Chapitre 31

Intégrales généralisées

Résumé

Dans ce chapitre, on généralise la notion d'intégrale, vue sur un segment, au cas d'un intervalle quelconque. On verra des méthodes pour s'assurer que ces intégrales existent, et pour les calculer.

Plan du cours

> *« Il ne faut pas uniquement intégrer. Il faut aussi désintégrer. C'est ça la vie. C'est ça la philosophie. C'est ça la science. C'est ça le progrès, la civilisation. »*

Eugène Ionesco (1909–1994). *La leçon*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition d'intégrale sur un intervalle :

- connaître la définition .... ☐
- connaître les différentes propriétés usuelles .... ☐

② Concernant les théorèmes d'existence :

- connaître le théorème de majoration des fonctions positives .... ☐
- savoir utiliser les équivalents de fonctions de signe constant .... ☐
- connaître les intégrales de référence (Riemann, exponentielle) .... ☐
- savoir appliquer un changement de variable à une intégrale généralisée .... ☐

③ Connaître la notion de convergence absolue :

- connaître la définition .... ☐
- l'inégalité triangulaire, et le cas d'une fonction continue dont l'intégrale converge absolument vers 0 .... ☐

I. Intégrale sur un intervalle quelconque

L'idée est d'étendre la notion d'intégrale, mais sur un intervalle infini, du type $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ voire $]-\infty, +\infty[$, ou sur un intervalle du type $]a, b]$ où la fonction n'est pas définie en a.

1. Cas de $[a, b[$ et $]a, b]$

Définition 31.1. Intégrale convergente sur $[a, b[$

Soit f une fonction continue, définie sur $[a, b[$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **convergente** si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.
Dans ce cas, on note

$$\int_{[a,\,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Les intégrales $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [a, b[$ sont appelées **intégrales partielles**.

Remarque

On définit de même le cas où f est définie sur $]a, b]$ (et dans ce cas, on s'intéresse à la limite en a^+).

Remarque

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale **impropre** (puisque, rigoureusement, si f est continue, l'intégrale n'est définie que sur un segment). On parle également d'**intégrale généralisée**.
Déterminer la nature de l'intégrale, c'est savoir si elle est convergente ou divergente.

Exemple 31.1

Soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ sur $[0; +\infty[$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

Solution

La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Soit $x > 0$. Alors

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = 1$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, et

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

Exercice 31.2

Déterminer la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Solution

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, 1]$. Pour tout $x \in]0, 1]$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(|t|)]_x^1 = -\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

De même, $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 1.$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 31.3

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$.

Solution

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0, 1[$. L'intégrale est donc impropre en 1. Pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x = 2 - 2\sqrt{1-x} \xrightarrow[x\to 1]{} 2.$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t = 2.$$

Si la fonction f est prolongeable par continuité en b, alors l'intégrale est convergente :

Proposition 31.1. Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. Si f admet une limite finie en b^-, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, et est égale à l'intégrale de $\tilde{f}$, prolongement par continuité de f sur $[a, b]$.

On dit alors que l'intégrale est **faussement impropre**.

Exemple 31.4

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

Solution

La fonction $f : t \longmapsto \frac{e^t - 1}{t}$ est continue sur $]0, 1]$. En 0, on constate que

$$\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1 \text{ (taux d'accroissement).}$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 : l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ est convergente.

Attention

Contrairement à ce qu'il se passe dans le cadre des séries, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ peut être convergente sans que la fonction f tende vers 0 en $+\infty$.

Réciproquement, si $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, cela ne garantit pas que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

2. Définition dans le cas $]a, b[$

Dans le cas où les deux bornes sont impropres, on va s'intéresser à deux limites :

Définition 31.2.

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement s'il existe $c_0 \in]a, b[$ tel que les intégrales $\displaystyle\int_a^{c_0} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{c_0}^b f(t)dt$ sont convergentes. On note alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{c_0} f(t)dt + \int_{c_0}^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^{c_0} f(t)dt + \lim_{x \to b^-} \int_{c_0}^x f(t)dt.$$

Dans ce cas, pour tout $c \in]a, b[$, les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Démonstration

S'il existe $c_0 \in]a, b[$ tel que les intégrales soient convergentes, alors pour tout $(c, x) \in]a, b[^2$, par la relation de Chasles :

$$\int_x^c f(t)dt = \int_x^{c_0} f(t)dt + \int_{c_0}^c f(t)dt \xrightarrow[x \to a^+]{} \int_a^{c_0} f(t)dt + \int_{c_0}^c f(t)dt$$
$$\int_c^x f(t)dt = \int_c^{c_0} f(t)dt + \int_{c_0}^x f(t)dt \xrightarrow[x \to b^-]{} \int_c^{c_0} f(t)dt + \int_{c_0}^b f(t)dt$$

Les deux intégrales sont bien convergentes.

Exemple 31.5

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Solution

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$. Or, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_x^0 = -\arctan(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \pi.$$

Exercice 31.6

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Solution

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.

On a vu dans l'exercice 2 que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Soit $x \in \,]0,\, 1]$.

$$\int_x^1 \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 = \frac{1}{x} - 1 \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ diverge, et par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ diverge également.

⚠ **Attention**

Pour déterminer la convergence d'une intégrale du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, on doit bien calculer deux limites. On ne peut pas calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

pour conclure : ce n'est pas suffisant.

Par exemple, par imparité, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} t^3\mathrm{d}t = 0$, donc converge vers 0, et pourtant $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^3\mathrm{d}t$ diverge.

3. Extensions

On garde la même convention dans le cas où les bornes ne sont pas dans le bon sens :

Définition 31.3.

Soit a, b deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a > b$.

Soit f une fonction continue sur $[b,\ a[$ (ou bien $]b,\ a]$, ou bien $]a,\ b[$). On dit que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$ converge. Dans ce cas

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$$

Enfin, il arrive qu'on s'intéresse à l'intégrale d'une fonction définie sur un intervalle sauf un nombre fini de points. Dans ce cas, on découpera en des intervalles où on peut se ramener aux cas précédents :

Définition 31.4.

Soient $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ des éléments tels que $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soit f une fonction définie et continue sur $]a_i,\ a_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0,\ n-1]\!]$.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les intégrales généralisées $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t$ convergent pour tout $i \in [\![0,\ n-1]\!]$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 31.7

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t$.

Solution

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t-1}$ est définie et continue sur $[0,\ +\infty[\setminus \{1\}$. Il nous faut donc déterminer la nature des deux intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t$. Or, pour tout $u \in [0,\ 1[$:

$$\int_0^u \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t = [\ln|t-1|]_0^u = \ln(1-u) \underset{u \to 1^-}{\longrightarrow} -\infty.$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t$ diverge, de même que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t$.

II. Propriétés

Nous allons utiliser les propriétés des intégrales sur un segment pour en déduire des propriétés sur les intégrales généralisées. Dans l'ensemble de cette partie, on énonce les propriétés pour les

intégrales sur $[a, b[$, mais elles sont également valables pour $]a, b]$ et $]a, b[$.
Dans l'ensemble de cette partie, on se fixe $a \in \mathbb{R}$, et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

1. Linéarité

Propriété 31.2. Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et
$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t$ converge également, et
$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Soit $x \in [a, b[$. Alors, par linéarité de l'intégrale sur un segment, et convergence :
$$\int_a^x \lambda f(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b^-]{} \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
Ainsi, $\int_a^b \lambda f(t)\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b \lambda f(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
De même,
$$\int_a^x (f(t)+g(t))\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b^-]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$
Ainsi, $\int_a^b (f(t)+g(t))\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b (f(t)+g(t))\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Conséquence 31.3.

L'ensemble des fonctions f, continues sur $[a, b[$, dont l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On dispose d'un résultat qui est une conséquence directe :

Proposition 31.4.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$. On considère les trois intégrales généralisées
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \quad \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b (f(t)+g(t))\mathrm{d}t.$$
Si deux de ces intégrales sont convergentes, alors la troisième l'est.

⚠ **Attention**

L'intégrale $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t$ peut exister, sans pour autant que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ n'existent.

Par exemple, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ ne convergent pas, et pourtant la somme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Relation de Chasles

Propriété 31.5. Relation de Chasles

Soit $c \in [a, b[$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Dans ce cas

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Soit $u \in]c, b[$. D'après la relation de Chasles :

$$\int_a^u f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^u f(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, $\int_a^u f(t)\mathrm{d}t$ a une limite quand u tend vers b si et seulement si $\int_c^u f(t)\mathrm{d}t$ en a une (puisque $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ est un réel). Dans ce cas,

$$\underbrace{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}_{=\lim\limits_{u\to b^-}\int_a^u f(t)\mathrm{d}t} = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \underbrace{\int_c^b f(t)\mathrm{d}t}_{=\lim\limits_{u\to b^-}\int_c^u f(t)\mathrm{d}t}.$$

3. Positivité et croissance de l'intégrale

Proposition 31.6. Positivité et croissance

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b[$. On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

- Positivité : si f est positive sur $[a, b[$ (avec $a \leqslant b$), alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- Croissance : si, pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) \leqslant g(t)$ (avec $a \leqslant b$) alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Puisque f est continue sur $[a, b[$, elle y admet des primitives. Soit F une primitive de f sur $[a, b[$. Puisque $F' = f \geqslant 0$, la fonction F est croissante. Ainsi, pour tout $x \in [a, b[$, $F(x) \geqslant F(a)$, c'est-à-dire $F(x) - F(a) \geqslant 0$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, par passage à la limite, on en déduit que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a) \geqslant 0.$$

Enfin, si $f \leqslant g$, la fonction $g - f$ est positive. D'après le cas précédent, et par linéarité et convergence :

$$\int_a^b (g(t) - f(t))\mathrm{d}t \geqslant 0 \iff \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

⚠ **Attention**

Comme dans le cas de l'intégrale sur un segment, il faut absolument que $a \leqslant b$. Si ce n'est pas le cas, les inégalités sont inversées.

Proposition 31.7. Fonction positive d'intégrale nulle

Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a, b[$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et est nulle, alors la fonction f est nulle sur $[a, b[$.

Démonstration

Puisque f est continue sur $[a, b[$, elle y admet des primitives. Soit F une primitive de f sur $[a, b[$. Puisque $F' = f \geqslant 0$, la fonction F est croissante. Ainsi, pour tout $x \in [a, b[$, $F(x) - F(a) \geqslant 0$.

Puisque l'intégrale est convergente, F admet une limite en b^- et

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a) = 0.$$

Cela implique que $\lim_{x\to b^-} F(x) = F(a)$. Or, F étant croissante, pour tout x et y dans $[a, b[$ tels que $x \leqslant y$:

$$F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(y) \xrightarrow[y\to b^-]{} F(a).$$

Ainsi, F est constante égale à $F(a)$ sur $[a, b[$, et ainsi, $f = F'$ est nulle sur $[a, b[$.

4. Parité

Lorsque la fonction est paire ou impaire, on peut se simplifier la recherche de convergence.

Proposition 31.8. Cas d'une fonction paire ou impaire

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est paire ou impaire. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Dans ce cas,

- si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$;

...

- si f est paire, alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t.$$

5. Fonction définie par une intégrale généralisée

Traitons, enfin, le cas d'une fonction définie par une intégrale.

Proposition 31.9.

Soient a et b deux éléments, tels que $-\infty \leqslant x < b \leqslant +\infty$. Soit f une fonction continue sur $]a,\, b[$, telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge. Alors

- la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]a,\, b[$, de dérivée f ;
- la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]a,\, b[$, de dérivée $-f$;

Démonstration

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, pour tout $x \in\,]a,\, b[$, on peut écrire
$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - \lim_{t\to a^+} F(t) \quad \text{et} \quad \int_x^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{t\to b^-} F(t) - F(x) \quad (\star)$$
où F est une primitive de f sur $]a,\, b[$. Les deux limites existent puisque l'intégrale est convergente. Par exemple, pour $y \in\ ]a,\, b[$:
$$F(x) - F(y) = \int_y^x f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[y\to a^+]{} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
et donc $F(y) \xrightarrow[y\to a^+]{} F(x) - \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
Il suffit alors de dériver les propriétés $(\star)$ pour conclure.

III. Intégrales de référence

1. Intégrales de Riemann

Théorème 31.10. Intégrale de Riemann

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,\, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Démonstration

Dans le cas où $\alpha \neq 1$, on a
$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}$$

- Si $\alpha > 1$: quand x tend vers $+\infty$, cette intégrale converge vers $\dfrac{1}{\alpha-1}$
- Si $\alpha < 1$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = +\infty$$
donc l'intégrale diverge.
- Si $\alpha = 1$, on a
$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$
L'intégrale diverge donc.

Remarque

On reste dans le cas de l'intégrale de Riemann si la borne n'est pas 1 mais un réel $c \in \mathbb{R}_+^*$.
Par exemple, $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente.
En revanche, ce n'est pas valable si $c = 0$, comme on va le voir.

Par parité :

Théorème 31.11. Intégrale de Riemann - $\mathbb{R}_-^*$

La fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{|t|^\alpha}$ est intégrable sur $]-\infty - 1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.

En 0, on dispose d'un résultat très différent :

Théorème 31.12. Intégrale de Riemann - 2

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,\, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$. Dans ce cas,
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$$

Démonstration

Pour $\alpha \neq 1$, on a, pour tout $u \in]0,\, 1[$,
$$\int_u^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_u^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{u^{\alpha-1}}$$
Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\lim_{u\to0} \frac{1}{u^{\alpha-1}} = +\infty$. L'intégrale diverge donc. Si $\alpha < 1$, $\displaystyle\lim_{u\to0} \frac{1}{u^{\alpha-1}} = 0$ donc l'intégrale converge et
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$$
Si $\alpha = 1$, pour $u \in]0,\, 1[$,
$$\int_u^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(1) - \ln(u) = -\ln(u) \xrightarrow[u\to0]{} +\infty$$
Donc l'intégrale diverge également.

Remarque

On reste dans le cas de l'intégrale de Riemann si la borne n'est pas 1 mais un réel $c \in \mathbb{R}_+^*$.

> Par exemple, $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente.

On dispose enfin d'intégrales de Riemann, qui sont une variante des précédentes :

Théorème 31.13. Intégrale de Riemann - 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.

- $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

2. Exponentielle et logarithme

Théorème 31.14.

La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$. Dans ce cas,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

Démonstration

Si $\alpha = 0$, $\mathrm{e}^{-\alpha t} = 1$ et la fonction constante égale à 1 n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$. Sinon,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^x = -\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$$

Cette intégrale converge si et seulement si $\alpha > 0$, et dans ce cas

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

Plus généralement :

Théorème 31.15.

Soit $u \in \mathbb{R}^+$. La fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[u, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$. Dans ce cas,

$$\int_u^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha u}}{\alpha}.$$

Enfin, on dispose d'un dernier résultat concernant la fonction ln.

Théorème 31.16.

La fonction $f : t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$, et on a

$$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$$

Démonstration

Soit $a \in]0, 1[$. Par intégration par parties, ou en utilisant une primitive de ln, on a

$$\int_a^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_a^1 = -1 - a\ln(a) + a$$

Or, on a $\lim\limits_{a\to 0} a\ln(a) = 0$ (croissance comparée). Par somme, $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$. Ainsi, l'intégrale converge, et

$$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$$

IV. Théorèmes d'existence des intégrales de fonctions positives

Dans le cas de fonctions positives, on dispose de différentes possibilités pour démontrer la convergence.

1. Intégrale partielle

Théorème 31.17. Majoration des intégrales partielles

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a, b[$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

Dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\in[a,\, b[} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

On dispose du même résultat sur $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$: l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $]a, b]$, et dans ce cas

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\in]a,\, b]} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 31.8

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \mathrm{d}t$ converge.

Solution
La fonction $t \longmapsto \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right|$ est continue et positive sur $]0,\, 1]$. De plus, pour tout $x \in]0,\, 1]$:
$$\int_x^1 \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_x^1 1 \,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 1 - x \leqslant 1.$$
Ainsi, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^1 \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \mathrm{d}t$ est majorée : l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque
Le résultat est valable si la fonction est négative sur les domaines considérés, quitte à s'intéresser à $-f$.

2. Majoration

Théorème 31.18.
Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur l'intervalle $[a,\, b[$. On suppose que
$$\forall\ x \in [a,\, b[, 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$
Alors :

- si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est également convergente, et on a
$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t;$$
- si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est divergente, $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ est également divergente.

Remarque
Attention : il faut absolument que f et g soient positives.

Remarque
Il suffit que l'inégalité $f(x) \leqslant g(x)$ soit vraie au voisinage de b pour que le résultat puisse tout de même s'appliquer.

Exemple 31.9
Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Solution
Tout d'abord, $t \mapsto \dfrac{1}{t+t^2}$ est continue sur $[1,\, +\infty[$. Remarquons que pour tout $t \geqslant 1$ on a $t + t^2 \geqslant t^2$, soit
$$0 \leqslant \frac{1}{t+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemman avec $\alpha = 2 > 1$). Par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

3. Equivalences et négligeabilité

Théorème 31.19.

Soient f et g deux fonctions continues, **positives** sur l'intervalle $[a, b[$. On suppose que

$$f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$$

Alors, $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, si et seulement si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est également convergente.

Remarque

Attention : il faut absolument que f et g soient positives, ou a minima, de signe constant (si f et g sont négatives, on peut raisonner sur $-f$ et $-g$).

Exercice 31.10

Traiter le cas de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'équivalents.

Solution

Par équivalences usuelles :

$$\frac{1}{t+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Les deux fonctions sont continues et positives sur $[1, +\infty[$, et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 31.20.

Soient f et g deux fonctions continues, **positives** sur l'intervalle $[a, b[$. On suppose que

$$f(x) = \mathrm{o}_b\left(g(x)\right).$$

- Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est également convergente.
- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente, alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est également divergente.

Remarque

Attention : il faut absolument que f et g soient positives.

Méthode

La plupart du temps, on essaiera de comparer à l'une des intégrales de références, et principalement les intégrales de Riemann convergentes.

Exemple 31.11

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Solution

$t \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[1, +\infty[$. On constate que

$$\frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1/t^2} = t^3\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $t\mathrm{e}^{-t} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Puisque les deux fonctions sont positives, et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann), par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge également.

4. Méthode d'étude

Méthode

Pour montrer qu'une intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge :

① On étudier tout d'abord la continuité de la fonction sur $]a, b[$.

② On vérifie en quel(s) point(s) a, b ou les deux, l'intégrale est impropre.

③ On utilise les théorèmes de majoration ou d'équivalence pour montrer que l'intégrale converge.

Exemple 31.12

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Solution

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Or, au voisinage de $+\infty$:

$$\mathrm{e}^{-t^2} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

En effet,

$$\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1/t^2} = t^2\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissance comparée}$$

Puisque $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive, et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Par continuité, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 31.21. Intégrale de Gauss

La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Démonstration

Théorème admis.

5. Changement de variable

L'intégration par partie et le changement de variable, sous condition de convergence de chacune des intégrales, sont encore valables.

Proposition 31.22.

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$. Soit φ une fonction **strictement croissante** de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$, avec

$$\lim_{t\to\alpha} \varphi(t) = a \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\beta} \varphi(t) = b$$

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. Si elles sont convergentes, on a alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Remarque

Le résultat est valable si φ est strictement décroissante, excepté que dans ce cas, les bornes α et β sont inversées.

Exemple 31.13

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} + t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Calculer I en effectuant le changement de variable $t = u^2$.

Solution

Remarquons déjà que $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}+t\sqrt{t}}$ est continue sur $]0; +\infty[$. De plus,

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}} \quad \text{et} \quad f(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Les trois fonctions sont positives, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Intégrale de Riemann, $\frac{3}{2} > 1$) et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (Intégrale de Riemann, $\frac{1}{2} < 1$). Ainsi, I est convergente.

Le changement de variable $t = u^2$ sur $[0;+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant sur $[0;+\infty[$. Par changement de variable, l'intégrale étant convergente :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u+u^2\times u}(2udu)\\ &= 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}du\end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^a \frac{1}{1+u^2} = [\arctan(u)]_0^a = \arctan(a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Bilan : $I = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi$.

V. Convergence absolue

1. Définition

Définition 31.5.

Soit f une fonction continue sur $[a,\, b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge absolument** sur $[a,\, b[$ si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque

Rigoureusement, on dit que f est **intégrable** sur $[a,\, b[$ si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 31.23.

Soit f une fonction continue sur $[a,\, b[$. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et on a

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Admis.

Attention

La réciproque n'est pas vraie. Une intégrale peut être convergente, sans être absolument convergente. On dit alors que l'intégrale est **semi-convergente**. On pourra regarder l'exercice 13.

2. Intégrale convergeant absolument vers 0

Proposition 31.24.

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$. f est nulle sur $]a, b[$ si et seulement si

$$\int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t = 0$$

Démonstration

Si f est nulle, alors son intégrale existe et est nulle. Réciproquement, si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = 0$, puisque $|f|$ est positive et continue sur $]a, b[$, on en déduit que $|f| = 0$ et donc $f = 0$.

VI. Un exemple complet

Dans cette dernière partie, nous allons nous intéresser à une fonction, définie par une intégrale généralisée, qui est très importante en probabilité.

1. Intégrale de Gauss et fonction Φ

On va tout d'abord présenter un préliminaire qui utilise un résultat précédent :

Proposition 31.25. Intégrale de Gauss

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Démonstration

On va partir du résultat annoncé plus haut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

On pose $t = \frac{u}{\sqrt{2}}$. Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ et est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2} \mathrm{d}u\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-u^2/2} \mathrm{d}u &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}\sqrt{\pi} = 1.\end{aligned}$$

Cette intégrale étant convergente, on peut définir alors la fonction Φ :

Définition 31.6. Fonction Φ

On note Φ la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$\Phi : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t.$$

Remarque

Un résultat vu précédemment garantit la bonne définition de la fonction Φ sur $\mathbb{R}$.

2. Propriétés importantes

On dispose d'une valeur particulière :

Proposition 31.26.

$\Phi\left(0\right) = \frac{1}{2}$.

Démonstration

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est paire. Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) = 2\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\mathrm{d}t$$

et donc

$$1 = 2\Phi(0) \implies \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

On en déduit une propriété nous ramenant à une intégrale sur un segment :

Proposition 31.27.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t.$$

Démonstration

En effet, par la relation de Chasles (les intégrales étant convergentes)

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{2}} + \int_{0}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

La fonction Φ est régulière :

Proposition 31.28.

La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout x, $\Phi'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1.$$

Démonstration

La fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}$, et l'intégrale étant convergente, le théorème vu précédemment garantit que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée φ.
Puisque φ est positive sur $\mathbb{R}$, Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Enfin, soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{y}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t = \Phi(y) - \int_{x}^{y} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Puisque l'intégrale est convergente,

$$-\int_{x}^{y} \varphi(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\Phi(y)$$

et finalement $\Phi(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.
La deuxième limite découle de la valeur de l'intégrale.

Les éléments précédents permettent de garantir que la fonction Φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$.

3. Simulation avec Python

On peut utiliser la proposition 31.27 pour appliquer la méthode des rectangles.
Dans le chapitre 14, nous avons vu une majoration de la différence entre l'intégrale d'une fonction sur un segment et les sommes de Riemann :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t - S_n(f) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{[a,\, b]} |f'|.$$

En étudiant φ, on peut montrer que $\max\limits_{[a,\, b]} |\varphi'| \leqslant \dfrac{1}{4}$ et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left| \int_{0}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t - S_n(\varphi) \right| \leqslant \frac{x^2}{8n}.$$

Si on veut une approximation à ε près, il suffit de rendre $\frac{x^2}{8n}$ plus petit que ε.
On obtient la fonction suivante :

Code Python

```python
import numpy as np

# Définition de la fonction phi
def phi(x): return 1/np.sqrt(2*np.pi)*np.exp((-x**2)/2)

def Phi(x,eps):
    ''' Fonction Phi prend 2 arguments
          - x, la valeur en laquelle on la calcule
          - eps, la précision demandée
       Elle renvoie une valeur approchée de Phi(x) '''
    inf=1/2 # On commence à 1/2
    n = int( np.floor(x**2/(8*eps))+1) # Pour avoir la bonne précision
    for i in range(n):
       inf = inf+x/n*phi(i*x/n)
    return inf

# Exemple : Phi(1) à une précision de 10^(-4)
print(Phi(1, 10**(-4)))
# Renvoie 0.8414074716156686
```

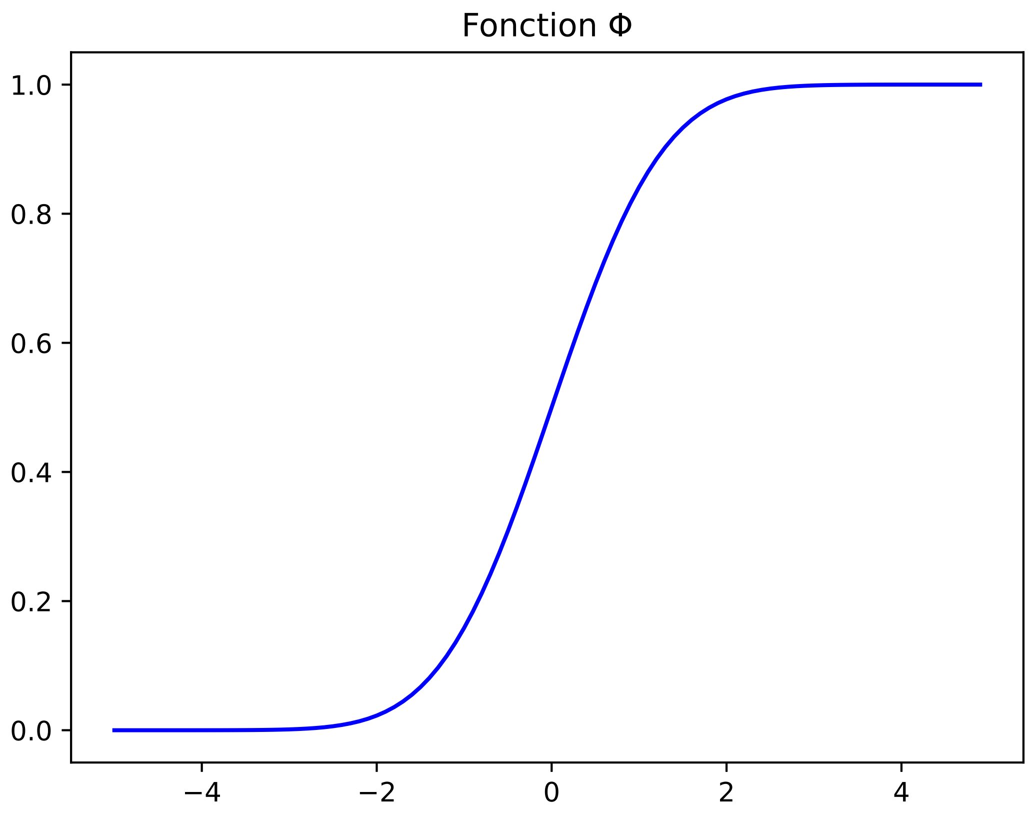
On peut alors représenter la courbe représentative avec `matplotlib.pyplot` :

Code Python

```
import matplotlib.pyplot as plt
t = np.arange(-5.0, 5.0, 0.1)      # On la représente sur [ -5, 5]

y = [ Phi(u, 10**(-4)) for u in t] # Avec précision de 10^{-4}

plt.plot(t, y, 'b')
plt.show()
```



Exercices

31

Exercices

Convergence d'intégrales généralisées

●●○ **Exercice 1** Converge or not converge ? (30 min.)

Déterminer la nature de chacune des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x-1)^{3/2}}\mathrm{d}x$,
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(x-2)}}$,
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+2x+3}{4x^5+x^3+2x+1}\mathrm{d}x$,
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$,
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$,
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{\tan(x)}}\mathrm{d}x$,
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}(\ln(x))^2}\mathrm{d}x$,
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$,
10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x}\cos(x)\mathrm{d}x$,
11. $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$.
12. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{\ln(x)}{x}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$,
13. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\arctan(x)}\mathrm{d}x$,
14. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\tan(\sqrt{x})}{\ln(\cos(\sqrt{x}))}\mathrm{d}x$,
15. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^{3/2}-\sqrt{x^3+1}\right)\sin(x)\mathrm{d}x$,

●●○ **Exercice 2** Convergences paramétrées (15 min.)

Étudier la nature des intégrales suivantes, en fonction des réels α et β.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\mathrm{e}^{\beta x}\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int_0^{1} x^\alpha(1-x)^\beta\mathrm{d}x$,
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^\alpha\mathrm{d}x$.

●●○ **Exercice 3** Intégrales de Bertrand (15 min.)

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha>1$ ou bien ($\alpha=1$ et $\beta>1$).
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{x^\alpha|\ln x|^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha<1$ ou bien ($\alpha=1$ et $\beta>1$).

Calcul d'intégrales généralisées

●○○ **Exercice 4** Des intégrales calculables (20 min.)

Déterminer si les intégrales suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, calculer leur valeur.

1. $\displaystyle A=\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle B=\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t$,
3. $\displaystyle C=\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$,
4. $\displaystyle D=\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}$.

●○○ Exercice 5 Une intégrale aidée (10 min.)

Démontrer la convergence et déterminer la valeur de

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$$

On pourra dériver la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$.

●●○ Exercice 6 D'autres intégrales, IPP et changement de variables (20 min.)

Justifier l'existence de ces intégrales, puis calculer leur valeur.

> **Remarque**
> On ne fait des intégrations par parties que sur des segments.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$,
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(2+x)}$.
   On pourra remarquer que $1 = (x+2) - (x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{x^2}\right) dx$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$.
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$. On posera $x = \ln(u)$.
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$. On posera $x = \frac{1}{t}$.
7. $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
   On remarquera que $1 = (1+x^2) - x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.

Des exercices plus complets

●●○ Exercice 7 La factorielle, autrement (20 min.)

Pour tout $a > 0$, et pour tout entier n, on note

$$I_n(a) = \int_0^a t^n e^{-t}\, dt$$

On note également

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$$

L'objectif du problème est de montrer que les intégrales I_n existent, et de calculer leur valeur.

1. Montrer que pour tout entier n, I_n converge.
2. Calculer $I_0(a)$, puis déterminer la valeur de I_0.
3. Trouver une relation de récurrence entre $I_{n+1}(a)$ et $I_n(a)$.
4. Ecrire la relation liant I_n et I_{n+1}. Déterminer alors la valeur de I_n en fonction de n.

●●○ Exercice 8 Des intégrale logatrigonométriques (30 min.)

Soient I, J et K les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan(x))dx$$

1. A l'aide d'un développement limité d'ordre 1, montrer que $\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$. En déduire que I est convergente.
2. Montrer que, au voisinage de 0, $\ln(\tan(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$ et que $\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) \sim -\ln(x)$. En déduire que K est convergente.
3. En posant le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$ dans I, montrer que J est convergente et $J = I$.
4. Montrer que
$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) \mathrm{d}x$$
5. En posant $v = 2x$, montrer que $I + J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x - \dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.
6. En écrivant $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$ (la dernière intégrale étant convergente puisque les deux autres le sont), et en posant $v = x - \frac{\pi}{2}$ dans la dernière intégrale, montrer que $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.
7. En déduire la valeur de K.

●○○ Exercice 9 Des intégrales par récurrence (20 min.)

Pour tout entier n et p, on note
$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln(x)^p \mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p}$ converge.
2. Soient n et p deux entiers. Déterminer une relation entre $I_{n,p+1}$ et $I_{n,p}$.
3. En déduire une expression de $I_{n,p}$.

Fonctions définies par une intégrale

●●○ Exercice 10 Une équivalence de fonctions (20 min.)

Soit f la fonction définie par
$$f : x \longmapsto \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ est bien définie.
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f'.
3. a) Montrer que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t} \mathrm{d}t$ admet une limite finie à droite en 0.
   b) Vérifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = -\ln(x) - f(x) + f(1)$.
   c) En déduire que $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$.

●○○ Exercice 11 Une série d'intégrale (15 min.)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{x^n - 1} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n converge.
2. À l'aide du changement de variable $y = x^n$ dans l'expression de I_n, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ converge.

●●● Exercice 12 Une équivalence d'intégrales (25 min.)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}.$$

1. Justifier que l'intégrale I_n converge.
2. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + b\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{c}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

   En déduire une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer I_0 et exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\left(\sqrt[3]{n} I_n\right)$. Étudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_{n+1} - u_n)$.
5. En déduire qu'il existe un réel $\ell > 0$ tel que $I_n \sim \dfrac{\ell}{\sqrt[3]{n}}$.

Pour aller plus loin

●●○ Exercice 13 Une intégrale semi-convergente (20 min.)

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0.
2. Soient $0 < a < b$ deux réels. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\sin^2(t/2)}{t}\right]_a^b + \int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

   Indication : on utilisera la formule $\cos(t) = \cos(2 \times t/2) = 2\sin^2(t/2) - 1$ *et on posera un changement de variable* $u = 2t$ *pour terminer.*
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
5. Montrer que

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}$$

   En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

●●● Exercice 14 Si l'intégrale converge, que dire de f ? (30 min.)

Comme nous l'avons vu dans le cours, si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, on ne peut pas nécessairement conclure que f tend vers 0 en $+\infty$. On va traiter des cas particuliers.

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$ convergent.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)\mathrm{d}t$ converge.

b) En déduire que f^2 admet une limite finie en $+\infty$ puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

En encadrant, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x)$ par deux intégrales, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Sujets de concours

●●● Sujet 1 D'après EMLYON 2013 (40 min.)

1. Montrer que, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$ converge.

2. a) Montrer que, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t$ et en déduire que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

   b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et que, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$,

$$\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leqslant \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

   c) En déduire que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

3. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \,]-x/2, +\infty[$.

   a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$ converge.

   b) Établir que, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}.$$

   c) En déduire que

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}.$$

4. En déduire que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$.

5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall\, x \in \,]0, +\infty[, \quad f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).$$

6. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x \in \,]0, +\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(k-1)!}{x^k} + f(x).$$

●●● Sujet 2 HEC 2008 B/L (120 min.)

Partie 1

1. a) Montrer que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si le réel x est strictement positif.

c) En déduire que la fonction Γ, définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$.

2. Établir, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. a) Calculer $\Gamma(1)$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Partie 2

1. Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si les réels x et y sont strictement positifs. On définit alors la fonction B par : pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $\quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$.
2. Montrer, pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs, l'inégalité suivante : $B(x, y) > 0$.
3. Établir, pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs, les deux égalités suivantes :

   a) $B(x, y) = B(y, x)$.

   b) $B(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y}B(x, y)$.
4. En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}$ et pour tout réel x strictement positif, on a :

$$B(n+1, x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Partie 3

On définit les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$u_n = -\ln n + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \text{ et } v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. Écrire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction h définie par :

$$h(x) = x(1+x)^{-1} - \ln(1+x)$$

2. En déduire un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note γ sa limite.

Partie 4

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0, n]$, on a : $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t \leqslant 1$.
2. a) Montrer, pour tout réel t de $[0, \sqrt{n}[$, que l'on a : $\ln\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right) \leqslant t + n\ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)$.

   b) En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0, \sqrt{n}]$, l'inégalité suivante : $1 - \dfrac{t^2}{n} \leqslant$

$\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t$.

3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel t de l'intervalle $[0,\,n]$, on obtient l'encadrement suivant : $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

Partie 5

1. À l'aide de la partie précédente, déterminer, pour tout entier naturel n non nul, un encadrement de $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$
2. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$.
3. a) À l'aide d'un changement de variable, montrer l'égalité suivante : $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t = n^x B(n+1,x)$.
   b) En déduire, pour tout réel x strictement positif, la formule suivante :
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$
4. On rappelle que γ désigne la limite de la suite (u_n) définie dans la partie 3 . Montrer alors, pour tout réel x strictement positif, la formule suivante :
$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right]$$
où l'on a posé : $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right] = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right]$.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

Pour chacune des intégrales, on détermine tout d'abord la régularité, et la (ou les) impropretés. On détermine alors la convergence.

1. $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et il y a donc deux impropreté, en 0 et en $+\infty$.
En 0,
$$\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x+1}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$
Ainsi, il y a une fausse impropreté en 0.
En $+\infty$
$$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x+1}}\right| \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty]$ (Riemann, avec $\frac{3}{2} > 1$). Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ converge.
Finalement, l'intégrale est convergente.

2. La fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{(x-1)^{3/2}}$ est continue sur $]1, +\infty[$. L'intégrale est impropre en 1 et en $+\infty$.
En 1, remarquons que
$$\frac{\ln(x)}{(x-1)^{3/2}} \underset{1}{\sim} \frac{x-1}{(x-1)^{3/2}} = \frac{1}{(x-1)^{1/2}}.$$
Les fonctions sur positives sur $]1, 2]$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{1/2}}$ converge (Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$).
Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{(x-1)^{3/2}}\mathrm{d}x$ converge.
En $+\infty$, remarquons que
$$x^{\frac{3/2+1}{2}} \frac{\ln(x)}{(x-1)^{3/2}} = \frac{x^{5/4}\ln(x)}{(x-1)^{3/2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^{1/4}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
Ainsi, $\dfrac{\ln(x)}{(x-1)^{3/2}} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^{5/4}}\right)$. Les fonctions étant positives, et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{5/4}}$ étant convergente, par comparaison, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x-1)^{3/2}}\mathrm{d}x$ converge.
Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x-1)^{3/2}}\mathrm{d}x$ converge.

3. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$ est continue sur $]2, +\infty[$. Deux impropretés, en 2 et en $+\infty$.
Par équivalence :
$$\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x-2)}} \underset{2}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3(x-2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{(x-2)^{1/2}}$$
$$\text{et } \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x-2)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$$

Au voisinage de 2, $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{(x-2)^{1/2}}$ est intégrable, mais au voisinage de $+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge. Ainsi, notre intégrale diverge.

4. Aucune difficulté, une seule impropreté en $+\infty$ et

$$\frac{x^2+2x+3}{4x^5+x^3+2x+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{4x^5} = \frac{1}{4x^3}.$$

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4x^3}$ converge (Riemann avec $3>2$), par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^2+2x+3}{4x^5+x^3+2x+1}\mathrm{d}x$ converge, et l'intégrale sur $[0, +\infty[$ converge également.

5. Deux impropretés, en 0 et en $+\infty$. Or :

$$\left|\mathrm{e}^{-x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$

$$x^2\left|\mathrm{e}^{-x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x^2\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Au voisinage de 0, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable (car continue). Par comparaison, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est intégrable.

Au voisinage de $+\infty$, le calcul précédent montre que $\left|\mathrm{e}^{-x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x$ converge, et finalement, notre intégrale converge.

6. Attention, ici il y a 4 impropretés : en $-\infty$, en $+\infty$ mais également en 0^- et 0^+. Or, en 0^+ :

$$\frac{\sin(x)}{x^2} \underset{0^+}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ diverge, notre intégrale diverge également.

7. La fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{\tan(x)}}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Deux impropreté, en 0 et en $+\infty$. En 0,

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{\tan(x)}} \underset{0^+}{\sim} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

et, classiquement,

$$x^{\frac{1/2+1}{2}}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = x^{1/4}\ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} 0.$$

Ainsi, $\displaystyle\frac{\ln(x)}{\sqrt{\tan(x)}} = \mathrm{o}_0\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right)$ et puisque $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/4}}$ converge (Riemann avec $\frac{3}{4}<1$), par comparaison de fonctions négatives, $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{\ln(x)}{\sqrt{\tan(x)}}\mathrm{d}x$ converge.

En $\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{\tan(x)}} \xrightarrow[x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-]{} 0.$$

Ainsi, la fonction est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$, et l'intégrale est faussement impropre.
Bilan : l'intégrale converge.

8. La fonction $x \longmapsto \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}(\ln(x))^2}$ est continue sur $]0, 1[$. Deux impropretés en 0 et en 1. En 0 :

$$\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}(\ln(x))^2} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{\sqrt{x}(\ln(x))^2} = \frac{x^{3/2}}{(\ln(x))^2} \xrightarrow[x\to0]{} 0.$$

Ainsi, la fonction est prolongeable par continuité en 0 et l'intégrale est faussement impropre.
En 1 :

$$(x-1)\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}(\ln(x))^2} = (x-1)\frac{\ln(1-x)+\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\ln(x))^2}$$
$$\underset{1}{\sim}(x-1)\frac{\ln(1-x)}{(x-1)^2} = \frac{\ln(1-x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x-1} = \mathrm{o}_1\left(\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}(x-1)^2}\right).$$

Puisque $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ diverge, par comparaisons de fonctions négatives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}(x-1)^2}\mathrm{d}x$ diverge.

9. La fonction $x\longmapsto x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Une seule impropreté, en $+\infty$. Or

$$x^2(x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}) = x^4\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^8\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Puisque $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge, et l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ converge.

10. La fonction $x\longmapsto \mathrm{e}^x\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^-$. Une impropreté, en $-\infty$. Or, pour tout $x\in\mathbb{R}^-$, $|\mathrm{e}^x\cos(x)|\leqslant \mathrm{e}^x$. Puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ converge, par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\cos(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, donc convergente.

11. Pour tout $t\geqslant\frac{2}{\pi}$, $0<\frac{1}{t}\leqslant\frac{\pi}{2}$. La fonction $x\longmapsto\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ est continue sur $]2/\pi+\infty[$. Deux impropretés, en $\frac{2}{\pi}$ et en $+\infty$. En $+\infty$,

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\underset{+\infty}{\sim}\cos\left(\frac{1}{t}\right)-1\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{2t^2}\text{ car }\frac{1}{t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Puisque $\displaystyle\int_{3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_{3}^{+\infty}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$ converge.
En $\frac{2}{\pi}$, posons $u=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{t}$. Ainsi, u tend vers 0 lorsque t tend vers $\frac{2}{\pi}$. Alors

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)=\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)=\ln(\sin(u)).$$

Remarquons alors que

$$\frac{\ln(\sin(u))}{\ln(u)}=\frac{\ln\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)}{\ln(u)}+1\xrightarrow[u\to 0]{}1.$$

Ainsi, $\ln(\sin(u))\underset{0}{\sim}\ln(u)$. Puisque $\displaystyle\int_0^1\ln(u)\mathrm{d}u$ converge, par comparaison de fonctions négatives, $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{1}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$ converge, et finalement notre intégrale converge.

12. L'intégrande est continue sur $[1,+\infty[$. Une seule impropreté, en $+\infty$. On constate que

$$\sqrt{\frac{\ln(x)}{x}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}.$$

Or, on remarque que $x\times\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$. Ainsi,

$$\frac{1}{x}=\mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ étant divergente, par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{\ln(x)}{x}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$ diverge.

13. Aucune difficulté : la fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$, et une seule impropreté en $+\infty$ à traiter. Remarquons alors que, pour $x \geqslant 1$:

$$\arctan(x) \geqslant \frac{\pi}{4} \implies \mathrm{e}^{-x\arctan(x)} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\arctan(x)}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}x}\mathrm{d}x$ étant convergente, par comparaison de fonctions positives, l'intégrale qui nous intéresse converge.

14. L'intégrande est continue sur $]0,\, 1]$ et l'intégrale possède une impropreté, en 0. Or, par équivalence classique,

$$\frac{\tan(\sqrt{x})}{\ln(\cos(\sqrt{x}))} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{-\frac{\sqrt{x}^2}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ étant convergente (Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$), par comparaison de fonctions positives, l'intégrale qui nous intéresse converge.

15. L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Deux impropretés théoriques, en 0 et en $+\infty$. En 0, la fonction $x \longmapsto x^{3/2}$ admet un prolongement par continuité en 0, donc l'intégrande également : l'intégrale est faussement impropre en 0. En $+\infty$:

$$\left|\left(x^{3/2} - \sqrt{x^3+1}\right)\sin(x)\right| \leqslant \left|x^{3/2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}\right)\right|$$

or

$$\left|x^{3/2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} x^{3/2}\frac{1}{2}\frac{1}{x^3} = \frac{1}{2x^{3/2}}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^{3/2}}\mathrm{d}x$ étant convergente (Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$), par comparaisons de fonctions positives, notre intégrale est absolument convergente, et donc convergente.

Exercice 2

1. Tout d'abord, la fonction $x \longmapsto x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha < 0$, sur $\mathbb{R}^+$ sinon. Il y donc une impropreté en $+\infty$, et une autre en 0 si $\alpha < 0$.

• Si $\beta > 0$, $x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ par produit ou croissance comparée. L'intégrale ne peut converger.

• Si $\beta = 0$, il s'agit d'une intégrale de Riemann. Or celle-ci converge au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $-\alpha > 1$ c'est-à-dire $\alpha < -1$; et elle converge en 0 si et seulement si $-\alpha < 1$, c'est-à-dire si $\alpha > -1$. Ainsi, elle ne converge jamais sur $\mathbb{R}^+$.

• Si $\beta < 0$, remarquons que, par croissance comparée ou produit :

$$\frac{x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x}}{\frac{1}{x^2}} = x^{\alpha+2}\mathrm{e}^{\beta x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, $x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est convergente (Riemann avec $2 > 1$). Par comparaisons d'intégrales de fonctions à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Au voisinage de 0,

$$x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x} \underset{0}{\sim} x^\alpha$$

et $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha > -1$. Par comparaisons d'intégrales de fonctions à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x}\,\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha > -1$.

Bilan : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x}\,\mathrm{d}x \text{ converge si et seulement si } \beta < 0 \text{ et } \alpha > -1.}$

2. La fonction $x \longmapsto x^\alpha(1-x)^\beta$ est continue sur $]0,1[$. Si $\alpha \geqslant 0$, elle est continue en 0 et si $\beta \geqslant 0$, elle est continue en 1. L'intégrale converge donc si $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$.

- En 0, remarquons que
$$x^\alpha(1-x)^\beta \underset{0}{\sim} x^\alpha.$$
$\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$ (Riemann), c'est-à-dire $\alpha > -1$. Par comparaisons d'intégrales de fonctions à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{1/2} x^\alpha(1-x)^\beta\,\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha > -1$.
- En 1, de même :
$$x^\alpha(1-x)^\beta \underset{1}{\sim} (1-x)^\beta.$$
$\displaystyle\int_{1/2}^1 (1-x)^\beta\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $-\beta < 1$ (Riemann), c'est-à-dire $\beta > -1$. Par comparaisons d'intégrales de fonctions à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\int_{1/2}^1 x^\alpha(1-x)^\beta\,\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\beta > -1$.

Bilan : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\,\mathrm{d}x \text{ converge si et seulement si } \alpha > -1 \text{ et } \beta > -1.}$

3. La fonction $x \longmapsto \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Il y a deux impropretés, en 0 et en $+\infty$.

- En 0 :
$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{x + \mathrm{o}\,(x)}{x} = 1 + \mathrm{o}\,(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$
Par exponentiation, on en déduit que
$$\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$
La fonction est donc prolongeable par continuité en 0, et il s'agit donc d'une fausse impropreté en 0.
- En $+\infty$
$$\frac{\arctan x}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{x} = \frac{\pi}{2x}$$
$$\text{donc par exponentiation } \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^\alpha}{2^\alpha x^\alpha}.$$
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ (Riemann). Par comparaisons d'intégrales de fonctions à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^\alpha \mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Bilan : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^\alpha \mathrm{d}x \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$

Exercice 3

Constatons tout d'abord que les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ et $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. On va raisonner par disjonction de cas, en se ramenant à une intégrale de Riemann, avec la règle du « $\frac{\alpha+1}{2}$ ».

- Si $\alpha > 1$. Remarquons que :

$$x^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln x)^\beta}$$

Si $\beta \geqslant 0$, par produit et quotient

$$\frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln x)^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Si $\beta < 0$, par croissance comparée, puisque $\frac{\alpha-1}{2} > 0$:

$$\frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln x)^\beta} = \frac{(\ln x)^{-\beta}}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Dans tous les cas

$$\frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln x)^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

et donc

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right).$$

Puisque $\frac{\alpha+1}{2} > 1$, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ converge (Riemann). Par comparaison d'intégrales de fonctions positives (ce qui est bien le cas sur $[2, +\infty[$), on en déduit que

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \text{ converge}}.$$

- Si $\alpha = 1$, on peut calculer l'intégrale partielle. Si $\beta \neq 1$, soit $t > 2$. Alors

$$\begin{aligned}\int_2^t \frac{\mathrm{d}x}{x (\ln x)^\beta} &= \int_2^t \frac{1}{x} (\ln x)^{-\beta} \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_2^t \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left((\ln t)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}\right).\end{aligned}$$

Ceci admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $1 - \beta < 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\beta > 1$.

Enfin, si $\beta = 1$, avec $t > 2$:

$$\int_2^t \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = [\ln(\ln(x))]_2^t \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty.$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } \alpha = 1, \text{ l'intégrale converge si et seulement si } \beta > 1.}$

- Enfin, si $\alpha < 1$, remarquons que

$$x^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln x)^\beta} = \frac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln x)^\beta}$$

Si $\beta > 0$, cela tend vers $+\infty$ par croissances comparées ; si $\beta \leqslant 0$, cela tend vers $+\infty$ par quotient.

Ainsi,

$$\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}\right).$$

Les fonctions étant positives, et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ étant divergente (Riemann avec $\frac{\alpha+1}{2} < 1$), on en déduit par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}} \text{ diverge}}.$$

On peut conclure :

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1}.$$

2. Le raisonnement est strictement identique. La fonction est positive sur $]0, \frac{1}{2}]$.
Si $\alpha \neq 1$, on a

$$n^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{1}{x^{\alpha}|\ln x|^{\beta}} = \frac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{|\ln x|^{\beta}}.$$

• Si $\alpha < 1$, ce terme tend vers 0 par quotient si $\beta \geqslant 0$, par croissance comparée si $\beta < 0$. Dans tous les cas

$$\frac{1}{x^{\alpha}|\ln x|^{\beta}} = \mathrm{o}_0\left(\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right).$$

Puisque $\frac{\alpha+1}{2} < 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ converge et par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que notre intégrale converge.

• Si $\alpha > 1$, cette fois-ci $\displaystyle\frac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{|\ln x|^{\beta}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, par quotient si $\beta \leqslant 0$, par croissance comparée et quotient si $\beta > 0$. Dans tous les cas,

$$\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}} = \mathrm{o}_0\left(\frac{1}{x^{\alpha}|\ln x|^{\beta}}\right).$$

Puisque $\frac{\alpha+1}{2} > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ diverge et par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que notre intégrale diverge.

• Enfin, si $\alpha = 1$, on peut calculer les intégrales partielles :

– Si $\beta \neq 1$, $\displaystyle\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x|\ln x|^{\beta}} = \left[\frac{1}{1-\beta}(-\ln x)^{-\beta+1}\right]_t^{\frac{1}{2}}$, et ce terme admet une limite finie en 0 si et seulement si $1-\beta < 0$, c'est-à-dire $\beta > 1$.

– Si $\beta = 1$, $\displaystyle\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x|\ln x|} = [\ln(-\ln(x))]_t^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$.

On peut conclure :

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1}.$$

Exercice 4

Remarquons que chacune des fonctions considérées est continue sur les intervalles donnés.

- Soit $u > 0$. On a alors

$$\int_0^u \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\right]_0^u = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2} + \frac{1}{2}$$

Or,

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{1}{1+u^2} = 0 \text{ par quotient}$$

Par somme et produit de limite, on en déduit que l'intégrale A converge, et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}}$$

- Soit $u > 0$. On a alors

$$\int_0^u t^2\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t^3}\right]_0^u = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-u^3} + \frac{1}{3}$$

Par composée, $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{-u^3} = 0$. Par sommet et produit, l'intégrale B est convergente, et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}}$$

- Soit $u > 1$. On a alors

$$\int_1^u \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_1^u = \frac{(\ln(u))^2}{2} - \frac{(\ln(1))^2}{2} = \frac{(\ln(u))^2}{2}$$

Or $\lim\limits_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty$ donc par composée

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{(\ln(u))^2}{2} = +\infty$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'intégrale } C \text{ est divergente.}}$

- Soit $x > 3$. On a alors

$$\int_3^x \frac{du}{u\ln(u)} = \int_3^x \frac{1/u}{\ln(u)} = [\ln(|\ln(u)|)]_3^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(3))$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'intégrale } D \text{ est divergente.}}$

Exercice 5

Remarquons déjà que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$ est continue sur $[1;+\infty[$ comme quotient de fonction continue dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)$. f est définie et dérivable sur $[1;+\infty[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables. En écrivant $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x-1) - \ln(\mathrm{e}^x+1)$ pour $x \geqslant 1$, on a alors

$$\forall\ x \geqslant 1,\ f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1) - \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x+1)} = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1} = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})} = \frac{2}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$$

Ainsi, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$ est $\frac{1}{2}f$.

Soit alors $u \geqslant 1$. On a donc

$$\int_1^u \frac{1}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}dx = \left[\frac{1}{2}f(x)\right]_0^u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^u-1}{\mathrm{e}^u+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$$

On a alors
$$\frac{e^u-1}{e^u+1} \sim_{+\infty} \frac{e^u}{e^u} = 1$$
Par composée,
$$\lim_{u\to+\infty} \ln\left(\frac{e^u-1}{e^u+1}\right) = 0$$
et par somme
$$\lim_{u\to+\infty} \int_0^u \frac{1}{e^x-e^{-x}} dx = 0 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$$
Ainsi, l'intégrale I converge, et
$$\boxed{I = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\right)}$$

Exercice 6

1. $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction étant paire, il suffit d'étudier une des impropreté, en $+\infty$ ou $-\infty$. Or, on a
$$\frac{1}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$
Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge, et notre intégrale converge par parité. Enfin, pour tout $a > 0$:
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2} &= [\arctan(x)]_{-a}^{a}\\ &= \arctan(a) - \arctan(-a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.}$$

2. $x \longmapsto \frac{1}{(1+x)(2+x)}$ est continue sur $[1, +\infty[$. En $+\infty$,
$$\frac{1}{(1+x)(2+x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$), par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(2+x)}$ converge également.
En utilisant l'indication, pour tout $a > 1$:
$$\begin{aligned}\int_1^a \frac{dx}{(1+x)(2+x)} &= \int_1^a \frac{(x+2)-(x+1)}{(1+x)(2+x)} dx\\ &= \int_1^a \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}\right) dx\\ &= \int_1^a [\ln(|1+x|) - \ln(|2+x|)]_1^a\\ &= \ln\left(\frac{1+a}{2+a}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right) \xrightarrow[a\to+\infty]{} -\ln\left(\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

puisque $\frac{1+a}{2+a} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{a} = 1 \xrightarrow[a\to+\infty]{} 1$, et par continuité de la fonction ln. Ainsi,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(2+x)} = \ln\left(\frac{3}{2}\right).}$$

3. La fonction $x \longmapsto \ln\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)$ est continue sur $[1,+\infty[$. En $+\infty$,

$$\ln\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x^2}.$$

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^2}\mathrm{d}x$ converge (Riemann avec $2>1$), par comparaison de fonctions positives (puisque $\alpha>0$), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ converge.

On va procéder par intégration par parties. **Attention** : on ne fait une IPP que sur un segment. Soit $b>1$. On pose $u : x \longmapsto \ln\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)$, $v' : x \longmapsto 1$. Ainsi, $u' : x \longmapsto \frac{-2\frac{\alpha}{x^3}}{1+\frac{\alpha}{x^2}} = -\frac{2\alpha}{x^3+\alpha x}$ et $v : x \longmapsto x$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,b]$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_1^b \ln\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= \left[x\ln\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)\right]_1^b - \int_1^b x\frac{-2\alpha}{x^3+\alpha x}\mathrm{d}x\\
&= b\ln\left(1+\frac{\alpha}{b^2}\right) - \ln(1+\alpha) + 2\alpha\int_1^b \frac{1}{x^2+\alpha}\mathrm{d}x\\
&= b\ln\left(1+\frac{\alpha}{b^2}\right) - \ln(1+\alpha) + 2\alpha\int_1^b \frac{1}{\alpha}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}\mathrm{d}x\\
&= b\ln\left(1+\frac{\alpha}{b^2}\right) - \ln(1+\alpha) + 2\left[\sqrt{\alpha}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]_1^b\\
&= b\ln\left(1+\frac{\alpha}{b^2}\right) - \ln(1+\alpha) + 2\sqrt{\alpha}\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{\alpha}}\right) - 2\sqrt{\alpha}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

Or $b\ln\left(1+\frac{\alpha}{b^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} b\frac{\alpha}{b^2} = \frac{\alpha}{b} \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$, et $\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{\alpha}}\right) \xrightarrow[b\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$. Ainsi, par somme de limites :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)\mathrm{d}x = -\ln(1+\alpha) + \pi\sqrt{\alpha} - 2\sqrt{\alpha}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).}$$

4. $x \longmapsto \frac{\arctan(x)}{x^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. En $+\infty$,

$$\frac{\arctan(x)}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^2}.$$

Pusique $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\mathrm{d}x$ converge (Riemann avec $2>1$). Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ converge.

Faisons une intégration par parties. Soit $b>1$. On pose $u : x \longmapsto \arctan(x)$ et $v' : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$. Ainsi, $u' : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $v : x \longmapsto -\frac{1}{x}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$. Par IPP :

$$\begin{aligned}
\int_1^b \frac{\arctan(x)}{x^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{x}\arctan(x)\right]_1^b - \int_1^b -\frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&= \arctan(1) - \frac{\arctan(b)}{b} + \int_1^b \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(b)}{b} + \int_1^b \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(b)}{b} + \left[\ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(|1+x^2|)\right]_1^b$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(b)}{b} + \ln\left(\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right) + \frac{1}{2}\ln(2)$$

Or, par quotient, $\frac{\arctan(b)}{b} \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$ et $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \underset{+\infty}{\sim} 1$ donc par composée, $\ln\left(\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right) \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$.
Finalement,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2).}$$

5. $x \longmapsto \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Remarquons que

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \underset{-\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{x}.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$ convergent, par comparaison de fonctions positives, notre intégrale converge.
$x : u \longmapsto \ln(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante. On a

$$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Par changement de variable,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(u)}+\mathrm{e}^{-\ln(u)}}\frac{\mathrm{d}u}{u}$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u+\frac{1}{u}}\frac{\mathrm{d}u}{u}$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u = [\arctan(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\pi}{2}.}$$

6. La fonction $f : x \longmapsto \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*0$. Remarquons que, par conséquence des croissances comparées,

$$\lim_{x\to0} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0, et l'intégrale est donc faussement impropre en 0.
En $+\infty$:

$$x^2 f(x) = \frac{x^3\ln(x)}{(1+x^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^3\ln(x)}{x^3} = \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, $\frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge, par comparaison de fonctions positives, l'intégrale de $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, notre intégrale converge.
$x = \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$\lim_{t\to0^+} \frac{1}{t} = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2} &= \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2} \times -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(t)t^4}{(t^2+1)^2t^3}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = 0}.$$

7. $x \longmapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. On a

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n}}.$$

Puisque $n \geqslant 1$, $2n \geqslant 2 > 1$, et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2n}}$ converge. Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ converge, et donc I_n converge pour tout $n \geqslant 1$.

Soit $b > 0$. Remarquons que :

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} &= \int_0^b \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} - \int_0^b \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Procédons par intégration par parties dans la deuxième intégrale. On pose $u : x \longmapsto x$, et $v' : x \longmapsto \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}$, c'est-à-dire $u' : x \longmapsto 1$ et $v : x \longmapsto -\frac{1}{2n}\frac{1}{(1+x^2)^n}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\, b]$ et on a :

$$\int_0^b \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x = \left[-x\frac{1}{2n}\frac{1}{(1+x^2)^n}\right]_0^b - \int_0^b -\frac{1}{2n}\frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x.$$

Par convergence de I_n, on constate alors que

$$\int_0^b \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \xrightarrow[b\to+\infty]{} \frac{1}{2n}I_n$$

et finalement

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} \xrightarrow[b\to+\infty]{} I_n - \frac{1}{2n}I_n$$

ce qui nous donne

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n.}$$

Puisque $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, par récurrence rapide, on montre que

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!^2}\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 7

1. Remarquons que, pour tout entier n, $t \mapsto t^n e^{-t}$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. L'intégrale est impropre en $+\infty$. De plus, on a

$$t^n e^{-t} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

En effet,

$$\frac{t^n e^{-t}}{1/t^2} = t^{n+2}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissance comparée}$$

Puisque les fonctions $t \mapsto t^n e^{-t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont positives, et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente (Riemann), par comparaison de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ converge.

Bilan : l'intégrale I_n est convergente.

2. Pour tout $a > 0$, on a

$$I_0(a) = \int_0^a t^0 e^{-t}\,dt = \int_0^a e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^a = -e^{-a} + 1$$

Mais alors,

$$\lim_{a\to+\infty} I_0(a) = \lim_{a\to+\infty} -e^{-a} + 1 = 1 \text{ par composée}$$

Ainsi, I_0 converge, et $I_0 = 1$.

3. Partons de $I_{n+1}(a)$ et faisons une intégration par parties.
On note $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = e^{-t}$, soit $u'(t) = (n+1)t^{n+1}$ et $v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;a]$. Par intégration par parties,

$$I_{n+1}(a) = \int_0^a t^{n+1}e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}t^{n+1}\right]_0^a - \int_0^a -e^{-t}(n+1)t^n\,dt$$

soit

$$\boxed{I_{n+1}(a) = -e^{-a}a^{n+1} + (n+1)\int_0^a t^n e^{-t}\,dt = -e^{-a}a^{n+1} + (n+1)I_n(a)}$$

4. Par passage à la limite, puisque $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-a}a^{n+1} = 0$ par croissance comparée, et que $I_n(a)$ et $I_{n+1}(a)$ convergent (question 1), on en déduit par produit que, pour tout entier n,

$$I_{n+1} = (n+1)I_n$$

Ainsi, $I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = n(n-1)\cdots 2 \times 1 \times I_0$ et donc

$$\forall\ n,\quad I_n = n!$$

> **Remarque**
> Rigoureusement, il faut montrer le résultat par récurrence sur n.

Exercice 8

1. Remarquons tout d'abord que $x \mapsto \ln(\sin(x))$ est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$. I est impropre en 0.
Puisque $\sin(x) = x + o_0(x)$, on a

$$\begin{aligned}\ln(\sin(x)) &= \ln(x + o_0(x))\\ &= \ln(x(1 + o_0(x)))\\ &= \ln(x) + \ln(1 + o_0(1))\end{aligned}$$

et donc
$$\frac{\ln(\sin(x))}{\ln x} = \frac{\ln(1+o_0(1))}{\ln x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
Ainsi $\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$ et donc $|\ln(\sin(x))| \underset{0}{\sim} |\ln(x)|$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |\ln(x)|\,\mathrm{d}x$ étant convergente, et les deux fonctions étant positives sur $]0;1]$, par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale I converge en 0.
Bilan : I est convergente.
2. De même, $x \mapsto \ln(\tan(x))$ est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. L'intégrale K est impropre en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. Par le même raisonnement que précédemment, puisque $\tan(x) = x + o_0(x)$, on en déduit que $\ln(\tan(x) \underset{0}{\sim} \ln(x)$ et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(\tan(t))\,\mathrm{d}t$ converge en 0.
De plus, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$ et donc
$$\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{\tan(x)}\right) = -\ln(\tan(x)) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$$
Ainsi, par changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ et par l'équivalent précédent, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan(x))\,\mathrm{d}x$ converge.
Bilan : K converge.
3. On pose $u = \frac{\pi}{2} - x$ qui un changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante. On a $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}x$. Par changement de variable dans une intégrale généralisée :
$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)(-\,\mathrm{d}u) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\,\mathrm{d}u \text{ car } \sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = \cos(u) \end{aligned}$$
Ainsi, $I = J$ et J est convergente.
4. I et J étant convergente, par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x)))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)\mathrm{d}x \text{ en utilisant la formule de trigonométrie } \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$
5. On pose $v = 2x$ dans l'intégrale précédente qui est convergente (car c'est la somme de deux intégrales convergentes). Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ strictement croissant. $\mathrm{d}v = 2\,\mathrm{d}x$. Par changement de variable dans une intégrale généralisée, on a
$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{\sin(v)}{2}\right)\frac{\mathrm{d}v}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(v)) - \ln(2)\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(v))\,\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(2)\,\mathrm{d}v \text{ car la première et la dernière intégrales convergent} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(v))\,\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\pi\ln(2) \end{aligned}$$

6. Puisque $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$ et I convergent, on peut appliquer la relation de Chasles et

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$$

Dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$, on pose $v = x - \frac{\pi}{2}$, changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissante, avec $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$. Alors

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{d}u = J$$

car $\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(u)$.
Ainsi, on regroupant les différents résultats $4, 5$ et 6 :

$$\begin{aligned} I + J &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln(2) \\ &= \frac{1}{2}(I+J) - \frac{\pi}{2}\ln(2) \end{aligned}$$

Ainsi, $I + J = -\pi\ln(2)$ et puisque $I = J$,

$$\boxed{I = J = -\frac{\pi}{2}\ln(2)}$$

7. Remarquons que, par linéarité :

$$\begin{aligned} I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) - \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan(x))\,\mathrm{d}x = K \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $I = J$, on a $\boxed{K = 0}$.

Exercice 9

1. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, remarquons que $f_{n,p} : x \longmapsto x^n \ln(x)^p$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, par croissance comparée :

$$\sqrt{x} \times x^n \ln(x)^p \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

Ainsi, $|x^n \ln(x)^p| = \mathrm{o}_0\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge (Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$). Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que la fonction $f_{n,p}$ est intégrable au voisinage de 0.
Bilan : ainsi, $I_{n,p}$ existe pour tout entier $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

2. Fixons $\varepsilon \in]0, 1]$. On souhaite calculer $\displaystyle\int_{\varepsilon}^1 x^n \ln(x)^{p+1}\,\mathrm{d}x$. Procédons à une intégration par parties : on pose $u : x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $v : x \longmapsto \ln(x)^{p+1}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon 1]$, avec

$$u' : x \longmapsto x^n \quad \text{et} \quad v' : x \longmapsto (p+1)\frac{1}{x}\ln(x)^p.$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{1} x^n \ln(x)^{p+1}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)^{p+1}\right]_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1} \frac{x^{n+1}}{n+1}(p+1)\frac{1}{x}\ln(x)^{p}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1}\ln(\varepsilon)^{p+1} - \frac{p+1}{n+1}\int_{\varepsilon}^{1} x^n \ln(x)^p\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée (puisque $n+1>0$)

$$-\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1}\ln(\varepsilon)^{p+1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Ainsi, par passage à la limite :

$$\boxed{I_{n,p+1} = -\frac{p+1}{n+1}I_{n,p}.}$$

3. D'après la relation précédente, on peut émettre comme conjecture que :

$$\forall\,(n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad I_{n,p} = (-1)^p\frac{p!}{(n+1)^p}I_{n,0}$$

avec

$$I_{n,0} = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. Montrons par récurrence sur p la proposition Q_p :

$$I_{n,p} = (-1)^p\frac{p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

- Pour $p=0$, on constate que

$$(-1)^p\frac{p!}{(n+1)^{p+1}} = \frac{1}{n+1} = I_{n,0}.$$

Ainsi, Q_0 est vérifiée.
- Supposons la proposition Q_p vraie pour un certain entier p fixé. D'après la relation de la question précédente :

$$\begin{aligned}I_{n,p+1} &= -\frac{p+1}{n+1}I_{n,p} \\ &= -\frac{p+1}{n+1}(-1)^p\frac{p!}{(n+1)^{p+1}} && \text{par hypothèse de récurence} \\ &= (-1)^{p+1}\frac{(p+1)!}{(n+1)^{p+2}}.\end{aligned}$$

L'hypothèse Q_{p+1} est donc vérifiée.
Ainsi, on a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall\,(n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad \int_0^1 x^n\ln(x)^p\,\mathrm{d}x = (-1)^p\frac{p!}{(n+1)^{p+1}}.}$$

Exercice 10

1. Pour tout $x>0$, la fonction $h : t\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$. L'impropreté est en $+\infty$. Remarquons alors que

$$\frac{\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}}{\frac{1}{t^2}} = t\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées. Les fonctions étant positives, par théorème de comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, f est bien définie.
2. Remarquons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\mathrm{d}t = \int_x^1 h(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t = -\int_1^x h(t)\mathrm{d}t + \underbrace{\int_1^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t}_{\in\mathbb{R}}.$$

La fonction h étant continue, d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x h(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée h. Ainsi, par somme, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = -h(x).$$

h étant elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. a) La fonction $i : t \longmapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t}$ est continue sur $]0, 1]$. En 0, remarquons que :

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t} = \frac{1-\left(1-t^2+\mathrm{o}_0\left(t^2\right)\right)}{t} = t + \mathrm{o}_0\left(t\right) \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Ainsi, la fonction i est prolongeable par continuité en 0, en posant $i(0) = 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 i(t)\mathrm{d}t$ est donc convergente (faussement impropre). Ainsi, par définition de l'intégrale généralisée, la limite de g existe.
b) On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $t \longmapsto \frac{1}{t}$ et h sont continues sur $[1]x1$. On peut donc séparer par linéarité :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\mathrm{d}t \\ &= \left[\ln(|t|)\right]_x^1 - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\mathrm{d}t + \int_{+\infty}^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\mathrm{d}t\right) \quad \text{par la relation de Chasles} \\ &= -\ln(x) - f(x) + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\mathrm{d}t = -\ln(x) - f(x) + f(1). \end{aligned}$$

c) La question 3*a*) nous garantit que g admet une limite à droite en 0. La relation 3*b*) peut se ré-écrire

$$f(x) = -\ln(x) - g(x) + f(1)$$

soit encore

$$\frac{f(x)}{\ln(x)} = -1 - \frac{g(x)}{\ln(x)} + \frac{f(1)}{\ln(x)}.$$

Puisque g admet une limite finie en 0,

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{\ln(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(1)}{\ln(x)} = 0.$$

Par somme,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\ln(x)} = -1 \quad \text{soit} \quad \boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x).}$$

Exercice 11

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \longmapsto \frac{x^n \ln(x)}{x^n - 1}$ est continue sur $]0, 1[$. L'intégrale est impropre en 0 et en 1.

- En 0, par croissance comparée (car $n > 0$), $x^n \ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et donc, par quotient $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

L'intégrale est donc faussement impropre en 0.

- En 1, par équivalent usuel :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{1}{\sim} \frac{1 \times (x-1)}{x^n - 1} = \frac{x-1}{(x-1) \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} \\ &\underset{1}{\sim} \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} \xrightarrow[x \to 1]{} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale est également faussement impropre en 1.
On peut conclure que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n converge.
2. L'intégrale I_n converge. On procède au changement de variable $y = x^n$ soit $x = y^{1/n}$. La fonction $y \longmapsto y^{1/n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, 1]$. Quand $x = 0$, $y = 0$ et quand $x = 1$, $y = 1$, et $\mathrm{d}x = \frac{1}{n} y^{1/n - 1} \,\mathrm{d}y$.
Par théorème de changement de variable, on en déduit alors que

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{y \ln\left(y^{1/n}\right)}{y-1} \frac{1}{n} y^{1/n-1} \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{y \ln(y)}{y(y-1)} y^{1/n} \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

et cette dernière intégrale converge également.
Remarquons que, pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tout $y \in [0, 1]$, $0 \leqslant y^{1/n} \leqslant y$. Alors

$$\left| \frac{y \ln(y)}{y(y-1)} y^{1/n} \right| \leqslant \frac{y^2 |\ln(y)|}{y(1-y)}.$$

Par le même raisonnement qu'en 1, la fonction $g : y \longmapsto \frac{y^2 |\ln(y)|}{y(1-y)}$ est continue sur $]0, 1[$ et

$$g(y) \xrightarrow[y \to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad g(y) \underset{1}{\sim} \frac{y^2(1-y)}{y(1-y)} = y \xrightarrow[y \to 1]{} 1.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(y) \,\mathrm{d}y$ converge donc car elle est faussement impropre en 0 et 1.

Par comparaison d'intégrale de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{y \ln(y)}{y(y-1)} y^{1/n}$ est absolument convergente, et donc convergente. De plus, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |I_n| &\leqslant \frac{1}{n^2} \left| \frac{y \ln(y)}{y(y-1)} y^{1/n} \right| \\ &\leqslant \frac{1}{n^2} \int_0^1 g(y) \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1 g(y) \,\mathrm{d}y$ est un réel (puisque l'intégrale converge). La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann avec $2 > 1$).
Par comparaison de séries à termes positifs, la séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} |I_n|$ est convergente.

Bilan : $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} I_n \text{ est convergente.}}$

Exercice 12

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \longmapsto \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}$ est continue, et positive, sur $\mathbb{R}^+$. L'intégrale est impropre en $+\infty$. Or, on a rapidement que

$$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n+3}}.$$

Puisque $n \geqslant 0$, $3n+3 > 1$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{3n+3}}$ est donc convergente (Riemann). Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\underline{I_n \text{ converge}}$.

2. On met le membre de droite au même dénominateur : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1+x} + b\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{c}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} &= \frac{a(x^2-x+1)+b(x+1)(2x-1)}{(1+x)(x^2-x+1)} + \frac{3c}{4x^2-4x+4} \\
&= \frac{a(x^2-x+1)+b(x+1)(2x-1)}{(1+x)(x^2-x+1)} + \frac{\frac{3}{4}c}{x^2-x+1} \\
&= \frac{(a+2b)x^2 + \left(b-a+\frac{3c}{4}\right)x + a - b + \frac{3c}{4}}{x^3+1}
\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit le système

$$\begin{cases} a+2b &= 0 \\ -a+\ \ b+\frac{3}{4}c &= 0 \\ a-\ \ b+\frac{3}{4}c &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b &= 0 \\ 3b+\frac{3}{4}c &= 0 \\ -3b+\frac{3}{4}c &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{6} \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Mais alors, en prenant une primitive de chacune des trois fonctions obtenues, une primitive de f_0 est :

$$x \longmapsto a\ln|1+x| + b\ln|x^2-x+1| + c\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Ainsi, une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ sur $\mathbb{R}^+$ est

$$\boxed{x \longmapsto \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).}$$

3. En utilisant ce qui précède, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} &= \int_0^1 \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1+t)^2}{t^2-t+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{I_0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.}$.

Soit $t>0$. Procédons à une intégration par partie dans l'intégrale partielle. $u : x \longmapsto \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}$ et $v : x \longmapsto x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\, t]$. Par intégration par partie :

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}} &= \left[\frac{x}{(1+x^3)^{n+1}}\right]_0^t - \int_0^t \frac{-(n+1)\times 3x^2\times x}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{t}{(1+t^3)^{n+1}} + 3(n+1)\int_0^t \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{t}{(1+t^3)^{n+1}} + 3(n+1)\int_0^t \frac{x^3+1-1}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{t}{(1+t^3)^{n+1}} + 3(n+1)\int_0^t \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x - 3(n+1)\int_0^t \frac{1}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ainsi, en réorganisation cette inégalité :

$$\begin{aligned}3(n+1)\int_0^t \frac{1}{(1+x^3)^{n+2}}\mathrm{d}x &= \frac{t}{(1+t^3)^{n+1}} + 3(n+1)\int_0^t \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}\mathrm{d}x - \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}\\ &= \frac{t}{(1+t^3)^{n+1}} + (3n+2)\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}.\end{aligned}$$

et en faisant tendre t vers $+\infty$, puisque les intégrales convergent, on obtient finalement

$$\boxed{3(n+1)I_{n+1} = (3n+2)I_n}$$

4. En utilisant les propriétés de la fonction logarithme :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \ln\left(\frac{\sqrt[3]{n+1}I_{n+1}}{\sqrt[3]{n}I_n}\right)\\ &= \ln\left(\frac{(n+1)^{1/3}}{n^{1/3}}\frac{3n+2}{3n+3}\right) \quad \text{d'après la question précédente}\\ &= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n+3}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{-1}{3n+3} - \frac{1}{2(3n+3)^2} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{3n(n+1)} - \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2(3n+3)^2} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Remarquons alors que

$$n^2(u_{n+1}-u_n) = \frac{n^2}{3n(n+1)} - \frac{1}{6} - \frac{n^2}{18(n+1)^2} + \mathrm{o}_{+\infty}(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{9}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1}-u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{9n^2}.$$

La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{9n^2}$ étant convergente, on en déduit par théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum u_{n+1}-u_n$ est également convergente.

5. Notons alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_{k+1}-u_k$. Par télescopage,

$$S_n = u_{n+1}-u_1 \iff u_{n+1} = S_n + u_1.$$

Par convergence de la série (S_n), la suite (u_{n+1}) admet une limite finie, et par continuité d'exponentielle, $\exp(u_n)$ également. Notons alors $\ell = \lim \exp(u_n) > 0$. Alors

$$\sqrt[3]{n}I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff \boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{\sqrt[3]{n}}.}$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 13

1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
On a, naturellement (limite usuelle ou développement limité) que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1$$

En posant $f(0)=1$, la fonction f est alors continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $0<a<b$. Pour $t\in[a;b]$, on pose $u'(t)=\sin(t)$ et $v(t)=\dfrac{1}{t}$, c'est-à-dire $u:t\mapsto-\cos(t)$ et $v:t\mapsto\dfrac{1}{t}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$. Ainsi, par changement de variables :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_a^b-\int_a^b\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\left[\frac{2\sin^2(t/2)-1}{t}\right]_a^b-\int_a^b\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ car } \cos(t)=\cos(2t/2)=1-2\sin^2(t/2)\\
&=2\left[\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_a^b-\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)-\int_a^b\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\\
&=2\left[\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_a^b+\int_a^b\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t-\int_a^b\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\\
&=2\left[\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_a^b+\int_a^b\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\\
&=2\left[\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_a^b+\int_a^b\frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ par la même formule qu'avant}\\
&=2\left[\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_a^b+\int_{a/2}^{b/2}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \text{ en posant } t=2u, \mathcal{C}^1 \text{ strictement croissant}
\end{aligned}$$

3. La fonction $g:t\mapsto\frac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 (car $g=f^2$ donc en posant $g(0)=1$). L'intégrale est donc impropre au voisinage de $+\infty$. Or, pour tout $t\geqslant 1$:

$$\left|\frac{\sin^2(t)}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}$$

La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$ est positive et d'intégrale convergente sur $[1;+\infty[$ (Riemann avec $2>1$). Par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin^2(t)}{t^2}\right|\mathrm{d}t$ converge, et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge également. Par continuité, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

4. En utilisant la formule obtenue en 2, on constate que l'intégrale du membre de droite converge quand a tend vers 0 et b tend vers $+\infty$. Si le terme crochet converge, on pourra alors conclure que l'intégrale de f converge sur $[0;+\infty[$.
Or
$$\frac{\sin^2(a)}{a} = \sin(a)\frac{\sin(a)}{a} \xrightarrow{a\to 0} 0$$
et
$$\left|\frac{\sin^2(b)}{b}\right| \leqslant \frac{1}{b} \xrightarrow{b\to+\infty} 0$$
Donc le terme crochet tend vers 0 et par conséquent
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$
5. Remarquons que, pour $t \in [n\pi;(n+1)\pi]$, par décroissance de la fonction inverse :
$$\frac{1}{(n+1)\pi} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n\pi}$$
et donc
$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t &\geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t \text{ par périodicité}\\ &\geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}\end{aligned}$$
Mais alors, pour tout $N \geqslant 1$:
$$\begin{aligned}\int_0^{N\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{N-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t\\ &\geqslant \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2}{(n+1)\pi}\\ &\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \xrightarrow{N\to+\infty} +\infty\end{aligned}$$
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais pas absolument convergente.

Exercice 14

1. a) Tout d'abord, par hypothèse, ff' est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Pour tous réels a et b, puisque $(a-b)^2 \geqslant 0$, on en déduit que $2ab \leqslant a^2+b^2$, et puisque $(a+b)^2 \geqslant 0$, $-2ab \leqslant a^2+b^2$. Ainsi $2|ab| \leqslant a^2+b^2$. Mais alors, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$:
$$0 \leqslant 2|f'(x)f(x)| \leqslant (f(x))^2 + (f'(x))^2.$$
Les intégrales $\int_0^{+\infty}(f(t))^2\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty}(f'(t))^2\,\mathrm{d}t$ étant convergentes, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Soit $x > 0$. Remarquons que
$$\int_0^x f(t)f'(t) = \left[\frac{1}{2}f^2(t)\right]_0^x = \frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f^2(0).$$

L'intégrale étant convergente, on en déduit que l'intégrale précédente admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, et donc que $\frac{1}{2}f^2$ admet une limite finie en $+\infty$. Ainsi, $\boxed{f^2 \text{ admet une limite finie en } +\infty}$. Mais alors, notons $\ell \geqslant 0$ la limite de f^2 et supposons par l'absurde que $\ell > 0$. Mais alors, il existe un réel M tel que

$$\forall\, x \geqslant M, \quad f^2(x) \geqslant \frac{\ell}{2} > 0.$$

Mais alors, par positivité de f^2, pour tout $x \geqslant M$:

$$\begin{aligned}\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_M^x f^2(t)\,\mathrm{d}t &\geqslant \int_M^x \frac{\ell}{2} \\ &\geqslant \frac{\ell}{2}(x-M) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque l'intégrale est convergente. Ainsi, $\ell = 0$ et finalement f^2 et donc f par continuité de la fonction racine, converge vers 0.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Par décroissance de f sur $\mathbb{R}^+$, on peut écrire que

$$\forall\, t \in [x,\, x+1], \quad f(x+1) \leqslant f(t) \leqslant f(x).$$

Par croissance de l'intégrale

$$\int_x^{x+1} f(x+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+1} f(x)\,\mathrm{d}t$$

soit

$$f(x+1) \leqslant \int_0^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x).$$

Mais alors, par changement d'indice, pour tout $x \geqslant 1$:

$$\boxed{\int_0^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x-1} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Par convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, les termes de droite et de gauche tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Par encadrement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Corrigés des sujets de concours

Sujet 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $g_x : t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ est positive, et continue sur $\mathbb{R}^+$, comme quotient de fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Remarquons alors que, par croissances comparées :

$$t^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{t} = t\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente (Riemann). Par comparaison d'intégrale de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$ converge, et par continuité :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \text{ converge.}}$$

2. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la relation de Chasles :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t.$$

La fonction g_x est positive sur $\mathbb{R}^+$, par positivité de l'intégrale (qui est convergente ici)

$$\int_1^{+\infty} g_x(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et finalement

$$f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t.$$

Remarquons alors que, pour tout $t \in [0,\, 1]$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant t \leqslant 1 &\implies 1 \geqslant \mathrm{e}^{-t} \geqslant \mathrm{e}^{-1} \text{ par décroissance de } t \longmapsto \mathrm{e}^{-t} \\ &\implies \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t} \leqslant g_x(t) \leqslant \frac{1}{x+t} \text{ car } x+t > 0. \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale $(0 < 1)$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t.$$

Mais alors

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t \\ &\geqslant \mathrm{e}^{-1}\left[\ln|x+t|\right]_0^1 = \mathrm{e}^{-1}\left(\ln(1+x) - \ln(x)\right). \end{aligned}$$

Remarquons alors que

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(1+x) - \ln(x) = +\infty \text{ par somme.}$$

Par comparaison

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.}$$

b) $t \longmapsto t\mathrm{e}^{-t}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^+$. Rapidement, $t\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées, et par comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale donnée converge. On constate que, puisque d'après le cours

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1$$

on a

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}\mathrm{d}t.$$

Mais alors :

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{x} &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \text{ par linéarité} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{-t}{x(x+t)}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Puisque $x+t \geqslant x$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\left|\frac{-t}{x(t+x)}\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant \frac{t}{x^2}\mathrm{e}^{-t}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ convergent, on peut appliquer l'inégalité triangulaire :

$$\boxed{\left|f(x)-\frac{1}{x}\right| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{-t}{x(x+t)}\right|\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.}$$

c) Notons $M = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$. Alors, le résultat précédent s'écrit

$$-\frac{M}{x^2} \leqslant f(x) - \frac{1}{x} \leqslant \frac{M}{x^2}$$

ou encore

$$-\frac{M}{x^2} + \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{M}{x^2} + \frac{1}{x}$$

Puisque $-\frac{M}{x^2}+\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\frac{M}{x^2}+\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, par encadrement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Mieux : en multipliant par $x>0$ dans l'inégalité :

$$-\frac{M}{x} \leqslant xf(x) - 1 \leqslant \frac{M}{x}.$$

Puisque $\frac{M}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on en déduit par encadrement que $xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, c'est-à-dire $\frac{f(x)}{1/x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Ainsi

$$\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

3. a) Sans difficulté, comme en 1, on montre que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ce qui permet de conclure par comparaison d'intégrale de fonctions positives.

b) L'écriture nous fait penser à une inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Soit $t \in \mathbb{R}^+$ et $h \in]-x/2, +\infty[$. La fonction $i_x : t \longmapsto \frac{1}{x+t}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-x\}$. L'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 1, appliquée à i_x entre t et $t+h$ donne :

$$|i(t+h) - i(t) - hi'(t)| \leqslant \frac{|t+h-t|^2}{2!} \max_{[t,\,t+h]} |i^{(2)}(u)|$$

$i' : t \longmapsto -\frac{1}{(x+t)^2}$ et $i'' : t \longmapsto \frac{2}{(x+t)^3}$. Remarquons que, puisque $t \geqslant 0$ et $x>0$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant t \leqslant ux &\leqslant x+t \leqslant x+u \\ &\implies x^3 \leqslant (t+x)^3 \leqslant (x+u)^3 \\ &\implies \frac{2}{x^3} \geqslant i''(u) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\max_{[t,\,t+h]} |i^{(2)}(u)| \leqslant \frac{2}{x^3}.$$

Finalement, l'inégalité de Taylor Lagrange s'écrit :

$$\left|\frac{1}{x+t+h} - \frac{1}{x+t} + h\frac{1}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{h^2}{2}\frac{2}{x^3}$$

ou encore, en divisant par $|h|>0$:

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+t+h}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|\leqslant\frac{|h|}{x^3}.$$

c) Par linéarité, puisque toutes les intégrales considérées converge :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t&=\frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+h+t}\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t\right)+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'après ce qui précède,

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+t+h}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|\mathrm{e}^{-t}\leqslant\frac{|h|}{x^3}\mathrm{e}^{-t}$$

et $t\longmapsto\frac{|h|}{x^3}\mathrm{e}^{-t}$ est une intégrale convergente sur $\mathbb{R}^+$. Par comparaison, l'intégrale de gauche est absolument convergente et on peut appliquer l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\right|&\leqslant\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+t+h}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|\mathrm{e}^{-t}\quad\leqslant\frac{|h|}{x^3}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{|h|}{x^3}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{|h|}{x^3}.\end{aligned}$$

4. Remarquons que $\frac{|h|}{x^3}\xrightarrow[h\to0]{}0$. Ainsi, par encadrement, on en déduit que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0 : f est donc dérivable en x, et $f'(x)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$. Ceci étant vrai pour tout $x>0$, on peut conclure que

$$\boxed{f\text{ est dérivable sur }\mathbb{R}_+^*\text{ et }\forall\,x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t.}$$

5. Soit $x>0$ et $a>0$. Faisons une intégration par partie dans f. On pose $u:t\longmapsto\frac{1}{x+t}$, et $v:t\longmapsto-\mathrm{e}^{-t}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\,a]$ et on a

$$\begin{aligned}\int_0^a\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t&=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\right]_0^a-\int_0^a\frac{-1}{(x+t)^2}(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t\\&=-\frac{\mathrm{e}^{-a}}{x+a}+\frac{1}{x}-\int_0^a\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or :

$$\int_0^a\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t\xrightarrow[a\to+\infty]{}f(x)$$

$$-\frac{\mathrm{e}^{-a}}{x+a}\xrightarrow[a\to+\infty]{}0$$

$$-\int_0^a\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\xrightarrow[a\to+\infty]{}f'(x).$$

Ainsi, par passage à la limite

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{x}+f'(x).}$$

6. L'idée est de réitérer la relation précédente. Soit P la proposition définie pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$P_n:\text{« } f\text{ est de classe }\mathcal{C}^n\text{ et }\forall\,x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(k-1)!}{x^k}+f(x).\text{ »}$$

- Pour $n = 1$, c'est le résultat de la question précédente : f est bien dérivable et pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x)$. Les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto f(x)$ étant continue (car dérivable pour la deuxième), f' est également continue et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $n = 1$, la somme contient un seul terme

$$(-1)^1\frac{(1-1)!}{x^1} + f(x) = -\frac{1}{x} + f(x) = f'(x).$$

- Hérédité : on suppose que P_n est vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$. Montrons que P_{n+1} est vraie. Tout d'abord, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\forall\, x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(k-1)!}{x^k} + f(x).$$

Les fonction dans la somme étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et f étant de classe $\mathcal{C}^n$, par somme on en déduit que $f^{(n)}$ est au moins de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Dérivons alors la relation précédente : pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(k-1)!(-k)}{x^{k+1}} + f'(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{k!}{x^{k+1}} + f'(x) \end{aligned}$$

On effectue un changement d'indice $i = k+1$ dans la somme, et on utilise $f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x)$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i\frac{(i-1)!}{x^i} - \frac{1}{x} + f(x) \\ &= \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i\frac{(i-1)!}{x^i} + (-1)^1\frac{(1-1)!}{x^1} + f(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\frac{(i-1)!}{x^i} + f(x). \end{aligned}$$

On a ainsi montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(k-1)!}{x^k} + f(x).}$$

Sujet 2

Partie 1

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est une fonction continue et positive sur $[1, +\infty[$. Par ailleurs,

$$t^2 f(t) = t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ par croissance comparée } (x+1>0) \text{ ou quotient}$$

Ainsi, $f(t) = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente (Riemann). Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est également convergente.

b) La fonction f est continue sur $]0, 1]$. Au voisinage de 0, on a

$$f(t) \underset{0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}.$$

D'après le résultat sur les intégrales de Riemann, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}}$ converge si et seulement si $1-x<1$, c'est-à-dire si et seulement si $x>0$. Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>0$.

c) D'après les résultats précédents, et par relation de Chasles, $\Gamma(x)$ est définie si et seulement si $x>0$: l'intégrale est toujours convergente en $+\infty$, et converge en 0 si et seulement si $x>0$. Ainsi, $\boxed{\Gamma \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2. Le résultat énoncé donne l'intuition de faire une intégration par parties. **Attention** : on rappelle qu'on ne fera une IPP que sur un segment.

Soit $x>0$. Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$. On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, en posant $u : t\longmapsto t^x$ et $v : t\longmapsto -\mathrm{e}^{-t}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\, b]$, et on a $u' : t\longmapsto xt^{x-1}$ et $v' : t\longmapsto \mathrm{e}^{-t}$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t &= \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_a^b - \int_a^b xt^{x-1}(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t\\ &= -b^x\mathrm{e}^{-b}+a^x\mathrm{e}^{-a}+x\int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Remarquons que, par produit, $a^x\mathrm{e}^{-a}\xrightarrow[a\to 0]{} 0$ et par croissances comparées $b^x\mathrm{e}^{-b}\xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$. Ainsi, par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

On a ainsi démontré que :

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x).}$$

3. a) Par calcul direct (intégrale de référence) :

$$\boxed{\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1.}$$

b) Soit P la proposition définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par P_n : « $\Gamma(n)=(n-1)!$ ».

- Pour $n=1$, il s'agit de la question précédente : $\Gamma(1)=1=(1-1)!$. P_1 est donc vérifiée.
- Supposons la proposition P_n vérifiée pour un certain entier $n\geqslant 1$ fixé. Mais alors, en utilisant la relation de la question 2. :

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)! \text{ par H.R.}$$

et donc $\Gamma(n+1)=n!$: P_{n+1} est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a donc bien démontré que

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \Gamma(n)=(n-1)!}$$

Partie 2

1. Notons $g : t\longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$. La fonction est continue et positive sur $]0,\,1[$. Par équivalent :

$$g(t)\underset{0}{\sim} t^{x-1}=\frac{1}{t^{1-x}}\quad\text{ et }\quad g(t)\underset{1}{\sim}(1-t)^{y-1}=\frac{1}{(1-t)^{1-y}}.$$

Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, en comparant à une intégrale de Riemann, l'intégrale $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si

$$1-x<1\quad\text{et}\quad 1-y<1 \iff x>0\quad\text{et}\quad y>0.$$

Ainsi, $\boxed{B \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*.}$

2. Soient $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. La fonction $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est positive sur $]0,\,1[$. Par positivité de l'intégrale, $B(x,y) \geqslant 0$. De plus, elle est continue et non identiquement nulle : on peut en déduire que $B(x,y) > 0$.

3. a) Effectuons le changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale définissant $B(x,y)$. Si $t=0$, $u=1$ et si $t=1$, $u=0$. $t = 1-u$ et $u \longmapsto 1-u$ est de classe $\mathbb{C}^1$ strictement monotone sur $[0,\,1]$. Enfin, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ Par théorème de changement de variables :

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \\ &= \int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}\mathrm{d}u = B(y,x). \end{aligned}$$

Ains,

$$\boxed{\forall\,(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad B(x,y) = B(y,x).}$$

b) Nous allons effectuer une intégration par partie. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On pose $u : t \longmapsto t^x$ et $v : t \longmapsto -\frac{(1-t)^y}{y}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\,b]$, et $u' : t \longmapsto x t^{x-1}$ et $v' : t \longmapsto (1-t)^{y-1}$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^b t^x(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t &= \left[t^x \frac{-(1-t)^y}{y}\right]_a^b - \int_a^b x t^{x-1}\frac{-(1-t)^y}{y}\mathrm{d}t \\ & -\frac{1}{y}\left(b^x(1-b)^y - a^x(1-a)^y\right) + \frac{x}{y}\int_a^b t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Puisque $x > 0$ et $y > 0$, par continuité

$$b^x \xrightarrow[b\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad (1-a)^y \xrightarrow[a\to 1]{} 0.$$

Ainsi, par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\int_0^1 t^x(1-t)^y\mathrm{d}t = \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t$$

ce qui donne

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1) \quad (\star).$$

Mais remarquons que, pour tout $t \in [0,\,1]$:

$$t^{x-1}(1-t)^y = t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)$$

et finalement

$$t^{x-1}(1-t)^y = t^{x-1}(1-t)^{y-1} - t^x(1-t)^{y-1}.$$

Par linéarité de l'intégrale, puisque toutes les intégrales convergent :

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t - \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

soit

$$B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y) \quad (\star\star).$$

En réunissant les propositions $(\star)$ et $(\star\star)$, on obtient

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}\left(B(x,y) - B(x+1,y)\right)$$

où encore

$$(x+y)B(x+1,y) = xB(x,y)$$

ce qui nous donne finalement

$$\boxed{B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).}$$

4. À nouveau, on peut le faire par récurrence. L'autre possibilité est de constater que, d'après la relation précédente :

$$\begin{aligned} B(n+1,x) &= \frac{n}{n+x}B(n,x) = \frac{n}{n+x}\frac{n-1}{n-1+x}B(n-1,x) \\ &= \frac{n}{n+x}\frac{n-1}{n-1+x}\dots\frac{1}{x+1}B(0,x). \end{aligned}$$

Or, $B(0,x) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ et finalement

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad B(n+1,x) = \frac{n(n-1)\dots 1}{(n+x)(n+x-1)\dots(x+1)}\frac{1}{x} = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.}$$

Partie 3

1. On utilise le cours.

$$\begin{aligned} h(x) &= x\left(1-x+x^2+\mathrm{o}_0\left(x^2\right)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}_0\left(x^2\right)\right) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}_0\left(x^2\right). \end{aligned}$$

2. Soit $n \geqslant 1$. Constatons que

$$\begin{aligned} v_n = u_{n+1} - u_n &= -\ln(n+1) + \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p} - \left(-\ln(n) + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = h\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Puisque, d'après la question précédente, $h(x) \underset{0}{\sim} x^2$, par substitution, $h\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Finalement

$$\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.}$$

3. Puisque $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann avec $2>1$), par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

4. Notons $\ell = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ qui converge d'après la question précédente. Soit $n \geqslant 1$. Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_1 = u_{n+1} - 1.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} v_k + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + 1.$$

On en déduit donc, par décalage d'indice, que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$

Partie 4

1. Soit $t \in [0,\, n]$. On peut le démontrer en utilisant la concavité du logarithme. Utilisons une méthode classique. Soit $f : t \longmapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t$. f est dérivable sur $[0,\, n]$ comme produit de

polynôme et d'exponentielle. On a :

$$\forall\, t \in [0,\, n],\quad f'(t) = -\frac{1}{n} n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} + \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} \mathrm{e}^{t}$$
$$= \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{t} \left(-1 + 1 - \frac{t}{n}\right) = -\frac{t}{n}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{t}.$$

Sur $[0,\, n]$, f' est donc négative, et f est décroissante. Or $f(0) = 1$. Donc, pour tout $t \in [0,\, n]$, $f(t) \leqslant f(0)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall\, t \in [0,\, n],\quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} \mathrm{e}^{t} \leqslant 1.}$$

2. a) Procédons de même. Soit f la fonction définie sur $[0,\, \sqrt{n}[$ par $f(t) = t + n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)$. f est dérivable sur $[0,\, \sqrt{n}[$ par somme et composées de polynômes et logarithme (ici, $1 - \frac{t}{n} > 0$ et $1 - \frac{t^2}{n} > 0$ si $t \in [0,\, \sqrt{n}[$. On a

$$\forall\, t \in [0,\, \sqrt{n}[,\quad f'(t) = 1 + n\frac{-\frac{1}{n}}{1 - \frac{t}{n}} - \frac{-\frac{2t}{n}}{1 - \frac{t^2}{n}}$$
$$= 1 - \frac{n}{n-t} + \frac{2t}{n - t^2}$$
$$= \frac{(n-t)(n-t^2) - n(n-t^2) + 2t(n-t)}{(n-t)(n-t^2)}$$
$$= \frac{\cancel{n^2} - nt - \cancel{nt^2} + t^3 - \cancel{n^2} + \cancel{nt^2} + 2nt - 2t^2}{(n-t)(n-t^2)} = \frac{t(t^2 + n - 2t)}{(n-t)(n-t^2)}$$

Sur $[0,\, \sqrt{n}[$, $t \geqslant 0$, $(n-t)(n-t^2) \geqslant 0$. Remarquons que le discriminant de $t^2 - n - 2t$ est $\Delta = (-2)^2 - 4n = 4(1-n) \leqslant 0$ car $n \geqslant 1$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 - 2t + n \geqslant 0$. Finalement, on en déduit que

$$\forall\, t \in \left[0,\, \sqrt{n}\right[,\quad f'(t) \geqslant 0.$$

Ainsi, f est croissante sur $[0,\, \sqrt{n}[$. Puisque $f(0) = 0$, on peut conclure que

$$\forall\, t \in \left[0,\, \sqrt{n}\right[,\quad t + n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \geqslant 0 \implies \boxed{t + n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \geqslant \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right).}$$

b) On utilise la relation précédente et on applique la fonction exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant t + n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \implies 1 - \frac{t^2}{n} \leqslant \mathrm{e}^{t + n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)}$$
$$\implies \boxed{1 - \frac{t^2}{n} \leqslant \mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)} = \mathrm{e}^{t}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}.}$$

3. On procède à une disjonction de cas, car la question 2 n'est valable que si $t \in [0,\, \sqrt{n}[$.
- Si $t \in [0,\, \sqrt{n}[$, la relation 2b, en multipliant par $\mathrm{e}^{-t} > 0$, nous donne :

$$1 - \frac{t^2}{n} \leqslant \mathrm{e}^{t}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} \implies \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}.$$

Enfin, la relation 1 peut également s'écrire, en multipliant par $\mathrm{e}^{-t} > 0$:

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}\mathrm{e}^{t} \leqslant 1 \implies \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

Ces deux résultats nous donnent alors

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n} \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

- Si $t \in [\sqrt{n}, n]$ alors $1 - \frac{t^2}{n} \leqslant 0$ et $1 - \frac{t}{n} \geqslant 0$, donc l'inégalité $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est trivialement vérifiée. La deuxième partie repose, comme précédemment, sur la question 1.

Finalement,

$$\boxed{\forall\, t \in [0,\, n], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.}$$

Partie 5

On fixe $x > 0$.

1. Utilisons le résultat de la question 3 de la partie 4. Celui-ci étant valable sur $[0,\, n]$, en multipliant par $t^{x-1} \geqslant 0$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right) t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$$

puis, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) t^{x-1} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

ou encore, par linéarité de l'intégrale

$$\boxed{\int_0^n t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t - \frac{1}{n} \int_0^n \mathrm{e}^{-t} t^{x+1} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) t^{x-1} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^n t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.}$$

2. On va passer à la limite dans l'inégalité précédente.

- $\displaystyle\int_0^n t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Gamma(x)$ puisque $x > 0$, et que l'intégrale définissant Γ converge.
- $\displaystyle\int_0^n t^{x+1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Gamma(x+2)$ de même.
- Donc par produit, $\displaystyle\frac{1}{n} \int_0^n t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Ainsi, par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{x}\right) t^{x-1} \mathrm{d}t$ converge et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) t^{x-1} \mathrm{d}t = \Gamma(x).}$$

3. a) On suit l'indication. Puisqu'il n'y a pas de n dans la définition de B, on pose $u = \frac{t}{n}$, soit $t = nu$. Si $t = 0$, $u = 0$ et si $t = n$, $u = 1$. Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\, 1]$, et $\mathrm{d}t = n\mathrm{d}u$. Par changement de variable :

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}t &= \int_0^1 (1-u)^n\, (nu)^{x-1} n \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 (1-u)^n n^x u^{x-1} \mathrm{d}u = n^x \int_0^1 (1-u)^{n+1-1} u^{x-1} \mathrm{d}u = n^x B(n+1, x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}t = n^x B(n+1, x).}$$

b) D'après la question précédente, et la question 4 de la partie 2, on en déduit que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}t = n^x \frac{n!}{x(x+1) \ldots (x+n)}.$$

Or, d'après la question 2, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$. Ces deux résultats nous donnent finalement que

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.}$$

4. On va réécrire le résultat précédent. Pour tout $x>0$, remarquons que le résultat précédent s'écrit également (puisque Γ ne s'annule pas) par quotient de limite :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n^x n!}.$$

Partons du résultat proposé. Simplifions :

$$\begin{aligned}
xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right) &= xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{k}\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\\
&= xe^{\gamma x}\frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{1\times 2\times\dots\times n}\mathrm{e}^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x}{k}}\\
&= \mathrm{e}^{x\left(\gamma-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!}\\
&= \mathrm{e}^{x(\gamma-\ln(n)-u_n)}\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!}\\
&= \mathrm{e}^{-x\ln(n)}\mathrm{e}^{x(\gamma-u_n)}\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!}\\
&= \mathrm{e}^{x(\gamma-u_n)}\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!n^x}
\end{aligned}$$

D'après la partie 3, $\gamma - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par continuité de l'exponentielle, $\mathrm{e}^{x(\gamma-u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Finalement, par passage à la limite :

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \lim_{n\to+\infty} xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\right) = \frac{1}{\Gamma(x)}.}$$