Chapitre 28

Espaces probabilisés infinis

Résumé

L'OBJECTIF *de ce chapitre est de généraliser la notion d'espace probabilisé, que nous avons vu dans le chapitre 09, à des espaces infinis.*

Plan du cours

Chapitre 28. **Espaces probabilisés infinis**

> « *Et l'espace devenait une simple écume probabiliste en effervescence piquetée de trous de ver.* »
>
> Arthur C. Clarke (1917 – 2008). *Lumière des jours enfuis*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de tribu . . . . □

② Connaître la notion de système complet d'évènements dans le cas général . . . . □

③ Connaître les propriétés d'une probabilité . . . . □

④ Savoir utiliser la propriété de la limite monotone . . . . □

⑤ Savoir démontrer qu'un évènement est négligeable et presque sûr . . . . □

⑥ Connaître la définition d'une probabilité conditionnelle . . . . □

⑦ Savoir utiliser la formule des probabilités composées . . . . □

⑧ Savoir utiliser la formule des probabilités totales . . . . □

⑨ Connaître la formule de Bayes . . . . □

⑩ Savoir manipuler des évènements mutuellement indépendants . . . . □

⑪ Connaître la définition d'une variable aléatoire . . . . □

⑫ Savoir déterminer le support et la loi d'une variable aléatoire . . . . □

⑬ Connaître la définition et les propriétés de la fonction de répartition . . . . □

Nous allons étendre les notions, vues lors d'une expérience finie, à des univers infinis. Cela nécessite d'introduire différentes notions.

I. Espace probabilisable

1. Ensemble dénombrable

Les univers que nous allons considérer seront infinis, mais il y a différentes « tailles » d'infini.

Définition 28.1.

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans E telle que $E = \{\varphi(n),\ n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple 28.1

Montrer que les ensembles $\{2n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{2n+1,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont dénombrables.

Solution

En effet, les fonctions $n \longmapsto 2n$ et $n \longmapsto 2n+1$ sont des bijections de $\mathbb{N}$ dans respectivement les deux ensembles $\{2n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{2n+1,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque

Un ensemble est dit **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable. Dans ce cas, on peut numéroter ses éléments $E = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$.

Proposition 28.1.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et toute partie infinie de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

Nous avons vu dans les exercices 12 et 13 du chapitre 7 que $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, et que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
On admettra que $\mathbb{R}$ ne l'est pas non plus.

2. Tribu

Pour un espace probabilisé fini, si on note Ω l'univers, on utilisait comme ensemble des événements $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω.
Pour un ensemble Ω infini, il est peu judicieux de prendre toutes les parties comme ensemble des événements, d'autant que l'ensemble Ω n'a pas de raison d'être dénombrable. On va donc limiter le nombre d'événements intéressants en ne prenant que les événements « importants », et en conservant une stabilité : par complémentarité, et par union dénombrable. C'est ce qu'on appelle une **tribu**.

Exemple 28.2

Supposons qu'on lance un dé une infinité de fois, et on s'intéresse aux résultats obtenus. On peut dans ce cas prendre pour univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^{\mathbb{N}^*}$, et un résultat de cette expérience est donc une suite $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n, \dots)$. Ainsi, l'événement « n'obtenir que des 6 » est l'événement

contenant comme seule éventualité $(6, 6, 6, ...)$.
Dans cette situation, on peut prendre comme ensemble d'événements $\mathcal{P}(\Omega)$, puisqu'on s'intéresse à tous les événements possibles.
En revanche, si on ne lance qu'un dé, et qu'on s'intéresse à l'événement « obtenir le chiffre 6 », les seuls événements qui nous intéressent sont $\{\varnothing, \{6\}, [\![1, 5]\!], \Omega\}$: c'est la tribu qui nous intéressera.

Définition 28.2.

Soit Ω un ensemble quelconque. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de sous-ensembles de Ω ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$). On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** (ou une **σ-algèbre**) s'il vérifie les propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : $\forall\, A \in \mathcal{A},\ \overline{A} \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable : si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$, alors

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Exemple 28.3

La tribu $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu, appelée **tribu grossière**. La tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu, appelée **tribu discrète**.

Exercice 28.4

Montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{6\}, [\![1, 5]\!], [\![1, 6]\!]\}$ forme une tribu de $[\![1, 6]\!]$.

Solution

L'univers $[\![1, 6]\!]$ est bien un élément de $\mathcal{A}$. Remarquons que

$$\overline{\varnothing} = [\![1, 6]\!],\ \overline{\{6\}} = [\![1, 5]\!],\ \overline{[\![1, 5]\!]} = \{6\} \quad \text{et} \quad \overline{[\![1, 6]\!]} = \varnothing.$$

Enfin, l'union de deux éléments quelconques de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}$, et c'est le cas quelle que soit l'union dénombrable.

Rappel

Les propriétés vues sur les intersections et unions finies sont valables pour les intersections et unions dénombrables :

- Si $B \in \mathcal{A}$, alors $\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B)$ (distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$),
- Si $B \in \mathcal{A}$, alors $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B)$ (distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$,
- $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$ et $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcap\limits_{i\in I} \overline{A_i}$ (lois de Morgan).

Retenons aussi la formule suivant qui est très utile en pratique : $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}}$.

La définition d'une tribu amène rapidement à d'autres propriétés :

Proposition 28.2.

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω.

- $\varnothing \in \mathcal{A}$;

···

- $\mathcal{A}$ est stable par union et intersection finie ;
- $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable : si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$, alors

$$\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Démonstration

Si $\Omega \in \mathcal{A}$, alors $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$. La troisième propriété découle de la stabilité par passage au complémentaire, et les lois de de Morgan.

On garde l'ensemble du vocabulaire vu dans le cas d'un espace probabilisable fini :

Définition 28.3. Événements deux à deux incompatibles

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements indexée par une partie I (finie ou infinie) de $\mathbb{N}$.
On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ sont **deux à deux incompatibles** si, pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \varnothing$.

On dispose de la même interprétation :

- $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ désigne l'événement « il existe un entier $i \in I$ tel que A_i est réalisé ».
- $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$ désigne l'événement « pour tout entier $i \in I$, A_i est réalisé ».

Exercice 28.5

On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire, avec remise, une infinité de boules dans cette urne. On prend l'univers $[\![1, n]\!]^{\mathbb{N}^*}$ (c'est-à-dire l'ensemble des suites $\omega = (\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \omega_k$ est le numéro de la k-ième boule tirée).
On admet qu'il existe une tribu $\mathcal{A}$ adéquate pour laquelle, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k : « le numéro de la k-ième boule tirée est impair » est un événement.

Justifier que les ensembles suivants sont des événements, et les exprimer en fonction des événements (A_i).

- E : « tirer au moins une boule dont le numéro est impair ».
- F : « ne tirer que des boules dont le numéro est pair ».
- G : « obtenir au moins une boule dont le numéro est pair mais les 5 premières sont impaires ».

Solution

On exprime chacun des ensembles comme unions et intersections des (A_i), ce qui garantira que ce sont des événements.

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k \in \mathcal{A}$$
$$F = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \overline{A_k} \in \mathcal{A}$$
$$G = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \left(\bigcup_{k\geqslant 6} \overline{A_k}\right) \in \mathcal{A}.$$

Remarque

Lorsque l'ensemble Ω est fini, on prendra toujours comme tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, puisque (en prenant

de l'avance) on sait calculer la probabilité d'un ensemble fini. C'est valable également si Ω est dénombrable.
En revanche, si Ω est infini non dénombrable, on prendra une tribu adaptée. On n'aura jamais à expliciter la tribu qu'on prend, on en admettra simplement l'existence.

☞ *Exercice 1.*

3. Espace probabilisable

Définition 28.4.

Soit Ω un ensemble, et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. L'ensemble $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé **espace probabilisable**.

Exemple 28.6
L'ensemble $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable.

Remarque
Puisqu'on est dans le cadre des probabilités, si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable, tout ensemble $A \in \mathcal{A}$ est appelé **événement**. Ainsi, la tribu $\mathcal{A}$ contient l'ensemble des événements auxquels on va s'intéresser.

4. Système complet d'évènements

Définition 28.5.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des événements de $\mathcal{A}$. On dit que (A_i) est un **système complet d'événements** si

- Les A_i sont deux à deux incompatibles :
$$\forall\, i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \varnothing$$
- La réunion des A_i est égale à Ω :
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$$

Exemple 28.7
Si $\Omega = \mathbb{N}$, et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors les ensembles $A_i = \{i\}$, pour tout entier i, forment un système complet d'événements.

☞ *Exercice 2.*

II. Probabilité et espace probabilisé

1. Probabilité

Définition 28.6.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0; 1]$ vérifiant

- PROBABILITÉ DE L'ÉVÉNEMENT CERTAIN : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

...

- σ-ADDITIVITÉ : pour toute suite d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ **deux à deux incompatibles**, la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$ est convergente, et on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A)$ est appelé **probabilité** de l'événement A.

2. Propriétés

Propriété 28.3.

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

Démonstration

Remarquons que
$$\Omega = \Omega \cup \bigcup_{i=2}^{+\infty} \varnothing$$
et les événements de cette réunion sont deux à deux incompatibles. Ainsi, par σ-additivité
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\Omega \cup \bigcup_{i=2}^{+\infty}\right) = \mathbb{P}(\Omega) + \sum_{i=2}^{+\infty} \mathbb{P}(\varnothing) = 1 + \sum_{i=2}^{+\infty} \mathbb{P}(\varnothing)$$
et donc
$$\sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$$
Puisque $\mathbb{P}(\varnothing) \geqslant 0$, nécessairement, $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

Remarque

On utilisera souvent la σ-additivité sur des unions finies, plutôt qu'infinies : il suffit en effet de prendre $\varnothing$.
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{+\infty} \varnothing = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$$
avec $B_i = A_i$ si $i \leqslant n$, $\varnothing$ sinon. Par σ-additivité :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\varnothing)}_{=0} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Propriété 28.4.

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

- Pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$;
- Si $A, B \in \mathcal{A}^2$ avec $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Démonstration

Les preuves reposent systématiquement sur l'additivité ou σ-additivité des probabilités :

- A et $\overline{A}$ sont incompatibles par définition, et $A \cup \overline{A} = \Omega$. Donc, par additivité de $\mathbb{P}$:
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$

- Si $A \subset B$, notons $C = B \backslash A = B \cap \overline{A} \in \mathcal{A}$. Par construction, A et C sont incompatibles, et $A \cup C = B$. Par additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)$$

Puisque $\mathbb{P}(C) \geqslant 0$, on en déduit le résultat.

Théorème 28.5.

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$. Alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Démonstration

Par construction, $A \cap B$ et $A \backslash B$ sont incompatibles, et $(A \cap B) \cup (A \backslash B) = A$. Par additivité de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \backslash B)$$

Or $\mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B)$ à nouveau par additivité de $\mathbb{P}$ (B et $A \backslash B$ sont incompatibles). Donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$$

3. Espace probabilisé

Définition 28.7.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

Remarque

La plupart du temps, on ne cherchera pas l'espace probabilisé ; Il sera fixé une fois pour toute, sans être forcément explicitement donné.

III. Propriétés des probabilités

Dans cette section, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Propriété de la limite monotone

Définition 28.8.

Soit $(A_i)_{i \in N}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$.

- On dit que la suite (A_i) est **croissante** si, pour tout entier i,

$$A_i \subset A_{i+1}$$

- On dit que la suite (A_i) est **décroissante** si, pour tout entier i,

$$A_i \supset A_{i+1}$$

Exemple 28.8

On lance un dé indéfiniment. Pour tout $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « on obtient 6 lors

des n premiers lancers ».
Alors (A_n) est décroissante. En effet, si A_{n+1} est réalisé, alors on a obtenu le chiffre 6 lors des $n+1$ premiers lancers. Par conséquent, on a également eu 6 lors des n premiers lancers et A_n est réalisé : $A_{n+1} \subset A_n$.
En revanche, si on note B_n l'événement « on obtient au moins une fois 6 lors des n premiers lancers », alors la suite (B_n) est croissante. En effet, si B_n est réalisé, on a eu au moins une fois 6 lors des n premiers lancers, donc également lors des $n+1$ premiers lancers (quel que soit le résultat du $n+1$-ième lancer) : B_{n+1} est réalisé, et $B_n \subset B_{n+1}$.

Théorème 28.6. Propriété de la limite monotone

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$.

- Si la suite (A_i) est croissante, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
- Si la suite (A_i) est décroissante, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Démonstration

On suppose la suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ croissante. On va rendre les événements incompatibles. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note
$$B_0 = A_0 \quad \text{et} \quad \forall\, i \in \mathbb{N}^*,\ B_i = A_i \setminus A_{i-1}.$$
Alors les B_i sont incompatibles, et $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Mais alors, par σ-additivité :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i\right)\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(B_i).\end{aligned}$$
Or,
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(B_i) &= \mathbb{P}(A_0) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \setminus A_{i-1})\\ &= \mathbb{P}(A_0) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_i \cap A_{i-1})\\ &= \mathbb{P}(A_0) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_{i-1}) && \text{par croissance de } (A_i)\\ &= \mathbb{P}(A_n) && \text{par telescopage.}\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Exemple 28.9

On possède une pièce bien équilibrée qu'on lance une infinité de fois. Déterminer la probabilité de n'obtenir jamais pile.

Solution

On note A_n l'événement « n'obtenir aucun pile jusqu'au $n^{\text{ième}}$ lancer ». Alors, par construction $A_{n+1} \subset A_n$ (puisque si on n'a pas obtenu pile jusqu'au $n+1^{\text{ième}}$ lancer, c'est qu'on n'a pas obtenu pile jusqu'au $n^{\text{ième}}$ lancer). Puisque $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$

Ainsi, la probabilité de n'obtenir jamais pile est nulle.

La propriété de la limite monotone se généralise à des événements quelconques :

Proposition 28.7.

Soit (A_i) une suite d'événements de $\mathcal{A}$.Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)$$

Démonstration

Il suffit de constater que $\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, et $\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

☞ *Exercices 4 et 5.*

2. Evénement vrai presque sûrement

L'exemple précédent nous a donné un événement de probabilité nulle, mais qui n'est pas l'événement impossible : en effet, on peut théoriquement n'obtenir jamais pile, en faisant systématiquement face.

Définition 28.9.

Soit A un événement de $\mathcal{A}$.

- On dit que A est **négligeable** si $\mathbb{P}(A) = 0$.
- On dit que A est **presque sûr** (ou **vrai presque sûrement**) si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Si une propriété est vraie sur un ensemble de probabilité 1, on dit qu'elle est vraie $\mathbb{P}$-presque sûrement.

Exemple 28.10

Dans l'exemple précédent, l'événement « obtenir au moins une fois pile » est presque sûr, et l'événement « n'obtenir jamais pile » est négligeable.

Remarque

Ce cas n'arrivait jamais dans un espace probabilisé fini. En effet, dans ce cas, $\mathbb{P}(A) = 0$ si et seulement si $A = \varnothing$. C'est une particularité des espaces probabilisés infinis, dont il faut se méfier.

IV. Conditionnement et indépendance

1. Probabilités conditionnelles

La définition de probabilités conditionnelles, vue dans le cas des probabilités finies, se généralise aux espaces probabilisés quelconques.

Définition 28.10.

Soient A et B deux événements, tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle **probabilité de B sachant** A, et on note $\mathbb{P}_A(B)$ le nombre

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

La fonction $\mathbb{P}_A : \mathcal{A} \to [0;1]$ est également une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Démonstration

Tout d'abord, puisque $A \cap B \subset A$, $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ et donc $\mathbb{P}_A(B) \in [0, 1]$ pour tout $B \in \mathcal{A}$.

- $\mathbb{P}_A(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.
- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles de $\mathcal{A}$, alors
$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cap A\right) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap A)\right) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(B_n \cap A),$$
car $\mathbb{P}$ est σ-additive et $(B_n \cap A)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles de $\mathcal{A}$. On a bien $\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n)$.

L'application $\mathbb{P}_A$ est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Théorème 28.8. Probabilités composées

Pour tous événements $A_1, \cdots, A_n$, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration

Même principe qu'en version finie.

Savoir Faire

Exercice 28.11

Une urne contient une boule bleue et une boule rouge. On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, introduisons R_n : « la n-ième boule tirée est rouge ». On veut calculer

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} R_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right),$$

d'après le théorème de la limite monotone. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}_{R_1}(R_2)\,\mathbb{P}_{R_1\cap R_2}(R_3)\ldots\mathbb{P}_{\mathbb{R}_1\cap\cdots\cap R_{n-1}}(R_n)$$

On a $\mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{2}$. Supposons R_1 réalisé. On a donc tiré une boule rouge au premier tirage, boule que l'on remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules rouges : l'urne contient donc trois boules rouges et une boule bleue. Ainsi, $\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{3}{4}$. On trouve les autres probabilités conditionnelles de façon analogue, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) &= \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\\ &= \frac{1\times3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times8\times\cdots\times2n}\\ &= \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times\cdots\times(2n-1)\times2n}{(2\times4\times6\times8\times\cdots\times2n)^2}\\ &= \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times\cdots\times(2n-1)\times2n}{2^{2n}(1\times2\times3\times4\times\cdots\times n)^2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\end{aligned}$$

Calculons la limite : on utilise la formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}$.

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \sim \frac{\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{4^n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}2\pi n} \sim \frac{4^n n^{2n}\sqrt{4\pi n}\mathrm{e}^{2n}}{4^n n^{2n}\mathrm{e}^{2n}2\pi n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant1} R_n\right) = 0$: la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges est nulle. Ainsi, on va tirer presque sûrement au moins une boule bleue.

Définition 28.11. Système complet d'évènements

Soient $(A_i)_{i\in I}$ (avec I partie de $\mathbb{N}$) une famille d'évènements de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ forme un **système complet d'évènements** si :

- Pour tout $(i,j)\in I^2$ tels que $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\varnothing$,
- $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'évènements si :

- Pour tout $(i,j)\in I^2$ tels que $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\varnothing$,
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$

Remarque

Un système complet d'évènements est un système quasi-complet d'évènements. En revanche, la réciproque n'est pas forcément vraie.

Théorème 28.9. Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient I une partie de $\mathbb{N}$. et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de Ω. Alors, pour tout événement B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(B\cap A_i)$$

Si, de plus, pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$$
En particulier,
$$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$$
Le resultat est vrai si $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'évènements.

Démonstration

Par définition,
$$\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \Omega \cap B = B$$
De plus, puisque les (A_i) sont deux à deux disjoints, les $(A_i \cap B)$ le sont également. Par σ-additivité, on en déduit alors que
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$
De plus, puisque $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ pour tout i, on peut conclure que
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Exemple 28.12 (Exemple fondamental)

Si $A \in \mathcal{A}$ est un évènement, alors $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'évènements. Ainsi, pour tout évènement B, on aura
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

Remarque

On n'arrive pas toujours à déterminer si, pour tout $i \in I, \mathbb{P}(A_i) \neq 0$ (hypothèse nécessaire pour que $\mathbb{P}_{A_i}(B)$ soit défini). Par convention, lorsque $i \in I$ est tel que $\mathbb{P}(A_i) = 0$, on attribue à $\mathbb{P}_{A_i}(B)$ une valeur arbitraire entre 0 et 1.
Ce faisant, le terme $\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$ a un sens, et n'entraîne pas d'erreurs dans la formule des probabilités totales car, dans ce cas, il est nul et rappelons qu'il est issu du terme $\mathbb{P}(B \cap A_i)$, qui est lui-même nul puisque $B \cap A_i \subset A_i$.

Théorème 28.10. Formule de Bayes

Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle. Alors
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}_A(B)$$

Démonstration

Puisque A et B sont de probabilités non nulles, on peut écrire :
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$$

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_B(A) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}_A(B)\end{aligned}$$

2. Indépendance d'une suite infinie d'événements

On garde les mêmes définitions d'indépendance :

Définition 28.12.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A, B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Rappelons les propriétés que nous avons déjà vu et qui sont encore valables :

Propriété 28.11.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A, B deux événements.

- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.
- Si A et B sont indépendants, alors
  - A et $\overline{B}$ sont indépendants,
  - $\overline{A}$ et B sont indépendants,
  - $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

La notion d'indépendance mutuelle se généralise à une suite infinie d'événements :

Définition 28.13.

Soit I une partie de $\mathbb{N}$. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une suite infinie d'événements de $\mathcal{A}$. On dit que la suite (A_i) est **mutuellement indépendante** si pour tout sous ensemble <u>fini</u> $J \subset I$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i)$$

⚠ **Attention**

On ne vérifie que la probabilité d'un sous ensemble **fini** d'événements. Si on doit déterminer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in N} A_i\right)$, on doit utiliser la propriété de la limite monotone.

Enfin, on dispose toujours du théorème des coalitions :

Théorème 28.12. Théorème des coalitions

Soit I une partie de $\mathbb{N}$. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants.

- Si pour tout $i\in I, B_i = A_i$ ou $\bar{A}_i$, alors $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.
- Si $J\subset I$, alors $(A_i)_{i\in J}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.
- Si $J \subset I$, alors tout événement construit à partir de $(A_i)_{i\in J}$ est indépendant de tout événement construit à partir de $(A_i)_{i\notin J}$.

☞ *Exercices 6, 7 et 8.*

V. Variables aléatoires

Dans cette section, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Nous allons donner une définition de variables aléatoires qui soit cohérente avec la définition d'espace probabilisée.

1. Définition

Définition 28.14.

Une **variable aléatoire** X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$\{\omega \in \Omega,\ \ X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$$

On appelle **support** ou **univers image** de X, et on note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Remarque

La condition imposée à X permet simplement de pouvoir calculer la probabilité de plusieurs ensembles, du type $\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$, ... Sans cette condition, les ensembles qu'on manipule ne sont *a priori* pas dans la tribu $\mathcal{A}$, et on ne peut donc pas *a priori* calculer leur probabilité.

Exemple 28.13

On lance un dé bien équilibré et on note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir 6. La variable aléatoire X est à valeur dans $\mathbb{N}$, et $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (il faut au moins un lancer pour obtenir 6).

Remarque

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, alors $X+Y$, $\min(X, Y) : \omega \mapsto \min(X(\omega), Y(\omega))$ et $\max(X, Y) : \omega \mapsto \max(X(\omega), Y(\omega))$ sont également des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.

Définition 28.15.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors la fonction

$$g(X) : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto g(X(\omega)) \end{array}$$

est également une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Exemple 28.14

En prenant pour g la fonction carrée, on peut définir la variable aléatoire $X^2 : \omega \mapsto X(\omega)^2$.

2. Propriétés

Définition 28.16.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$$

$$[X < x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\}$$

...

$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant x\}$$

Si I est une partie de $\mathbb{R}$, on note également

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}$$

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$ alors on note

$$[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega, x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}$$

Proposition 28.13.

Ces différents ensembles sont dans la tribu $\mathcal{A}$ par construction de X. Ainsi, on pourra calculer leur probabilité, et on notera par exemple

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}([X = x]) \text{ et } \mathbb{P}(x \leqslant X \leqslant y) = \mathbb{P}([x \leqslant X \leqslant y])$$

Pour démontrer cette proposition, on va utiliser un lemme pratique :

Lemme 28.14.

Soient X une variable aléatoire réelle et $x \in \mathbb{R}$. On a $\varnothing = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [X \leqslant -n]$,

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X \leqslant n], \quad [X \leqslant x] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant x + \frac{1}{n}\right] \quad \text{et} \quad [X < x] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]$$

Démonstration

Montrons par exemple le dernier point, et on procède par double inclusion.

Soit $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega \in \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]$, c'est-à-dire $X(\omega) \leqslant x - \frac{1}{n}$. Ainsi $X(\omega) < x$ et donc $\omega \in [X < x]$. Ainsi $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right] \subset [X < x]$.

Soit $\omega \in [X < x]$. On a donc $X(\omega) < x$. On cherche $n \geqslant 1$ tel que $X(\omega) \leqslant x - 1/n$, c'est-à-dire $n \geqslant 1/(x - X(\omega))$. On prend alors $n = \left\lfloor \frac{1}{x - X(\omega)} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$. On a $n \geqslant \frac{1}{x - X(\omega)}$ donc $\frac{1}{n} \leqslant x - X(\omega)$ et finalement $X(\omega) \leqslant x - \frac{1}{n}$. Par conséquent $\omega \in \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]$ et donc $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]$. On a donc $[X < x] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]$.

Ainsi, $[X < x] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]$.

Démontrons alors le point : pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $[X \in I] \in \mathcal{A}$ de la proposition, les autres en découlant :

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition d'une variable aléatoire réelle, on a $[X \leqslant x] \in \mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est une tribu, on a

- $[X > x] = \overline{[X \leqslant x]} \in \mathcal{A}$,
- $[X < x] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \underbrace{\left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$,
- $[X \geqslant x] = \overline{[X < x]} \in \mathcal{A}$,
- $[X = x] = [X \leqslant x] \cap [X \geqslant x] \in \mathcal{A}$

Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $[X \in I]$ peut s'écrire comme l'intersection de deux événements parmi ceux décrits ci-dessus (par exemple, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sont tels que $a < b$, alors $[a \leqslant X < b] = [X < b] \cap [X \geqslant a]$).

Exercice 28.15

Dans l'exemple précédent, déterminer $\mathbb{P}(X=1)$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$.

Solution

$[X=1]$ correspond à l'ensemble des tirages ayant un 6 au premier lancer ; $[X \leqslant 2]$ correspond à l'ensemble des tirages ayant un 6 au premier lancer, ou alors un 6 au deuxième lancer mais pas au premier. Par construction, $\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 2)=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$.

Théorème 28.15.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeur dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Alors, la suite des $([X=i])_{i\in\mathbb{N}}$ (ou $([X=i])_{i\in\mathbb{Z}}$) est un système complet d'événement, appelé **système complet d'événement associé à la variable aléatoire** X.

Démonstration

Les ensembles $[X=i]$, par construction, sont deux à deux disjoints, et puisque la variable aléatoire est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$), la réunion des $[X=i]$ recouvre bien Ω.

Exemple 28.16

Dans l'exemple précédent, la variable aléatoire étant à valeur dans $\mathbb{N}^*$, la suite $([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ représente un système complet d'événements de Ω.

3. Loi d'une variable aléatoire

Définition 28.17.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle **loi** de la variable aléatoire X, la donnée de la fonction $\mathbb{P}_X$ qui, à tout intervalle I de $\mathbb{R}$, associe $\mathbb{P}(X \in I)$.

Remarque

Contrairement aux variables aléatoires finies, où on donnait la loi de probabilités sous forme de tableau, il faudra ici donner une formule plus générale.

Exemple 28.17

Dans le cas de notre lancer de dé, où X désigne le premier lancer où on obtient 6. Alors $\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X=2)=\frac{5}{6}.\frac{1}{6}$, et plus généralement

$$\mathbb{P}(X=i)=\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\frac{1}{6}$$

Remarque

Cette loi s'appelle loi géométrique. Nous y reviendrons plus tard.

Théorème 28.16.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeur dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Alors

$$\sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = i) = 1$$

Démonstration

En effet, dans ce cas, la suite $([X = i])$ forme un système complet d'événements.

Exemple 28.18

Dans notre exemple, en utilisant la série géométrique (avec $-1 \leqslant \frac{5}{6} < 1$) :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1$$

Remarque

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, on dit que la variable aléatoire est **discrète**.

☞ *Exercice 9.*

4. Fonction de répartition

Définition 28.18.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle **fonction de répartition** de X, et on note F_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Propriété 28.17.

La fonction de répartition F_X de X est une fonction croissante, continue à droite en tout point, et telle que

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

Démonstration

Si $x \leqslant y$, alors

$$F_X(y) = \mathbb{P}(X \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant x) + \mathbb{P}(x < X \leqslant y) \geqslant \mathbb{P}(X \leqslant x) = F_X(x)$$

donc F_X est bien croissante.

La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par 1 . Le théorème de la limite monotone entraîne donc qu'elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

En particulier, nous avons $\ell = \lim_{n \to +\infty} F_X(n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X \leqslant n)$.

Puisque $([X \leqslant n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille croissante d'événements dont la réunion est Ω, la propriété de la limite monotone entraîne que

$$\ell = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X \leqslant n]\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Ainsi F_X admet 1 pour limite en $+\infty$. On montre de façon analogue que F_X admet 0 pour limite en $-\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque F_X est croissante et minorée (par 0) sur $[x, +\infty[$, le théorème de la limite monotone entraîne donc qu'elle admet une limite finie à droite. Puisque la suite $\left(x + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x^+, nous avons

$$\lim_{y\to x^+} F_X(y) = \lim_{n\to+\infty} F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X \leqslant x + \frac{1}{n}\right)$$

Puisque $\left(\left[X \leqslant x + \frac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille décroissante d'événements dont l'intersection est $[X \leqslant x]$, la propriété de la limite monotone entraîne que

$$\lim_{y\to x^+} F_X(y) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[X \leqslant x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = F_X(x).$$

On dispose d'un lien plus étroite entre fonction de répartition et loi de la variable aléatoire :

Proposition 28.18.

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et F_X sa fonction de répartition.

- F_X admet une limite à gauche en tout point, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{y\to x^-} F_X(y) = \mathbb{P}(X < x) = F_X(x) - \mathbb{P}(X = x)$$

- F_X est continue en un réel x si et seulement si $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque F_X est croissante et majorée sur $]-\infty, x]$, le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle admet une limite finie à gauche.
Puisque la suite $\left(x - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x^-, nous avons

$$\lim_{y\to x^-} F_X(y) = \lim_{n\to+\infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X \leqslant x - \frac{1}{n}\right).$$

Puisque $\left(\left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille croissante d'événements dont l'intersection est $[X < x]$, la propriété de la limite monotone entraîne que

$$\lim_{y\to x^-} F_X(y) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]\right) = \mathbb{P}(X < x) = F_X(x) - \mathbb{P}(X = x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a vu que F_X est continue à droite en x. Par conséquent, F_X est continue en x si et seulement si F_X est continue à gauche en x, c'est-à-dire $\lim\limits_{y\to x^-} F_X(y) = F_X(x)$. Avec ce qui précède, ceci est vrai si et seulement si $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Théorème 28.19.

Pour connaitre la loi de probabilité de X, il faut et il suffit de connaitre la fonction de répartition de X.

Démonstration

Dans le cas où X est à valeur dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, on constate par exemple que

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(X \leqslant i) - \mathbb{P}(X \leqslant i - 1) = F_X(i) - F_X(i - 1)$$

> Le cas où X est à valeur dans $\mathbb{R}$ quelconque est admis.

Exercices 28

Exercices

Généralités

●○○ **Exercice 1 Une tribu** (5 min.)

Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $\mathscr{A} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

Montrer que $\mathscr{A}$ n'est pas égale à $\mathscr{P}(\Omega)$.

●○○ **Exercice 2 Des évènements** (10 min.)

On lance une pièce une infinité de fois. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement « le k-ième lancer donne pile ».

1. Décrire par une phrase chacun des évènements suivants :
$$E_1 = \bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k, \qquad E_2 = \left(\bigcap_{k=1}^{4} \overline{A}_k\right) \cap \left(\bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k\right), \qquad E_3 = \bigcup_{k=5}^{+\infty} A_k.$$
2. Écrire à l'aide des A_k l'évènement B_n « on obtient au moins une fois pile après le n-ième lancer ».
3. Écrire à l'aide des A_k les évènements :
   a) C_n : « on n'obtient plus que des piles à partir du n-ième lancer ».
   b) C : « on n'obtient plus que des piles à partir d'un certain lancer ».

●○○ **Exercice 3 Des probabilités** (15 min.)

Déterminer si les applications suivantes sont des probabilités sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$, suivant la valeur de α.

1. $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \alpha \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$,
2. $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \frac{\alpha}{(n+1)^2}$,
3. $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \frac{\alpha}{\pi^n}$,
4. $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \alpha\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$,
5. $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \frac{\alpha 5^n}{n!}$,
6. $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \frac{(-1)^n \alpha}{n!}$.

Limite monotone

●○○ **Exercice 4 Une chaîne de Markov** (30 min.)

Une araignée se déplace sur les trois sommets d'un triangle ABC. A l'instant 0, elle est en A. Puis, à chaque instant instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle se déplace :

- si elle est en A, elle va en B ;
- si elle est en B, elle va en A avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ et en C avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$;
- si elle est en C, elle y reste.

On note E l'évènement « l'araignée arrive en C ». On cherche à montrer que E a lieu presque sûrement.

1. Représenter la situation avec un graphe.

2. Montrer que l'araignée ne peut arriver au point C qu'à des instants pairs.
3. Calculer la probabilité de l'évènement D_n que l'araignée arrive en C pour la première fois à l'instant $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Que dire de D_p et D_q si $p \neq q$?
5. En déduire que $\mathbb{P}(E) = 1$.

●○○ Exercice 5 Et la formule des probabilités totales (30 min.)

Un joueur lance une pièce non truquée, équilibrée, jusqu'à l'obtention d'un premier pile. S'il lui a fallu n (n entier naturel non nul) lancers pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi $n!$ billets dont un seul gagnant.

On définit, pour tout entier naturel non nul, les évènements :

- E_n : « le joueur obtient le premier pile au lancer n »
- P_n : « le joueur obtient pile au n-ième lancer »
- F_n : « le joueur obtient face au n-ième lancer »
- F : « le joueur n'obtient jamais pile »

1. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $\mathbb{P}(E_n)$. Exprimer $\overline{F}$ en fonction des E_n, puis en déduire $\mathbb{P}(\overline{F})$ et $\mathbb{P}(F)$.
2. On définit l'évènement G : « le joueur obtient le billet gagnant ». Pour tout entier naturel n non nul, déterminer $\mathbb{P}_{E_n}(G)$, puis en déduire $\mathbb{P}(G)$.
3. Le jeu est-il équilibré (on donne $\sqrt{e} \approx 1,65$) ?

Autres exercices

●○○ Exercice 6 Une autre chaîne de Markov (20 min.)

On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B, C d'un triangle selon le procédé suivant :

- si la particule se trouve en B, elle y reste.
- si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
- si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, et elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.
- à la première seconde, elle se pose au hasard sur l'un des trois sommets.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement : "à la n^{ieme} seconde, la particule se trouve en A (resp. B, C)". On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n.

1. Que valent a_1, b_1, c_1 ?
2. Donner une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}$$
(*On pourra d'abord montrer que* (c_n) *est une suite récurrente linéaire d'ordre* 2).
En déduire a_n et b_n en fonction de n.
4. Etudier la convergence des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$. Intérpreter.

●○○ Exercice 7 Un jeu (20 min.)

On dispose de deux pièces identiques d'apparence, la pièce A donnant Pile avec une probabilité a, et la pièce B donnant Pile avec une probabilité b.

Pour le premier lancer du jeu, on choisit une pièce au hasard et pour les coups suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient Pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce pour le lancer suivant.

On note, pour tout $k \geqslant 1$, A_k l'événement "le k-ième lancer se fait avec la pièce A", $B_k = \overline{A_k}$ et E_k l'événement "le k-ième lancer amène Pile".

1. Trouver une relation entre $\mathbb{P}(E_k)$ et $\mathbb{P}(A_k)$.
2. Trouver une relation entre $\mathbb{P}(A_{k+1})$ et $\mathbb{P}(A_k)$.
3. En déduire $\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(E_k)$.

●○○ **Exercice 8** Un autre jeu (30 min.)

Deux joueurs A et B jouent chacun avec deux dés équilibrés. A gagnera en amenant un total de 7, et B en amenant un total de 6. B joue le premier et ensuite (si nécessaire), A et B jouent alternativement. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux gagne.

1. Déterminer la probabilité des événements G_A (resp G_B) : "le joueur A obtient 7" (resp "le joueur B obtient 6")
2. On introduit les événements B_n (resp. A_n) : "le joueur B (resp A) gagne à son n-ième lancer". Déterminer la probabilité de ces événements.
3. On note V_A (resp. V_B) l'événement "le jouer A (resp. B) gagne". Décrire ces deux événements en fonction des événements précédents. En déduire la probabilité de V_A et V_B. Le jeu est-il équilibré ?

●●○ **Exercice 9** Des boules (20 min.)

Soit $n > 0$. On dispose d'une boite A contenant n boules numérotées de 1 à n, et de n boîtes $A_1 \cdots A_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la boite A_k contient k boules numérotées de 1 à k.
On tire au hasard une boule de A. En désignant k le numéro obtenu, on tire alors au hasard une boule dans la boite A_k. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue à l'issue du 2e tirage. Déterminer la loi de X.

●●○ **Exercice 10** Des filles (20 min.)

Dans une population, on suppose que la probabilité qu'une famille ait n enfants est $p_n = \alpha \frac{2^n}{n!}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il est équiprobable qu'un enfant soit une fille ou un garçon.

1. Déterminer la valeur de α.
2. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.
3. Quelle est la probabilité qu'une famille ayant exactement une fille comporte deux enfants ?
4. Quelle est la probabilité qu'une famille ait exactement deux filles sachant qu'elle a exactement deux garçons ?

Pour aller plus loin

●●○ **Exercice 11** Présentation des chaînes de Markov (45 min.)

Calcul matriciel

On définit les matrices A, B par $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{12}A$.

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Vérifier que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 0 & -11 & 11 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

   b) Calculer $P^{-1}BP$. En déduire une matrice diagonale D telle que $B = PDP^{-1}$.

   c) Montrer par récurrence que $\forall\, n \geqslant 0,\ B^n = PD^nP^{-1}$.

   d) Déterminer l'expression de la matrice B^n en fonction de n.

Application à un processus aléatoire

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :

T : les jouets traditionnels tels que poupées, peluches ;

M : les jouets liés à la mode inspirés directement d'un livre, un film, une émission ;

S : les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.

Il estime que

(i) Le client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour Noel choisira, l'année suivante, un jouet de l'une des trois catégories avec une équiprobabilité ;

(ii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

(iii) Le client qui a acheté un jouet scientifique optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{2}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Le volume des ventes de ce commerçant vient de se composer d'une part $p_0 = \frac{45}{100}$ de jouets de la catégorie T, d'une part $q_0 = \frac{25}{100}$ de jouets de la catégorie M et d'une part $r_0 = \frac{30}{100}$ de jouets de la catégorie S.

On désigne par p_n, q_n, r_n, les probabilités respectives des jouets T, M, S dans les ventes du distributeur le n-ième Noël suivant.

1. Montrer que le triplet $(p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1})$ s'exprime en fonction du triplet (p_n, q_n, r_n).
2. Déterminer une matrice C telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\forall\, n \geqslant 0$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.
4. Exprimer (p_n, q_n, r_n) en fonction de n.
5. Quelles parts à long terme les trois catégories de jouets représenteront-elles dans la vente si l'attitude des consommateurs reste constante ?

Résumé

Le processus décrit dans cet exercice est un exemple de chaîne de Markov. Pour simplifier les notations, nous allons coder les catégories T, M et S par les nombres 0, 1 et 2 et introduire la suite de variables aléatoires (X_n) , où X_n vaut 0, 1 ou 2 selon que le client choisit la n-ème année un jouets de la catégorie T, M et S. On a ainsi $p_n = P(X_n = 0) \dots$.

La caractéristique d'une chaîne de Markov est que la valeur de X_n (plus exactement la probabilité qu'elle prenne chaque valeur) ne dépend que de celle de X_{n-1} et non de ce qui s'est passé avant. C'est bien le cas dans notre exemple. La matrice C est appelée **matrice de transition** de la chaîne.

1. Quelle propriété possède C ?
2. Représenter les probabilités de passage de X_n d'une valeur à une autre sur un graphe.
3. Notons p_∞, q_∞, r_∞ les limites de (p_n), (q_n), (r_n) ; et $\pi_\infty = \begin{pmatrix} p_\infty \\ q_\infty \\ r_\infty \end{pmatrix}$? Que vaut $C\pi_\infty$?

   Cette convergence des probabilités vers l'état stable, indépendemment de l'état initial, est une propriété importante des chaînes de Markov : on dit qu'elle est **ergodique**.

Pour des renseignements supplémentaires sur les chaînes de markov :

●●○ **Exercice 12 Ruine du joueur** (25 min.)

Soient $p \in]0,\, 1[$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,\, N]\!]$.

Un joueur possède k euros et désire en avoir N. Il effectue une série de paris mutuellement indépendants. A chaque pari il gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $q = 1-p$. Il continue de jouer jusqu'à ce qu'il ait accumulé N euros (incluant la mise de départ) ou jusqu'à ce qu'il soit ruiné. On note r_k la probabilité que le joueur finisse le jeu ruiné.

1. Calculer r_0 et r_N. Montrer ensuite que $r_k = pr_{k+1} + qr_{k-1}$ lorsque $k \notin \{0, N\}$.
   On pourra introduire l'événement G : « le joueur gagne son premier pari ».
2. Montrer que, si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $r_k = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$.
3. Traiter le cas où $p = \frac{1}{2}$.
4. Comment évolue cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$? Commenter.

●●○ **Exercice 13 Paradoxe du singe savant** (20 min.)

Le paradoxe du singe savant est un théorème selon lequel un singe (immortel) qui tape indéfiniment et au hasard sur le clavier d'une machine à écrire pourra presque sûrement écrire *Hamlet* de Shakespeare (ou tout autre texte d'une longueur finie).

Plus généralement, on suppose que la machine à écrire dispose de $\ell \in \mathbb{N}^*$ caractères et que le texte que le singe doit taper contient N caractères. On suppose que le singe tape chaque caractère indépendamment des autres et totalement au hasard.

1. Quelle est la probabilité que, à l'issue des N premiers caractères tapés, le singe n'ait pas écrit le texte ?
2. On recommence n fois l'expérience consistant à taper un bloc de $N \in \mathbb{N}^*$ caractères. Quelle est la probabilité P_n que le signe n'ai tapé le texte dans aucun des n blocs ?
3. Conclure et commenter.

Sujets de concours

●●○ **Sujet 1 Ecricome 2009 – voie S** (50 min.)

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels non nuls et l'on note $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au « hasard » et « avec remise » d'une boule, en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

Partie I.

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Y.
2. Pour tout entier k compris entre 1 et $b + 1$, calculer la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(Y = k)$.

3. Vérifier que
$$\mathbb{P}(Y=b+1)=\frac{b!}{N^b}$$
et que, pour tout entier k compris entre 1 et b, la formule suivant est vraie :
$$\mathbb{P}(Y=k)=\frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}}-\frac{b!}{(b-k)!N^k}$$
4. Soient M un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \ldots, a_M$ une famille de réels. Établir que :
$$\sum_{k=1}^{M} k\left(a_{k-1}-a_k\right)=\left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k\right)-Ma_M$$
5. En déduire que $\mathbb{E}(Y)=\displaystyle\sum_{k=0}^{b}\frac{b!}{(b-k)!N^k}$.

Partie II.

Dans cette partie on note :

- pour tout entier $n \geqslant 1$, q_n la probabilité de l'événement, noté N_n : « la n-ième boule tirée est noire ».
- pour tout entier $n \geqslant 0$, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages. Par convention, $X_0=0$.
- pour tous entiers $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement : « au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires ».

On remarquera que $p_{0,0}=1$ et que $p_{n,k}=0$ si $k>n$ ou si $k>b$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $p_{n,0}$, puis $p_{n,n}$. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$.
7. Démontrer la formule suivante, valable pour tous les entiers naturels n et k non nuls :
$$(\mathscr{A}) : N \cdot p_{n,k}=(a+k)p_{n-1,k}+(b+1-k)p_{n-1,k-1}$$
8. **Calcul de l'espérance de X_n.**
   a) À l'aide de la formule $(\mathscr{A})$ obtenue dans la question 7 , démontrer la formule pour $n \geqslant 1$:
   $$N \cdot \mathbb{E}\left(X_n\right)=\sum_{k=0}^{n-1}[b+k(N-1)]p_{n-1,k}$$
   puis justifier que :
   $$\mathbb{E}\left(X_n\right)=\left(1-\frac{1}{N}\right)\mathbb{E}\left(X_{n-1}\right)+\frac{b}{N}$$
   b) À l'aide de la formule ci-dessus, écrire une fonction Python fournissant le calcul de $\mathbb{E}\left(X_{2009}\right)$ lorsque $b=10$ et $N=100$.
   c) En utilisant la dernière formule établie à la question 8.a, prouver que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$\mathbb{E}\left(X_n\right)=b\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]$$
9. **Calcul de q_n.**
   a) En utilisant une formule des probabilités totales, établir la formule suivante, valable pour tout entier naturel n :
   $$N \cdot q_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(b-k)p_{n,k}$$
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer alors q_{n+1} en fonction de $\mathbb{E}\left(X_n\right)$ et en déduire l'expression de q_{n+1} en fonction de n, b, N.

10. **Calcul de la variance de X_n.**
On introduit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \mathbb{E}\left(X_n\left(X_n - 1\right)\right)$$

   a) À l'aide de la formule $(\mathscr{A})$ obtenue dans la question 7 , montrer que l'on a :

$$N \cdot u_n = \sum_{k=1}^{n-1} [k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k] p_{n-1,k}$$

   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait à la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right]$$

   c) À l'aide d'une récurrence, démontrer que la formule suivante est valable pour tout entier naturel n :

$$u_n = b(b-1)\left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$$

   d) Donner la valeur de $\mathbb{V}\text{ar}\left(X_n\right)$ puis préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

Les complémentaires des éléments de $\mathcal{A}$ appartiennent à $\mathcal{A}$; les réunions deux à deux d'éléments de $\mathcal{A}$ appartiennent à $\mathcal{A}$, et $\Omega \in \mathcal{A}$: $\mathcal{A}$ est bien une tribu.
De plus, $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\Omega)$, car par exemple $\{3\} \notin \mathcal{A}$.

Exercice 2

1. E_1 représente l'évènement : "n'obtenir que des piles à partir du 5-ième lancer", E_2 l'évènement : "obtenir 4 fois face puis que des piles", et E_3 l'évènement : "obtenir au moins un pile à partir du 5-ième lancer".
2. On s'inspire de E_3 :

$$B_n = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k$$

3. a) De la même manière, on a

$$C_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

b) On n'impose pas le début des piles : on est ainsi dans l'un des C_n. On a donc

$$C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=n+1}^{+\infty} A_k \right)$$

Exercice 3

Pour chacune des applications proposées, il faut que les $\mathbb{P}(\{n\})$ soit positif, et telle que $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$, c'est-à-dire, puisque $(\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(n)$ converge et vaut 1.
1. Tout d'abord, α doit être positif. Remarquons que si $\alpha > 0$, $\mathbb{P}(\{n\}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n+1}$ qui est une série divergente. Si $\alpha = 0$, la série converge vers 0. Dans tous les cas, $\mathbb{P}$ n'est pas une probabilité.
2. Nécessairement, $\alpha > 0$. Puisque $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge (Riemann, avec $2 > 1$), on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ainsi, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$ si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{6}{\pi^2}$.

3. $\alpha > 0$ (sinon ce n'est pas une probabilité). Remarquons que $\mathbb{P}(\{n\}) = \alpha \left(\frac{1}{\pi}\right)^n$ est le terme général d'une série convergente (car $\frac{1}{\pi} \in]-1, 1[$). Ainsi, $\mathbb{P}$ est une probabilité si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1 \iff \alpha \frac{1}{1 - \frac{1}{\pi}} = 1.$$

$\mathbb{P}$ est une probabilité si et seulement si $\alpha = \frac{\pi}{\pi-1} > 0$.

4. Même raisonnement : $\alpha > 0$ et $1 - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\})$ converge. Alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1 \iff \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) > 0.$$

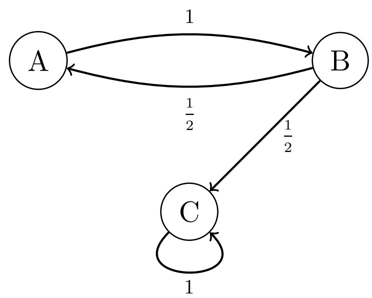
Ainsi, $\mathbb{P}$ est une probabilité si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)}$.

5. Même raisonnement, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{5^n}{n!}$ converge, vers e^5. Ainsi, $\mathbb{P}$ est une probabilité si et seulement si $\alpha = \frac{1}{\mathrm{e}^5} = \mathrm{e}^{-5}$.

6. $\mathbb{P}$ n'est jamais une probabilité : si $\alpha > 0$, $\mathbb{P}(\{1\}) < 0$ et si $\alpha < 0$, $\mathbb{P}(\{0\}) < 0$. Si $\alpha = 0$, la série converge vers 0 et non 1. Dans tous les cas, $\mathbb{P}$ n'est pas une probabilité.

Exercice 4

1. On obtient le graphe suivant :



2. L'araignée ne peut venir en C qu'à partir de B, et si elle y est, elle y reste. Au départ, elle est en A. Donc l'araignée va faire $(A-B)\ldots(A-B)-C$ avec au moins une fois $A-B$. Elle y arrivera ainsi forcément en un instant paire (puisqu'en 0, elle est en A).

3. On note A_n l'évènement : "l'araignée est en A au n-ième instant" (et de même B_n pour B et C_n pour C). Alors, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_n) &= \mathbb{P}(A_0 \cap B_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap B_{2n-1} \cap C_{2n}) \\
&= \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}_{A_0}(B_1)\,\mathbb{P}_{A_0\cap B_1}(A_2)\ldots\mathbb{P}_{A_0\cap B_1\cap\ldots A_{2n-2}}(B_{2n-1})\mathbb{P}_{A_0\cap B_1\cap\ldots\cap B_{2n-1}}(C_{2n}) \text{ par les proba composées} \\
&= \underbrace{1\times\frac{1}{2}\times\ 1\times\frac{1}{2}\times\ldots\times 1\times\frac{1}{2}}_{n-1\ \text{fois}}\times\frac{1}{2} \text{ par indépendance} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

4. Par définition, $D_p \cap D_q = \varnothing$ si $p \neq q$ (car on s'intéresse à la première fois où l'araignée arrive en C).

5. Mais alors, par définition :

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$$

On peut appliquer la propriété de la limite monontone :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n\right) \\ &= \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{p} D_n\right) \\ &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} \mathbb{P}(D_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1\end{aligned}$$

Ainsi, E est un évènement presque sûr.

Exercice 5

1. Par définition, $E_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} F_k \cap P_n$. Ainsi, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n) \\ &= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(F_2)\ldots\mathbb{P}_{F_1\cap\ldots\cap F_{n-2}}(F_{n-1})\mathbb{P}_{F_1\cap\ldots\cap F_{n-1}}(P_n) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2}}_{n \text{ fois}} \text{ par indépendance} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

2. Par définition, $\overline{F}$ représente l'évènement : "obtenir au moins une fois pile", ce qui peut s'écrire également : "obtenir au moins une fois un premier pile". Ainsi

$$\overline{F} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$$

D'après la propriété de la limite monotone (ou par σ-additivité) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{F}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{p} E_n\right) \\ &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} \mathbb{P}(E_n) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(\overline{F}) = 1$ et $\mathbb{P}(F) = 0$: l'évènement F est donc négligeable.

3. L'énoncé nous indique que s'il a fallu faire n lancers pour obtenir pile, on tire un billet parmi $n!$ billets, dont un seul est gagnant et tous les billets sont équiprobables. Ainsi, il n'y a qu'un chance sur $n!$ d'obtenir un billet gagnant, et donc

$$\mathbb{P}_{E_n}(G) = \frac{1}{n!}$$

La famille (E_n) est un système quasi-complet d'évènements : ils sont 2 à 2 incompatibles, et la probabilité de leur réunion est égale à 1 d'après la question précédente. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n \cap G) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)\mathbb{P}_{E_n}(G) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - a_0$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \sqrt{\mathrm{e}} - 1}$$

4. On obtient $\mathbb{P}(G) \approx 0,65$. On peut ainsi dire que le jeu ne semble pas équilibré.

Exercice 6

1. A la première seconde, la particule se pose au hasard sur l'un des trois sommets, donc $a_1 = b_1 = c_1 = \dfrac{1}{3}$.

2. Remarquons que, par définition, (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, et en utilisant l'énoncé :

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}a_n + 0 \times b_n + \frac{1}{12}c_n$$

$$b_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3}a_n + 1 \times b_n + \frac{7}{12}c_n$$

$$c_{n+1} = \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}a_n + 0 \times b_n + \frac{1}{3}c_n$$

La seule difficulté est de déterminer $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})$. Si on note $a = \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$ et $b = \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})$, l'énoncé indique que $b = 7a$. De plus, puisque $\mathbb{P}_{C_n}$ est une loi de probabilité, on doit avoir $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = 1$, soit

$$a + 7a + \frac{1}{3} = 1$$

ce qui donne $a = \frac{1}{12}$ et $b = \frac{7}{12}$.

3. Pour tout $n \geqslant 0$, en utilisant les relations précédentes, on a

$$c_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}c_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n\right) + \frac{1}{3}c_{n+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}\frac{1}{12}c_n + \frac{1}{3}c_{n+1}$$

Or $c_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{3}c_n \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}a_n = c_{n+1} - \dfrac{1}{3}c_n$ donc :

$$c_{n+2} = \frac{1}{3}\left(c_{n+1} - \frac{1}{3}c_n\right) + \frac{1}{3}\frac{1}{12}c_n + \frac{1}{3}c_{n+1} = \frac{2}{3}c_{n+1} - \frac{1}{12}c_n$$

Ainsi, (c_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En étudiant son équation caractéristique $X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{1}{12}$, on obtient deux racines $x_1 = \frac{1}{6}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$. Ainsi, il existe deux réels α et β tels que $c_n = \alpha\left(\frac{1}{6}\right)^n + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour $n \geqslant 1$. Puisque $c_1 = \frac{1}{3}$ et $c_2 = \frac{2}{9}$, on peut écrire

$$\begin{cases} \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{36}\alpha + \frac{1}{4}\beta = \frac{2}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{3} & L_1 \\ \qquad\quad \frac{1}{6}\beta = \frac{1}{6} & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{6}L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \ \ 1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\ n \geqslant 1,\quad c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}}$$

En utilisant les relations vues en 2., on obtient

$$a_n = 3c_{n+1} - c_n = 3\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{6^{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}\right) = \frac{3}{2\times 2^n} - \frac{1}{2\times 6^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{6^n}$$

ainsi,

$$\boxed{\forall\ n \geqslant 1,\quad a_n = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2\times 6^n}}$$

Enfin, $a_n + b_n + c_n = 1$ puisque (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, donc

$$b_n = 1 - a_n - c_n = 1 - \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2\times 6^n}\right) - \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}\right)$$

soit

$$\boxed{\forall\ n \geqslant 1,\quad b_n = 1 + \frac{1}{2\times 6^n} - \frac{3}{2^{n+1}}}$$

4. Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $-1 < \frac{1}{6} < 1$, on obtient par passage à la limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = 1$$

Ainsi, plus on évolue dans le temps, plus la probabilité que la particule soit en B est grande, et en A et C est faible, ce qui est cohérent, vue la définition.

Exercice 7

1. Remarquons que (A_k, B_k) forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(E_k) = \mathbb{P}(A_k \cap E_k) + \mathbb{P}(B_k \cap E_k) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(E_k) + \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(E_k)$$

or, d'après l'énoncé, on fait Pile avec la pièce A avec une probabilité a, et avec la pièce B avec une probabilité b. Ainsi,

$$\mathbb{P}(E_k) = \mathbb{P}(A_k)a + \mathbb{P}(B_k)b = a\mathbb{P}(A_k) + b(1 - \mathbb{P}(A_k))$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(E_k) = (a-b)\mathbb{P}(A_k) + b}$$

2. Puisque (A_k, B_k) forme un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) + \mathbb{P}(B_k \cap A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(A_{k+1}) + \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1})$$

D'après l'énoncé, si on a la pièce A au k^{ieme} lancer, on garde cette pièce si on fait Pile, donc avec une probabilité a. Si on a la pièce B au k^{ieme} lancer, on prend la pièce A si on fait Face, donc avec une probabilité $1-b$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)a + \mathbb{P}(B_k)(1-b) = a\mathbb{P}(A_k) + (1 - \mathbb{P}(A_k))(1-b)$$

soit

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{k+1}) = (a+b-1)\mathbb{P}(A_k) + 1 - b}$$

3. La relation précédente nous indique que la suite $(\mathbb{P}(A_k))$ est une suite arithmético-géométrique. Après étude classique, on obtient :
• que le point fixe est $l = \frac{1-b}{2-a-b}$
• que la suite u définie pour tout $k \geqslant 1$ par $u_k = \mathbb{P}(A_k) - l$ est géométrique, de raison $(a+b-1)$, de premier terme $u_1 = \mathbb{P}(A_1) - l = \frac{1}{2} - l$.
• enfin, que

$$\boxed{\forall\ k \geqslant 1,\quad \mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-a-b}\right)(a+b-1)^{k-1} + \frac{1-b}{2-a-b}}$$

Enfin, puisque $\mathbb{P}(E_k) = (a-b)\mathbb{P}(A_k) + b$, on a

$$\forall\ k \geqslant 1,\quad \mathbb{P}(E_k) = (a-b)\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-a-b}\right)(a+b-1)^{k-1} + \frac{1-b}{2-a-b}\right) + b$$

Remarque
Si $a = b = \frac{1}{2}$, le résultat se simplifie en

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(E_k) = \frac{1}{2}$$

ce qui est cohérent (cas d'équiprobabilité)

Exercice 8

1. On s'intéresse à la somme de deux dés. Notre univers est donc $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, de cardinal 36 et toutes les issues sont équiprobables. Pour obtenir 6, il y a 5 issues possibles $(1-5, 5-1, 2-4, 4-2, 3-3)$, et pour obtenir 7, il y en a 6 $(1-6, 6-1, 2-5, 5-2, 4-3, 3-4)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(G_A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbb{P}(G_b) = \frac{5}{36}$$

2. Pour que B gagne à son n^{ieme} lancer, il faut que B ait perdu à chacun de ses $(n-1)^{ieme}$ lancers, et A aussi. On a alors par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}} \cap \overline{A_{n-1}} \cap B_n) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{A_1}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{B_1} \cap \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}} \cap \overline{A_{n-1}}}(B_n)$$

Or les lancers sont indépendants, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \underbrace{\mathbb{P}(\overline{G_B}) \times \mathbb{P}(\overline{G_A}) \times \ldots \times \mathbb{P}(\overline{G_B}) \times \mathbb{P}(\overline{G_A})}_{n-1 \text{ fois}} \times \mathbb{P}(G_B) \\ &= \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{5}{36}\end{aligned}$$

soit

$$\forall\ n \geqslant 1,\quad \mathbb{P}(B_n) = \left(\frac{31 \times 5}{216}\right)^{n-1}\frac{5}{36} = \frac{5}{36}\left(\frac{155}{216}\right)^{n-1}$$

Par le même raisonnement, il faut que B perde ses n lancers, A ses $n-1$ premiers lancers. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_n) = \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{n}\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$$

soit

$$\forall\ n \geqslant 1,\quad \mathbb{P}(A_n) = \frac{31}{216}\left(\frac{155}{216}\right)^{n-1}$$

3. Remarquons que, pour tout n,

$$V_A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \text{ et } V_B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

Les événements (A_n) étant deux à deux incompatibles, on a alors, par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(V_A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \text{ et } \mathbb{P}(V_B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

On reconnait dans les deux cas une série géométrique de raison $-1 < \frac{155}{216} < 1$ qui converge, et on a

$$\mathbb{P}(V_A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{31}{216}\left(\frac{155}{216}\right)^{n-1} = \frac{31}{216}\frac{1}{1-\frac{155}{216}} = \frac{31}{61}$$

$$\mathbb{P}(V_B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{36}\left(\frac{155}{216}\right)^{n-1} = \frac{5}{36}\frac{1}{1-\frac{155}{216}} = \frac{30}{61}$$

Le jeu n'est donc pas équilibré.
Remarquons également que $\mathbb{P}(V_A)+\mathbb{P}(V_B) = 1$, ce qui est normal car $(V_A; V_B)$ forme un système complet d'événements.

Exercice 9

Notons E_i l'événement “la boule i est tirée dans l'urne A”, et F_j^i l'événement “la boule j est tirée de l'urne i”. Remarquons que, par définition,

$$\forall\ i \in [\![1; n]\!],\ \mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{n}$$

et

$$\forall\ i \in [\![1; n]\!],\quad \forall\ j \in [\![1; i]\!],\quad \mathbb{P}(F_j^i) = \frac{1}{i} \text{ et } \mathbb{P}(F_j^i) = 0 \text{ si } j > i$$

La famille (E_i) forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\forall\ j \in [\![1; n]\!],\quad \mathbb{P}(X = j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i \cap (X = j)) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}_{E_i}(X = j)$$

Or, par construction, $\mathbb{P}_{E_i}(X = j) = \mathbb{P}(F_j^i)$. Ainsi

$$\forall\ j \in [\![1; n]\!],\quad \mathbb{P}(X = j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}(F_j^i) = \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{i}$$

et donc

$$\boxed{\forall\ j \in [\![1; n]\!],\quad \mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}}$$

Exercice 10

1. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n:« la famille a n enfants ». $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Nécessairement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \iff \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = 1 \iff \alpha = \frac{1}{e^2} = e^{-2}.$$

Remarque
Le nombre d'enfants suit ce qu'on appelle une loi de Poisson de paramètre 2, ce que nous

verrons dans le chapitre suivant.

2. Notons F l'événement « la famille a au moins une fille » et déterminons $\mathbb{P}(\overline{F})$. La famille (A_n) étant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales nous garantit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{F}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap \overline{F}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\ \mathbb{P}_{A_n}(\overline{F}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2}\frac{2^n}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{P}_{A_n}(\overline{F})$ est la probabilité, sachant que la famille a n enfants, de ne pas avoir de filles, donc de n'avoir que des garçons. On a supposé l'équiprobabilité du sexe, et bien sûr l'indépendance du sexe des enfants dans une famille.
Finalement,

$$\mathbb{P}(\overline{F}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2}\frac{1}{n!} = \mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}^{-1}$$

et donc $\mathbb{P}(F) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.
3. Notons F_i l'événement « la famille possède i filles » pour $i \in \mathbb{N}$. On cherche. donc $\mathbb{P}_{F_1}(A_2)$. D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{F_1}(A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(F_1)}\mathbb{P}_{A_2}(F_1).$$

Tout d'abord, $\mathbb{P}_{A_2}(F_1) = \frac{\binom{2}{1}}{2^2} = \frac{1}{2}$ par équiprobabilité des tirages. Il nous reste à calculer $\mathbb{P}(F_1)$. Appliquons à nouveau la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\mathbb{P}(F_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap F_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(F_1).$$

Remarquons que, pour $n = 0$, $\mathbb{P}_{A_0}(F_1) = 0$. Pour $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}_{A_n}(F_1) = \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{position de la fille}} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2}\frac{2^n}{n!}n\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \mathrm{e}^{-2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité qu'une famille ayant exactement une fille comporte deux enfants vaut $\boxed{\mathrm{e}^{-1} \approx 0,368}$.
4. Notons, de la même manière, G_i l'événement « la famille possède i garçons ». On souhaite calculer $\mathbb{P}_{G_2}(F_2)$. Par définition

$$\mathbb{P}_{G_2}(F_2) = \frac{\mathbb{P}(G_2 \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_2)}.$$

Nous allons appliquer la formule des probabilités totales, toujours appliquée au s.c.e. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Remarquons que

$$\mathbb{P}_{A_n}(G_2 \cap F_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 4 \\ \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{position des filles}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 6\frac{1}{2^4} & \text{si } n = 4 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(G_2 \cap F_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(G_2 \cap F_2) = \mathbb{P}(A_4)\mathbb{P}_{A_4}(G_2 \cap F_2) = \mathrm{e}^{-2}\frac{2^4}{4!}6\frac{1}{2^4} = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{4}.$$

De même,

$$\mathbb{P}_{A_n}(F_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < 2 \\ \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{2^n} & \text{si} \quad n = 4 \end{cases}$$

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(F_2) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2}\frac{2^n}{n!}\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{2^n} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!} = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}\mathrm{e}^1 = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\mathbb{P}_{G_2}(F_2) = \frac{\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4}}{\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}}$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 11

Calcul matriciel

1.
a) Deux méthodes : on applique la méthode du Pivot pour démontrer que P est inversible, et trouver P^{-1}. Ou alors, on calcule $P \times P^{-1}$ et on constate que ça fait I_3.
b) Après calculs, on obtient $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors $B = PDP^{-1}$.
c) Par récurrence classique, en utilisant, pour l'hérédité :

$$B^{n+1} = B^nB = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

d) En utilisant ce qui précède, on calcule PD^nP^{-1}, en remarquant que D est diagonale, donc D^n est facile à calculer. On obtient :

$$\begin{aligned} B^n &= \begin{pmatrix} 0 & -8 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{12}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 0 & -11 & 11 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -11\left(-\frac{1}{4}\right)^n & 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ -2\left(\frac{1}{12}\right)^n & \left(\frac{1}{12}\right)^n & \left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 6 & 8 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 16\left(\frac{1}{12}\right)^n + 6 & -8\left(\frac{1}{12}\right)^n + 8 & -8\left(\frac{1}{12}\right)^n + 8 \\ -6\left(\frac{1}{12}\right)^n + 6 & 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(\frac{1}{12}\right)^n + 8 & -11\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(\frac{1}{12}\right)^n + 8 \\ -6\left(\frac{1}{12}\right)^n + 6 & -11\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(\frac{1}{12}\right)^n + 8 & 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(\frac{1}{12}\right)^n + 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Application à un processus aléatoire

On notera T_n l'évènement “le client achète un jouet traditionnel l'année n” (et de même pour M_n et S_n).

1. On applique la formule des probabilités totales, au système complet d'évènements (T, M, S) qui par construction est un système complet d'évènements. Ainsi

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \mathbb{P}(T_{n+1}) &= \mathbb{P}(T_{n+1} \cap T_n) + \mathbb{P}(T_{n+1} \cap M_n) + \mathbb{P}(T_{n+1} \cap S_n) \\ &= \mathbb{P}(T_n)\mathbb{P}_{T_n}(T_{n+1}) + \mathbb{P}(M_n)\mathbb{P}_{M_n}(T_{n+1}) + \mathbb{P}(S_n)\mathbb{P}_{T_n}(T_{n+1}) \\ &= p_n\frac{1}{3} + q_n\frac{1}{4} + r_n\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Par le même raisonnement, on obtient :

$$\begin{aligned} q_{n+1} = \mathbb{P}(M_{n+1}) &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n \\ r_{n+1} = \mathbb{P}(S_{n+1}) &= \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \end{aligned}$$

2. Ainsi, on obtient

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = B^{\top} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

3. Par récurrence habituelle (en partant de $C^0 = I_3$ et en utilisant la relation vue à la question d'avant).

4. Ainsi, en utilisant la partie précédente :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 16\left(\frac{1}{12}\right)^n + 6 & -8\left(\frac{1}{12}\right)^n + 8 & -8\left(\frac{1}{12}\right)^n + 8 \\ -6\left(\frac{1}{12}\right)^n + 6 & 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(\frac{1}{12}\right)^n + 8 & -11\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(\frac{1}{12}\right)^n + 8 \\ -6\left(\frac{1}{12}\right)^n + 6 & -11\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(\frac{1}{12}\right)^n + 8 & 11\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(\frac{1}{12}\right)^n + 8 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} \frac{45}{100} \\ \frac{25}{100} \\ \frac{30}{100} \end{pmatrix}$$

dont le calcul est long...

5. On cherche la limite quand n tend vers l'infini. Puisque $-1 < \frac{1}{12} < 1$ et $-1 < -\frac{1}{4} < 1$, la plupart des termes tend vers 0. On obtient au final la limite :

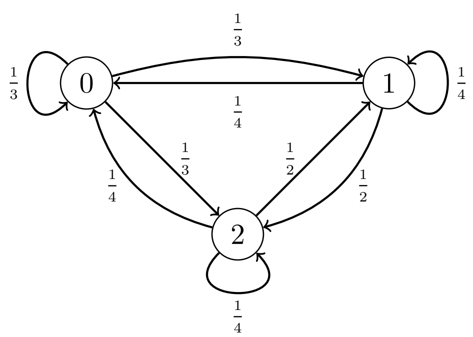
$$\begin{pmatrix} p_\infty \\ q_\infty \\ r_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

On constate que $\frac{3}{11} + \frac{4}{11} + \frac{4}{11} = 1$.

Résumé

1. La somme des termes d'une colonne vaut 1, qui traduit le fait que la valeur de l'état $n+1$ ne dépend que de l'état n.

2. On obtient le graphe suivant :



3. Puisque $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$, par passage à la limite (qui est légitime par somme et produit)

$$\pi_\infty = C\pi_\infty$$

Exercice 12

On note, dans la suite R_k l'événement « le joueur possède k euros et finit ruiné », avec $k \in [\![0,\, N]\!]$.

1. r_0 est la probabilité, lorsque le joueur possède 0 euro, que celui-ci soit ruiné. C'est le cas dès le départ : $r_0 = 1$. De même, r_N désigne la probabilité que le joueur soit ruiné alors qu'il possède N euros : il s'arrêt et n'est jamais ruiné : $r_N = 0$.
Utilisons l'indication : on note G l'événement « le joueur gagne son premier pari ». Soit $k \in [\![1,\, N-1]\!]$. $(G, \overline{G}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_k) &= \mathbb{P}(R_k \cap G) + \mathbb{P}(R_k \cap \overline{G}) \\ &= \mathbb{P}(G)\mathbb{P}_G(R_k) + \mathbb{P}(\overline{G})\mathbb{P}_{\overline{G}}(R_k). \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\mathbb{P}(G) = p$ et $\mathbb{P}(\overline{G}) = q$. Si le joueur gagne la première partie alors qu'il avait k euros, il dispose ensuite de $k+1$ euros ; s'il perd, il dispose alors de $k-1$ euros. Ainsi

$$\mathbb{P}_G(R_k) = \mathbb{P}(R_{k+1}) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\overline{G}}(R_k) = \mathbb{P}(R_{k-1}).$$

Finalement

$$\boxed{r_k = \mathbb{P}(R_k) = p\mathbb{P}(R_{k+1}) + q\mathbb{P}(R_{k-1}) = pr_{k+1} + qr_{k-1}.}$$

2. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. On peut le montrer par récurrence sur $k \in [\![0,\, N]\!]$, vu qu'on nous donne le résultat. Mais on peut étudier nous même la suite.
Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est $X = pX^2 + q$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4pq = (2p-1)^2$. Puisque $p \neq \frac{1}{2}$, il y a deux racines :

$$\frac{1 + (2p-1)}{2p} = \frac{1}{\text{et}} \frac{1-(2p-1)}{2p} = \frac{q}{p}.$$

Il existe donc deux réels (a, b) tels que

$$\forall\, k \in [\![0,\, N]\!], \quad r_k = a + b\left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

Pour $k = 0$, $r_0 = 1$ donne $a + b = 1$ et pour $k = N$, $r_N = 0$ soit $a + b\left(\frac{q}{p}\right)^N = 0$. Cela donne

$$b = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \quad \text{et} \quad a = -\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

Finalemnet

$$\boxed{\forall\, k \in [\![0,\, N]\!], \quad r_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.}$$

3. Si $p = \frac{1}{2}$, l'étude précédente nous donne une racine double à l'équation caractéristique : $\frac{1}{2p} = 1$. Ainsi, il existe deux réels (a, b) tels que, pour tout $k \in [\![0,\, N]\!]$,

$$r_k = (a + bk)1^k = a + bk.$$

Avec $r_0 = 1$ et $r_N = 0$, on obtient $a = 1$ et $b = -\frac{1}{N}$ et donc

$$\boxed{\forall\, k \in [\![0,\, N]\!], \quad r_k = 1 - \frac{k}{N}.}$$

4. Quand N tend vers $+\infty$:
- Si $p \neq \frac{1}{2}$, deux possibilités :

– si $q < p$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $r_k \xrightarrow[N \to +\infty]{} \left(\frac{q}{p}\right)^k$ qui ressemble à une loi géométrique : plus on a de l'argent, moins on a de risque d'être ruiné, la probabilité de gagner étant plus grande que celle de perde.
– si $q > p$, cette fois-ci,

$$r_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^N}{-\left(\frac{q}{p}\right)^N} = 1$$

et donc $r_k \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$. Dans ce cas-là, on est presque sûr de finir ruiné.
- Si $p = \frac{1}{2}$, alors $r_k \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$: là aussi on est presque sûr de finir ruiné.

Exercice 13

1. Pour que le signe, à l'issue des N premiers caractères tapés, n'ait pas écrit le texte, il faut qu'il se trompe au moins une fois de caractère. Notons S l'événement « le singe n'a pas tapé le texte en N caractères ». L'événement $\overline{S}$ est l'événement « le singe a tapé les N bons caractères », dont la probabilité est

$$\mathbb{P}(\overline{S}) = \left(\frac{1}{\ell}\right)^N.$$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(S) = 1 - \left(\frac{1}{\ell}\right)^N.}$

2. On dispose d'un schéma de Bernoulli, dont le succès est S « le singe n'a pas tapé le texte en N caractères », de probabilité $\mathbb{P}(S)$, que l'on répète n fois de manière successives et indépendantes. La variable aléatoire X_n comptant le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètre n et $\mathbb{P}(S)$. Ainsi,

$$\boxed{P_n} = \mathbb{P}(X_n = n) = \binom{n}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{\ell}\right)^N\right)^n \boxed{= \left(1 - \left(\frac{1}{\ell}\right)^N\right)^n.}$$

3. Déterminons la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$. Notons, pour plus de facilité, $r = \frac{1}{\ell}$. Remarquons que

$$P_n = \mathrm{e}^{n \ln(1 - r^N)}$$

et puisque $0 < 1 - r^N < 1$, $\ln\left(1 - r^N\right) < 0$ et finalement

$$\boxed{P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.}$$

Ainsi, presque surement, le singe finira par écrire le texte de N caractères, quel que soit la valeur (fixe) de N.

Corrigés des sujets de concours

Sujet 1

Partie I

1. Remarquons qu'il y a b boules noires, donc on va effectuer entre 1 et $b+1$ tirages avant d'avoir la première boule blanche. Ainsi $Y(\Omega) = [\![1,\, b+1]\!]$. Pour le justifier soigneusement, soit $k \in [\![1,\, b+1]\!]$. $[Y = k]$ est obtenu si lors des $k-1$ premiers tirages, on a obtenu une boule noire (ce qui est possible, car $k-1 \leqslant b$), puis au k-ième tirage on obtient une boule blanche.
2. Tout d'abord, $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{a}{a+b}$ par équiprobabilité. Supposons $k \geqslant 2$. Notons N_n (respectivement B_n) l'événement « obtenir une boule noire (resp. blanche) lors du n-ième tirage ». Alors

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(N_1 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k).$$

D'après la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(N_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{N_1\cap\ldots\cap N_{k-2}}(N_{k-1}) \times \mathbb{P}_{N_1\cap\ldots\cap N_{k-1}}(B_k).$$

Par hypothèse, à chaque fois qu'on tire une boule noire, on l'enlève et on ajoute une boule blanche. Le nombre de boules est donc constant, et à chaque tirage d'une boule noire, le nombre de boules noires diminue de 1 et celui des blanches augmente de 1. Donc, par équiprobabilité à chaque tirage :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \frac{b}{a+b} \times \frac{b-1}{a+b} \times \ldots \times \frac{b-(k-2)}{a+b} \times \frac{a+k-1}{a+b}\\ &= \frac{(a+k-1)b(b-1)\ldots(b-k+2)}{N^k} = \frac{(a+k-1)b!}{(b-k+1)!N^k}.\end{aligned}$$

Ce résultat est valable pour $k = 1$ et finalement

$$\boxed{\forall\, k \in [\![1,\, b+1]\!], \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{(a+k-1)b!}{(b-k+1)!N^k}}.$$

3. Pour $k = b+1$, le résultat précédent s'écrit

$$\mathbb{P}(Y = b+1) = \frac{(a+b)b!}{1!N^{b+1}} = \boxed{\frac{b!}{N^b}}.$$

Si $1 \leqslant k \leqslant b$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \frac{(a+k-1)b!}{(b-k+1)!N^k}\\ &= \frac{(N-b+k-1)b!}{(b-k+1)!N^k}\\ &= \frac{N \cdot b!}{(b-k+1)!N^k} - \frac{(b-k+1)b!}{(b-k+1)!N^k}\\ &= \frac{b!}{(b-k+1)!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k} = \boxed{\frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}}.\end{aligned}$$

4. On va partir du terme de gauche, développer et faire un changement d'indice.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1}-a_k) &= \sum_{k=1}^{M} k a_{k-1} - \sum_{k=1}^{M} k a_k \text{ par linéarité} \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} (i+1)a_i - \sum_{k=1}^{M} k a_k \text{ en posant } i=k-1 \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} (k+1)a_k - \left(\sum_{k=0}^{M-1} k a_k + M a_M\right) \text{ car } 0a_0 = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} ((k+1)-k)a_k - M a_M = \sum_{k=0}^{M-1} a_k - M a_M.
\end{aligned}$$

5. L'univers image de Y étant fini, Y admet une espérance. Par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{b+1} k\mathbb{P}(Y=k) \\
&= \sum_{k=0}^{b} k\left(\frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}\right) + (b+1)\frac{b!}{N^b}.
\end{aligned}$$

On reconnait l'expression de la question 4, où $a_k = \frac{b!}{(b-k)!N^k}$. On applique le résultat :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \left(\sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!N^k}\right) - b\frac{b!}{N^b} + (b+1)\frac{b!}{N^b} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!N^k}\right) + \frac{b!}{N^b} \\
&= \sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!N^k} \text{ en reconnaissant le terme manquant.}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!N^k}.}$$