fonction exponentielle :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \text{ soit } H \leq G.$$

Enfin, les nombres étant positifs, au lieu de comparer Q et A , on va comparer Q^2 et A^2 . Or

$$A^2 = \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n^2} \leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} = Q^2$$

par convexité de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$.

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 8

On suppose que f et g est convexe, et g croissante. Soient $(a, b) \in I^2$ et $t \in [0, 1]$. Par convexité de f :

$$f((1-t)a + t(b)) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Par croissance de g sur J :

$$g(f((1-t)a + t(b))) \leq g((1-t)f(a) + tf(b)).$$

Mais par convexité de g sur J :

$$g((1-t)f(a) + tf(b)) \leq (1-t)g(f(a)) + tg(f(b)).$$

Finalement :

$$g(f((1-t)a + t(b))) \leq (1-t)g(f(a)) + tg(f(b))$$

ce qui démontre la convexité de $g \circ f$.

Si g n'est pas croissante, le résultat n'est plus valable. Par exemple, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont convexes sur $\mathbb{R}$, mais pourtant $x \mapsto e^{-x^2}$ ne l'est pas sur $\mathbb{R}$. La différence ici est que $x \mapsto e^{-x}$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

1. On suppose que f admet un minimum local en x_0 . Ainsi, il existe un intervalle J tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Soit alors $x \in I$ quelconque, différent de x_0 .

• Premier cas : $x > x_0$. Il existe un réel $y \in J$ tel que $x_0 < y < x$. L'inégalité des trois pentes (ou la croissance du taux d'accroissement) nous donne :

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Or $f(y) - f(x_0) \geq 0$ (minimum local sur J), et $y - x_0 \geq 0$ par hypothèse. Donc par quotient

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \geq 0$$

et donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Puisque $x - x_0 > 0$, on en déduit que $f(x) - f(x_0) \geq 0$, soit $f(x) \geq f(x_0)$.

• Premier cas : $x < x_0$. Il existe un réel $y \in J$ tel que $x < y < x_0$. L'inégalité des trois pentes (ou la croissance du taux d'accroissement) nous donne :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$$

Or $f(y) - f(x_0) \geq 0$ (minimum local sur J), et $y - x_0 \leq 0$ par hypothèse. Donc par quotient

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \leq 0$$

et donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Puisque $x - x_0 < 0$, on en déduit que $f(x) - f(x_0) \geq 0$, soit $f(x) \geq f(x_0)$.

On a donc démontré que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(x_0)$: f admet bien un maximum global en x_0 sur I .

2. f est dérivable : on peut utiliser la définition avec les tangentes. f est convexe, donc la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes, et donc entre autre de sa tangente en x_0 :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f(x_0) \text{ car } f'(x_0) = 0.$$

Ainsi, f admet un minimum global en x_0 .

Exercice 10

f étant continue, on sait que ses sommes de Riemann sur $[a, b]$ convergent vers l'intégrale de f sur $[a, b]$. Ainsi

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

soit, en divisant par $b-a$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

où encore, en rentrant le facteur $\frac{1}{n}$ par linéarité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Utilisons alors la convexité de φ sur $\mathbb{R}$. Puisque $\sum_{k=0}^n \frac{1}{n} = 1$, alors

$$\varphi \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \left(f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right).$$

Par continuité de φ sur $\mathbb{R}$:

$$\varphi \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right).$$

Par continuité de $\varphi \circ f$ (composée de deux fonctions continues), les sommes de Riemann convergent et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi \left(f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt.$$

Et finalement, par passage à la limite dans l'inégalité

$$\boxed{\varphi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt.}$$

Exercice 11

1. Si u ou v sont nuls, le résultat est vrai. Supposons u et v strictement positifs. Par concavité du logarithme, puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\ln \left(\frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q \right) \geq \frac{1}{p} \ln(u^p) + \frac{1}{q} \ln(v^q)$$

soit,

$$\ln \left(\frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q \right) \geq \ln(uv).$$

En appliquant la fonction exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit

$$\boxed{\frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q \geq uv.}$$

2. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Appliquons le résultat précédent à $|u_i| \in \mathbb{R}^+$ et $|v_i| \in \mathbb{R}^+$.

$$|u_i| |v_i| \leq \frac{|u_i|^p}{p} + \frac{|v_i|^q}{q}$$

En sommant ces inégalités :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |u_i v_i| &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|u_i|^p}{p} + \frac{|v_i|^q}{q} \\ &\leq \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{i=1}^n |u_i|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{i=1}^n |v_i|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq 1.}$

3. Suivons l'indication. Notons $\lambda = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{-1/p}$ qui est un réel indépendant de k . Alors :

$$\sum_{k=1}^n |u_k|^q = \sum_{k=1}^n (|x_k| \lambda)^p = \lambda^p \sum_{k=1}^n |x_k|^q = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{-1} \sum_{k=1}^n |x_k|^q = 1.$$

De même, $\sum_{k=1}^n |v_k|^q = 1$. On peut appliquer le résultat de la question précédente aux réels (u_k) et (v_k) .

En notant $\lambda = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{-1/p}$ et $\mu = \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{-1/q}$:

$$\sum_{k=1}^n |u_k v_k| = \sum_{k=1}^n |x_k \lambda y_k \mu| = \lambda \mu \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq 1$$

et puisque $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \frac{1}{\lambda \mu} = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q}}.$$

4. La remarque est vraie :

$$(x_k + y_k)^p = (x_k + y_k)(x_k + y_k)^{p-1} = x_k(x_k + y_k)^{p-1} + y_k(x_k + y_k)^{p-1}$$

et on conclut par inégalité triangulaire.

Passons à l'inégalité à démontrer. On prend $p \in]1, +\infty[$ et on pose q tel que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ (c'est-à-dire $q = \frac{p}{p-1}$). D'après l'inégalité de Hölder, appliquée aux (x_k) et au $|x_k + y_k|^{p-1}$:

$$\sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (|x_k + y_k|^{p-1})^q\right)^{1/q}$$

soit, puisque $(p-1)q = p$

$$\sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^q\right)^{1/q}$$

Par le même raisonnement

$$\sum_{k=1}^n |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^q\right)^{1/q}$$

et en utilisant la remarque

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^q\right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^q\right)^{1/q} \left(\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p} \right) \end{aligned}$$

En divisant par $\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^q\right)^{1/q} \neq 0$

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1-1/q} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p}$$

c'est-à-dire, puisque $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p}}$$

Exercice 12

Pour démontrer ce résultat, nous allons repartir de l'inégalité des trois pentes.

Soit $x_0 \in I$. D'après la croissance des pentes, la fonction $T_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

Montrons que T_{x_0} est majorée sur $I \cap]-\infty, x_0[$. Soit alors $(x, a) \in I^2$ avec $x < x_0 < a$. L'inégalité des trois pentes donne

$$T_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}$$

ainsi, pour tout $x \in I$ avec $x \leq x_0$, $T_{x_0}(x) \leq M$ avec $M = \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$ qui ne dépend pas de x . Ainsi, T_{x_0} est majorée sur $I \cap]-\infty, x_0[$. Puisque T_{x_0} y est croissante, le théorème de la limite monotone assure que T_{x_0} admet une limite en x_0^- et donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe}$$

Ainsi, f est dérivable à gauche.

De la même manière, soit $(x, a) \in I^2$ avec $a < x_0 < x$. L'inégalité des trois pentes donne

$$\frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = T_{x_0}(x)$$

ainsi, pour tout $x \in I$ avec $x \geq x_0$, $T_{x_0}(x) \geq M$ avec $M = \frac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0}$ qui ne dépend pas de x . Ainsi, T_{x_0} est minorée sur $I \cap]x_0, +\infty[$. Puisque T_{x_0} y est croissante, le théorème de la limite monotone assure que T_{x_0} admet une limite en x_0^+ et donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe}$$

Ainsi, f est dérivable à droite.

On peut alors en déduire que f est continue en x_0 . En effet :

- Pour tout $x < x_0$,

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \times |x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} 0 \text{ puisque } T_{x_0} \text{ est dérivable à gauche}$$

Donc f est continue à gauche en x_0 .

- De même, pour tout $x > x_0$,

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \times |x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} 0 \text{ puisque } T_{x_0} \text{ est dérivable à droite}$$

Donc f est continue à droite en x_0 .

Finalement, f étant continue à droite et à gauche en x_0 , elle y est continue.

Exercice 13

1. On suppose que $f(a) < f(b)$. Soit $x \in]b, +\infty[$. Puisque $a < b < x$, d'après l'inégalité des trois pentes :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Puisque $x > b > a$, $x - a > 0$ et en multipliant par $x - a$ la relation précédente :

$$f(x) - f(a) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \iff f(x) \geq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Puisque $f(b) > f(a)$, $f(b) - f(a) > 0$ et de même pour $b - a$. Ainsi, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$, par produit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = +\infty$$

et par somme, et théorème de comparaison, on en déduit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

2. Supposons par l'absurde que f , convexe et majorée sur $\mathbb{R}$, n'est pas constante. Il existe alors deux réels a et b , tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$.

- Si $f(a) < f(b)$, le résultat de la question précédente nous garantit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc la fonction n'est pas majorée : c'est absurde.
- Si $f(a) > f(b)$, reprenons la démonstration précédente : soit $x < a$. Ainsi, $x < a < b$ et l'inégalité des trois pentes donne

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

soit, puisque $x - a < 0$

$$f(x) - f(a) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \iff f(x) \geq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Mais alors, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$ (puisque $f(a) > f(b)$) et en faisant cette fois-ci tendre x vers $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = +\infty.$$

Mais alors, par théorème de comparaison, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$, ce qui est absurde puisque f est majorée.

Dans tous les cas, l'hypothèse $f(a) \neq f(b)$ est absurde.

Bilan : si f est convexe et majorée, alors f est constante.

3. Soit f une fonction convexe et bornée sur $\mathbb{R}^+$. Supposons que f n'est pas décroissante : il existe deux réels $a < b$ tels que $f(a) < f(b)$. Remarquons que le résultat de la question 1 peut s'appliquer si f n'est convexe que sur $\mathbb{R}^+$ (le plus important étant de pouvoir tendre vers $+\infty$). Mais alors, $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui contredit le caractère bornée de f .

Bilan : f est nécessairement décroissante.

4. D'après la question 3, la fonction doit être décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et d'après la 2, elle ne doit pas être majorée sur $\mathbb{R}$ tout entier. Prenons alors la fonction $x \mapsto e^{-x}$. Celle-ci est convexe, et est bornée sur $\mathbb{R}^+$ (puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 < e^{-x} \leq 1$).