

30

Chapitre

Couples de variables aléatoires

Résumé

NOUS allons nous intéresser, dans ce chapitre, au comportement de deux (ou plusieurs) variables aléatoires qui peuvent être corrélées ou non. Lorsqu'on connaît leur comportement de couple, on en extraiera le comportement individuel. Enfin, nous terminerons par des théorèmes de stabilité sur la somme de variables aléatoires suivant certaines lois.

Plan du cours

Chapitre 30. Couples de variables aléatoires

I. Couple de variables aléatoires discrètes	3
II. Suite de variables aléatoires discrètes	17
Exercices	21
Corrigés	24

| « Le couple est une réunion de deux personnes qui font rarement la paire. »

Adrien Decourcelle (1821–1892).

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

- ① Savoir déterminer la loi conjointe d'un couple.....□
- ② Savoir utiliser la loi conjointe d'un couple pour déterminer les lois marginales.....□
- ③ Savoir déterminer et utiliser des lois conditionnelles.....□
- ④ Savoir utiliser ou justifier des indépendances de variables aléatoires.....□
- ⑤ Savoir utiliser la formule de transfert dans le cas d'une fonction d'un couple de variables aléatoires.....□
- ⑥ Savoir déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires à l'aide du produit de convolution discret.....□
- ⑦ Connaître les résultats concernant la somme de 2 lois binomiales ou de Poisson, et leurs démonstrations.....□

Remarque

Les résultats concernant la covariance, le coefficient de corrélation linéaire et les suites de variables aléatoires sont officiellement au programme de 2^e année.

I. Couple de variables aléatoires discrètes

Dans toute la suite, X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec Ω fini ou dénombrable.

On note $F = (x_i)_{i \in I}$ et $G = (y_j)_{j \in J}$ les valeurs respectivement prises par X et Y , avec I et J finis ou dénombrables. On admet que l'ensemble $F \times G$ est également fini ou dénombrable.

1. Loi conjointe et lois marginales

Considérons deux variables aléatoires X_1 et X_2 suivant la loi dite de Rademacher, c'est-à-dire que $X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$, $X_2(\Omega) = \{-1, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = -1) = \frac{1}{2}$$

La variable aléatoire $Y_1 = -X_1$ est elle aussi une variable aléatoire de Rademacher, puisque

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1).$$

Les variables aléatoires X_1 et Y_1 ont donc la même loi. Si nous définissons la variable aléatoire Y_2 comme $Y_2 = X_2$, alors X_2 et Y_2 ont également la même loi. En revanche, les couples $Z_1 = (X_1, Y_1)$ et $Z_2 = (X_2, Y_2)$ n'ont pas la même loi. En effet, la variable aléatoire Z_1 est à valeurs dans $\{(1, -1), (-1, 1)\}$ tandis que Z_2 est à valeurs dans $\{(1, 1), (-1, -1)\}$.

On peut donc en conclure que la loi conjointe de deux variables aléatoires contient beaucoup plus d'information que les lois de chacune des deux variables aléatoires prises séparément.

a. Loi conjointe

Définition 30.1. Loi conjointe

La loi du couple $Z = (X, Y)$, appelée **loi conjointe** de X et Y , est $\mathbb{P}_Z = (p_{i,j}^Z)_{(i,j) \in I \times J}$ définie par

$$p_{i,j}^Z = \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)), \quad \text{pour tout } i \text{ dans } I \text{ et tout } j \text{ dans } J.$$

Remarque

Pour plus de simplicité, on notera $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ à la place de $\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$.

Exemple 30.1

On lance deux dés équilibrés, l'un rouge et l'autre bleu, et on appelle X le résultat du dé rouge et Y le résultat du dé bleu. Déterminer la loi du couple (X, Y) .

Solution

Nous avons

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{36}, \quad \text{pour tout } (i, j) \text{ dans } \llbracket 1, 6 \rrbracket^2.$$

Exercice 30.2

On lance deux dés équilibrés, l'un rouge et l'autre bleu, et on appelle X le plus petit résultat des deux dés et Y le plus grand. Déterminer la loi du couple (X, Y) .

Solution

Pour déterminer la loi du couple (X, Y) nous allons représenter les valeurs de (X, Y) en fonction des valeurs des deux dés.

		Dé bleu					
		1	2	3	4	5	6
Dé rouge	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(1,2)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(5,6)
	6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

On a donc

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i > j, \\ \frac{2}{36} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Proposition 30.1. Existence d'un couple de loi fixée

Soit $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs dont la série double converge, de somme 1.

Il existe alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et deux variables aléatoires X et Y définies sur cet espace telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = p_{i,j}$$

Démonstration

Proposition admise.

b. Loïs marginales**Définition 30.2. Loïs marginales**

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $F \times G$. On appelle **loïs marginales** les loïs de X et Y . Elles sont données par les formules suivantes

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = x_i) &= \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), \quad \text{pour tout } x_i \text{ dans } F, \\ \mathbb{P}(Y = y_j) &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), \quad \text{pour tout } y_j \text{ dans } G. \end{aligned}$$

Démonstration

Il s'agit de la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'événements associé aux variables aléatoires Y dans la première formule, et X dans la deuxième.

Exemple 30.3

On lance deux dés équilibrés, l'un rouge et l'autre bleu, et on appelle X le plus petit résultat des deux dés et Y le plus grand. Déterminer les loïs de X et Y .

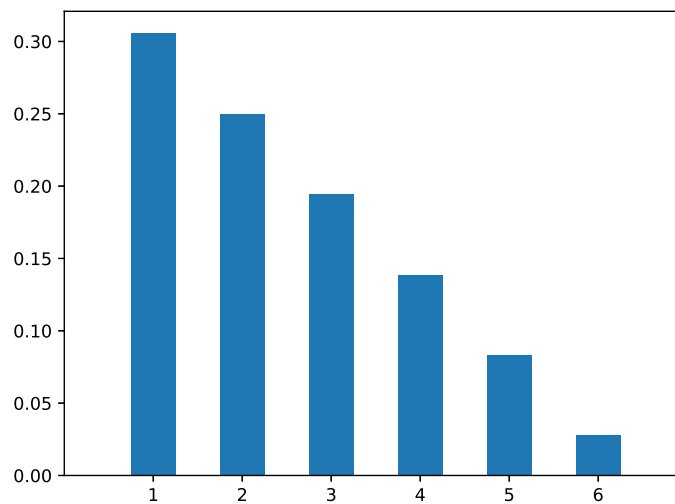
Solution

On a vu que

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i > j, \\ \frac{2}{36} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

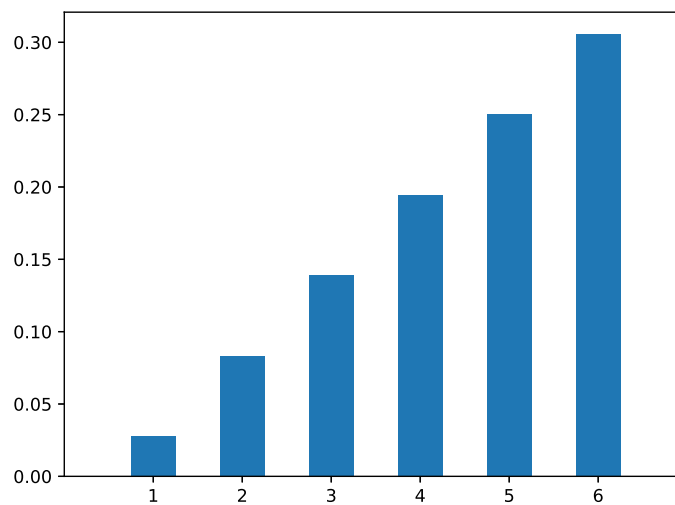
Ainsi, on a pour tout i dans $\{1, \dots, 6\}$,

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^6 \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1 + 2(6 - i)}{36},$$



et pour tout j dans $\{1, \dots, 6\}$,

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1 + 2(j - 1)}{36}.$$



⚠ Attention

La loi des marginales ne permet pas d'obtenir la loi du couple comme vu dans l'exemple introductif.

2. Loïs conditionnelles

On considère l'expérience suivante : on lance un dé rouge et un dé bleu et on pose X le résultat du dé rouge et Y la somme des deux dés. On a déjà vu que la valeur de X , c'est-à-dire le résultat du dé rouge, influence la valeur de Y . Il est donc naturel de s'intéresser à la loi de Y avec l'information a priori que $X = x_i$.

Définition 30.3. Loi conditionnelle

Soit x_i dans F tel que $\mathbb{P}(X = x_i) > 0$. on appelle **loi conditionnelle** de Y sachant $X = x_i$, la probabilité sur G définie par

$$\mathbb{P}_{[X=x_i]}(Y = y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j | X = x_i) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(X = x_i)}, \quad \text{pour tout } y_j \text{ dans } G.$$

Remarque

Puisque $\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$, la loi conditionnelle de Y sachant $X = x_i$ est complètement déterminée par la loi du couple (X, Y) et

$$\frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)} = \frac{p_{i,j}^{(X,Y)}}{\sum_{j \in J} p_{i,j}^{(X,Y)}}.$$

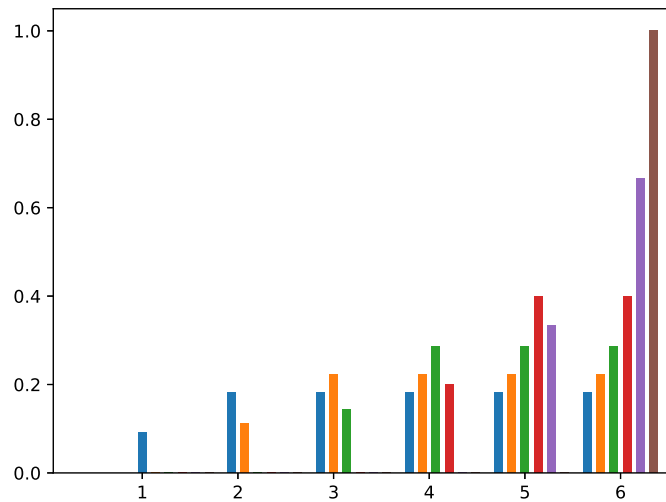
Exemple 30.4

On lance deux dés équilibrés, l'un rouge et l'autre bleu, et on appelle X le plus petit résultat des deux dés et Y le plus grand. Déterminer la loi de Y sachant $X = i$, pour tout i dans $\{1, \dots, 6\}$.

Solution

Nous avons

$$\mathbb{P}(Y = j | X = i) = \frac{\mathbb{P}(X = i, Y = j)}{\mathbb{P}(X = i)} = \begin{cases} \frac{1}{1+2(6-i)} & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j < i, \\ \frac{2}{1+2(6-i)} & \text{si } j > i. \end{cases}$$



Théorème 30.2.

Si l'on connaît la loi marginale de X (respectivement Y) et la loi conditionnelle de Y sachant $X = x_i$ pour tout x_i dans F (respectivement la loi conditionnelle de X sachant $Y = y_j$ pour tout y_j dans G), alors la loi de Y (respectivement de X) est déterminée par

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{x_i \in F} \mathbb{P}(Y = y_j | X = x_i) \mathbb{P}(X = x_i), \quad \text{pour tout } y_j \text{ dans } G,$$

(respectivement)

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{y_j \in G} \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) \mathbb{P}(Y = y_j), \quad \text{pour tout } x_i \text{ dans } F.$$

Démonstration

Il s'agit à nouveau de la formule des probabilités totales appliquées aux systèmes complets d'événements associés aux variables aléatoires.

3. Indépendance

Rappel

Les variables aléatoires X et Y sont dites **indépendantes** si pour toutes parties $A \subset F$ et $B \subset G$, elles vérifient

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Proposition 30.3.

Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes de lois respectives p^X et p^Y .
2. On a, pour tous (x_i, y_j) dans $F \times G$,

$$p_{i,j}^{(X,Y)} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}(Y = y_j) = p_i^X p_j^Y.$$

3. Pour tout $y_j \in G$, et $x_i \in F$ tel que $\mathbb{P}(X = x_i) > 0$, on a

$$\mathbb{P}(Y = y_j | X = x_i) = \mathbb{P}(Y = y_j).$$

Exercice 30.5

Considérons les lancers successifs et indépendants d'un même dé à six faces. On note A_n l'évènement « on obtient 6 au n -ième lancer » et B_n l'évènement « on obtient un nombre différent de 6 au n -ième lancer ». On note $S_1 = T_1$ le temps d'attente du premier 6, T_2 le temps d'attente du second 6 et $S_2 = T_2 - T_1$ le temps écoulé entre le premier 6 obtenu et le second.

Le but de cet exercice est de déterminer la loi de T_2 , puis de montrer que S_1 et S_2 sont indépendantes et de même loi.

1. On suppose dans cette question uniquement que les premiers lancers nous donnent

$$(1, 3, 5, 2, 6, 2, 4, 6, 2, \dots).$$

Donner les valeurs de T_1 , T_2 et S_2 .

2. Rappeler la loi de T_1 .
3. Que vaut l'évènement $\{T_1 = n\} \cap \{T_2 = m\}$ si $n \geq m$?
4. Soient n et ℓ deux entiers non nuls. Exprimer l'évènement $\{T_1 = n\} \cap \{T_2 = n + \ell\}$ en fonction de (A_k) et (B_k) .
5. En déduire la loi du couple (T_1, T_2) .
6. En déduire la loi de T_2 puis la loi de (S_1, S_2) .
7. En déduire la loi de S_2 puis que S_1 et S_2 sont indépendantes.

Solution

1. Rapidement, $T_1 = 5$, $T_2 = 8$ et $S_2 = 3$.
2. La variable aléatoire T_1 suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$ et nous avons

$$\mathbb{P}(T_1 = n) = p(1-p)^{n-1}, \quad \text{pour tout entier } n \text{ non nul.}$$

3. On a $\{T_1 = n\} \cap \{T_2 = m\} = \emptyset$ si $n \geq m$, car $T_2 > T_1$.
4. On a

$$\{T_1 = 1\} \cap \{T_2 = 2\} = A_1 \cap A_2,$$

$$\{T_1 = 1\} \cap \{T_2 = 1 + \ell\} = A_1 \cap \left(\bigcap_{k=2}^{\ell} B_k \right) \cap A_{1+\ell}, \quad \text{pour tout } \ell \geq 2,$$

$$\{T_1 = n\} \cap \{T_2 = n + 1\} = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} B_k \right) \cap A_n \cap A_{n+1}, \quad \text{pour tout } n \geq 2,$$

et enfin

$$\{T_1 = n\} \cap \{T_2 = n + \ell\} = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} B_k \right) \cap A_n \cap \left(\bigcap_{k=n+1}^{n+\ell-1} B_k \right) \cap A_{n+\ell}, \quad \text{pour tous } n, \ell \geq 2.$$

5. D'après les questions précédentes et en utilisant l'indépendance des lancers, il vient

$$\mathbb{P}(T_1 = n, T_2 = m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq m, \\ p^2(1-p)^{m-2} & \text{si } n < m. \end{cases}$$

6. On a pour tout entier $m \geq 2$

$$\mathbb{P}(T_2 = m) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_1 = n, T_2 = m) = \sum_{n=1}^{m-1} p^2(1-p)^{m-2} = p^2(m-1)p^{m-2}.$$

Or, $\{S_1 = n\} \cap \{S_2 = m\} = \{T_1 = n\} \cap \{T_2 = n + m\}$, ce qui entraîne

$$\mathbb{P}(S_1 = n, S_2 = m) = \mathbb{P}(T_1 = n, T_2 = n+m) = p^2(1-p)^{n+m-2} = p(1-p)^{n-1} \times p(1-p)^{m-1}.$$

7. On a

$$\mathbb{P}(S_2 = m) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_1 = n, S_2 = m) = p(1-p)^{m-1} \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} = p(1-p)^{m-1}.$$

Ainsi S_2 suit une loi géométrique de paramètre p (comme S_1) et on a bien

$$\mathbb{P}(S_1 = n, S_2 = m) = \mathbb{P}(S_1 = n)\mathbb{P}(S_2 = m).$$

4. Fonction d'un couple de variable aléatoires discrètes.

Nous avons vu précédemment que le temps d'attente du second succès dans une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes est la somme de deux lois géométriques de même paramètre, et indépendantes.

Dans beaucoup de problèmes de modélisation aléatoire, on est confronté à la gestion de plusieurs variables aléatoires, et notamment à des fonctions d'entre elles (minimum, maximum, somme, produit, etc.). Le saut conceptuel a déjà lieu avec deux variables aléatoires et c'est ce sur quoi nous nous concentrons dans cette partie.

Voici deux résultats préliminaires.

Théorème 30.4. Formule de transfert

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans F et G et soit φ une application de $F \times G$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\varphi(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète.

De plus, si $\varphi(X, Y)$ admet une espérance, alors

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \sum_{(i,j) \in I \times J} \varphi(x_i, y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j). \quad (30.1)$$

Proposition 30.5.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes alors $X+Y$, $X \times Y$, $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ sont des variables aléatoires discrètes.

Remarque

Une propriété importante et utilise pour étudier la loi du max ou du min de deux variables aléatoires :

$$[\max(X, Y) \leq n] = (X \leq n) \cap (Y \leq n) \quad \text{et} \quad [\min(X, Y) \geq n] = (X \geq n) \cap (Y \geq n).$$

Ainsi, si on connaît la loi de (X, Y) , on peut en déduire $\mathbb{P}(\max(X, Y) \leq n)$ ou $\mathbb{P}(\min(X, Y) \geq n)$ et donc la loi de $\min(X, Y)$ ou $\max(X, Y)$, en utilisant, par exemple,

$$\mathbb{P}(M = n) = \mathbb{P}(M \leq n) - \mathbb{P}(M \leq n-1).$$

Somme de deux variables aléatoires discrètes. Commençons par un exemple pour appréhender la notion de somme de variables aléatoires.

Exemple 30.6

On lance simultanément deux dés (un rouge et un bleu) et on pose X comme le résultat du dé rouge et Y le résultat du dé bleu. On définit $Z = X + Y$ comme la somme des deux dés.

1. Déterminer les ensembles F et G des valeurs prises par X et Y respectivement.
2. Déterminer l'ensemble H des valeurs prises par Z .
3. Déterminer l'ensemble $H_k = \{(i, j) \in F \times G : i + j = k\}$, pour tout k dans H .
4. Calculer $\mathbb{P}(Z = k)$, pour tout k dans H .

Solution

1. F et G valent tous les deux $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ puisque X et Y sont les résultats d'un dé à 6 faces.
2. Par somme, $Z(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$.
3. Il faut déterminer H_k pour $k \in \llbracket 2, 12 \rrbracket$. On constate que :

$$H_2 = \{(1, 1)\}, \quad H_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}, \quad H_4 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, \quad H_5 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

et on continue ainsi. Trouvons une méthode plus simple.

$(i, j) \in H_k$ si et seulement si

- $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$,
- $j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$,
- et $i + j = k$, soit $j = k - i$

Ainsi, tout élément de H_k s'écrit $(i, k - i)$, avec

$$1 \leq i \leq 6 \quad \text{et} \quad 1 \leq k - i \leq 6$$

soit

$$1 \leq i \leq 6 \quad \text{et} \quad k - 6 \leq i \leq k - 1$$

ou encore

$$\max(1, k - 6) \leq i \leq \min(6, k - 1).$$

Ainsi

$$H_k = \{(i, k - i), \quad \max(1, k - 6) \leq i \leq \min(6, k - 1)\}.$$

4. Déterminons le cardinal de H_k . Distinguons deux cas :

- Si $1 \leq k \leq 6$, $\max(1, k - 6) = 1$ et $\min(6, k - 1) = k - 1$. Ainsi

$$\text{card}(H_k) = (k - 1) - 1 + 1 = k - 1.$$

- Si $7 \leq k \leq 12$, $\max(1, k - 6) = k - 6$ et $\min(6, k - 1) = 6$. Ainsi

$$\text{card}(H_k) = 6 - (k - 6) + 1 = 13 - k.$$

Utilisons la formule de convolution discret

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 2, 12 \rrbracket, \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{(i, j) \in H_k} \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\ &= \sum_{(i, j) \in H_k} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j) \text{ par indépendance} \\ &= \sum_{(i, j) \in H_k} \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{\text{card}(H_k)}{36}. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat déjà vu dans un chapitre précédent :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(Z = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Théorème 30.6. Produit de convolution discret

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans F et G respectivement. La loi de $Z = X + Y$ est donnée par

$$\mathbb{P}(Z = z_k) = \sum_{(i, j) \in H_k} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), \quad \text{avec } H_k = \{(i, j) \in I \times J : x_i + y_j = z_k\}.$$

Dans le cas où X et Y sont à valeurs **entières**, on a

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = i, Y = k - i) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k - j, Y = j),$$

...

où seul un nombre fini de termes sont non nuls. En particulier, si X et Y sont à **valeurs entières et indépendantes**

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k - j) \mathbb{P}(Y = j).$$

On va utiliser ce résultat pour démontrer deux résultats classiques :

Proposition 30.7. Somme de deux lois binomiales

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ indépendantes. Alors $X + Y$ suit une loi $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Démonstration

Comme X et Y sont respectivement comprises entre 0 et n , et 0 et m , on en déduit que Z est compris entre 0 et $n + m$. Soit k dans $\llbracket 0, n + m \rrbracket$. On a

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i).$$

Or on a

$$\mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)} = \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} p^k (1-p)^{n+m-k},$$

ce qui entraîne

$$\mathbb{P}(Z = k) = p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

Or, d'après la formule de Vandermonde,

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k},$$

et on obtient finalement

$$\mathbb{P}(Z = k) = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}.$$

Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$.

Proposition 30.8. Somme de deux lois de Poisson

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Poisson de paramètre $\alpha > 0$ et une loi de Poisson de paramètre $\beta > 0$. Démontrer que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha + \beta)$.

Démonstration

Nous avons, pour $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X = i) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^i}{i!} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = j) = e^{-\beta} \frac{\beta^j}{j!}.$$

Il vient

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-(\alpha+\beta)} \sum_{i=0}^k \frac{\alpha^i}{i!} \frac{\beta^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^i \beta^{k-i} \\
&= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{(\alpha + \beta)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Ainsi Z suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha + \beta$.

Enfin, voici un résultat que nous avons déjà vu mais que l'on peut démontrer désormais :

Proposition 30.9.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance. Alors $X + Y$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration

Nous allons utiliser le théorème de transfert pour le démontrer. On a, d'après l'équation (30.1),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X + Y) &= \sum_{(i,j) \in I \times J} (x_i + y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{(i,j) \in I \times J} y_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \in I \times J} x_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{i \in I} x_i \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(X),
\end{aligned}$$

et de même

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} y_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}(Y = y_j) = \mathbb{E}(Y).$$

Ceci achève la preuve.

Le cas du maximum et du minimum de deux variables aléatoires a été effleuré dans l'exemple 30.3 et sera approfondi en exercice. Le cas du produit de deux variables aléatoires est évoqué dans la sous-partie suivante.

5. Covariance et coefficient de corrélation linéaire

On ne donnera pas la loi générale d'un produit de variables aléatoires.

Proposition 30.10.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Alors XY admet une espérance. Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration

Remarquons que

$$(X + Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY \geq 0 \quad \text{et} \quad (X - Y)^2 = X^2 + Y^2 - 2XY \geq 0.$$

On a donc $|XY| \leq \frac{X^2 + Y^2}{2}$, ce qui montre que si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance. Par ailleurs, d'après l'équation (30.1), nous avons

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$ et

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \times \sum_{j \in J} y_j \mathbb{P}(Y = y_j) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Définition 30.4.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. On définit la **covariance** de X et Y comme la quantité

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Remarque

On a $\text{Var}(X) = \text{Cov}(X, X)$.

Proposition 30.11.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Alors $X + Y$ admet un moment d'ordre 2 et

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

En particulier, si X et Y sont indépendantes, on a

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Démonstration

D'après la formule de Koenig-Huygens, on a

$$\text{Var}(X + Y) = \mathbb{E}[(X + Y)^2] - \mathbb{E}(X + Y)^2.$$

En développant, il vient

$$\text{Var}(X + Y) = \mathbb{E}(X^2 + Y^2 + 2XY) - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, et donc $\text{Cov}(X, Y) = 0$, et finalement $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

**Attention**

On peut avoir $\text{Cov}(X, Y) = 0$ sans que X et Y ne soient indépendantes.

Exercice 30.7

Soient X une variable aléatoire telle que

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3}.$$

Soit Y la variable aléatoire définie par $\mathbb{1}_{\{0\}}(X)$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Donner la loi de Y .
2. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
3. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Solution

1. La variable aléatoire Y prend les valeurs 0 ou 1, c'est donc une variable aléatoire de Bernoulli, et il nous reste à déterminer son paramètre. Nous avons $\{Y = 1\} = \{X = 0\}$, d'où

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3}.$$

2. Remarquons que $XY = 0$. En effet, si $X \neq 0$ alors $Y = 0$ et $XY = 0$, et si $X = 0$ alors $XY = 0$. On a donc $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(0) = 0$. Par ailleurs, on a $\mathbb{E}(X) = 0$. On a donc $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
3. Nous avons

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, X = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} > 0.$$

Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition 30.5.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et non constantes. On définit le **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y par

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Théorème 30.12.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et non constantes.

- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$;
- $|\rho(X, Y)| = 1$ si, et seulement si, il existe deux réels $a \neq 0$ et b tels que $Y = aX + b$.

Démonstration

Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = \text{Var}(tX + Y), \quad \text{pour tout réel } t.$$

La fonction φ est alors à valeurs positives. Montrons qu'elle s'écrit sous la forme d'un trinôme du second degré. Nous avons

$$\varphi(t) = \text{Var}(tX + Y) = \text{Var}(tX) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(tX, Y) = \text{Var}(X)t^2 + 2\text{Cov}(X, Y)t + \text{Var}(Y).$$

Le discriminant de φ est donné par

$$\Delta = 4\text{Cov}(X, Y)^2 - 4\text{Var}(X)\text{Var}(Y) = 4[\text{Cov}(X, Y)^2 - \text{Var}(X)\text{Var}(Y)].$$

Or φ est à valeurs positives, on en déduit donc que φ ne possède pas de racine ou bien possède une racine double. On a donc $\Delta \leq 0$, ce qui entraîne

$$\text{Cov}(X, Y)^2 \leq \text{Var}(X)\text{Var}(Y),$$

et donc

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y,$$

et finalement

$$|\rho(X, Y)| \leq 1.$$

On remarque que le cas d'égalité a lieu quand $\Delta = 0$. Dans ce cas, la fonction φ s'annule en $t_0 = -\frac{2\text{Cov}(X, Y)}{2\text{Var}(X)} = -\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}$ et on a alors

$$\varphi(t_0) = 0 = \text{Var}(t_0 X + Y).$$

Ceci entraîne qu'il existe une constante b telle que $t_0 X + Y = b$ et on a bien $Y = aX + b$ en prenant $a = -t_0$.

Exercice 30.8

Les enseignants d'E1B, au nombre de dix, organisent une petite sauterie pour les fêtes et à cette occasion apporte chacun un cadeau. L'enseignant 1 apporte le cadeau 1, l'enseignant 2 apporte le cadeau 2, etc. Lors de la soirée, on procède à un tirage au sort pour répartir les cadeaux de la manière suivante : on place 10 jetons identiques numérotés de 1 à 10 dans une urne et chaque enseignant pioche à tour de rôle un jeton sans remise.

1. Quelle est la probabilité que l'enseignant 1 reparte avec le *Discours de la méthode* dont il comptait se débarrasser ?
2. Quelle est la probabilité que l'enseignant 1 reparte avec le *Discours de la méthode* dont il comptait se débarrasser et que l'enseignant 2 reparte avec un porte clé à l'effigie d'une marque de bière qu'il avait en double et dont il comptait également se débarrasser ?
3. Pour tout i dans $\{1, \dots, 10\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'enseignant i repart avec le cadeau i (son propre cadeau), et 0 sinon.
 - a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_i , pour tout i dans $\{1, \dots, 10\}$, puis calculer $\mathbb{E}(X_i)$ et $\text{Var}(X_i)$.
 - b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_i X_j$, pour tous i et j dans $\{1, \dots, 10\}$ avec $i \neq j$.
 - c) Calculer $\mathbb{E}(X_i X_j)$, pour tout i et j dans $\{1, \dots, 10\}$ avec $i \neq j$.
 - d) En déduire la covariance de X_i et X_j , pour tout i et j dans $\{1, \dots, 10\}$ avec $i \neq j$, puis leur coefficient de corrélation linéaire.
4. On pose $X = X_1 + \dots + X_{10}$.
 - a) Que représente X ?
 - b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
 - c) Exprimer $\text{Var}(X)$ en fonction de $\text{Var}(X_i)$ et $\text{Cov}(X_i, X_j)$.
 - d) En déduire $\text{Var}(X)$.

Solution

1. Nous sommes dans le cas d'un tirage sans remise de 10 jetons parmi 10. L'espace de probabilité sous-jacent est l'ensemble des suites à 10 éléments distincts parmi 10 et le nombre de tirages possibles est $10!$ (10 choix pour le premier tirage, 9 choix pour le

second, etc.).

Le nombre de cas favorables à l'évènement « L'enseignant 1 repart avec son propre cadeau » est $9!$. En effet, un des éléments de la suite à 10 éléments distincts est imposé, et il reste donc $9!$ possibilités de répartir les 9 autres éléments. La probabilité recherchée est donc $\frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$.

2. L'espace de probabilité sous-jacent n'a pas changé. Le nombre de cas favorables à la réalisation simultanée de ces deux événements est $8!$. En effet, deux des éléments de la suite à 10 éléments distincts sont imposés, et il reste donc $8!$ possibilités de répartir les 8 autres éléments. La probabilité recherchée est donc $\frac{8!}{10!} = \frac{1}{90}$.
3. a) Pour tout i dans $\{1, \dots, 10\}$, la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{10}$. On a alors

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X_i) = \frac{9}{100}, \quad \text{pour tout } i \text{ dans } \{1, \dots, 10\}.$$

- b) Soient $i \neq j$. La variable aléatoire $X_i X_j$ vaut 1 si $X_i = X_j = 1$, et 0 sinon. C'est donc une loi de Bernoulli, et il nous reste à déterminer son paramètre. Nous avons vu que la probabilité que deux enseignants repartent avec leur propre cadeau est donné par $\frac{1}{90}$, et on en déduit que $X_i X_j$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{90}$.
- c) On a

$$\mathbb{E}(X_i X_j) = \frac{1}{90}, \quad \text{pour tout } i \text{ et } j \text{ dans } \{1, \dots, 10\} \text{ avec } i \neq j.$$

- d) On a donc, pour tout i et j dans $\{1, \dots, 10\}$ avec $i \neq j$,

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \frac{1}{90} - \frac{1}{100} = \frac{1}{900},$$

puis

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var}(X_i)}\sqrt{\text{Var}(X_j)}} = \frac{1/900}{9/100} = \frac{1}{81}.$$

4. a) La variable aléatoire X représente le nombre d'enseignants qui repartent avec leur propre cadeau.
- b) On a

$$\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_{10}) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_{10}) = 1.$$

- c) On a

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + \dots + X_{10}) &= \text{Var}[(X_1 + \dots + X_9) + X_{10}] \\ &= \text{Var}(X_1 + \dots + X_9) + \text{Var}(X_{10}) + 2\text{Cov}(X_1 + \dots + X_9, X_{10}) \\ &= \text{Var}(X_1 + \dots + X_9) + \text{Var}(X_{10}) + 2 \sum_{i=1}^9 \text{Cov}(X_i, X_{10}) \\ &= \text{Var}(X_1 + \dots + X_8) + \text{Var}(X_9) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^8 \text{Cov}(X_i, X_9) + \text{Var}(X_{10}) + 2 \sum_{i=1}^9 \text{Cov}(X_i, X_{10}) \\ &= \dots \\ &= \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_{10}) + 2 \sum_{j=2}^{10} \sum_{i=1}^j \text{Cov}(X_i, X_j). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{V}\text{ar} \left(\sum_{i=1}^{10} X_i \right) = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{V}\text{ar}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

d) Puisque $\mathbb{V}\text{ar}(X_i) = \frac{9}{100}$, pour tout i dans $\llbracket 1, 10 \rrbracket$, on a

$$\sum_{i=1}^{10} \mathbb{V}\text{ar}(X_i) = 10 \cdot \frac{9}{100} = \frac{9}{10}.$$

Par ailleurs, on a $\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{900}$, pour tous i et j dans $\{1, \dots, 10\}$ avec $i < j$.
On a donc

$$2 \sum_{(i,j): i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) = 2 \text{card}(\{(i,j) \in \llbracket 1, 10 \rrbracket^2, i < j\}) \cdot \frac{1}{900} = 2 \cdot \frac{90}{2} \cdot \frac{1}{900} = \frac{1}{10}$$

Finalement, on a

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = 1.$$

Définition 30.6.

Deux variables aléatoires sont dites **non corrélées** si leur coefficient de corrélation linéaire est nul.

Proposition 30.13.

Deux variables aléatoires indépendantes sont non corrélées. La réciproque est fausse.

Exemple 30.9

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli.

1. Montrer que XY suit une loi de Bernoulli.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, elles sont non corrélées.

Solution

1. Les variables aléatoires X et Y étant à valeurs dans $\{0, 1\}$, le produit XY est aussi à valeurs dans $\{0, 1\}$, c'est donc bien une loi de Bernoulli et son paramètre est donné par $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$.
2. On sait déjà que si X et Y sont indépendantes alors X et Y sont non corrélées. Supposons à présent qu'elles sont non corrélées. On a alors

$$0 = \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Si p est le paramètre de X et q celui de Y , on a alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{E}(Y) = q$. On en déduit donc que

$$\mathbb{E}(XY) = pq.$$

En particulier, le paramètre de XY est pq , ce qui prouve que

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1).$$

Ceci prouve que X et Y sont indépendantes puisqu'elles ne prennent que deux valeurs chacune.

II. Suite de variables aléatoires discrètes

1. Généralités

Définition 30.7.

Soit n un entier non nul et soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles et discrètes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Le n -uplet $X = (X_1, \dots, X_n)$ est appelé **vecteur aléatoire** sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 30.14.

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret et f une application de $X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors $f(X)$ est une variable aléatoire discrète.

Corollaire 30.15.

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire discret, alors $\sum_{i=1}^n X_i$, $\prod_{i=1}^n X_i$, $\max(X)$ et $\min(X)$ sont des variables aléatoires discrètes.

Rappel

Soit n un entier non nul. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** si pour tout n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ dans $X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ on a

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Remarque

Le terme « mutuellement » est bien souvent omis sauf quand le contexte l'impose.

Rappel

On dit qu'une famille de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires indépendante si, pour toute partie finie I de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Théorème 30.16. Lemme des coalitions

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Soient I et J deux parties de $\{1, \dots, n\}$ telles que $I \cap J = \emptyset$. Alors toute variable aléatoire fonction de $(X_i)_{i \in I}$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $(X_j)_{j \in J}$.

2. Stabilité des lois binomiales et de Poisson par l'addition

Théorème 30.17.

Soient m un entier non nul, p un élément de $]0, 1[$, $(n_1, \dots, n_m)$ un m -uplet d'entiers non nuls et $X_1, \dots, X_m$ des variables aléatoires **indépendantes** telles que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_i, p)$. Alors $X = X_1 + \dots + X_m \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + \dots + n_m, p)$.

Proposition 30.18.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et équidistribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p dans $]0, 1[$. Alors $X = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$...

de paramètres n et p .



Attention

Ceci est faux si la probabilité de succès p n'est pas commune à toutes les variables aléatoires.

Théorème 30.19.

Soient n un entier non nul, $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ un n -uplet de réels strictement positifs et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que X_i suive la loi de Poisson de paramètre θ_i . Alors $X = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\theta = \theta_1 + \dots + \theta_n$.

Démonstration

Ces résultats se démontrent par récurrence à partir du résultat valable pour la somme de deux variables aléatoires.

Enfin, voici un résultat fort utile dans les calculs de variance.

Théorème 30.20.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires **indépendantes**. Alors

$$\mathbb{V}\text{ar}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}\text{ar}(X_1) + \dots + \mathbb{V}\text{ar}(X_n).$$

Remarque

On retrouve ainsi sans effort la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Soit $X = X_1 + \dots + X_n$ avec $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et équidistribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On a alors

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{V}\text{ar}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}\text{ar}(X_1) + \dots + \mathbb{V}\text{ar}(X_n) = np(1 - p).$$

Exercices

30

Exercices

Couples finis

●○○ Exercice 1 Tirage dans une urne (10 min.)

On dispose d'une urne contenant 4 boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4. On tire simultanément deux boules. On note U le numéro de la plus petite boule tirée, et V le numéro de la plus grande boule tirée.

Déterminer la loi conjointe de (U, V) , puis les lois de U et V .

●○○ Exercice 2 Des boîtes et des boules (15 min.)

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n . Il y a, dans la boîte numérotée k (pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$), k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note X le numéro de la boîte, et Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
2. En déduire la loi de Y .
3. Calculer l'espérance de Y .

●○○ Exercice 3 Somme de loi uniforme (10 min.)

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket^2$:

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

1. Déterminer la loi de X et de Y .
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

●○○ Exercice 4 Du min et du max (20 min.)

On lance un dé à n faces, bien équilibré, deux fois. On note X la variable aléatoire désignant le résultat du premier tirage, et Y celle désignant le résultat du second tirage. On note enfin A le plus petit des deux nombres obtenus, et B le plus grand des deux nombres obtenus.

1. Exprimer A et B en fonction de X et Y .
2. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
3. En déduire les lois de A et B .
4. Déterminer l'espérance de A et de B .

Couples discrets

●○○ Exercice 5 Une loi presque géométrique (15 min.)

Soient X et Y deux variables aléatoires, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telles que

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{2^{i+j}}.$$

1. Calculer la valeur de a .

2. Déterminer les lois marginales de X et Y .
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

●○○ Exercice 6 Un couple très géométrique (15 min.)

Soient X et Y deux variables aléatoires, indépendantes, suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $Z = \min(X, Y)$, et $q = 1 - p$.

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq n)$.
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z \geq n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(Z = n)$. Quelle est la loi de Z ?
3. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

●●○ Exercice 7 Un guichet de banque (15 min.)

Dans une banque, il y a deux guichets. Chaque personne arrivant dans la banque choisit un guichet, indépendamment les uns des autres. Elle choisit le premier guichet avec une probabilité p , ou le deuxième avec une probabilité $q = 1 - p$.

En une heure, le nombre X de personnes arrivées dans la banque suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. On désigne enfin Y le nombre de personnes ayant choisi le premier guichet.

1. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(Y = k | X = n)$, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la loi conjointe du couple (X, Y) .
3. Déterminer la loi de Y . Quelle loi usuelle suit Y ?

●●○ Exercice 8 Fille ou garçon ? (20 min.)

On suppose que, dans une famille, le nombre N d'enfants suit une loi de Poisson de paramètre λ . On suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in]0, 1[$, et celle que ce soit un garçon est $q = 1 - p$. On suppose aussi que les sexes des naissances successives sont indépendants.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles dans la famille, et Y celle du nombre de garçons.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (N, X) .
2. En déduire la loi de X , puis celle de Y .

●○○ Exercice 9 Une espérance (10 min.)

Soient p et q deux réels de $]0, 1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires, suivant respectivement une loi $\mathcal{B}(2, p)$ et $\mathcal{G}(q)$. Montrer que $Z = Y^X$ admet une espérance, et déterminer sa valeur.

Pour aller plus loin

●●○ Exercice 10 Des pièces au hasard (30 min.)

Soit $p \in]0, 1[$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On dispose de N pièces de monnaie non équilibrées, chacune des pièces amenant un Pile avec probabilité p . On lance les N pièces de monnaie. Un joueur, yeux bandés, qui n'a pas assisté au lancer, choisit au hasard n pièces parmi les N (avec $n \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$). Il gagne celles choisies qui sont tombées sur Pile.

On note X le nombre de Piles obtenues parmi les N pièces, et Y le nombre de pièces gagnées par le joueur.

1. Déterminer la loi de X .
2. Justifier que $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
3. Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, et $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la valeur de $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j)$.

4. En déduire la loi du couple (X, Y) . On pourra montrer que

$$\binom{k}{j} \binom{N-k}{n-j} \binom{N}{k} = \binom{n}{j} \binom{N-n}{k-j} \binom{N}{n}.$$

5. Déterminer alors la loi de Y et justifier que Y suit une loi usuelle.

●●● **Exercice 11** Encore la loi géométrique (30 min.)

1. Soit $p \in]0, 1[$. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

Soient $(p, q) \in]0, 1[^2$, et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètres respectifs p et q .

- Retrouver rapidement la loi de $\min(X, Y)$, vu dans l'exercice 6.
- Déterminer la loi de $\max(X, Y)$.
- Déterminer la loi de $X + Y$.
- Déterminer la loi de $X - Y$.
- En déduire la loi de $|X - Y|$.

●○○ **Exercice 12** Des matrices aléatoires (10 min.)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible.

On pourra utiliser un des résultats de l'exercice 11.

●●● **Exercice 13** D'après HEC (20 min.)

Soit $p \in]0, 1[$. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \sum_{\substack{|t| \leq n-2 \\ n \text{ et } |t| \text{ ont même parité}}} p^2(1-p)^{n-2}.$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge et que sa somme vaut 1.

On considère alors deux variables aléatoires discrètes X et Y , définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$ et pour tout $n \geq 2$ et $t \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{P}(X = n, Y = t) = \begin{cases} p^2(1-p)^{n-2} & \text{si } |t| \leq n-2 \text{ et } n \text{ et } |t| \text{ ont même parité} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Déterminer la loi marginale de X .

3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(Y = t) = \frac{p(1-p)^{|t|}}{2-p}$.

On pourra raisonner suivant la parité de $|t|$.

4. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

On remarque tout d'abord que les univers images de X et Y sont, par définition,

$$X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \llbracket 2, 4 \rrbracket.$$

La probabilité d'un tirage quelconque (i, j) , avec $i \neq j$ et $i, j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$ vaut

$$\mathbb{P}(i, j) = \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$, on a alors

$$\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq \ell \\ \frac{1}{6} & \text{si } k < \ell \end{cases}.$$

On applique alors la formule sur les lois marginales :

$$\begin{aligned} \boxed{\forall k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k)} &= \sum_{\ell=2}^4 \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \\ &= \sum_{\ell=k+1}^4 \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \text{ car la probabilité est nulle si } k \geq \ell \\ &= \frac{1}{6} (4 - (k + 1) + 1) = \boxed{\frac{4 - k}{6}}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \boxed{\forall \ell \in \llbracket 2, 4 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y = \ell)} &= \sum_{k=1}^3 \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell-1} \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \text{ car la probabilité est nulle si } k \geq \ell \\ &= \frac{1}{6} (\ell - 1 - 1 + 1) = \boxed{\frac{\ell - 1}{6}}. \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Remarquons tout d'abord que $X(\omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ par définition de l'expérience. Par construction, on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad k < \ell \implies \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = 0.$$

Soit alors $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $k \geq \ell$. D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) &= \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}_{(X=k)}(Y = \ell) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{k} \text{ par équiprobabilité des choix et tirages} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < \ell \\ \frac{1}{nk} & \text{si } k \geq \ell \end{cases}.$$

2. En appliquant la formule des lois marginales :

$$\begin{aligned}
 \boxed{\forall \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y = \ell)} &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \\
 &= \sum_{k=\ell}^n \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \quad \text{car la proba est nulle si } k < \ell \\
 &= \boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{k}}
 \end{aligned}$$

3. Y admet une espérance puisqu'elle est à support fini. On va la calculer en utilisant la théorème de Fubini sur un domaine triangulaire :

$$\begin{aligned}
 \boxed{\mathbb{E}[Y]} &= \sum_{\ell=1}^n \ell \mathbb{P}(Y = \ell) \\
 &= \sum_{\ell=1}^n \frac{\ell}{n} \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=\ell}^n \frac{\ell}{k} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^k \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{k(k+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\
 &= \boxed{\frac{n+3}{4}}
 \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Tout d'abord, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ d'après la loi du couple. D'après la formule des lois marginales :

$$\begin{aligned}
 \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\
 &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

De manière symétrique, la loi de Y est la même :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket).}$$

2. Notons $Z = X + Y$. Par définition, $Z(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$. D'après la formule du produit de convolution discret :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i, Y = k - i).$$

La probabilité de la somme est non nulle si et seulement si $0 \leq k - i \leq n$ et $0 \leq i \leq n$ soit $k - n \leq i \leq n$. Ainsi :

- Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i, Y = k - i) \\
 &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{k+1}{(n+1)^2}.
 \end{aligned}$$

- Si $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i, Y = k - i) \\ &= \sum_{i=k-n}^n \mathbb{P}(X = i, Y = k - i) \\ &= \sum_{i=k-n}^n \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n - (k - n) + 1}{(n+1)^2} = \frac{2n - k + 1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

On en déduit la loi de $X + Y$:

$$Z(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Z = k) = \frac{k+1}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Z = k) = \frac{2n - k + 1}{(n+1)^2}.$$

- Remarquons que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = i, Y = j) &= \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} \\ &= \mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = j).\end{aligned}$$

Ainsi X et Y sont indépendantes.

Exercice 4

1. Par définition, $A = \min(X, Y)$ et $B = \max(X, Y)$.
2. Tout d'abord, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Par indépendance des tirages, on a

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = \ell) = \frac{1}{n^2}.$$

3. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On va exprimer $\mathbb{P}(A \geq i)$ en fonction de la loi du couple (X, Y) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \geq i) &= \mathbb{P}(X \geq i, Y \geq i) \\ &= \sum_{k=i}^n \sum_{\ell=i}^n \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \\ &= \frac{(n - i + 1)^2}{n^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(A = i) = \mathbb{P}(A \geq i) - \mathbb{P}(A \geq i + 1)$$

et finalement

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(A = i) = \frac{2n - 2i + 1}{n^2}.$$

Par le même raisonnement, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \leq i) &= \mathbb{P}(X \leq i, Y \leq i) \\ &= \sum_{k=1}^i \sum_{\ell=1}^i \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \frac{i^2}{n^2}.\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{P}(B = i) = \mathbb{P}(B \leq i) - \mathbb{P}(B \leq i - 1) = \frac{i^2}{n^2} - \frac{(i - 1)^2}{n^2}$$

et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(B = i) = \frac{2i - 1}{n^2}.$$

4. A , comme B , admettent une espérance car elles sont à support fini. Par calcul :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A] &= \sum_{i=1}^n i\mathbb{P}(A=i) = \sum_{i=1}^n \frac{(2n+1)i - 2i^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \left((2n+1) \frac{n(n+1)}{2} - 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B] &= \sum_{i=1}^n i\mathbb{P}(B=i) = \sum_{i=1}^n \frac{2i^2 - i}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.\end{aligned}$$

Exercice 5

1. Pour que la loi donnée soit une loi conjointe, il faut et il suffit que les termes soient tous positifs (donc $a \geq 0$) et que la somme double soit égale à 1. Calculons celle-ci :

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} \mathbb{P}(X=i, Y=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a}{2^{i+j}} = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a}{2^i} \frac{1}{2^j} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a}{2^i} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a}{2^i} \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= a \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = a\end{aligned}$$

Ainsi, la loi est une loi conjointe si et seulement si $a = 1$.

2. Le calcul est symétrique. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{i-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, X et Y suivent toutes les deux des lois géométriques de paramètre $\frac{1}{2}$.

3. On constate rapidement que pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^j} = \mathbb{P}(X=i) \times \mathbb{P}(Y=j).$$

Ainsi, X et Y sont indépendantes.

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq n) &= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=n}^{+\infty} pq^{j-1} \\ &= p \sum_{j=n}^{+\infty} q^{j-1} = p \frac{q^{n-1}}{1-q} = (1-p)^{n-1}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X \geq n) = (1-p)^{n-1}.}$$

2. Tout d'abord, remarquons que $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Par définition du minimum, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z \geq n) = \mathbb{P}(X \geq n, Y \geq n)$. Par indépendance de X et Y et la question précédente :

$$\mathbb{P}(Z \geq n) = \mathbb{P}(X \geq n, Y \geq n) = \mathbb{P}(X \geq n)\mathbb{P}(Y \geq n) = (1-p)^{2n-2}.$$

Enfin, puisque $\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z \geq n) - \mathbb{P}(Z \geq n+1)$, on conclut :

$$\begin{aligned} \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Z = n)} &= (1-p)^{2n-2} - (1-p)^{2(n+1)-2} \\ &= (1-p)^{2n-2} - (1-p)^{2n} \\ &= (1-p)^{2n-2} (1 - (1-p)^2) = \boxed{(1-p)^{2n-2} p(2-p)}. \end{aligned}$$

3. X et Z ne sont pas indépendantes. En effet, par définition du minimum, on constate que $\mathbb{P}_{(X=1)}(Z = 1) = 1$. En effet, si $X = 1$, on est sûr que le minimum vaut 1. Par $\mathbb{P}(Z = 1) = p(2-p) \neq 1$, puisque $p \neq 1$. Ainsi,

$$\mathbb{P}_{(X=1)}(Z = 1) \neq \mathbb{P}(Z = 1)$$

les variables aléatoires X et Z ne sont donc pas indépendantes.

Exercice 7

1. Soient k et n fixés. Si $X = n$, on dispose de n personnes qui sont dans la banque. Ils choisissent chacun, indépendamment les uns des autres, le premier guichet avec probabilité p . Le nombre de personnes choisissant le guichet 1 suit donc une loi binomiale de paramètre n et p . Ainsi, si $k \leq n$:

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

et si $k > n$, alors $\mathbb{P}(Y = k | X = n) = 0$.

2. Tout d'abord, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Remarquons que la formule précédente est valable si $n = 0$ (la probabilité est nulle sauf si $k = 0$) et également si $k = 0$ et $n \neq 0$. Ainsi, si $k > n$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = n, Y = k) = 0} \text{ et si } k \leq n :$$

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbb{P}(X = n, Y = k)} &= \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = k | X = n) \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

3. On détermine alors la loi marginale de Y : soit $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbb{P}(Y = k)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{n!} (1-p)^n \text{ par changement d'indice} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} = e^{-\lambda} \frac{p^k \lambda^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = \boxed{e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}} \end{aligned}$$

Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 8

1. Tout d'abord, $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soient $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Remarquons déjà que si $k > n$, $\mathbb{P}(N = n, X = k) = 0$ (il est impossible d'avoir plus de filles que d'enfants).

Si $k \leq n$, remarquons que $\mathbb{P}_{N=n}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. En effet, si le nombre d'enfants N est fixé à n , chaque naissance étant indépendante, le nombre de filles dans ces n enfants suit une loi binomiale de paramètre n et p .

Mais alors, si $k \leq n$,

$$\mathbb{P}(N = n, X = k) = \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ainsi,

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(N = n, X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

2. On en déduit la loi marginale de X . Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbb{P}(X = k)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n, X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{n!} (1-p)^n \text{ par changement d'indice} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k e^{\lambda(1-p)} = \boxed{e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$. Par un raisonnement symétrique, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda(1-p))$.

Exercice 9

On va appliquer la formule de transfert. Tout d'abord, $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. X et Y sont indépendantes, donc

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \times \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) &= \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j) \\ &= \binom{2}{i} p^i (1-p)^{2-i} q (1-q)^{j-1}. \end{aligned}$$

$Z = Y^X$ est à valeurs positives (car X et Y le sont) donc, d'après la formule de transfert, Z admet une espérance si et seulement la série $\sum_{(i,j) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \times \mathbb{N}^*} j^i \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ est convergente (car elle sera alors absolument convergente). Sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \times \mathbb{N}^*} j^i \mathbb{P}(X = i, Y = j) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j^i \binom{2}{i} p^i (1-p)^{2-i} q (1-q)^{j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^2 j^i \binom{2}{i} p^i (1-p)^{2-i} q (1-q)^{j-1} \text{ par Fubini} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} (1-p)^2 q (1-q)^{j-1} + 2jp(1-p)q(1-q)^{j-1} + j^2 p^2 q (1-q)^{j-1} \end{aligned}$$

$$= (1-p)^2 q \sum_{j=1}^{+\infty} (1-q)^{j-1} + 2p(1-p)q \sum_{j=1}^{+\infty} j(1-q)^{j-1} + p^2 q \sum_{j=1}^{+\infty} j^2 (1-q)^{j-1}$$

Or, en reconnaissant des sommes géométriques (éventuellement dérivées) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{+\infty} (1-q)^{j-1} &= \frac{1}{1-(1-q)} = \frac{1}{q} \\ \sum_{j=1}^{+\infty} j(1-q)^{j-1} &= \frac{1}{(1-(1-q))^2} = \frac{1}{q^2} \\ \sum_{j=1}^{+\infty} j^2 (1-q)^{j-1} &= \sum_{j=1}^{+\infty} (j(j-1) + j)(1-q)^{j-1} \\ &= \frac{2}{(1-(1-q))^3} + \frac{1}{(1-(1-q))^2} = \frac{2(1-q)}{q^3} + \frac{1}{q^2} = \frac{2-q}{q^3} \end{aligned}$$

On aurait également pu utiliser les résultats sur les variables aléatoires géométriques (espérance et moment d'ordre 2).

Finalement, toutes les séries convergent : Z admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= (1-p)^2 q \frac{1}{q} + 2p(1-p)q \frac{1}{q^2} + p^2 q \frac{2-q}{q^3} \\ &= \frac{(1-p)^2 q^2 + 2pq(1-p) + p^2(2-q)}{q^2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{E}[Z] = \frac{(1-p)^2 q^2 + 2pq(1-p) + p^2(2-q)}{q^2}.}$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 10

1. On dispose d'une épreuve de Bernoulli, de succès « obtenir Pile », de probabilité p . On répète N fois cette épreuve de manière successive et indépendante. X , qui compte le nombre de succès, suit donc une loi binomiale de paramètre N et p : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p)$.

2. Y compte, parmi les n pièces choisies, le nombre de pièce tombées sur Pile. Ainsi, il s'agit d'un entier compris entre 0 (aucune pièce n'est tombée sur Pile) et n (toutes les pièces sont tombées sur Pile). Ainsi $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

3. Tout d'abord, si $j > k$, il est impossible d'avoir choisi j pièces ayant fait Pile sachant qu'il y a k pièces tombées sur Pile. Donc

$$\boxed{\forall j > k, \quad \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) = 0.}$$

Si $j \leq k$: on suppose qu'on a pris n pièces et k pièces sur les N sont sur Pile. Pour obtenir j pièces avec Pile, on doit choisir j pièces parmi les k pièces tombées sur Pile, et les $n-j$ pièces restantes parmi les $N-k$ pièces tombées sur Face. Pour cela, il faut que $n-j \leq N-k$ c'est-à-dire $j \geq k + n - N$, sinon la probabilité est nulle. Tous les tirages étant équiprobables :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) = \frac{\binom{k}{j} \binom{N-k}{n-j}}{\binom{N}{n}}.}$$

4. Soient $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Par théorème :

$$\mathbb{P}(X = k, Y = j) = \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j).$$

Si $j > k$, ou $j < k + n - N$, $\mathbb{P}(X = k, Y = j) = 0$. Si $j \leq k$, en utilisant l'indication qu'on démontre en dessous :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k, Y = j) &= \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \frac{\binom{k}{j} \binom{N-k}{n-j}}{\binom{N}{n}} \\ &= p^k (1-p)^{N-k} \frac{\binom{n}{j} \binom{N-n}{k-j} \binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} \\ &= \binom{n}{j} \binom{N-n}{k-j} p^k (1-p)^{N-k}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$\forall (k, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \text{ ou } j < k + n - N \\ \binom{n}{j} \binom{N-n}{k-j} p^k (1-p)^{N-k} & \text{sinon} \end{cases}$
--

Démontrons le résultat proposé :

$$\begin{aligned}\binom{k}{j} \binom{N-k}{n-j} \binom{N}{k} &= \frac{k!}{j!(k-j)!} \frac{(N-k)!}{(n-j)!(N-k-(n-j))!} \frac{N!}{k!(N-k)!} \\ &= \frac{N!}{j!(k-j)!(n-j)!(N-k-n+j)!}\end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned}\binom{n}{j} \binom{N-n}{k-j} \binom{N}{n} &= \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(N-n)!}{(k-j)!(N-n-(k-j))!} \frac{N!}{n!(N-n)!} \\ &= \frac{N!}{j!(n-j)!(k-j)!(N-n-k+j)!}\end{aligned}$$

On obtient bien le même résultat.

5. Utilisons les lois marginales. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(X = k, Y = j) \\ &= \sum_{k=j}^{N-n+j} \binom{n}{j} \binom{N-n}{k-j} p^k (1-p)^{N-k} \\ &= \binom{n}{j} \sum_{k=j}^{N-n+j} \binom{N-n}{k-j} p^k (1-p)^{N-k}.\end{aligned}$$

Posons le changement d'indice $m = k - j$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = j) &= \binom{n}{j} \sum_{m=0}^{N-n} \binom{N-n}{m} p^{m+j} (1-p)^{N-(m+j)} \\ &= \binom{n}{j} p^j \sum_{m=0}^{N-n} \binom{N-n}{m} p^m (1-p)^{N-j-m} \\ &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \underbrace{\sum_{m=0}^{N-n} \binom{N-n}{m} p^m (1-p)^{N-n-m}}_{=(p+(1-p))^{N-n}} \\ &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$
--

Exercice 11

1. Soit X suivant une loi géométrique de paramètre p . Ainsi, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et la fonction de répartition de X est donc constante sur tous les intervalles de la forme $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}$. Si $x < 1$, $F_X(x) = 0$. Pour tout $x \geq 1$, constatons que

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k=1}^{[x]} p(1-p)^{k-1} \\ &= p \frac{1 - (1-p)^{[x]}}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^{[x]}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_X(n) = 1 - (1-p)^n.}$$

2. Tout d'abord, en notant $Z = \min(X, Y)$, $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc $F_Z(x) = 0$ pour tout $x < 1$. De plus :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1, \quad F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \leq x) = 1 - \mathbb{P}(Z > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}((X > x) \cap (Y > x)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > x) \text{ par indépendance} \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(X \leq x))(1 - \mathbb{P}(Y \leq x)) = 1 - F_X(x)F_Y(x). \end{aligned}$$

Mais alors

$$\forall x \geq 1, \quad F_Z(x) = 1 - (1-p)^{[x]}(1-q)^{[x]} = 1 - ((1-p)(1-q))^{[x]}.$$

La fonction de répartition définissant la loi, on en déduit que

$$\boxed{\min(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - (1-p)(1-q)).}$$

3. Raisonnons de la même manière. Par définition, en notant $T = \max(X, Y)$, $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} F_T(n) &= \mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}((X \leq n) \cap (Y \leq n)) \\ &= \mathbb{P}(X \leq n)\mathbb{P}(Y \leq n) \text{ par indépendance} \\ &= F_X(n)F_Y(n). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_T(n) = (1 - (1-p)^n)(1 - (1-q)^n)$$

Ainsi, pour $n = 1$, $\mathbb{P}(T = 1) = F_T(1) = pq$ et pour tout $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = n) &= F_T(n) - F_T(n-1) \\ &= (1 - (1-p)^n)(1 - (1-q)^n) - (1 - (1-p)^{n-1})(1 - (1-q)^{n-1}) \\ &= 1 - (1-p)^n - (1-q)^n + (1-p)^{n-1} - (1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1} + (1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1} \\ &= p(1-p)^{n-1} + q(1-q)^{n-1} + (1-p)(1-q)^{n-1}(pq - p - q) \end{aligned}$$

4. Notons $Z = X + Y$. Puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $Z(\Omega) = \llbracket 2 + \infty \rrbracket$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements associé à Y :

$$\begin{aligned} \forall n \in \llbracket 2 + \infty \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Z = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((Y = k) \cap (Z = n)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}_{[Y=k]}(Z = n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}_{[Y=k]}(X = n - k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(X = n - k) \text{ par indépendance.} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \llbracket 2 + \infty \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Z = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} q(1-q)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1} \\
 &= pq \frac{(1-p)^n}{(1-q)(1-p)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^k \\
 &= pq \frac{(1-p)^n}{(1-q)(1-p)} \frac{\frac{1-q}{1-p} - \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^n}{1 - \frac{1-q}{1-p}} \\
 &= pq \frac{(1-q)(1-p)^{n-1} - (1-q)^n}{(1-q)(1-p) - (1-q)^2} \\
 &= \frac{pq(1-p)^{n-1} - pq(1-q)^{n-1}}{q-p}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{Z(\Omega) = \llbracket 2 + \infty \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall n \in \llbracket 2 + \infty \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Z = n) = \frac{pq(1-p)^{n-1} - pq(1-q)^{n-1}}{q-p}.}$$

5. Tout d'abord, $(X - Y)(\Omega) = \mathbb{Z}$. En utilisant le même système complet d'événements, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X - Y = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((Y = k) \cap (X - Y = n)) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}_{[Y=k]}(X = n + k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(X = n + k) \text{ par indépendance.}
 \end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}(X = n + k) \neq 0$ si et seulement si $n + k \geq 1$, c'est-à-dire $k \geq 1 - n$. On va donc procéder par disjonction de cas.

- Si $1 - n \geq 0$, c'est-à-dire $n \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X - Y = n) &= \sum_{k=1-n}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(X = n + k) \\
 &= \sum_{k=1-n}^{+\infty} q(1-q)^{k-1}p(1-p)^{n+k-1} \\
 &= pq(1-q)^{-1}(1-p)^{n-1} \sum_{k=1-n}^{+\infty} ((1-q)(1-p))^k \\
 &= pq(1-q)^{-1}(1-p)^{n-1} \frac{(1-p)^{1-n}(1-q)^{1-n}}{1 - (1-p)(1-q)} \\
 &= \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)} (1-q)^{-n}
 \end{aligned}$$

- Si $n > 1$,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X - Y = n) &= \sum_{k=1}^n q(1-q)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1} \\
 &= pq(1-q)^{-1}(1-p)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-q)(1-p))^k \\
 &= \frac{pq}{(1 - (1-p)(1-q))} (1-p)^n.
 \end{aligned}$$

6. Tout d'abord, notons $Z = |X - Y|$. $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X - Y| = n) &= \mathbb{P}((X - Y) = n \cup (Y - X) = n) \\ &= \mathbb{P}(X - Y = n) + \mathbb{P}(Y - X = n) \text{ par indépendance} \\ &= \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)}(1-p)^n + \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)}(1-q)^n \\ &= \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)}((1-p)^n + (1-q)^n).\end{aligned}$$

Si $n = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X - Y| = 1) &= \mathbb{P}((X - Y) = 1 \cup (Y - X) = 1) \\ &= \mathbb{P}(X - Y = 1) + \mathbb{P}(Y - X = 1) \text{ par indépendance} \\ &= \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)}(1-q)^{-1} + \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)}(1-p)^{-1} \\ &= \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)}\left(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{1-p}\right).\end{aligned}$$

Enfin, si $n = 0$:

$$\mathbb{P}(|X - Y| = 0) = \mathbb{P}(X - Y = 0) = \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)}.$$

Exercice 12

D'après les résultats sur les matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, $M(\omega)$ est inversible si et seulement si $\det(M(\omega)) \neq 0$, soit ici $X^2(\omega) - Y^2(\omega) \neq 0$. Déterminons la probabilité de l'événement contraire. Notons I l'événement « la matrice M est inversible ». Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{I}) &= \mathbb{P}(X^2 - Y^2 = 0) \\ &= \mathbb{P}((X - Y)(X + Y) = 0) = \mathbb{P}((X - Y = 0) \cup (X + Y = 0)) \\ &= \mathbb{P}(X - Y = 0) + \mathbb{P}(X + Y = 0) - \mathbb{P}((X - Y = 0) \cap (X + Y = 0)) \\ &= \mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{P}(X = -Y) - \mathbb{P}(X = 0, Y = 0).\end{aligned}$$

Remarquons que $\mathbb{P}(X = -Y) = 0$. En effet, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc on ne peut pas avoir $X = -Y$. Par indépendance de X et Y ,

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = p^2.$$

Enfin, soit on utilise le résultat de l'exercice 11, soit on le re-démontre : en utilisant le système complet d'événements associé à X :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \cap (X = Y)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}_{[X=k]}(X = Y) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}_{[X=k]}(k = Y) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}q(1-q)^{k-1} \\ &= pq \frac{(1-p)(1-q)}{1 - (1-p)(1-q)}.\end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbb{P}(\bar{I}) = pq + pq \frac{(1-p)(1-q)}{1 - (1-p)(1-q)} = pq \frac{1}{1 - (1-p)(1-q)}.$$

On peut donc conclure que la probabilité que M soit inversible vaut

$$\boxed{\mathbb{P}(I) = 1 - \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)}}.$$

Par exemple, si $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(I) = \frac{2}{3}$.

Exercice 13

1. Le terme dans la somme ne dépend pas de t . Il suffit donc de déterminer le nombre de terme. Or $|t| \leq n-2 \iff -n+2 \leq t \leq n-2$, il y a donc $2n-3$ termes. Si n est pair, il y a $n-1$ termes pairs, et si n est impairs, il y en a $n-1$ également (car les bornes sont de même parité que n). Ainsi,

$$u_n = p^2(1-p)^{n-2} \times \text{nb de termes} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$

Mais alors, $\sum_{n \geq 2} (n-1)(1-p)^{n-2}$ est convergente (série géométrique dérivée, de raison $p \in]0, 1[$).

Par linéarité, la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge et

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \\ &= p^2 \sum_{n \geq 2} (n-1)(1-p)^{n-2} = p^2 \frac{1}{(1 - (1-p))^2} = 1. \end{aligned}$$

2. Soit $n \in X(\Omega)$. Ainsi, $n \geq 2$. Par définition des lois marginales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n) &= \sum_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = n, Y = t) \\ &= \sum_{\substack{|t| \leq n-2 \\ n \text{ et } |t| \text{ ont même parité}}} p^2(1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(X = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.}$$

3. Soit $t \in \mathbb{Z}$. Par le même raisonnement :

$$\mathbb{P}(Y = t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = t).$$

$\mathbb{P}(X = n, Y = t) \neq 0$ si et seulement si $|t| \leq n-2$, c'est-à-dire $n \geq |t| + 2$ et n et $|t|$ ont la même parité.

- Si $|t|$ est pair, qu'on écrit $|t| = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = t) &= \sum_{\substack{n \geq |t|+2 \\ n \text{ est pair}}} p^2(1-p)^{n-2} \\ &= \sum_{n \geq 2p+2 \text{ et } n \text{ pair}} p^2(1-p)^{n-2} \\ &= p^2 \sum_{k=p+1}^{+\infty} (1-p)^{2k-2} \\ &= \frac{p^2}{(1-p)^2} \frac{(1-p)^{2(p+1)}}{1 - (1-p)^2} \\ &= \frac{p^2(1-p)^{2p}}{2p - p^2} = \frac{p(1-p)^{|t|}}{2-p} \end{aligned}$$

- Si $|t|$ est impair, qu'on écrit $|t| = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y = t) &= \sum_{\substack{n \geq |t|+2 \\ n \text{ est impair}}} p^2(1-p)^{n-2} \\
 &= \sum_{n \geq 2p+2 \text{ et } n \text{ impair}} p^2(1-p)^{n-2} \\
 &= p^2 \sum_{k=p+1}^{+\infty} (1-p)^{(2k+1)-2} \\
 &= \frac{p^2}{(1-p)^2} \frac{(1-p)^{2(p+1)+1}}{1 - (1-p)^2} \\
 &= \frac{p^2(1-p)^{2p+1}}{2p - p^2} = \frac{p(1-p)^{|t|}}{2-p}
 \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(Y = t) = \frac{p(1-p)^{|t|}}{2-p}.$$

4. Y admet une espérance si et seulement si $\sum_{k \geq 0} t \mathbb{P}(Y = t)$ et $\sum_{k \geq 1} t \mathbb{P}(Y = -t)$ converge. Remarquons que, pour tout $N > 0$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N n \mathbb{P}(Y = n) &= \sum_{n=0}^N n \frac{p(1-p)^n}{2-p} \\
 &= \frac{p}{2-p} \sum_{n=0}^N n(1-p)^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{p}{2-p} \frac{(1-p)}{(1 - (1-p))^2} = \frac{1-p}{p(2-p)}.
 \end{aligned}$$

en reconnaissant une série géométrique dérivée de raison $1-p \in]0, 1[$. De même,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N n \mathbb{P}(Y = -n) &= \sum_{n=1}^N n \frac{p(1-p)^n}{2-p} \\
 &= \frac{p}{2-p} \sum_{n=1}^N n(1-p)^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{p}{2-p} \frac{(1-p)}{(1 - (1-p))^2} = \frac{1-p}{p(2-p)}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, Y admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}(Y = n) + \sum_{n=1}^{+\infty} -n \mathbb{P}(Y = -n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}(Y = n) - \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(Y = -n)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 0.}$$

Remarquons que le résultat est cohérent, car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y = -n)$.