29

Chapitre

Variables aléatoires discrètes

Résumé

Dans ce chapitre, on fait des rappels sur les paramètres concernant les variables aléatoires discrètes. On s'intéresse ensuite aux lois de référence : loi géométrique et loi de Poisson.

Plan du cours

> « *Tout l'ordre social, pour aléatoire et injuste qu'il soit, si absurde et même si scandaleux qu'il puisse être, n'est fondé que sur une ordinaire, diffuse et commune persuasion.* »

Nicolas Grimaldi (1933 –). *Le Travail. Communion et excommunication*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les paramètres d'une variable aléatoire :

- connaître la définition de l'espérance . . . . ☐
- savoir utiliser la formule de transfert . . . . ☐
- connaître la définition de la variance . . . . ☐
- savoir utiliser la formule de Koenig-Huygens . . . . ☐

② Concernant les lois usuelles, il faut connaître

- la définition et les paramètres de la loi certaine . . . . ☐
- la définition et les paramètres de la loi uniforme . . . . ☐
- la définition et les paramètres de la loi de Bernoulli . . . . ☐
- la définition et les paramètres de la loi binomiale . . . . ☐
- la définition et les paramètres de la loi géométrique . . . . ☐
- la définition et les paramètres de la loi de Poisson . . . . ☐

③ Savoir générer avec Python les différentes lois . . . . ☐

Dans l'ensemble de ce chapitre, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

I. Compléments sur les variables aléatoires discrètes

1. Généralités sur les variables aléatoires discrètes

Dans l'ensemble de cette section, les variables aléatoires seront **discrètes** :

Définition 29.1.

Une variable aléatoire X, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite **discrète** si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Remarque

Dans ce cas, on peut numéroter $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec I fini ou dénombrable. En général, on écrira $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots\}$.

On dispose d'une propriété simplifiant la méthode pour montrer qu'une application est une variable aléatoire discrète :

Proposition 29.1.

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$. X est une variable aléatoire discrète si et seulement si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, et si

$$\forall\, x \in X(\Omega), \quad [X = x] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}.$$

Démonstration

Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ alors $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $[X = x] \in \mathcal{A}$ (nous l'avons vu dans le chapitre précédent).

Réciproquement, supposons que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et que $[X = x] \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in X(\Omega)$. On a alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad [X \leqslant x] = \bigcup_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \leqslant x}} [X = y] \in \mathcal{A},$$

puisqu'il s'agit d'une union dénombrable et que $\mathcal{A}$ est une tribu.

2. Tribu engendrée par une variable aléatoire discrète

Rappelons ce que nous avons déjà vu dans le chapitre précédent :

Proposition 29.2.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évnénements, appelé **système complet d'événements associé à** X.

Démonstration

Pour tout $x \in X(\Omega)$, $[X = x] \in \mathcal{A}$ par définition d'une variable aléatoire discrète.

Soient x et y dans $X(\Omega)$. Si $x \neq y$, alors $[X = x] \cap [X = y] = \varnothing$ et donc les événements $[X = x]$ et $[X = y]$ sont incompatibles.

Enfin, si $\omega \in \Omega$, on a alors

$$\omega \in [X = X(\omega)] \subset \bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x] \subset \Omega.$$

Ainsi $\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x] = \Omega$.

On dispose alors d'une tribu très pratique pour l'étude d'une variable aléatoire :

Définition 29.2. Tribu engendrée par une variable aléatoire

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On appelle **tribu engendrée par X** la tribu engendrée par le système complet d'événements associé à X, c'est-à-dire la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu contenant tous les $[X = x]$ pour $x \in X(\Omega)$. On la note $\mathcal{A}_X$ ou $\sigma(X)$.

Remarque

Dans la pratique, on ne déterminera jamais la tribu engendrée par X, on sait simplement qu'elle existe.

3. Loi d'une variable aléatoire discrète

a. Définition

Rappelons que la loi d'une variable aléatoire réelle est la fonction $\mathbb{P}_X$ qui, à tout intervalle I de $\mathbb{R}$, associe $\mathbb{P}_X(I) = \mathbb{P}(X \in I)$.
On a déjà vu dans le chapitre précédent le résultat suivant, important :

Proposition 29.3.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Connaître la loi de X est équivalent à connaître $X(\Omega)$ et l'ensemble des $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Démonstration

Si on connait la loi $\mathbb{P}_X$ de X alors, pour tout $x \in X(\Omega)$, on connaît $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \in [x, x])$ puisque $[x, x]$ est un intervalle.
Réciproquement si on connaît $X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ alors, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in I \cap X(\Omega)} [X = x]\right)$$

Or, puisque $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, par incompatibilité et σ-additivité :

$$\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{x \in I \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x).$$

Ainsi on connaît $\mathbb{P}(X \in I)$. On connaît donc $\mathbb{P}_X$.

b. Égalité en loi

Cela nous permet de définir l'égalité en loi :

Définition 29.3.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur des espaces probabilisés ⋯

(potentiellement différents).
On dit que X et Y sont **égales en loi**, et on note $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$, si elles ont la même loi, c'est-à-dire si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ (ce qu'on peut noter $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$).

c. Existence d'une variable aléatoire discrète

Commençons par un premier résultat, lié au système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète :

Proposition 29.4.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)$ converge et

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

Démonstration

En effet, $([X = x])_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. Par σ-additivité et incompatibilité :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in X(\Omega)} [X = x]\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x).$$

On dispose d'une réciproque :

Théorème 29.5. Existence d'une variable aléatoire de loi fixée

Soit I une partie de $\mathbb{N}$. Soient $(p_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs telle que $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels deux à deux distincts.
Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tels que

- $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$,
- Pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$.

Démonstration

On considère $\Omega = \{x_i,\ i \in I\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ définie par $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{i\in A} p_i$, et X l'application identité de Ω.
Les conditions sur $(p_i)_{i\in I}$ entraînent que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On a bien $X(\Omega) = \Omega = \{x_i \mid i \in I\}$ et, pour tout $i \in I, \mathbb{P}\left(X = x_i\right) = \mathbb{P}\left(\{x_i\}\right) = p_i$.

Cela nous permet de définir la loi :

Définition 29.4.

Soit $\mathcal{L}$ une application définie sur un sous-ensemble dénombrable $\{x_i,\ i \in I\} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\sum\limits_{i\in I} \mathcal{L}(x_i) = 1$.
On dit que $\mathcal{L}$ est une **loi de probabilité discrète** sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble $\{x_i,\ i \in I\}$ est appelé le **support** de la loi $\mathcal{L}$.
Si X est une variable aléatoire réelle discrète dont la loi est $\mathcal{L}$, on dit que X suit la loi $\mathcal{L}$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{L}$.

Terminons enfin par une propriété fondamentale :

Théorème 29.6. La fonction de répartition caractérise la loi

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes ayant la même fonction de répartition, alors elles ont la même loi.

Démonstration

Si $F_X = F_Y$ alors, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X = t_0) = F_X(t_0) - \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} F_X(t) = F_Y(t_0) - \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} F_Y(t) = \mathbb{P}(Y = t_0)$$

Par conséquent $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et donc X et Y ont même loi.

4. Transfert d'une variable aléatoire

Connaissant une variable aléatoire, on peut la modifier en appliquant une fonction à celle-ci : c'est le transfert.

Définition 29.5.

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soit g une application de $X(\Omega)$ à valeurs réelles.

Alors, $Y = g(X)$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$, appelée **transfert de X par g**.

Démonstration

Puisque X est discrète, Y est une application définie sur Ω et ne prend, au plus, qu'un nombre dénombrable de valeurs réelle.

On a $Y(\Omega) = \{g(x),\ x \in X(\Omega)\}$. Pour tout $y \in Y(\Omega)$, l'ensemble A_y des antécédents de y par X est dénombrable (car $A_y \subset X(\Omega)$) et donc

$$[Y = y] = \left[X \in A_y\right] = \bigcup_{x \in A_y} [X = x] \in \mathcal{A}.$$

Ainsi Y est bien une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

5. Extension à $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Il arrive qu'on étudie une variable aléatoire qui peut, théoriquement, valoir $+\infty$ ou $-\infty$; par exemple, si X compte le nombre de tirage nécessaire pour obtenir un premier pile lors d'une infinité de lancers indépendants, on peut théoriquement avoir $X = +\infty$.

On n'étudiera des cas où $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$ (c'est-à-dire des cas où obtenir $+\infty$ ou $-\infty$ est de probabilité nulle), ce qui est le cas dans l'exemple précédent. Dans ce cas, par abus de notation, on continuera d'écrire $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

Si $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$, en général, on change la valeur de X (par exemple, on donnera $X = -1$ plutôt que $X = +\infty$ si cela est possible).

II. Moment d'une variable aléatoire

1. Espérance mathématique

Définition 29.6.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On écrit $X(\omega) = \{x_i, i \in I\}$. On dit que X admet une **espérance** lorsque la série $\sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ est **absolument** convergente.

Dans ce cas, on appelle **espérance** (ou **moyenne**) de X le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a ainsi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

Remarque

Si $X(\Omega)$ est fini, X admet une espérance, puisque la somme sera finie.

Exemple 29.1

On dispose d'un dé non truqué qu'on lance une fois. On note X la variable aléatoire qui vaut 5 si on tombe sur 6, 1 si on tombe sur 5 ou 1, et -3 sinon. Démontrer que X admet une espérance, et déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Solution

Alors, $X(\Omega) = \{-3, 1, 5\}$ est fini, donc possède une espérance, et on a

$$\mathbb{E}(X) = -3.\frac{3}{6} + 1.\frac{2}{6} + 5.\frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

Propriété 29.7.

Si $X(\Omega) \subset [p, q]$ et si X admet une espérance, alors $p \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant q$.
En particulier, si X est positive, $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$, et $\mathbb{E}(X) = 0$ si et seulement si X est nulle presque sûrement.

Démonstration

Si $X(\Omega) \subset [p, q]$ et si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, alors pour tout $i \in I$,

$$p \leqslant x_i \leqslant q \Rightarrow p\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant x_i\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant q\mathbb{P}(X = x_i)$$

les probabilités étant positives. En additionnant,

$$\sum_{i\in I} p\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \sum_{i\in I} q\mathbb{P}(X = x_i)$$

et on peut conclure car $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

Si $\mathbb{E}(X) = 0$, puisque X est positive, cela implique que tous les termes de la série sont nuls : pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x)0$. Ainsi, si $x \neq 0$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$ et si $X = 0$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum_{x\in X(\Omega)\setminus\{0\}} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

Proposition 29.8.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, telles que $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ et $|X| \leqslant Y$.
Si Y admet une espérance, alors X admet une espérance, et $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration
Résultat admis.

Propriété 29.9. Linéarité de l'espérance
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance. Soient a et b deux réels.

- la variable aléatoire $aX+b$ admet une espérance, et $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$.
- la variable aléatoire $X+Y$ admet une espérance, et $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration
Supposons $a \neq 0$ (sinon c'est immédiat car $\mathbb{E}(b) = b$). Notons $Y = aX+b$. On a $Y(\Omega) = \{ax+b,\ x \in X(\Omega)\}$ et pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$(ax+b)\mathbb{P}(Y = ax+b) = ax\mathbb{P}(Y = ax+b) + b\mathbb{P}(Y = ax+b) = ax\mathbb{P}(X = x) + b\mathbb{P}(X = x).$$

Par hypothèse la série de terme général $ax\mathbb{P}(X = x)$ converge absolument (car X admet une espérance). De plus la série de terme général $b\mathbb{P}(X = x)$ converge absolument (car $\sum \mathbb{P}(X = x)$ converge et vaut 1). Or, par inégalité triangulaire,

$$\forall\, x \in X(\Omega), \quad |ax+b|\mathbb{P}(Y = ax+b) \leqslant |a||x|\mathbb{P}(X = x) + |b|\mathbb{P}(X = x)$$

Puisque $\sum(|a||x|\mathbb{P}(X = x)+|b|\mathbb{P}(X = x))$ converge, par théorème de comparaison des séries positives, $\sum |ax+b|\mathbb{P}(Y = ax+b)$ converge. Autrement dit $aX+b$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} (ax+b)\mathbb{P}(Y = ax+b) = a \underbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)}_{=\mathbb{E}(X)} + b \underbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)}_{=1} = a\mathbb{E}(X)+b.$$

Le deuxième point est admis.

Remarque
En combinant les deux résultats, on obtient le résultat général : si X et Y admettent des espérances, alors $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y)$ pour tous réels a et b.

Définition 29.7.
Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- On dit que X est **centrée** si $\mathbb{E}(X) = 0$.
- Si elle n'est pas centrée, la variable aléatoire $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée, et est appelée **variable aléatoire centrée associée** à X.

Démonstration
En effet, si $Y = X - \mathbb{E}(X)$, alors $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$ en utilisant la linéarité de l'espérance ($a = 1$ et $b = -\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$).

2. Formule de transfert

Théorème 29.10. Formule de transfert
Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On écrit $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si $\displaystyle\sum_{i \in I} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$ est absolument convergente, alors la variable

aléatoire $g(X)$ admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i\in I} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$$

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a ainsi

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n)\mathbb{P}(X = n)$$

Exemple 29.2 (Exemple fondamental)

Si on prend la fonction $g : x \mapsto x^2$, si la série $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i^2\mathbb{P}(X = x_i)$ est absolument convergente, alors X^2 admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i\in I} x_i^2\mathbb{P}(X = x_i)$$

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a ainsi

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X = n)$$

3. Moment d'ordre r

Définition 29.8.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si la série $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x^r\mathbb{P}(X = x)$ est absolument convergente, on appelle **moment d'ordre** r de X le nombre

$$m_r(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^r\mathbb{P}(X = x)$$

Remarque

- Les variables aléatoires finies possèdent des moments à tout ordre.
- D'après le théorème de transfert, $m_R(X) = \mathbb{E}(X^r)$.

Proposition 29.11.

Si X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$, alors elle admet des moments d'ordre p avec $p \leqslant r$.

Démonstration

Supposons que X admette un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Si $x \in X(\Omega)$, alors

- ou bien $|x| \leqslant 1$ et alors $|x|^k \leqslant 1$,
- ou bien $|x| > 1$ et alors $|x|^k < |x|^r$.

Dans tous les cas, $|x|^k \leqslant 1 + |x|^r$. Ainsi $|x|^k\mathbb{P}(X = x) \leqslant (1 + |x|^r)\,\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. Puisque la série de terme général $(1 + |x|^r)\,\mathbb{P}(X = x)$ converge absolument, nous en déduisons que la série de terme général $|x|^k\mathbb{P}(X = x)$ aussi, par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi X admet un moment d'ordre k.

4. Variance

a. Définition

Définition 29.9.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si X admet une espérance, et si $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet également une espérance, on appelle **variance** de X le nombre mesurant l'écart entre X et son espérance :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2].$$

Remarque

D'après la formule du transfert, si X admet une variance, alors

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, \mathbb{P}(X = x).$$

Remarque

Une variable aléatoire discrète peut admettre une espérance sans admettre un moment d'ordre 2.

Théorème 29.12. Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si X admet une variance, et dans ce cas

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Démonstration

On suppose que X admet une espérance. Constatons que

$$(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2$$

Par linéarité de l'espérance, on remarque, sous réserve d'existence, que

$$\mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Ainsi $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$ existe si et seulement si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, et dans ce cas, toujours par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Cette formule est due à **Johann Samuel König** (1712–1757), mathématicien allemand, et **Christian Huygens** (1629–1695), mathématicien néerlandais.

b. Propriétés

Proposition 29.13.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une variance. Alors $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \geqslant 0$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 0$ si et seulement si X suit une loi certaine.

Démonstration

Notons $m = \mathbb{E}(X)$. Puisque $(X - m)^2$ est une variable aléatoire positive admettant une espérance, par positivité de l'espérance, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}((X - m)^2) \geqslant 0$.

Si $\mathbb{V}\text{ar}(X) = 0$, alors $(X - m)^2$ est d'espérance nulle, et donc $(X - m)^2$ est une variable aléatoire nulle presque sûrement, c'est-à-dire $P(X = m) = 1$: la variable aléatoire suit une loi certaine égale à m.

Cela nous permet de définir l'écart-type :

Définition 29.10.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ possédant une variance. On appelle **écart-type** de X, et on note $\sigma(X)$, le nombre $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(X)}$.

Enfin, on dispose d'une propriété de transfert :

Propriété 29.14.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une variance. Alors, pour tous réels a et b, $aX + b$ admet une variance, et

$$\mathbb{V}\text{ar}(aX + b) = a^2\mathbb{V}\text{ar}(X)$$

Démonstration

On utilise la formule de Koenig-Huygens. Constatons que $(aX + b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$ et $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$. Donc $aX + b$ admet une variance si X en admet une, et

$$\mathbb{V}\text{ar}(aX+b) = \mathbb{E}[(aX+b)^2]-(\mathbb{E}(aX+b))^2 = a^2\mathbb{E}[X^2]+2ab\mathbb{E}[X]+b^2-a^2\mathbb{E}(X)^2-2ab\mathbb{E}(X)-b^2$$

Donc

$$\mathbb{V}\text{ar}(aX + b) = a^2(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) = a^2\mathbb{V}\text{ar}(X)$$

⚠ **Attention**

Contrairement à l'epérance, la variance n'est pas linéaire.

Définition 29.11.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- On dit que X est **réduite** si $\sigma(X) = \mathbb{V}\text{ar}(X) = 1$.
- Si X admet une variance, et que $\sigma(X) \neq 0$, la variable aléatoire

$$Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est centrée et réduite, et est appelée **variable centrée réduite associée** à X. On la note en général X^*.

☞ *Exercices 1, 2, 3 et 4.*

5. Indépendance de variables aléatoires

Une propriété intéressante losqu'on s'intéresse aux variables aléatoires, est de savoir si elles sont indépendantes :

Définition 29.12. Indépendance mutuelle

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On dit que $(X_1, \dots, X_n)$ sont **mutuellement indépendantes** si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in$ ⋯

$X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

III. Lois usuelles finies

On rappelle les lois finies vues dans le chapitre 10, qui sont valables sur un espace probabilisé quelconque :

1. Loi certaine

Définition 29.13.

On dit que la variable aléatoire X suit la **loi certaine** si et seulement s'il existe un réel a tel que l'événement $(X = a)$ soit presque sûr. Ainsi

$$X(\Omega) = \{a\} \text{ et } \mathbb{P}(X = a) = 1$$

On dit également que X est une variable aléatoire certaine.

Exemple 29.3

Une urne contient n boules, indiscernables au toucher, de couleurs différentes et portant toutes le numéro 2 et on tire une boule. On note X le numéro tiré. Alors X est une variable aléatoire suivant la loi certaine, et $(X = 2)$ est un événement certain.

Théorème 29.15.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire suivant la loi certaine égale à a. Alors

$$\mathbb{E}(X) = a \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(X) = 0$$

Remarque

Nous avons une réciproque au théorème précédent : si X est une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{V}\text{ar}(X) = 0$ alors X suit une loi certaine.

2. Loi uniforme

Définition 29.14.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ si

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall\ k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Exemple 29.4

On dispose d'un dé à six faces bien équilibré qu'on lance une fois. On note X le chiffre obtenu après le lancer. Alors X suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$.

Théorème 29.16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Remarque

On peut également définir la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$: pour tout $k \in [\![a,b]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$. Dans ce cas, on peut montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$$

Ces formules étant à démontrer systématiquement, en remarquant que si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a;b]\!])$ alors

$$X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; b-a+1]\!])$$

3. Loi de Bernoulli

Définition 29.15.

Soit $p \in]0,1[$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p si

$$X(\Omega) = \{0,1\} \text{ et } \mathbb{P}(X=1) = p \quad \mathbb{P}(X=0) = q = 1-p$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Exemple 29.5

On dispose d'une pièce truquée, dont la probabilité d'obtenir Pile est de $\frac{1}{3}$. Soit X la variable aléatoire valant 1 si on fait Pile, et 0 sinon. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Théorème 29.17.

Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Alors

$$\mathbb{E}(X) = p \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(X) = pq = p(1-p)$$

4. Loi binomiale

Définition 29.16.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres (n,p) si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } \forall\ k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 29.6 (Exemple fondamental)

On répète n fois de manière indépendante une expérience ayant deux issues possibles : le succès de probabilité p, et l'échec de probabilité $1-p$. On dit alors qu'on dispose d'un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X comptant le nombre de succès obtenus suit une loi binomiale de paramètre (n,p).

Remarque

- Il s'agit bien d'une loi de probabilité. En effet, en utilisant la formule du binôme de Newton,
$$\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=(p+(1-p))^n=1$$
- Dans le cas $n=1$, on retrouve la loi de Bernoulli de paramètre p. Ainsi, $\mathcal{B}(1,p)$ représente également la loi de Bernoulli de paramètre p.

Théorème 29.18.

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre (n,p). Alors
$$\mathbb{E}(X)=np \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(X)=np(1-p)$$

IV. Lois usuelles infinies

1. Loi géométrique

Définition 29.17.

Soit $p\in]0,1[$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre p si
$$X(\Omega)=\mathbb{N}^* \text{ et } \forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n)=p(1-p)^{n-1}$$
On note alors $X\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$. p est appelé **probabilité du succès**.

Remarque

Il s'agit bien d'une loi de probabilité. En effet, pour tout $n\geqslant 1$, $\mathbb{P}(X=n)\geqslant 0$ et on a
$$\sum_{k=1}^{n}p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k$$
Ainsi, en reconnaissant une série géométrique de raison $1-p$ avec $-1<1-p<1$:
$$\lim_{n\to+\infty}p\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k=p\frac{1}{1-(1-p)}=1$$

Exemple 29.7

On dispose d'une pièce truquée, dont la probabilité d'obtenir Face est p. On effectue des lancers indépendants, jusqu'à l'obtention d'un Face. On note X le nombre de lancers effectués avant d'obtenir Face : on dit que X est le **temps d'attente** du premier Face. Alors $X\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$.

Proposition 29.19.

La variable aléatoire comptant le nombre d'épreuves de Bernoulli de paramètre p répétées indépendamment nécessaires pour obtenir un premier succès suit une loi géométrique de ⋯

paramètre p.

Démonstration

On note X la variable aléatoire comptant le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès (si on n'obtient que des échecs, on pose $X = +\infty$).
Pour tout $j \in \mathbb{N}$, notons S_j l'événement « on obtient un succès lors de la j-ième épreuve ». Alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \quad \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \bar{S}_j\right) \cap S_k\right) = \left(\prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}\left(\bar{S}_j\right)\right) \times \mathbb{P}\left(S_k\right) = (1-p)^{k-1}p$$

puisque les épreuves sont indépendantes et identiques. Enfin

$$\mathbb{P}(X=+\infty) = 1-\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = 1-\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p = 1-p\sum_{j=0}^{+\infty}(1-p)^j = 1-p\frac{1}{1-(1-p)} = 0$$

Proposition 29.20.

Soit $p \in \,]0,\,1[$. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<1 \\ 1-(1-p)^k & \text{si} \quad t \in [k,\, k+1[\quad \text{avec } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Démonstration

Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \leqslant k) = 1-\mathbb{P}(X>k)$ et

$$\mathbb{P}(X>k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty}(1-p)^{j-1}p = p\sum_{\ell=k}^{+\infty}(1-p)^\ell = p\frac{(1-p)^k}{1-(1-p)} = (1-p)^k$$

Théorème 29.21.

Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Démonstration

Par définition, $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$ sous réserve de l'absolue convergence de la série, donc de la convergence ici puisqu'à termes positifs. Mais alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1} \\ &= p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} \text{ en reconnaissant la série géométrique dérivée}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}(X)$ existe et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.

Déterminons le moment d'ordre 2. $\mathbb{E}(X^2) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(X=k)$ sous réserve d'absolue convergence, et donc de simple convergence par positivité. Or, en utilisant les méthodes classiques sur les séries géométriques :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 p(1-p)^{k-1} &= p\sum_{k=1}^{n}(k(k-1)+k)(1-p)^{k-1}\\ &= p\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-1} + p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} p\frac{2(1-p)}{(1-(1-p))^3} + p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{2-p}{p^2}\end{aligned}$$

Ainsi, X admet un moment d'ordre 2, et donc une variance. D'après la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

et donc

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Remarque

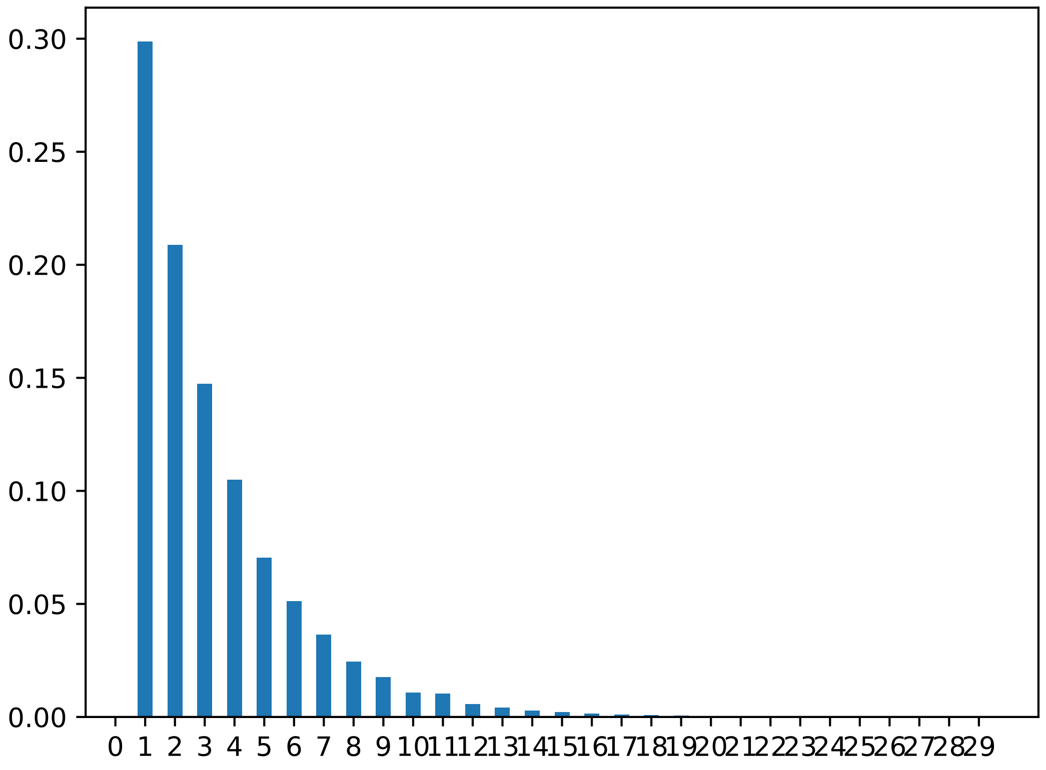
On peut simuler une loi géométrique de paramètre p avec `np.random`.

Code Python

```python
import matplotlib.pyplot as plt # Pour représenter l'histogramme
import pylab                    # Pour améliorer la présentation
import numpy as np              # Pour l'aléatoire

# On simule une loi geometrique avec np.random.geometric
# np.random.geometric(p, nb) simule nb tirages suivant la loi géométrique de paramètre p.
data=np.random.geometric(0.3,10000)
# On compte les apparitions de chaque valeur
counts = np.bincount(data)/10000
# On dresse l'histogramme
plt.bar(range(max(data)+1), counts, width=0.5, align='center')
# On rend l'histogramme plus propre
plt.xlim(-1,max(data))
pylab.xticks(range(0,max(data)-1))
# On enregistre dans un fichier
plt.savefig('loi_geometrique.eps')
# On affiche
plt.show()
```

Ce qui donne, après exécution sur Python, le graphique suivant.



On peut également le simuler à la main, on utilisant un nombre aléatoire entre 0 et 1 :

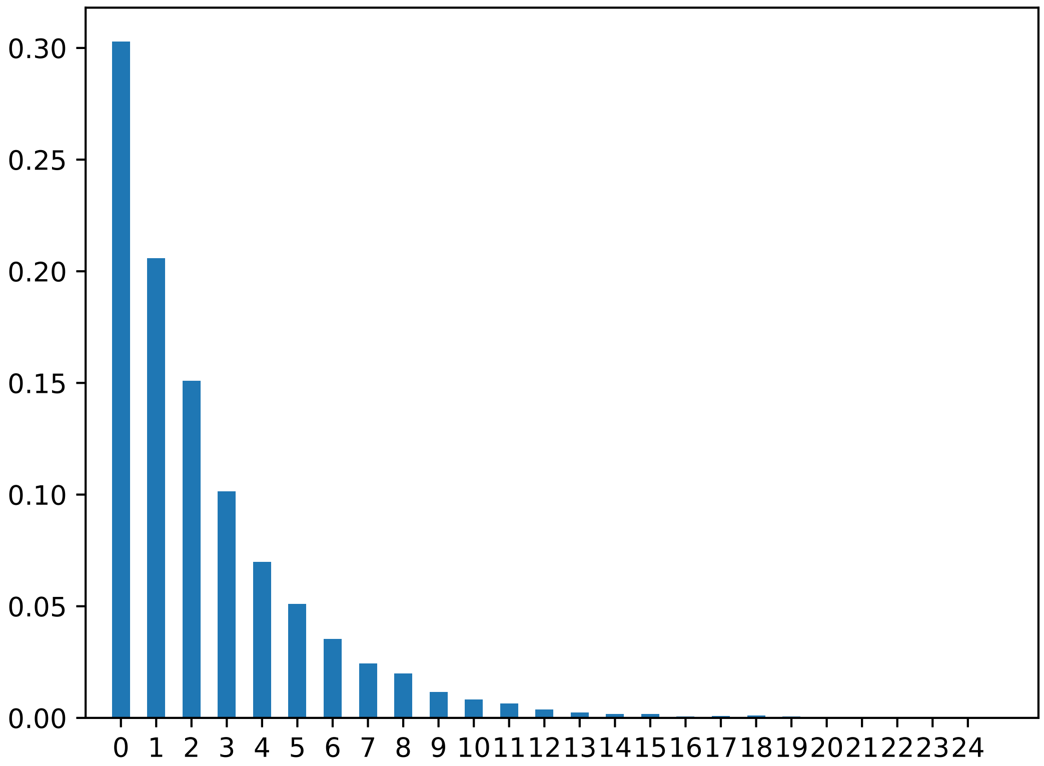
Code Python

```python
import matplotlib.pyplot as plt # Pour représenter l'histogramme
import pylab                    # Pour améliorer la présentation
import numpy as np              # Pour l'aléatoire

# Fonction qui simule une expérience de loi géométrique
def geometrique(p):
    n = 0
    while np.random.random()>p: # tant qu'on a un échec
        n = n+1                 # on continue
    return n

# On simule une loi geometrique avec notre fonction geometrique
data=[geometrique(0.3) for i in range(10000)]
# On compte les apparitions de chaque valeur
counts = np.bincount(data)/10000
# On dresse l'histogramme
plt.bar(range(max(data)+1), counts, width=0.5, align='center')
# On rend l'histogramme plus propre
plt.xlim(-1,max(data))
pylab.xticks(range(0,max(data)-1))
# On enregistre dans un fichier
plt.savefig('loi_geometrique_main.eps')
# On affiche
plt.show()
```

et on obtient



2. Loi de Poisson

Définition 29.18.

Soit $\lambda > 0$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque

Il s'agit bien d'une loi de probabilité. En effet, pour tout n, $P(X = n) \geqslant 0$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = 1$$

Exemple 29.8

Une usine produit des bouteilles d'eau. Parmi celles-ci, 3% sont défectueuses. On tire au hasard 100 bouteilles, et on note X le nombre de bouteilles défectueuses. On admet que X suit une loi de Poisson. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(0,03 * 100 = 3)$.

Remarque (Lien avec la loi binomiale)

Dans l'exemple précédent, on aurait tout aussi bien pu utiliser une loi binomiale de paramètres $(100, 0, 03)$.

Théorème 29.22.

Par approximation classique, si X suit une loi binomiale de paramètre (n,p), et si on a

$$n \geqslant 50, p \leqslant 0,1, \quad \lambda = np \leqslant 10$$

alors X peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Remarque

On verra à la fin de l'année que si, pour tout $n \geqslant 1$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$, alors quand n tend vers l'infini, la suite (X_n) **converge en loi** vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Théorème 29.23.

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(X) = \lambda$$

Démonstration

Par définition, et en reconnaissant la série de l'exponentielle,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda \mathrm{e}^{\lambda}) = \lambda$$

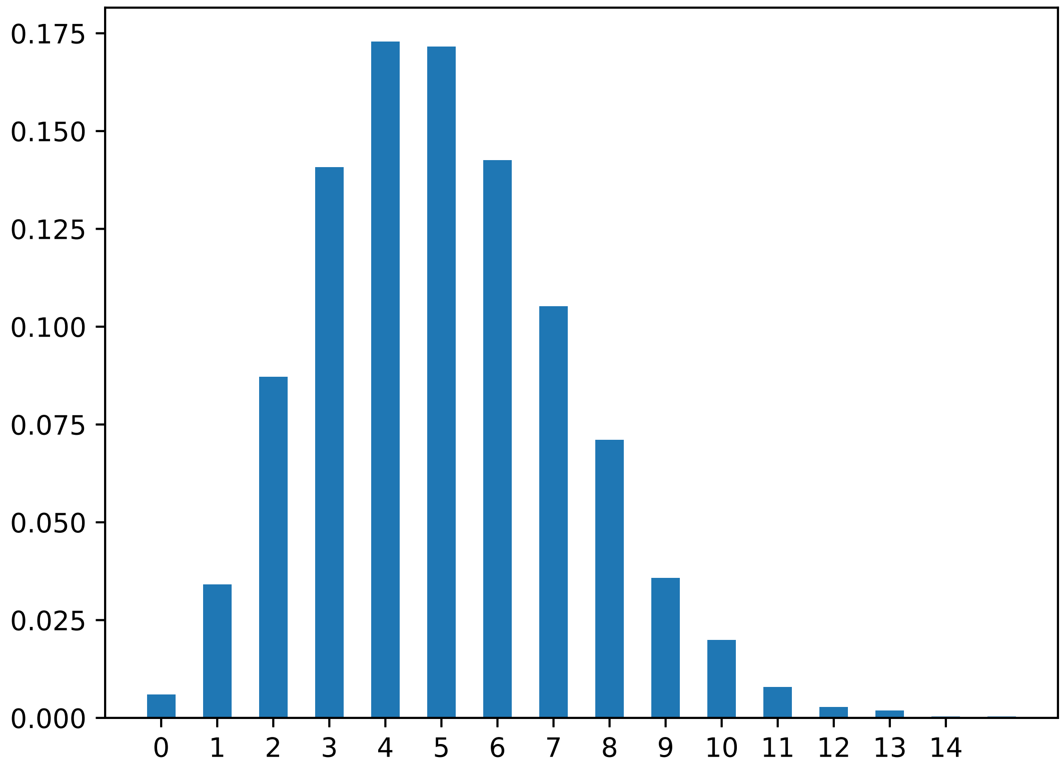
La variance se fait selon la même idée, en utilisant la série dérivée de l'exponentielle.

Code Python

```python
import matplotlib.pyplot as plt # Pour représenter l'histogramme
import pylab                    # Pour améliorer la présentation
import numpy as np              # Pour l'aléatoire

# On simule une loi geometrique avec np.random.geometric
# np.random.poisson(lambda, nb) simule nb tirages suivant la loi de Poisson de paramètre lambda.
data=np.random.poisson(5,10000)
# On compte les apparitions de chaque valeur
counts = np.bincount(data)/10000
# On dresse l'histogramme
plt.bar(range(max(data)+1), counts, width=0.5, align='center')
# On rend l'histogramme plus propre
plt.xlim(-1,max(data))
pylab.xticks(range(0,max(data)-1))
# On enregistre dans un fichier
plt.savefig('loi_poisson.eps')
# On affiche
plt.show()
```

Ce qui donne, après exécution sur Python, le graphique suivant.



☞ *Exercices 8, 9, 10 et 14*

Exercices

29

Exercices

Généralités sur les lois discrètes

●○○ **Exercice 1 Variable aléatoire - I** (20 min.)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = a3^{-k}$$

1. Déterminer a pour que l'on définisse bien une loi de probabilité.
2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?
3. Montrer que X admet une espérance et une variance, et les calculer.
4. On pose $Y = X(X-1)$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

●○○ **Exercice 2 Variables aléatoires - II** (20 min.)
Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules rouges restants à ce moment dans l'urne, et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
3. Trouver un lien entre Z et X et en déduire la loi de Z.

●○○ **Exercice 3 Variables aléatoires - III** (15 min.)
Soit $n \geqslant 1$ fixé. On jette n fois une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est p. Soit X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut $n+1$ sinon.

1. Déterminer la loi de X et vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
2. Déterminer l'espérance de X.

●○○ **Exercice 4 Variables aléatoires - IV** (20 min.)
Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en rajoutant à chaque tirage, une boule blanche supplémentaire. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage final où apparaît une boule noire, si un tel tirage existe, et égale à 0 si à chaque tirage une boule blanche est obtenue.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = n)$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$. En déduire $\mathbb{P}(X = 0)$. Qu'en déduisez-vous ?

●○○ **Exercice 5 C'est de saison** (15 min.)
Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire réelle discrète X telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{c^n}{(1+c)^{n+1}},$$

où $c \in \mathbb{R}_+^*$ est le prix de la campagne publicitaire de l'année précédente.

1. Montrer que la loi de X est bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
2. Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Le commerçant possède un stock de $s \in \mathbb{N}^*$ unités. Déterminer la probabilité de rupture de stock.
4. Combien doit-il prévoir de stock afin que cette probabilité soit inférieure à 1% ?

●●○ **Exercice 6** Pair or not pair ? (10 min.)

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(N = k) = 2^{-k}$. On lance N fois un dé équilibré à six faces. On note S la variable aléatoire comptant la somme des points obtenus. Quelle est la probabilité que

1. $N = 2$ sachant que $S = 4$?
2. $S = 4$ sachant que N est pair ?

Lois usuelles

●○○ **Exercice 7** Loi usuelle - I (10 min.)

On considère une pièce dont la probabilité d'avoir pile est de $0,3$.

1. On lance la pièce 10 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 piles ?
2. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile. Combien en moyenne effectuera-t-on de lancer ?

●○○ **Exercice 8** Loi usuelle - II (10 min.)

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n > 0$ et $p \in]0, 1[$. On pose $Y = n - X$. Donner la loi de Y.

●○○ **Exercice 9** Loi usuelle - III (10 min.)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On pose $Y = \frac{1}{X+1}$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

●○○ **Exercice 10** Loi usuelle - IV (20 min.)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Montrer que $\forall\ k \in \mathbb{N}^*, P(X > k) = (1-p)^k$. En déduire alors que

$$\forall\ (k, \ell),\ P_{(X>\ell)}(X > k + \ell) = P(X > k)$$

On dit que la variable aléatoire est sans mémoire.

●○○ **Exercice 11** Loi usuelle - V (10 min.)

Soit $p \in]0, 1[$. On suppose que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est donnée par

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ F_X(n) = 1 - (1-p)^n$$

Déterminer la loi de X.

●○○ **Exercice 12** Loi usuelle - VI (10 min.)

Une urne contient dix boules rouges et cinq boules bleues. On pioche simultanément six boules et on note R (resp. B), le nombre de boules rouges (resp. bleues) obtenues. Déterminer Ω et son cardinal, puis la loi et l'espérance R (resp. B).

●○○ **Exercice 13** Allons au ski (10 min.)

A. va au teleski et emprunte l'une des N perches de cet appareil. Entre cet instant, et la prochaine remontée de A, le nombre de skieurs (autres que A.) qui se présentent est une variable de loi $\mathcal{G}(p)$. Quelle est la probabilité que A. reprenne la même perche ?

●○○ Exercice 14 Des péages (30 min.)

Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre de voitures N, arrivant au péage en 1 heure, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et indépendamment les uns des autres.
Soit X_1 la v.a. égale au nombre de voitures se présentant au guichet 1 en une heure.

1. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure.
2. Quelle est la probabilité qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet 1 ?
3. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, calculer
$$P_{(N=n)}(X_1 = k)$$
Et pour $k > n$?
4. Justifier que $P(X_1 = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X_1 = k)P(N = n)$ puis montrer que
$$P(X_1 = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{10}\right)^k \frac{\lambda^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n \frac{\lambda^n}{n!}$$
5. En déduire la loi, l'espérance et la variance de X_1.

●○○ Exercice 15 EML 94 (30 min.)

On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres, et la probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à $0,2$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés et Y la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état. On a donc $X + Y = N$.

1. Calculer pour tout n et k, la probabilité
$$P_{(N=n)}(X = k)$$
2. En déduire que X suit la loi de Poisson de paramètre 1.
3. De la même manière, déterminer la loi de Y.

●●○ Exercice 16 Poisson fait de la conditionnelle (10 min.)

Soit N une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $[N = n]$, X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in \,]0, 1[$ (si $n = 0$, $\mathcal{B}(n, p)$ désigne la loi constante égale à 0). Déterminer la loi de X.

●●○ Exercice 17 D'après EDHEC 2005 (15 min.)

Un joueur dispose de deux jetons $J1$ et $J2$. Le jeton $J1$ possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. La probabilité qu'il tombe sur 1 est $p \in \,]0, 1[$. Le jeton $J2$ possède deux faces numérotées 1.
Le joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton. On considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{(1-p)p^{n-1}}{2}$.
2. En déduire $\mathbb{P}(X = 0)$. Ce résultat était-il prévisible ?
3. Montrer que X admet un moment d'ordre 2. Calculer son espérance et sa variance.

●●○ Exercice 18 Après le ski, le saut en hauteur (15 min.)

Un sauteur tente de franchir des barres successives numérotées. II n'essaye de franchir la barre de hauteur $k \in \mathbb{N}^*$ que s'il a réussi à passer celle de hauteur $k - 1$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de sauter la n-ième barre, sachant qu'il a sauté les $n - 1$ premières, est $\frac{1}{n}$. On suppose qu'il saute la première barre avec probabilité 1. Notons X la variable aléatoire égale au numéro de la dernière barre franchie correctement.

1. Calculer $\mathbb{P}(X > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que X est presque sûrement finie.
2. Détermine la loi de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X (si elles existent).

●●○ Exercice 19 Un temps d'attente d'une séquence (15 min.)

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie dont la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0, 1[$.
On note X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers nécessaires pour que la séquence PF apparaisse pour la première fois.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, montrer que $\mathbb{P}(X = n) = \sum_{j=1}^{n-1} p^j(1-p)^{n-j}$ puis simplifier cette somme.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement P_k : « obtenir Pile au k-ième lancer ».

2. Justifier que X ne prend que des valeurs finies.
3. Calculer l'espérance de X si elle existe.

Sujets de concours

●●○ Exercice 1 EDHEC E 2005 (60 min.)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant $n+1$:

- il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec une probabilité p $(0 < p < 1)$
- il sera sur le point 0 avec une probabilité $1-p$.

Pour tout n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n, et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors $T = 1$. Si les abscisses successives sont $1, 2, 3, 0, 0, 1$ alors $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fontion d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.
   b) Donner la loi de X_1.
   c) En déduire $\mathbb{P}(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.
2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que :
   $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$
3. a) Etablir que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, k \in \{1, 2, \cdots, n+1\}, \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = p\mathbb{P}(X_n = k-1)$$
   b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\},\ \mathbb{P}(X_n = k) = p^k(1-p)$.
   En déduire également la valeur de $\mathbb{P}(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
   c) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = 1$.
4. a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
   $$\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$$

b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

5. a) Montrer en utilisant la question 3a) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}\left(X_n\right) + 1)$$

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}(X_n^2) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$ Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n.

d) Montrer enfin que

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}(1-(2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$$

Pour aller plus loin

●●● Exercice 2 Loi de Pascal (20 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une épreuve de Bernoulli. Soit $p \in]0, 1[$ la probabilité d'obtenir un succès. On répète de façon indépendante cette expérience de Bernoulli et on note S_n la variable aléatoire égale au nombre d'expériences réalisées pour obtenir le n-ième succès.

On définit, pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant n$, les événements

- A_k : « la k-ième expérience est un succès »,
- $B_{n,k}$: « au cours des $k-1$ premières expériences, on a obtenu $n-1$ succès.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant n$. Exprimer l'événement $[S_n = k]$ au moyen des événements A_k et $B_{n,k}$.
2. Calculer $\mathbb{P}\left(A_k\right)$ et $\mathbb{P}\left(B_{n,k}\right)$ et en déduire la loi de S_n :

$$\forall\, k \geqslant n \quad \mathbb{P}\left(S_n = k\right) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

   On dit que S_n suit une loi de Pascal de paramètres n et p. Pour $n = 1$, il s'agit de la loi géométrique de paramètre p.
3. En déduire que

$$\forall\, x \in]0, 1[, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^n}$$

4. Calculer l'espérance et la variance de S_n, à l'aide de la question 3.

●●○ Exercice 3 Une autre écriture de l'espérance (15 min.)

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance. L'objectif de cet exercice est de montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X = j) + (n+1)\mathbb{P}(X > n).$$

2. Justifier que $(n+1)\mathbb{P}(X > n) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.
3. Conclure.

●●○ Exercice 4 Des Poissons indépendant(e)s (10 min.)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendants de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X+Y$.

●●● Exercice 5 Max et min (20 min.)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes ayant la même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On note F la fonction de répartition de X_1, et on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $T_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Exprimer les fonctions de répartition de M_n et T_n en fonction de F et de n.
2. Exprimer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{E}(T_n)$ (si elles existent) en fonction de F.
   On pourra utiliser l'exercice 3.
3. Déterminer la loi de T_n lorsque X_1 suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. Pour que l'on définisse bien une variable aléatoire, il faut $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)=1$. Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty} a3^{-k}=\sum_{k=1}^{+\infty} a\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

On reconnait la série géométrique sans le premier terme. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1=\frac{1}{2}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)=\frac{a}{2}$$

Pour que l'on définisse une variable aléatoire, il faut donc que $\frac{a}{2}=1$ c'est-à-dire $a=2$.
2. Soit P l'événement "obtenir un nombre pair", et I l'événement "obtenir un nombre impaire". Alors,

$$\mathbb{P}(P)=\sum_{k=1}^{+\infty} a3^{-2k}=2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k=2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}}-1\right)=\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(I)=\sum_{k=0}^{+\infty} a3^{-(2k+1)}=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k=\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$$

Donc X a plus de chance de prendre des valeurs impaires que des valeurs pairs.
3. X est à valeur positive. Ainsi, X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k)$ est absolument convergente, et donc convergente par positivité. Or, ici, en utilisant la série géométrique dérivée première avec $-1<\frac{1}{3}<1$:

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} 2k\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{2}$$

De même, X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance et par positivité, si et seulement si $\sum_{k=1}^{\infty} k^2\mathbb{P}(X=k)$ est une série convergente. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\mathbb{P}(X=k)&=2\sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1)+k)3^{-k}\\&=2\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k+2\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^k\\&=2\frac{2\frac{1}{3^2}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}+2\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3\end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

4. Soit $g : x \mapsto x(x-1)$. Ainsi, $Y = g(X)$. Y est à valeur positive. Ainsi, d'après la formule de transfert, Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}(X = k)$ est absolument convergente, donc convergente par positivité, et dans ce cas

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)P(X = k)$$

En utilisant la série géométrique dérivée seconde :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} = \frac{2}{9}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{3}{2}$$

Exercice 2

1. X prend des valeurs dans $[\![1, n-1]\!]$. On note R_i l'événement : "une boule rouge est tirée au i^{ieme} lancer". Soit $k \in [\![1; n]\!]$. $(X = k)$ représente l'événement

$$(X = k) = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}$$

D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-2}}(R_{k-1}) \times \mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(\overline{R_k})$$

soit

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)} \times \frac{2}{n-(k-1)}$$

soit, après simplification

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

$X(\Omega)$ étant fini, X admet une espérance, et par définition,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2n}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{2n}{n(n-1)}\frac{(n-1)n}{2} - \frac{2}{n(n-1)}\frac{(n-1)(n)(2\times(n-1)+1)}{6} \\ &= n - \frac{2n-1}{3} = \frac{n+1}{3}.\end{aligned}$$

2. Il y a $n-2$ boules rouges au total. Si X désigne le nombre de tirages nécessaires avant d'obtenir une boule blanche, on a donc tiré $X-1$ boules rouges (la dernière étant blanche). Ains, on a

$$Y = n - 2 - (X-1) = n - 1 - X$$

et

$$\mathbb{E}(Y) = n - 1 - \mathbb{E}(X) \text{ par linéarité de l'espérance}$$

Bilan : $\mathbb{E}(Y) = n - 1 - \frac{n+1}{3} = \frac{2n-4}{3}$.

3. Notons déjà que Z prend des valeurs dans $[\![2; n]\!]$. Soit $j \in [\![2; n]\!]$. $(X = i)_{i\in[\![1;n-1]\!]}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Z = j) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}_{(X=i)}(Z = j)$$

Remarquons que si $i \geqslant j$, $\mathbb{P}_{(X=i)}(Z=j)=0$ (on ne peut pas obtenir la deuxième boule au j^{ime} lancer si la première boule a été prise au i^{ime} lancer avec $i \geqslant j$). Sinon, avec le même raisonnement que précédemment

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X=i)}(Z=j) &= \mathbb{P}_{(X=i)}(R_{i+1}\cap\cdots\cap R_{j-1}\cap\overline{R_j})\\ &= \mathbb{P}_{(X=i)}(R_{i+1})\mathbb{P}_{(X=i)\cap R_{i+1}}(R_{i+2})\times\ldots\times\mathbb{P}_{(X=i)\cap\ldots\cap R_{j-2}}(R_{j-1})\times\mathbb{P}_{(X=i)\cap\ldots\cap R_{j-1}}(\overline{R_j})\\ &= \frac{n-i-1}{n-i}\times\frac{n-i-2}{n-i-1}\times\ldots\times\frac{n-2-(j-3)}{n-2-(j-2)}\times\frac{1}{n-(j-1)}=\frac{1}{n-i}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $j\in[\![2;n]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=j) &= \sum_{i=1}^{j-1}\frac{2(n-i)}{n(n-1)}\times\frac{1}{n-i}+\sum_{i=j}^{n-1}0\\ &= \sum_{i=1}^{j-1}\frac{2}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}(j-1)\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall\ j\in[\![2;n]\!],\quad \mathbb{P}(Z=j)=\frac{2(j-1)}{n(n-1)}}$$

Exercice 3

1. Comme pour la loi géométrique, pour $k\in[\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$.
De plus, pour $n+1$, on a $\mathbb{P}(X=n+1)=(1-p)^n$ (cas où on obtient n face). Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{n}p(1-p)^{k-1}+(1-p)^n$$

soit

$$\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(X=k)=p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}+(1-p)^n=1-(1-p)^n+(1-p)^n=1$$

2. $X(\Omega)$ étant fini, X admet une espérance, et par définition,

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n+1}k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{n}kp(1-p)^{k-1}+(n+1)(1-p)^n$$

Or, en dérivant la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ valable pour tout $x\neq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-(n+1)x^n(1-x)-x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= p\sum_{k=1}^{n}k(1-p)^{k-1}+(n+1)(1-p)^n\\ &= p\frac{1-(n+1)(1-p)^np-(1-p)^{n+1}}{(1-(1-p))^2}+(n+1)(1-p)^n\\ &= \frac{1}{p}-(n+1)(1-p)^n-\frac{(1-p)^{n+1}}{p}+(n+1)(1-p)^n\\ &= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{E}(X)=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{p}}$$

Exercice 4

1. On tire systématiquement une boule jusqu'à l'obtention d'une boule noir, et note X le numéro du tirage de la boule noire, 0 si on n'obtient pas de boule noir. Ainsi,

$$X(\Omega) = \underbrace{\mathbb{N}^*}_{\text{cas où on tire une boule noire}} \cup \underbrace{\{0\}}_{\text{cas où on n'en tire pas}} = \mathbb{N}$$

2. Pour $n \geqslant 1$, notons B_n l'événement "tirer une boule blanche au n^{ime} tirage". Alors,

$$(X = n) = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap \overline{B_n}$$

D'après la formule des probabilités composées, on en déduit donc, pour $n \geqslant 1$

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \cdots \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(B_{n-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(\overline{B_n})$$

soit

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1}$$

et après simplification

$$\boxed{\forall\ n \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}}$$

3. On constate que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. En notant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)$, par télescopage, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$. Ainsi, la série converge et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1}$$

Puisque X est une variable aléatoire, on a également

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$$

on en déduit donc que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$: l'événement $(X = 0)$ (c'est-à-dire ne jamais obtenir de boule noire) est négligeable.

Exercice 5

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour que la loi de X soit une loi de probabilité, il faut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) \geqslant 0$, ce qui est le cas car $c \in \mathbb{R}$ et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(X = n) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{c^n}{(1+c)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{1+c} \left(\frac{c}{1+c} \right)^n \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{1+c} \frac{1}{1 - \frac{c}{1+c}} = 1,
\end{aligned}$$

en reconnaissant une série géométrique, avec $0 < \frac{c}{1+c} < 1$. Ainsi, la loi de X est bien une loi de probabilité.

2. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}(X=n)$ est absolument convergente, donc convergente car à termes positifs. Soit $N \in \mathbb{N}$. En faisant apparaitre une série géométrique dérivée :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X=n) &= \sum_{n=0}^{N} n\frac{c^n}{(1+c)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{c}{(1+c)^2} n\left(\frac{c}{1+c}\right)^{n-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{c}{(1+c)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{c}{1+c}\right)^2} = c.\end{aligned}$$

Ainsi, X admet une espérance, et $\boxed{\mathbb{E}(X) = c.}$

3. Le produit est en rupture si et seulement si $X > s$. La probabilité de rupture de stock est donc

$$\begin{aligned} p = \boxed{\mathbb{P}(X>s)} &= \sum_{n=s+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) \\ &= \sum_{n=s+1}^{+\infty} \frac{1}{1+c}\left(\frac{c}{1+c}\right)^n \\ &= \frac{1}{1+c}\frac{\left(\frac{c}{1+c}\right)^{s+1}}{1-\frac{c}{1+c}} \boxed{= \left(\frac{c}{1+c}\right)^{s+1}.}\end{aligned}$$

4. On doit donc déterminer la valeur de s vérifiant $\left(\frac{c}{c+1}\right)^{s+1} \leqslant 0,01$. Cela donne :

$$\begin{aligned}\left(\frac{c}{c+1}\right)^{s+1} \leqslant 0,01 &\iff (s+1)\ln\left(\frac{c}{c+1}\right) \leqslant \ln(0,01) \text{ par croissance de ln} \\ &\iff s+1 \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{c}{c+1}\right)} \\ &\iff \boxed{s \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{c}{c+1}\right)} - 1.}\end{aligned}$$

Exercice 6

1. Par définition

$$\mathbb{P}_{(S=4)}(N=2) = \frac{\mathbb{P}((N=2)\cap(S=4))}{\mathbb{P}(S=4)}.$$

Tout d'abord

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((N=2)\cap(S=4)) &= \mathbb{P}(N=2)\mathbb{P}_{(N=2)}(S=4) \\ &= 2^{-2}\left(\frac{3}{36}\right) = \frac{3}{144}\end{aligned}$$

en constatant que si $(N=2)$, alors $(S=4) = \{(1;3),(2;2),(3;1)\}$, de probabilité $\frac{3}{36}$ (équiprobabilité).

Pour calculer $\mathbb{P}(S=4)$, utilisons la formule des probabilités totales, en utilisant le système complet d'événements $(N=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=4) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}((N=n)\cap(S=4)) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}_{(N=n)}(S=4) \\
&= \mathbb{P}(N=1)\underbrace{\mathbb{P}_{(N=1)}(S=4)}_{1 \text{ cas : } 4} + \mathbb{P}(N=2)\underbrace{\mathbb{P}_{(N=2)}(S=4)}_{3 \text{ cas vus précédemment sur } 6^2} + \mathbb{P}(N=3)\underbrace{\mathbb{P}_{(N=3)}(S=4)}_{3 \text{ cas } (1;1;2),(1;2;1),(2;1;1) \text{ sur } 6^3} \\
&+ \mathbb{P}(N=4)\underbrace{\mathbb{P}_{(N=4)}(S=4)}_{1 \text{ seul cas } (1;1;1;1) \text{ sur } 6^4} + \sum_{n=5}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\underbrace{\mathbb{P}_{(N=n)}(S=4)}_{=0 \text{ car au moins 5 lancers}} \\
&= 2^{-1}\frac{1}{6} + 2^{-2}\frac{3}{36} + 2^{-3}\frac{3}{6^3} + 2^{-4}\frac{1}{6^4} = \frac{2737}{16\times 6^4}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}_{(S=4)}(N=2) = \frac{\frac{3}{144}}{\frac{2737}{16\times 6^4}} = \frac{432}{2737} \approx 0,1578}$$

2. Tout d'abord, notons Np l'événement « N est pair ». On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Np) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(N=2k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}(N=2k) \text{ par incompatibilité} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-2k} = \frac{2^{-2}}{1-2^{-2}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

De plus, par incompatibilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Np\cap(S=4)) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(N=2k)\cap(S=4)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}((N=2k)\cap(S=4)) \\
&= \mathbb{P}((N=2)\cap(S=4)) + \mathbb{P}((N=4)\cap(S=4)) + \sum_{k=3}^{+\infty}\underbrace{\mathbb{P}((N=2k)\cap(S=4))}_{=0 \text{ car au moins 6 lancers}} \\
&= \mathbb{P}(N=2)\mathbb{P}_{(N=2)}(S=4) + \mathbb{P}(N=4)\mathbb{P}_{(N=4)}(S=4) \\
&= 2^{-2}\frac{3}{36} + 2^{-4}\frac{1}{6^4} = \frac{433}{16\times 6^4}
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}_{Np}(S=4)} &= \frac{\mathbb{P}(Np\cap(S=4))}{Np} \\
&= \frac{\frac{433}{16\times 6^4}}{\frac{1}{3}} \boxed{= \frac{433}{6912} \approx 0,0626}
\end{aligned}$$

Exercice 7

1. Soit X la variable aléatoire dénombrant le nombre de pile obtenu sur 10 lancers. Puisqu'il s'agit d'une répétition successive et indépendante d'une loi de Bernoulli de paramètre $0,3$, on en déduit que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; 0,3)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{10}{3}(0,3)^3(1 - 0,3)^{10-3} \approx 0,2668$$

2. Soit Y le nombre de lancers effectués avant d'obtenir le premier pile. Par construction, $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(0,3)$. Par définition et théorème, le nombre moyen de lancers effectués est donc

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$$

Exercice 8

Remarquons que, puisque X prend ses valeurs dans $[\![0; n]\!]$, Y prend également ses valeurs dans $[\![0; n]\!]$. Enfin, pour $k \in [\![0; n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(n - X = k) = \mathbb{P}(X = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^k$$

En utilisant les propriétés des nombres combinatoires, on a donc

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$$

Ainsi,

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-p)}$$

Exercice 9

Remarquons que Y est à valeurs positives, puisque X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Ainsi, d'après la formule de transfert, $\mathbb{E}(Y)$ existe si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\mathbb{P}(X = k)$ est absolument convergente et donc convergente par positivité.

Sous réserve de convergence,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(Y) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$$

On reconnait la série exponentielle sans son premier terme. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \mathrm{e}^{\lambda} - 1$$

Donc la série converge, et Y admet une espérance, qui vaut

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - 1\right) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}}$$

Exercice 10

Rappelons que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Deux méthodes pour la première partie :

- Par définition, puisque le support est entier :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > k) &= \mathbb{P}(X = k+1) + \mathbb{P}(X = k+2) + \dots \\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) \\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} \\ &= p \sum_{i=k+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} \\ &= p\sum_{j=k}^{\infty}(1-p)^j \text{ en posant } j = i-1 \\ &= p\frac{(1-p)^k}{1-(1-p)} \text{ en reconnaissant une série géométrique} \\ &= (1-p)^k\end{aligned}$$

- En passant par l'évènement contraire, $\overline{(X > k)} = (X \leqslant k)$ et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > k) &= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant k) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = i) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1} \\ &= 1 - (1-(1-p)^k) \text{ en reconnaissant la somme termes d'une suite géométrique} \\ &= (1-p)^k\end{aligned}$$

Donc, pour k, ℓ entiers strictement positifs, on a

$$\mathbb{P}_{(X>\ell)}(X > k+\ell) = \frac{\mathbb{P}((X > \ell) \cap (X > k+\ell))}{\mathbb{P}(X > \ell)} = \frac{\mathbb{P}(X > k+\ell)}{\mathbb{P}(X > \ell)}$$

et alors

$$\boxed{\mathbb{P}_{(X>\ell)}(X > k+\ell) = \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^{\ell}} = (1-p)^k = \mathbb{P}(X > k)}$$

> **Remarque**
> Cette propriété de la loi géométrique est très importante, et est à retenir.

Exercice 11

Rappelons que $F_X(n) = \mathbb{P}(X \leqslant n)$. Pour une variable aléatoire discrète, on a également

$$\mathbb{P}(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1)$$

Ainsi, pour $n \geqslant 2$, on obtient

$$\mathbb{P}(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1) = 1-(1-p)^n-(1-(1-p)^{n-1}) = (1-p)^{n-1}(1-(1-p)) = p(1-p)^{n-1}$$

également valable pour $n = 1$, puisque dans ce cas $\mathbb{P}(X = 1) = F_X(1) = 1-(1-p) = p$.

Bilan : ainsi, $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$.

Exercice 12

On tire simultanément 6 boules, ainsi $\Omega = \{R, B\}^6$, excepté le tirage (B, B, B, B, B, B) qui est impossible. On en déduit, puisqu'on tire 6 boules parmi 15, que

$$\text{card}(\Omega) = \binom{15}{6} = 5005$$

R prend des valeurs dans $[\![1; 6]\!]$ (puisqu'on n'est obligé de prendre une boule rouge), et B prend des valeurs dans $[\![0; 5]\!]$. Par dénombrement, on obtient

$$\forall\ k \in [\![1; 6]\!],\quad \mathbb{P}(R = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{5005}$$

$$\forall\ k \in [\![0; 5]\!],\quad \mathbb{P}(B = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{10}{6-k}}{5005}$$

Après calcul, on obtient

$$\mathbb{E}(R) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(R = k) = \frac{20020}{5005} = 4$$

$$\mathbb{E}(B) = \sum_{k=0}^{5} k\mathbb{P}(B = k) = \frac{10010}{5005} = 2$$

Exercice 13

Remarquons que A récupère la même perche si et seulement si il y a $N-1+kN$, $k \in \mathbb{N}$ personnes qui passent avant lui. Notons alors M l'événement : “A. reprend la même perche”. Alors, d'après ce qui précède

$$\mathbb{P}(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(G = N - 1 + kN)$$

en utilisant les propriétés des lois géométriques

$$\mathbb{P}(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^{N-1+kN-1} = p(1-p)^{N-2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left((1-p)^N\right)^k$$

Puisque $-1 < (1-p)^N < 1$, la série géométrique converge, et on a

$$\mathbb{P}(M) = p(1-p)^{N-2} \frac{1}{1-(1-p)^N}$$

La probabilité qu'il récupère la même perche est donc de $\boxed{\mathbb{P}(M) = \dfrac{p(1-p)^{N-2}}{1-(1-p)^N}}$.

Exercice 14

Remarque
Les méthodes de cet exercice sont classiques et donc, à connaitre.

1. Par définition, le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure vaut $\mathbb{E}(N) = \lambda$.
2. Puisque le choix de la file est au hasard, ce choix est uniforme. Ainsi, la probabilité qu'une voiture se dirige vers le guichet 1 est de $\frac{1}{10}$.
3. Soit n fixé. Le nombre de voitures, parmi n voitures, choisissant le guichet 1 suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{10}$. En effet, les conducteurs choisissent au hasard et indépendamment leur guichet : ainsi, il s'agit d'une répétition successive et indépendante d'une épreuve de

Bernoulli, de succès “aller au guichet 1”, de probabilité $\frac{1}{10}$. Ainsi,

$$\forall\ 0 \leqslant k \leqslant n,\quad \mathbb{P}_{(N=n)}(X_1 = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}$$

Si $k > n$, il est impossible que parmi n voitures, k voitures se dirigent vers le guichet 1 :

$$\forall\ k > n,\ \mathbb{P}_{(N=n)}(X_1 = k) = 0$$

4. Remarquons que, puisque N est valeur dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $(N = n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X_1 = k)$$

soit, d'après ce qui précède, puisque $P_{(N=n)}(X_1 = k) = 0$ si $k > n$:

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X_1 = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}$$

On obtient, en sortant ce qui ne dépend pas de n :

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \left(\frac{1}{10}\right)^k \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}$$

On pose $i = n - k$ dans la somme. On obtient alors

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \left(\frac{1}{10}\right)^k \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{i+k}}{(i+k)!} \binom{i+k}{k} \left(\frac{9}{10}\right)^{i}$$

Enfin, remarquons que

$$\binom{i+k}{k} \frac{1}{(i+k)!} = \frac{(i+k)!}{k!(i+k-k)!}\frac{1}{(i+k)!} = \frac{1}{i!k!}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = k) &= \left(\frac{1}{10}\right)^k \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i\lambda^k}{i!k!} \left(\frac{9}{10}\right)^{i} \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^k \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \left(\frac{9}{10}\right)^{i}\end{aligned}$$

5. On reconnait une série exponentielle, et donc

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \left(\frac{9}{10}\right)^{i} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{9\lambda}{10}\right)^{i} \frac{1}{i!} = \mathrm{e}^{\frac{9\lambda}{10}}$$

et finalement

$$\boxed{\forall\ k \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X_1 = k) = \left(\frac{\lambda}{10}\right)^k \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{10}}}{k!}}$$

Bilan : X_1 suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{10}$. On a alors $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \frac{\lambda}{10}$.

Exercice 15

1. Remarquons que, par définition, si $k > n$, on a nécessairement

$$\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) = 0$$

Le nombre de colis détérioré, parmi un ensemble de n colis fixés, va suivre une loi binomiale de paramètre n et $p = 0,2$. En effet, puisque les colis sont expédiés indépendamment les uns des autres, il s'agit d'une répétition successive, indépendante et identiquement distribuée d'une même épreuve de Bernoulli, de succès “le colis est détérioré” de probabilité $0,2$.
Ainsi, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k}(0,2)^k(0,8)^{n-k}$$

2. Puisque N est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $(N = n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, et pour tout entier k :

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k)$$

D'après le résultat précédent, et puisque N suit une loi de Poisson de paramètre 5 :

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}\mathrm{e}^{-5}\binom{n}{k}(0,2)^k(0,8)^{n-k}$$

soit, en sortant ce qui ne dépend pas de la somme

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-5}(0,2)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}\binom{n}{k}(0,8)^{n-k}$$

En procédant au changement de variable $i = n - k$, on obtient

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-5}(0,2)^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{5^{i+k}}{(i+k)!}\binom{i+k}{k}(0,8)^i$$

et de même que dans l'exercice précédent,

$$\frac{1}{(i+k)!}\binom{i+k}{k} = \frac{1}{(i+k)!}\frac{(i+k)!}{k!i!} = \frac{1}{k!i!}$$

d'où

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-5}(0,2)^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{5^i5^k}{i!k!}(0,8)^i = \mathrm{e}^{-5}(0,2)^k\frac{5^k}{k!} \times \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(5\times 0,8)^i}{i!}}_{=\mathrm{e}^{5\times 0,8}=\mathrm{e}^4}$$

soit

$$\boxed{\forall\ k \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-1}\frac{1^k}{k!}}$$

et donc, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$.

3. On peut procéder de la même manière, en observant que dans ce cas, le nombre de colis en bon état parmi n colis fixés suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0,8$. On obtient alors, par le même raisonnement, que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(4)$.

Exercice 16

Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $[N = n]$, X suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$, d'univers image $[\![0,\, n]\!]$. Ceci étant valable pour tout entier n, on en déduit déjà que $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}.}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Utilisons la formule des probabilités totales, appliquées au système complet d'événements associé à la variable aléatoire N. Alors :

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}((N = n) \cap (X = k)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k).$$

D'après l'énoncé, N suit une loi de Poisson de paramètre λ, donc $\mathbb{P}(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$. De plus, conditionnellement à $[N = n]$, X suit une loi binomiale de paramètre n et p, donc

$$\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k > n \\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Posons $m = n - k$ dans la somme. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{m+k}}{m!}(1-p)^m \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}}_{=\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}}.
\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda p}.}$$

Ainsi, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda p}$: $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p).}$

Exercice 17

1. On note J_1 (respectivement J_2) l'événement « le joueur utilise le jeton 1 (resp. 2) ». (J_1, J_2) forme un système complet d'événements. Par définition des jetons, s'il utilise le jeton 1, la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $1-p$, et s'il utilise le jeton 2, X suit la loi certaine $(X = 0)$. Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_{J_1}(X = n) = (1-p)p^{n-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{J_2}(X = n) = 0.$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(J_1 \cap (X = n)) + \mathbb{P}(J_2 \cap (X = n)) \\
&= \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}_{J_1}(X = n) + \mathbb{P}(J_2)\mathbb{P}_{J=2}(X = n) \\
&= \frac{1}{2}p^{n-1}(1-p).
\end{aligned}$$

2. $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements puisque X est une variable aléatoire de support $\mathbb{N}$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)=1.$$

Or, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n) &= \sum n=1^{+\infty}\frac{1}{2}(1-p)p^{n-1}\\ &= \frac{1-p}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}p^{n-1}\\ &= \frac{1-p}{2}\frac{1}{1-p}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X=0)=1-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)=\frac{1}{2}$.
Intuitivement, on a une chance sur 2 de prendre le jeton 2 qui n'a pas de 0, et une chance sur 2 de prendre le jeton 1 qui, presque sûrement, nous donnera 0. Le résultat est donc cohérent.
3. D'après la formule de transfert, X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2\mathbb{P}(X=n)$ est absolument convergente, et ici simplement convergente car X^2 est une variable aléatoire positive. Sous reserve d'existence :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty}n^2\mathbb{P}(X=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}n^2\frac{1}{2}p^{n-1}(1-p)\\ &= \frac{1-p}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n(n-1)+n\right)p^{n-1}\\ &= \frac{1-p}{2}\left(p\frac{2}{(1-p)^3}+\frac{1}{(1-p)^2}\right)\\ &= \frac{p}{(1-p)^2}+\frac{1}{2(1-p)}=\frac{p+1}{2(1-p)^2}\end{aligned}$$

Ainsi, X admettant un moment d'ordre 2, elle admet une espérance et une variance.
Pour l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty}n\mathbb{P}(X=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}n\frac{1}{2}p^{n-1}(1-p)\\ &= \frac{1-p}{2}\frac{1}{(1-p)^2}=\frac{1}{2(1-p)}\end{aligned}$$

et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2\\ &= \frac{p+1}{2(1-p)^2}-\left(\frac{1}{2(1-p)}\right)^2=\frac{2p+1}{4(1-p)^2}\end{aligned}$$

Exercice 18

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement « il a franchi la k^e barre ». D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > n) &= \mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n \cap B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) \ldots \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_n}(B_{n+1}) \text{ d'après la formule des probabilités composées} \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} \text{ d'après l'énoncé} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$. Finalement, d'après la propriété de la limite monotone, puisque $(X \leqslant n) \subset (X \leqslant n+1)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < \infty) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X \leqslant n)\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X \leqslant n) = 1.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la variable aléatoire } X \text{ est presque sûrement finie.}}$

2. D'après l'énoncé et ce qui précède, remarquons déjà que $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et que $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n) \\ &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}\end{aligned}$$

et si $n = 1$,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2}) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}.}$$

Remarquons, pour confirmation, que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} \text{ car les séries convergent} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \text{ par changement d'indice} \\ &= 1.\end{aligned}$$

3. Rappelons que $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$. X admet une espérance si et seulement si $\sum_{n \geqslant 1} n\mathbb{P}(X = n)$ est absolument convergente, et donc convergente puisqu'elle est à terme positif.
Or $n\mathbb{P}(X = n) = \frac{n^2}{(n+1)!} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puisque

$$n^2 \frac{n^2}{(n+1)!} = \frac{n^4}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Ainsi, X admet une espérance. Remarquons alors que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)-n}{(n+1)!}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} \text{ car les séries convergent (exp.)}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 1 \text{ d'après le calcul précédent}\\ &= \mathrm{e}^1 - 1.\end{aligned}$$

Ainsi, X admet une espérance et

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathrm{e} - 1 \approx 1,7.}$$

Déterminons l'éventuel moment d'ordre 2 de la variable aléatoire.

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$$

La série est clairement convergente (par exemple, parce que $\frac{n^3}{(n+1)!} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$). Faisons le même genre de manipulation que précédemment.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)n(n-1)+n}{(n+1)!}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} \text{ car les séries convergent}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!} + 1 \text{ car le terme est nul en } n=1\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 1 = \mathrm{e}^1 + 1\end{aligned}$$

Finalement, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathrm{e} + 1 - (\mathrm{e}-1)^2 = \mathrm{e} - 1 - (\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + 1) = 3\mathrm{e} - \mathrm{e}^2.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 3\mathrm{e} - \mathrm{e}^2 \approx 0,77.}$$

Exercice 19

Introduisons, dans l'ensemble de l'exercice, P_n (respectivement F_n) l'événement « obtenir pile au n-ième lancer » (respectivement « obtenir face »).

1. Soit $n \geqslant 2$. Supposons que l'on ait obtenir PF au n-ième lancer. Pour ne pas avoir eu la séquence PF avant, on n'autorise que les séquences PP, FF et FP, c'est-à-dire, finalement, les tirages

$$\underbrace{\underbrace{F \dots F}_{\text{entre } 0 \text{ et } n-1} \quad \underbrace{P \dots P}_{\text{entre } 1 \text{ et } n-1}}_{n \text{ au total}} \quad F.$$

Ainsi,

$$[X=n] = \bigcup_{j=1}^{n-1} F_1 \cap \dots \cap F_{n-j-1} \cap P_{n-j} \cap \dots \cap P_{n-1} \cap F_n.$$

soit, par incompatibilité et indépendance des tirages :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=n)} = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(F_1) \times \dots \times \mathbb{P}(F_{n-j-1}) \times \mathbb{P}(P_{n-j}) \times \dots \times \mathbb{P}(P_{n-1}) \times \mathbb{P}(F_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{(1-p) \times ... \times (1-p)}_{n-j-1 \text{ fois}} \times \underbrace{p \times ... \times p}_{j \text{ fois}} \times (1-p)$$
$$= \boxed{\sum_{j=1}^{n-1} (1-p)^{n-j} p^j}.$$

On va ré-écrire cette somme, en reconnaissant une somme des termes d'une suite géométrique.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n) &= \sum_{j=1}^{n-1} p^j (1-p)^n (1-p)^{-j} \text{ car } p \neq 1 \\ &= (1-p)^n \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j\end{aligned}$$

Remarquons que $\frac{p}{1-p} = 1 \iff p = \frac{1}{2}$.

- Si $p = \frac{1}{2}$, alors $P(X=n) = (n-1)(1-p)^n$
- Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n) &= (1-p)^n \frac{\frac{p}{1-p} - \left(\frac{p}{1-p}\right)^n}{1 - \frac{p}{1-p}} \\ &= (1-p)^n \frac{p - \frac{p^n}{(1-p)^{n-1}}}{1-2p} \\ &= \frac{p(1-p)^n - (1-p)p^n}{1-2p}\end{aligned}$$

Bilan :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \mathbb{P}(X=n) = \begin{cases} (n-1)(1-p)^n & \text{si} \quad p = \frac{1}{2} \\ \dfrac{p(1-p)^n - (1-p)p^n}{1-2p} & \text{si} \quad p \neq \frac{1}{2}\end{cases}}$$

2. Par définition, $X(\Omega) = [2, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Calculons la probabilité que X soit fini, en remarquant que la série converge car c'est la probabilité d'un événement. Si $p \neq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < +\infty) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{p(1-p)^n - (1-p)p^n}{1-2p} \\ &= \frac{1}{1-2p}\left(p\sum_{n=2}^{+\infty}(1-p)^n - (1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} p^n\right) \\ &= \frac{1}{1-2p}\left(p\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)} - (1-p)\frac{p^2}{1-p}\right) \text{ en reconnaissant des séries géométriques } (p \in]0, 1[) \\ &= \frac{1}{1-2p}((1-p)^2 - p^2) = 1.\end{aligned}$$

Si $p = \frac{1}{2}$, on utilisant une série géométrique dérivée première à un terme près :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < +\infty) &= \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)(1-p)^n \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k+1} \text{ en posant } k = n-1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-p)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= (1-p)^2 \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{(1-p)^2}{p^2} = 1 \text{ car } p = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, dans tous les cas, $\mathbb{P}(X < +\infty) = 1$. Puisque $([X = n])_{n \in [2,+\infty[\cup\{+\infty\}}$ forme un système complet d'événements, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = +\infty) = 1$$

soit, d'après ce qui précède, $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.
On peut conclure que la variable aléatoire X prend des valeurs finies presque sûrement.
3. Il faut tout d'abord montrer que la série $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ est absolument convergente, soit ici simplement convergente car à terme positif. Pour $p \neq \frac{1}{2}$, on reconnait des séries géométriques :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) &= \frac{1}{1-2p}\left(p\sum_{n=2}^{+\infty} n(1-p)^n - (1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} np^n\right) \\
&= \frac{1}{1-2p}\left(p\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n - (1-p)\right) - (1-p)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} np^n - p\right)\right) \\
&= \frac{1}{1-2p}\left(p\frac{(1-p)}{(1-(1-p))^2} - (1-p)\frac{p}{(1-p)^2}\right) \\
&= \frac{1}{1-2p}\,\frac{(1-p)^2 - p^2}{p(1-p)} = \frac{1}{p(1-p)}
\end{aligned}
$$

Ainsi, X admet une espérance et $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p(1-p)}}$.

Si $p = \frac{1}{2}$, en reconnaissant une série géométrique dérivée seconde :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^n \\
&= \frac{2(1-p)^2}{(1-(1-p))^3} = 4.
\end{aligned}
$$

Remarquons que ce résultat est cohérent avec le cas général, car

$$\frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 4.$$

Corrigés des sujets de concours

Sujet 1

1.
a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $(T = k)$ représente l'événement où on retourne pour la première fois en 0 à l'instant k. Ainsi,

$$(T = k) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap \cdots \cap (X_{k-1} = k-1) \cap (X_k = 0) = \bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = i) \cap (X_k = 0)$$

b) D'après l'énoncé, $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$: $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Ainsi $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

c) D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{(X_1=1)\cap\cdots\cap(X_{i-1}=i-1)}(X_i = i) = p$. Ainsi, d'après la formule des probabilités composées

$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 2)\cdots\mathbb{P}_{(X_1=1)\cap\cdots\cap(X_{k-2}=k-2)}(X_{k-1} = k-1)\mathbb{P}_{(X_1=1)\cap\cdots\cap(X_{k-1}=k-1)}(X_k = 0)$

soit

$$\mathbb{P}(T = k) = p \times p \times \cdots \times p \times (1-p) = p^{k-1}(1-p)$$

Ainsi, $\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$.

Remarque

Ce résultat n'est pas surprenant : T est le temps d'attente du premier échec.

2.

a) Montrons par récurrence le résultat P_n : "$X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$".

Initialisation : pour $n = 0$, on a $X_0(\Omega) = \{0\}$ donc $X_0(\Omega) = [\![0, 0]\!]$: P_0 est vraie.

Hérédité : supposons le résultat vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie. Ainsi, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ par hypothèse de récurrence. Deux cas possibles pour X_{n+1} : soit le mobile retourne à 0, soit le mobile se déplace, et dans ce cas, il passe du point d'abscisse i au point d'abscisse $i + 1$, pour $i \in [\![0, n]\!]$: ainsi, il se retrouvera sur un point d'abscisse comprise dans $[\![1, n+1]\!]$.

Donc, $X_{n+1}(\Omega) = \{0\} \cup [\![1, n+1]\!] = [\![0, n+1]\!]$: P_{n+1} est donc vraie.

On a donc bien montré par récurrence que pour tout entier n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, $X_{n-1}(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$. Puisque X_{n-1} est une variable aléatoire discrète, l'ensemble $(X_{n-1} = k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est un système complet d'événement. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = k)\mathbb{P}_{(X_{n-1}=k)}(X_n = 0)$$

Or, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{(X_{n-1}=k)}(X_n = 0) = 1 - p$ car à chaque instant, il retourne au point d'abscisse 0 avec probabilité $1 - p$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = k)(1-p) = (1-p)\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = k)}_{=1 \text{ car v.a.}} = 1 - p$$

3.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1, \cdots, n+1\}$. Utilisons le système complet d'événements $(X_n = i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et appliquons la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = i)\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k)$$

Or, si $i \neq k-1$, $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k) = 0$ car il est impossible que le mobile soit à l'instant $n+1$ en k sans qu'il soit à l'instant n en $k - 1$. De plus, $\mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) = p$ d'après l'énoncé. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_n = k-1)p$$

b) Démontrons le résultat par récurrence : soit P_n : "pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, $\mathbb{P}(X_n = k) = p^k(1-p)$".

Initialisation : pour $n = 1$, on a bien $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p = p^0(1-p)$. Ainsi, P_1 est vraie.

Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$. D'après la question précédente, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = p\mathbb{P}(X_n = k-1)$. Par hypothèse de récurrence,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = p(p^{k-1}(1-p)) = p^k(1-p)$$

De plus, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = 1 - p = p^0(1-p)$ d'après l'énoncé. Donc P_{n+1} est vraie.

Ainsi, pour tout entier n et tout entier $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\mathbb{P}(X_n = k) = p^k(1-p)$.

Remarquons de plus que la relation vue en 3a amène que

$$\mathbb{P}(X_n = n) = p\mathbb{P}(X_{n-1} = n-1)$$

Ainsi, la suite u définie pour tout n par $u_n = \mathbb{P}(X_n = n)$ est une suite géométrique de raison p. Ainsi, on a

$$\forall\, n,\quad \mathbb{P}(X_n = n) = p^n\mathbb{P}(X_0 = 0) = p^n$$

ce qui est cohérent, car pour que au n-ième instant le mobile soit au point d'abscisse n, il faut qu'il ne soit jamais retourné au point d'abscisse 0.

c) X_n étant une variable aléatoire de support $[\![0, n]\!]$, on doit avoir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = 1$. Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}(X_n = n) = \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) + p^n = (1-p)\frac{1-p^n}{1-p} + p^n = 1$$

4.

a)

> **Remarque**
> Cette démonstration est à retenir : elle tombe souvent au concours.

Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} p^k = \frac{1-p^n}{1-p}$$

comme somme des termes d'une suite géométrique ($p \neq 1$). En dérivant cette relation par rapport à p, et en remarquant que $p^0 = 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(-np^{n-1})(1-p) - (1-p^n)(-1)}{(1-p)^2}$$

soit

$$\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{np^n - np^{n-1} + 1 - p^n}{(1-p)^2} = \frac{p^n(n-1) - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$$

b) $X_n(\Omega)$ étant fini, X admet une espérance. On a

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} kp^k(1-p) + np^n = p(1-p)\sum_{k=0}^{n-1} kp^{k-1} + np^n$$

D'après le résultat précédent, on a donc

$$\mathbb{E}(X_n) = p(1-p)\frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + np^n = \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p}{1-p} + np^n$$

Soit après mise au même dénominateur

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p + np^n - np^{n+1}}{1-p}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{p - p^{n+1}}{1-p} = \frac{p(1-p^n)}{1-p}}$$

5.

a) Les espérances existent car les variables aléatoires sont à support fini. D'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \sum_{k=0}^{n+1} k^2\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$$

D'après la question 3a), on a donc

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = 0 + \sum_{k=1}^{n+1} k^2 p\mathbb{P}(X_n = k-1)$$

En posant $i = k-1$, on peut alors écrire

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p\sum_{i=0}^{n}(i+1)^2\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{i=0}^{n}(i^2+2i+1)\mathbb{P}(X_n = i)$$

soit, en développant

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p\left(\sum_{i=0}^{n} i^2\mathbb{P}(X_n = i) + 2\sum_{k=0}^{n} i\mathbb{P}(X_n = i) + \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X_n = i)\right)$$

Or, d'après la formule de transfert, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2\mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{E}(X_n^2)$. De plus, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{E}(X_n)$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X_n = i) = 1$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1)$$

b) D'après la question précédente, on constate que

$$u_{n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1}^2) + (2(n+1)-1)\frac{p^{n+1+1}}{1-p} = p\mathbb{E}(X_n^2) + 2p\mathbb{E}(X_n) + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p}$$

soit

$$u_{n+1} = pu_n - p(2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} + 2p\mathbb{E}(X_n) + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p}$$

avec $\mathbb{E}(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$. On obtient donc

$$u_{n+1} = pu_n + \frac{-p(2n-1)p^{n+1} + 2p^2(1-p^n) + p(1-p) + (2n+1)p^{n+2}}{1-p}$$

et donc

$$u_{n+1} = pu_n + \frac{-2np^{n+2} + p^{n+2} + 2p^2 - 2p^{n+2} + p(1-p) + 2np^{n+2} + p^{n+2}}{1-p}$$

$$u_{n+1} = pu_n + \frac{2p^2 + p - p^2}{1-p} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$$

c) La suite (u_n) est donc une suite arithmético-géométrique. Après étude classique, on constate que la suite v définie pour tout n par $v_n = u_n - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$ est géométrique, de raison p, et de premier terme

$$v_0 = u_0 - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \underbrace{\mathbb{E}(X_0^2)}_{=0 \text{ car } X_0=0} - \frac{p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{-2p}{(1-p)^2}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{-2p}{(1-p)^2}p^n + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}}$$

et

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n^2) = u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} = \frac{-2p}{(1-p)^2}p^n + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}}$$

d) D'après la formule de Koenig-Huygens, puisque la variable aléatoire X_n est à support fini, elle admet une variance, qui est donnée par

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = \frac{-2p}{(1-p)^2}p^n + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} - \left(\frac{p(1-p^n)}{1-p}\right)^2$$

soit, après factorisation

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(-2p^n + (1+p) - (2n-1)p^n(1-p) - p(1-p^n)^2\right)$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(-2p^n + 1 + p - (2n-1)p^n(1-p) - p + 2p^{n+1} - p^{2n+1}\right)$$

et donc

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - 2p^n(1-p) - p^{2n+1} - (2n-1)p^n(1-p)\right)$$

soit

$$\boxed{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - p^n(1-p)(2n+1) - p^{2n+1}\right)}$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 2

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant n$. $[S_n = k]$ désigne l'événement « il a fallu k expériences pour obtenir n succès. ». Dis autrement, on a obtenu le n-ieme succès lors du k-ième tirage. Ainsi,

$$\boxed{[S_n = k] = B_{n,k} \cap A_k.}$$

2. Tout d'abord, par définition, $S_n(\Omega) = [\![n + \infty [\![$ puisqu'il faut au moins n expériences pour obtenir n succès.
Soit $k \geqslant n$. Les expériences étant successives et indépendantes, A_k et $B_{n,k}$ sont indépendants. Ainsi

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B_{n,k}).$$

- A_k désigne l'événement « obtenir un succès lors de la k-ième expérience ». Ainsi, d'après l'énoncé : $\mathbb{P}(A_k) = p$.
- $B_{n,k}$ désigne l'événement « lors des $k-1$ premières expériences, on a obtenu $n-1$ succès ». Puisque on répète une expérience de Bernoulli $k-1$ fois, le nombre de succès X obtenus lors des $k-1$ premières expériences suit une loi binomiale de paramètre $k-1$ et p. Ainsi

$$\mathbb{P}(B_{n,k}) = \mathbb{P}(X = n-1) = \binom{k-1}{n-1}p^{n-1}(1-p)^{k-1-(n-1)} = \binom{k-1}{n-1}p^{n-1}(1-p)^{k-n}.$$

Finalement

$$\boxed{\forall\, k \geqslant n, \quad \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}.}$$

3. Puisque S_n est une variable aléatoire,

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n} = 1$$

soit

$$p^n\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-p)^{n-k} = 1.$$

En divisant par p^n, et en notant $x = 1 - p \in]0,\, 1[$:

$$\boxed{\forall\, x \in]0,\, 1[, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^n}.}$$

4. S_n admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geqslant n} k\mathbb{P}(S_n = k)$ est absolument convergente et donc convergente, car à termes positifs. Remarquons alors que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{+\infty} k\mathbb{P}(S_n = k) &= \sum_{k=n}^{+\infty} k \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} n \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \text{ d'après la formule du chef} \\
&= n \sum_{m=n+1}^{+\infty} \binom{m-1}{n} p^n (1-p)^{m-1-n} \text{ en posant } m = k+1 \\
&= np^n \sum_{m=n+1}^{+\infty} \binom{m-1}{n} (1-p)^{m-(n+1)} \\
&= np^n \frac{1}{(1-(1-p))^{n+1}} \text{ en utilisant la formule précédente en } n+1
\end{aligned}$$

Ainsi, S_n admet une espérance et

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{p}.}$$

De même, déterminons l'éventuel moment d'ordre 2 de S_n. Sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n^2) &= \sum_{k=n}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}(S_n = k) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} k^2 \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} kn \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \text{ par la formule du chef} \\
&= n \sum_{m=n+1}^{+\infty} (m-1) \binom{m-1}{n} p^n (1-p)^{m-(n+1)} \text{ en posant } m = k+1 \\
&= \frac{n}{p} \sum_{m=n+1}^{+\infty} m \binom{m-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{m-(n+1)} - np^n \sum_{m=n+1}^{+\infty} \binom{m-1}{n} (1-p)^{m-(n+1)} \text{ par linéarité.}
\end{aligned}$$

Or la première somme désigne l'espérance S_{n+1} et la deuxième a déjà été calculée lors de l'espérance. Ainsi

$$\mathbb{E}(S_n^2) = \frac{n}{p}\frac{n+1}{p} - np^n \frac{1}{p^{n+1}} = \frac{n(n+1) - np}{p^2}$$

Ainsi, S_n admet un moment d'ordre 2 et donc une variance. D'après la formule de Koenig Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) &= \mathbb{E}(S_n^2) - (\mathbb{E}(S_n))^2 \\
&= \frac{n(n+1) - np}{p^2} - \frac{n^2}{p^2} = \frac{n - np}{p^2} = \frac{n(1-p)}{p^2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = \frac{nq}{p^2} \text{ avec } q = 1 - p.}$$

Exercice 3

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = j+1) = \mathbb{P}(X > j) - \mathbb{P}(X > j+1).$$

soit, en multipliant par $(j+1)$:

$$(j+1)\mathbb{P}(X = j+1) = (j+1)\mathbb{P}(X > j) - (j+1)\mathbb{P}(X > j+1).$$

ou encore

$$(j+1)\mathbb{P}(X = j+1) = j\mathbb{P}(X > j) - (j+1)\mathbb{P}(X > j+1) + \mathbb{P}(X > j).$$

Sommons ces égalités :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\mathbb{P}(X = j+1) &= \sum_{j=0}^{n-1} j\mathbb{P}(X > j) - (j+1)\mathbb{P}(X > j+1) + \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > j)\\ &= 0 - n\mathbb{P}(X > n) + \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > j) \text{ par télescopage.}\end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice $k = j+1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= -n\mathbb{P}(X > n) + \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(X > j) - \mathbb{P}(X > n)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(X > j) - (n+1)\mathbb{P}(X > n),\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

2. Par définition, puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k).$$

En multipliant par $n+1$:

$$(n+1)\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)\mathbb{P}(X = k).$$

Or, pour tout $k \geqslant n+1$, on a $n+1 \leqslant k \implies (n+1)\mathbb{P}(X = k) \leqslant k\mathbb{P}(X = k)$ puisque $\mathbb{P}(X = k)$ est positif. Ainsi,

$$\boxed{(n+1)\mathbb{P}(X > n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k).}$$

3. Puisque X admet une espérance, $\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ est absolument convergente. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

puisqu'il s'agit du reste d'une série convergente. Mais alors, puisque

$$0 \leqslant (n+1)\mathbb{P}(X > n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

par théorème d'encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)\mathbb{P}(X > n) = 0.$$

Ainsi, en utilisant l'écriture de la question 1, on en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ converge et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{E}(X).}$$

Exercice 4

Puisque X et Y suivent des lois de Poisson, tout d'abord $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et donc $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$. Notons $Z = X + Y$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule des probabilités totales en utilisant le système complet d'événements associé à X :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = n) &= \mathbb{P}(X + Y = n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \cap (X + Y = n)) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}_{(X=k)}(X + Y = n).\end{aligned}$$

Remarquons que $\mathbb{P}_{(X=k)}(X + Y = n) = \mathbb{P}_{(X=k)}(X + k = n)$ car on raisonne conditionnellement à $X = k$, donc on sait que $X = k$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \sum_{(X=k)} (Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y.\end{aligned}$$

Or, $\mathbb{P}(Y = n - k) = 0$ si $n - k < 0$, c'est-à-dire si $k > n$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\mu} \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k} \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k} \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k} \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!}(\lambda+\mu)^n \text{ en reconnaissant la formule du binôme}\end{aligned}$$

Ainsi, $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(Z = n) = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} : \boxed{X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu).}$$

Exercice 5

Les X_i étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, M_n et T_n le sont également.

1. Remarquons que, pour tout réel x

$$(M_n \leqslant x) \iff \forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad X_i \leqslant x \quad \text{et} \quad (T_n > x) \iff \forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad X_i > x.$$

Alors, pour tout réel x

$$\begin{aligned}F_{M_n}(x) = \mathbb{P}(M_n \leqslant x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leqslant x\right) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant x) \text{ par indépendance des } X_i \\ &= \prod_{i=1}^{n} F(x) = (F(x))^n.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F_{M_n}(x) = (F(x))^n.}$$

De même

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n > x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i > x\right) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x) \text{ par indépendance des } X_i \\ &= \prod_{i=1}^{n}(1 - F(x)) = (1 - F(x))^n.\end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}(T_n > x) = 1 - F_{T_n}(x)$ et finalement

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F_{T_n}(x) = 1 - (1 - F(x))^n.}$$

2. Utilisons l'exercice 3. Sous réserve d'existence,

$$\begin{aligned}\boxed{\mathbb{E}(M_n)} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(M_n > k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} 1 - \mathbb{P}(M_n \leqslant k) \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} 1 - (F(k))^n}\end{aligned}$$

qui existe si et seulement si cette série converge.
De même

$$\begin{aligned}\boxed{\mathbb{E}(T_n)} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > k) \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}(1 - F(k))^n.}\end{aligned}$$

3. Déterminons tout d'abord la fonction de répartition. Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}F(k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1} \\ &= p\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^k.\end{aligned}$$

et donc

$$F_{T_n}(k) = 1 - (1 - F(k))^n = 1 - (1-p)^{kn},$$

valable également si $k = 0$.
Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = k) &= F_{T_n}(k) - F_{T_n}(k-1) \\ &= 1 - (1-p)^{kn} - (1 - (1-p)^{(k-1)n}) \\ &= (1-p)^{(k-1)n}(1 - (1-p)^n) = r(1-r)^{k-1} \text{ avec } r = 1 - (1-p)^n.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{T_n \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - (1-p)^n).}$$