Chapitre 27

Codage matriciel

Résumé

Afin d'étudier des vecteurs ou des applications linéaires, nous allons les représenter, dans certaines circonstances, à l'aide de matrices. Les propriétés des matrices se transposeront aux vecteurs ou aux applications linéaires. Ce sera également l'occasion de revenir sur la notion de rang de matrice, et de démontrer des résultats du chapitre 17.

Plan du cours

> « *I remember that I am here not because of the path that lies before me, but because of the path that lies behind me.* »

Morpheus (2199). *The Matrix*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

- Concernant le codage matriciel :
  - ① Savoir déterminer la matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteur dans une base ☐
  - ② Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases . . . . ☐
  - ③ Retrouver une application linéaire connaissant sa matrice dans des bases . . . . ☐
  - ④ Connaître les propriétés de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$: composée d'applications linéaires, matrice d'une application réciproque . . . . ☐
  - ⑤ Savoir changer de bases à l'aide de la matrice de passage . . . . ☐
  - ⑥ Connaître le cas des endomorphismes . . . . ☐
  - ⑦ Savoir le résultat d'existence concernant les polynômes annulateurs d'une matrice ou d'une application linéaire . . . . ☐
- Concernant le rang :
  - ⑧ Connaître la définition du rang d'une matrice . . . . ☐
  - ⑨ Connaître le lien entre rang d'une application linéaire et rang de la matrice associée dans des bases . . . . ☐
  - ⑩ Connaître les différentes propriétés du rang (inversibilité, transposée) . . . . ☐

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et F un espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$ muni d'une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$.

I. Codage matriciel en dimension finie

1. Matrice d'une famille de vecteurs en dimension finie

Définition 27.1. Matrice d'un vecteur

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. La matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est appelée **matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$** et notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

Exemple 27.1

- Dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$, la matrice de $X^4 + 3X - 2 \in \mathbb{R}_4[X]$ est $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice de $x_0 = (8, -7, 3, \sqrt{2})$ est $\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
- Dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice de $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Définition 27.2. Matrice d'une famille de vecteurs

. Soit $(x_1, \dots, x_k)$ une famille de $k \geqslant 1$ vecteurs de E. Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, on note $x_{1,j}, \dots, x_{n,j}$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall j \in [\![1, k]\!], \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,k}(\mathbb{R})$$

est appelée **matrice de la famille de vecteurs** $(x_1, \dots, x_k)$ dans $\mathcal{B}$.
On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_k)$.

Remarque

La première colonne code le premier vecteur, la deuxième code le deuxième vecteur, ... Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, k]\!]$, le coefficient d'indice (i, j) de la matrice est la i-ième coordonnée du j-ième vecteur x_j.

Exemple 27.2

La matrice de la famille $((1,0,4,7),(2,-3,-1,-6),(1,0,0,-5))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 7 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Si $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ désigne la matrice d'une famille (P,Q,R) de $\mathbb{R}_4[X]$ dans la base canonique $(1,X,X^2,X^3,X^4)$ de $\mathbb{R}_4[X]$, on a alors

$$P = 1 + 2X - 2X^2 + X^4,\ Q = 2X^2 + 3X^3 \quad \text{et} \quad R = 3 + 4X^2 + 7X^4$$

Attention

- La base doit bien être précisée. Si on avait plutôt pris la base $(1,2X,3X^2,4X^3,5X^4)$, on aurait alors
$$P = 1 + 2(2X) - 2(3X^2) + 5X^4 = 1 + 4X - 6X^2 + 5X^4, \dots$$
- Si on change l'ordre des vecteurs de la base, cela change le codage aussi. Si on avait pris la base $(X,1,X^2,X^3,X^4)$, on aurait eu $P = X + 2 - 2X^2 + X^4$.
- L'espace de départ (dont la dimension est le nombre de lignes) doit être précisé. Si on avait pris $\mathbb{R}^5$ plutôt que $\mathbb{R}_4[X]$ et la base canonique de $\mathbb{R}^5$, alors la matrice était celle de $((1,2,-2,0,1),(0,0,2,3,0),(3,0,4,0,7))$.

Exercice 27.3

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ des matrices de $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension 3 dont $\mathcal{B} = \left(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{22}\right)$ est une base. Déterminer la matrice de (A,B,C,D) dans la base $\mathcal{B}$.

Solution

La matrice de la famille (A,B,C,D) dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

L'application Mat est importante, puisqu'il s'agit d'un isomorphisme :

Proposition 27.1. Mat est un isomorphisme

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : E^k \to \mathfrak{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : (x_1, \dots, x_k) \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(x_1, \dots, x_k\right)$$

est un isomorphisme de E^k dans $\mathfrak{M}_{n,k}(\mathbb{R})$

Démonstration

On note φ l'application qui, à $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$ associe $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(x_1, \dots, x_k\right) \in \mathfrak{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. On garde les notations de la définition 27.2.

- φ est linéaire. En effet, si $(x_1,\dots,x_k)\in E^k$, $(y_1,\dots,y_k)\in E^k$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors on a

$$\begin{aligned}\varphi\left(\lambda\left(x_1,\dots,x_k\right)+\left(y_1,\dots,y_k\right)\right) &= \varphi\left(\left(\lambda x_1+y_1,\dots,\lambda x_k+y_k\right)\right)\\ &= \begin{pmatrix}\lambda x_{11}+y_{11} & \lambda x_{12}+y_{12} & \dots & \lambda x_{1k}+y_{1k}\\ \lambda x_{21}+y_{21} & \lambda x_{22}+y_{22} & \dots & \lambda x_{2k}+y_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda x_{n1}+y_{n1} & \lambda x_{n2}+y_{n2} & \dots & \lambda x_{nk}+y_{nk}\end{pmatrix}\\ &= \lambda\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k}\\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1k}\\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nk}\end{pmatrix}\\ &= \lambda\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(x_1,\dots,x_k\right)+\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(y_1,\dots,y_k\right)\\ &= \lambda\varphi\left(\left(x_1,\dots,x_k\right)\right)+\varphi\left(\left(y_1,\dots,y_k\right)\right).\end{aligned}$$

- φ est injective. En effet, si $(x_1,\dots,x_k)\in\mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(x_1,\dots,x_k\right)=0_{n,k}$. Ainsi, les coordonnées des vecteurs $x_1,\dots,x_k$ dans la base $\mathcal{B}$ sont toutes nulles. Il s'agit donc des vecteurs nuls si bien que $(x_1,\dots,x_k)=(0,\dots,0)$: $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{(0,\dots,0)\}$.
- φ est surjective. En effet, soit $A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j}\in\mathfrak{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. Pour tout $j\in[\![1,\,k]\!]$, on pose

$$c_j=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}e_i.$$

On constate alors, par construction des (c_i), que $\varphi\left((c_1,\dots,c_k)\right)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(c_1,\dots,c_k\right)=A$.

Corollaire 27.2.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}$ et si $k\in\mathbb{N}^*$, alors E^k est un espace vectoriel de dimension $k\times n=k\times\dim(E)$.

Démonstration

L'application précédente donne une bijection de E^k dans $\mathfrak{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, de dimension $n\times k$. Par un résultat du chapitre précédent, $\dim(E^k)=n\times k$.

2. Matrices d'une application linéaire

a. Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition 27.3. Matrice d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F.

Pour tout $j\in[\![1,\,n]\!]$, $f\left(e_j\right)\in F$: il existe donc $\left(a_{1j},\dots,a_{pj}\right)\in\mathbb{R}^p$ tels que $f\left(e_j\right)=\sum\limits_{i=1}^{p}a_{ij}e'_i$.

La matrice $A=\left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est appelée **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$**. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$.

Si $E=F$ et si $\mathcal{B}=\mathcal{B}'$, alors on note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de l'endomorphisme f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$.

Remarque

La matrice d'une application linéaire f de E dans F dans des bases $\mathcal{B}=(e_1\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}'$

est la matrice de la famille $(f(e_1)\dots,f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f(e_1)\dots,f(e_n)\right)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,j} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_p \end{array}$$

Exemple 27.4

- Soit f l'application linéaire qui à $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ associe $(x+2y-t,3x+z,-y+5z+t)\in\mathbb{R}^3$. On a $f\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3\right)$. Notons $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$. On a :

$$f(1,0,0,0)=(1,3,0),\quad f(0,1,0,0)=(2,0,-1),\quad f(0,0,1,0)=(0,1,5)\quad\text{et}\quad f(0,0,0,1)=(-1,0,1).$$

  Ainsi
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Soit g l'application linéaire qui à $P\in\mathbb{R}_2[X]$ associe $\left(X^3+1\right)P'\in\mathbb{R}_4[X]$. On a $g\in\mathcal{L}_2\left(\mathbb{R}_2[X],\mathbb{R}_4[X]\right)$ Notons $\mathcal{B}=\left(1,X,X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{C}=\left(1,X,X^2,X^3,X^4\right)$ celle de $\mathbb{R}_4[X]$. On a $g(1)=\left(X^3+1\right)\times 0=0,\quad g(X)=\left(X^3+1\right)\times 1=X^3+1\quad$ et $\quad g\left(X^2\right)=\left(X^3+1\right)\times 2X=2X^4+2X$. Ainsi
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 27.5

Pour les deux applications linéaires suivantes, déterminer la matrice dans les bases données :

- T l'application linéaire définie de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ par $T(A)=A+{}^tA$, dans la base canonique $\mathcal{B}=\left(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}\right)$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$
- f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ par $f(P)=(P(1),P'(1),P''(1))$, dans les bases canoniques $\mathcal{B}=(1,X,X^2,X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{C}=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

Solution

- On calcule :

$$T\left(E_{1,1}\right)=E_{1,1}+{}^tE_{1,1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=2E_{1,1},$$
$$T\left(E_{1,2}\right)=E_{1,2}+{}^tE_{1,2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=E_{1,2}+E_{2,1},$$
$$T\left(E_{2,1}\right)=E_{2,1}+{}^tE_{2,1}=E_{2,1}+E_{1,2}\quad\text{et}\quad T\left(E_{2,2}\right)=E_{2,2}+{}^tE_{2,2}=2E_{2,2}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Après calcul,

$$f(1) = (1,0,0), \quad f(X) = (1,1,0), \quad f(X^2) = (1,2,2) \quad \text{et} \quad f(X^3) = (1,3,6)$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_3,\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Deux endomorphismes aux matrices classiques : l'identité et la matrice nulle.

Proposition 27.3.

Un endomorphisme f de E vérifie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{I}_n$ si et seulement si $f = \mathrm{id}_E$.

Démonstration

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{id}_E(e_j) = e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ avec $a_{jj} = 1$ et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{I}_p$.

Réciproquement, supposons que f est un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{I}_n$. Alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{I}_n)_{ij} e_i = e_j = \mathrm{id}_E(e_j)$. Ainsi f et id_E coïncident sur une la base $\mathcal{B}$ de E donc $f = \mathrm{id}_E$.

Proposition 27.4.

Une application linéaire f de E dans F vérifie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = 0_{p,n}$ si et seulement si c'est l'application nulle.

Démonstration

Identique à la précédente.

Il y a un lien étroit entre application linéaire et matrice de l'application linéaire lorsque l'on est en dimension finie :

Théorème 27.5. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

En particulier, elle est linéaire : si $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\,\mathcal{B}}(g).$$

Démonstration

Pour plus de simplicité dans les écritures, notons φ l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

- φ est linéaire. Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$(\lambda f + g)(e_i) = \lambda f(e_i) + g(e_i)$$

et donc

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f+g) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\lambda f+g)(e_1),\dots,(\lambda f+g)(e_n))\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\lambda f(e_1)+g(e_1),\dots,\lambda f(e_n)+g(e_n))\\ &= \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1),\dots,f(e_n))+\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g(e_1),\dots,g(e_n)) = \lambda\varphi(f)+\varphi(g).\end{aligned}$$

- φ est injective. En effet, si $f\in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)=\varphi(f)=0_{p,n}$ et la proposition précédente entraîne que $f=0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$.
- φ est surjective. En effet, soit $A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j}\in\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Le théorème de caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base nous assure qu'il existe une (unique) application linéaire f de E dans F telle que, pour tout $j\in[\![1,\,k]\!]$, $f\left(e_j\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i$.
  Par construction, on a bien $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)=\varphi(f)$.
  Ainsi l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

On peut en déduire la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ quand E et F sont de dimension finie :

Corollaire 27.6.

Soient E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E,F))=\dim(E)\times\dim(F).$$

Démonstration

Le théorème précédent assure que les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ sont isomorphes. Puisque $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est de dimension finie égale à $n\times p$, $\mathcal{L}(E,F)$ est également de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E,F))=\dim(\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R}))=n\times p=\dim(E)\times\dim(F).$$

b. Décodage matriciel

La proposition suivante découle de la preuve du théorème précédent :

Proposition 27.7.

Soit $A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j}\in\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On définit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ de manière unique par, pour tout $j\in[\![1,\,n]\!]$, $f\left(e_j\right)=\sum\limits_{i=1}^{p} a_{i,j}e'_i$.

Autrement dit

$$f : x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j\longmapsto\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\sum_{i=1}^{p}a_{i,j}e'_i\right)=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\right)e'_i$$

Alors, on a par construction $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)=A$.

Remarque

Il n'est pas nécessaire de retenir la formule de la proposition précédente. Il faut connaître la méthode suivante pour retrouver l'application linéaire.

Méthode

Soit $A\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ une matrice donnée. Pour trouver l'application linéaire dont A est la matrice (c'est la **décoder**) :

- On précise les espaces E (de dimension n) et F (de dimension p) qui nous intéresse.
- On précise la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et la base $\mathcal{B}' = \left(e'_1, \dots, e'_p\right)$ de F que l'on prend.
- Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ième colonne de la matrice A correspond aux coordonnées de $f\left(e_j\right)$ dans la base $\mathcal{B}'$. On exprime alors $f\left(e_j\right)$
- On se donne $x \in E$. On dit qu'il existe des scalaires $x_1, \dots, x_n$ tels que $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, on en déduit que $f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f\left(e_j\right)$ et on conclut en utilisant les expressions trouvées dans le point précédent.

Si on change E (mais pas sa dimension) ou F (mais pas sa dimension) ou la base $\mathcal{B}$ de E ou la base $\mathcal{B}'$ de F, on ne trouve pas la même application linéaire dont A est la matrice. Il n'y a unicité que si on fixe $E, F, \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Exemple 27.6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^4)$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^4$. Déterminer l'expression de f.

Solution

On applique point par point. Ici, les espaces et bases canoniques nous sont donnés.

- On lit sur la matrice l'expression de $f(1), f(X)$, et $f(X^2)$:
$$f(1) = (1,1,1,1), \quad f(X) = (-1,0,1,2) \quad \text{et} \quad f\left(X^2\right) = (1,0,1,4).$$
- Ainsi, pour tout $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, on a
$$\begin{aligned} f(P) &= af(1) + bf(X) + cf\left(X^2\right) = a(1,1,1,1) + b(-1,0,1,2) + c(1,0,1,4) \\ &= (a - b + c, a, a + b + c, a + 2b + 4c) = (P(-1), P(0), P(1), P(2)) \end{aligned}$$

Ainsi, l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques est A est
$$f : P \longmapsto (P(-1), P(0), P(1), P(2)).$$

Exercice 27.7

Déterminer l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}))$ dont la matrice dans les bases canoniques est la matrice A de l'exemple précédent.

Solution

Notons f l'application linéaire cherchée. De la même manière, on lit sur la matrice :
$$f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(0,1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:
$$\begin{aligned} f(x,y,z) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) &= x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - y + z & x \\ x + y + z & x + 2y + 4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'application recherchée est donc :

$$f:(x,y,z)\longmapsto\begin{pmatrix} x-y+z & x\\ x+y+z & x+2y+4z\end{pmatrix}.$$

c. Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Un cas particulier, souvent utilisé, de la proposition précédente :

Proposition 27.8. Application linéaire canoniquement associée

Soit $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j}\in\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. L'application

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p\\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)_{1\leqslant i\leqslant p}\end{array}\right.$$

est linéaire et A est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement.

Définition 27.4.

L'application précédente est appelée l'**application linéaire canoniquement associée à la matrice** A.

Exemple 27.8

- Si on reprend la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}$ des exemples ci-dessus, l'application linéaire f canoniquement associée à A appartient à $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^4\right)$ et est telle que
$$\forall\,(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\quad f(x,y,z)=(x-y+z,x,x+y+z,x+2y+4z)$$
- Si $B=\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\2&3&1&1&1\\0&0&2&-1&7\end{pmatrix}$, alors l'application linéaire φ canoniquement associée à B appartient à $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^5,\mathbb{R}^3\right)$ et est telle que
$$\forall\,(x,y,z,t,u)\in\mathbb{R}^5,\quad \varphi(x,y,z,t,u)=(x-y+2t,2x+3y+z+t+u,2z-t+7u).$$

d. Le cas des formes linéaires

Si f est une forme sur linéaire sur E, alors on peut prendre $\mathcal{B}'=(1)$ pour base de $F=\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ est une matrice ligne à n colonnes $(a_1\dots a_n)$ avec, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $a_j=f\left(e_j\right)$.
Réciproquement si $A=(a_1\dots a_n)\in\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et si $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base quelconque de E, alors l'application

$$f:x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j\longmapsto\sum_{j=1}^{n}x_ja_j$$

est une forme linéaire sur E dont A est la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'=(1)$.

Exemple 27.9

- Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f:(x_1,\dots,x_n)\longmapsto\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$. Il s'agit d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et, si $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\mathrm{Mat}_{(1),\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

- Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}_5[X]$ par $g(P) = P'(1)$. Il s'agit d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}_5[X]$ et, si $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$, alors $\mathrm{Mat}_{(1),\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 27.10

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{1,9}(\mathbb{R})$. Déterminer l'expression de la forme linéaire définie sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est A.

Solution

Il existe une unique forme linéaire sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ (qui est bien de dimension 9) dont A est la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{M}_3(R)$. D'après l'expression de la matrice A :

$$\forall\, i \in [\![1,\,3]\!], \quad f(E_{i,i}) = 1 \quad \text{et} \quad \forall\,(i,j) \in [\![1,\,3]\!]^2, \quad i \neq j \implies f(E_{i,j}) = 0.$$

Ainsi,

$$f\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 3} m_{i,j}E_{i,j}\right) = m_{1,1} + m_{2,2} + m_{3,3}.$$

C'est la forme linéaire qui à une matrice associe la somme des coefficients diagonaux. On l'appelle la trace.

3. Matrices et image d'un vecteur par une application linéaire

On dispose d'un lien étroit entre matrice d'une application linéaire et matrice d'un vecteur.

Proposition 27.9.

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $x \in E$ et $y \in F$. On note

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R}), \qquad X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(y) \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$

Alors $y = f(x)$ si et seulement si $Y = AX$.

Démonstration

On note $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i$. Ainsi, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$. On note $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j}$. Par définition, pour tout $j \in [\![1,\,n]\!]$, on a $f\left(e_j\right) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}e'_i$.

Alors

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i = \sum_{j=1}^{n} x_j f\left(e_j\right) \\ &\iff \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{p} a_{ij}e'_i \\ &\iff \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) e'_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff \quad \forall\, i \in [\![1,p]\!], \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \text{ par unicité des coordonnées dans la base} \mathcal{B}' \\ &\iff \quad Y = AX. \end{aligned}$$

Exemple 27.11

Soit d l'application linéaire qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_4[X]$, associe $P' \in \mathbb{R}_3[X]$. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ et $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ celle de $\mathbb{R}_3[X]$. Soit $P_0 = X^4 + 3X - 2 \in \mathbb{R}_4[X]$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\left(d\left(P_0\right)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(d)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(P_0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

En décodant, on obtient $d\left(P_0\right) = 3 + 4X^3$. Il s'agit bien de P_0'.

Un résultat permettant de savoir si une application linéaire est nulle :

Corollaire 27.10.

Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a $A = 0_{n,p}$ si et seulement si, pour tout $X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0_{n,1}$.

Démonstration

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$. Alors

$$A = 0_{n,p} \iff f = 0 \iff \forall\, x \in E, \quad f(x) = 0 \iff \forall\, X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad AX = 0_{n,1}$$

Ce résultat nous permet d'en déduire un cas d'égalité sur les matrices :

Corollaire 27.11.

Soient A et B dans $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a $A = B$ si et seulement si, pour tout $X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $AX = BX$.

Démonstration

On considère $A - B$ au lieu de A dans le corollaire précédent.

⚠ **Attention**

Dans le corollaire précédent, il faut absolument que ce soit valable **pour toute matrice** X de $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Avoir $AX = BX$ pour une seule matrice ne permet pas de conclure.

4. Produit matriciel et composition d'applications linéaires

Soit G un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}''$.
On va trouver un lien simple entre matrice d'une composée et matrices des applications, qui justifie d'autant plus le lien :

Proposition 27.12.

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

···

Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f), B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(g)$ et $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(g \circ f)$.
Alors $C = B \times A$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$$

Démonstration

On note $q = \dim(G)$ et $\mathscr{B}'' = \left(e_1'', \dots, e_q''\right)$. On écrit, pour chacune des matrices,

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i,j} \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R}), \quad B = \left(b_{ki}\right)_{k,i} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad C = \left(c_{kj}\right)_{k,j} \in \mathfrak{M}_{q,n}(\mathbb{R}).$$

Par définition,

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad f\left(e_j\right) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i'$$
$$\forall\, i \in [\![1, p]\!], \quad g\left(e_i'\right) = \sum_{k=1}^{q} b_{ki} e_k''$$
$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad g \circ f\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} c_{kj} e_k''$$

Pour tout $j \in [\![1,\, n]\!]$, on a également

$$g \circ f\left(e_j\right) = g\left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i'\right) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} g\left(e_i'\right) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{q} b_{ki} e_k''\right) = \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{p} b_{ki} a_{ij}\right) e_k''.$$

Par unicité des coefficients dans une base $\mathscr{B}''$ de G, il s'ensuit que

$$\forall\,(k, j) \in [\![1,\, q]\!] \times [\![1,\, p]\!], \quad c_{k,j} = \sum_{i=1}^{p} b_{ki} a_{ij}.$$

Ainsi, $C = B \times A$

Remarque

C'est cette formule qui est à l'origine de la définition du produit matriciel vue dans le chapitre 17 : on a mis au point ce produit matriciel afin que cette formule soit vraie.

Exemple 27.12

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_3[X])$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^2)$ définies par

$$f : P \longmapsto X^2 P' \quad \text{et} \quad g : P \longmapsto (P(1), P'(1)).$$

Déterminer $g \circ f$ de deux manières différentes : par le calcul direct, et par les matrices de f et g dans les bases canoniques.

Solution

On vérifie rapidement que ce sont des applications linéaires, et puisque $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P' \in \mathbb{R}_1[X]$ et $X^2P' \in \mathbb{R}_3[X]$. Notons $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g\circ f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}'}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&2&6\end{pmatrix}$$

On décode alors la matrice : $g\circ f(1)=(0,0), g\circ f(X)=(1,2)$ et $g\circ f(X^2)=(2,6)$. Ainsi, pour tout polynôme $P=a+bX+cX^2\in\mathbb{R}_2[X]$, on a

$$g\circ f(P)=a(0,0)+b(1,2)+c(2,6)=(b+2c,2b+6c)$$

On peut également calculer directement la composée $g\circ f$:

$$\begin{aligned}g\circ f(P)=g\left(X^2P'\right)&=\left(\left(X^2P'\right)(1),\left(X^2P'\right)'(1)\right)\\&=\left(\left(P'(1),\left(X^2P''+2XP'\right)(1)\right)\right.\\&=\left(P'(1),P''(1)+2P'(1)\right)\\&=(b+2c,2c+2(b+2c))=(b+2c,2b+6c).\end{aligned}$$

Une autre conséquence, permettant de déterminer l'application réciproque d'une application linéaire en inversant une matrice :

Proposition 27.13. Application réciproque et matrice inverse

On suppose que $\dim(E)=\dim(F)$. Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.
Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(f^{-1}\right)=\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\right)^{-1}$$

Démonstration

On note $n=\dim(E)=\dim(F)$. On suppose que f est un isomorphisme. On a alors $f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_E$ et donc

$$\mathrm{I}_n=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\left(f^{-1}\circ f\right)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(f^{-1}\right)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$$

On a également $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_F$ et donc $\mathrm{I}_n=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(f^{-1}\right)$.
On en déduit que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ est inversible et que son inverse est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(f^{-1}\right)$.
Réciproquement, on suppose que A est inversible. On note g l'application linéaire de F dans E dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ est A^{-1}. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g\circ f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)=A^{-1}A=\mathrm{I}_n$$

et donc $g\circ f=\mathrm{id}_E$. De même $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f\circ g)=\mathrm{I}_n$ et donc $f\circ g=\mathrm{id}_F$. Ainsi f est un bijective (et son application réciproque est g)

Exemple 27.13

Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. On note $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(ax+by,cx+dy)$. f est un endomorphisme et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A)=ad-bc\neq 0$ et on a

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{\det(A)}&-\frac{b}{\det(A)}\\-\frac{c}{\det(A)}&\frac{a}{\det(A)}\end{pmatrix}.$$

On en déduit que f est un automorphisme si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et on a

$$f^{-1} : (x,y) \longmapsto \left(\frac{d}{\det(A)}x - \frac{b}{\det(A)}y, -\frac{c}{\det(A)}x + \frac{a}{\det(A)}y\right).$$

Exercice 27.14

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}_3[X])$ l'application définie par $g(P) = 4P - (X+1)P'$. Montrer que g est un automorphisme et déterminer g^{-1}.

Solution

Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. On a

$$g(1) = 4, \quad g(X) = 4X - X - 1 = -1 + 3X, \quad g\left(X^2\right) = 4X^2 - 2X^2 - 2X = -2X + 2X^2$$

et $g\left(X^3\right) = 4X^3 - 3X^3 - 3X^2 = -3X^2 + X^3$. Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2,X^3)}(g) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note A cette matrice. On constate que A est inversible (car triangulaire supérieure sans 0 sur sa diagonale). On cherche son inverse. Après application de l'algorithme du Pivot, on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/12 & 1/12 & 1/12 & 3/12 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que g est un automorphisme et, pour $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_4[X]$,

$$\begin{aligned} g^{-1}(P) &= ag^{-1}(1) + bg^{-1}(X) + cg^{-1}\left(X^2\right) + dg^{-1}\left(X^3\right) \\ &= a\frac{3}{12} + b\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}X\right) + c\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}X + \frac{1}{2}X^2\right) + d\left(\frac{3}{12} + X + \frac{3}{2}X^2 + X^3\right) \\ &= \frac{3a}{12} + \frac{b}{12} + \frac{c}{12} + \frac{3d}{12} + X\left(\frac{b}{3} + \frac{c}{3} + d\right) + X^2\left(\frac{c}{2} + \frac{3d}{2}\right) + dX^3 \end{aligned}$$

5. Changement de base

Il arrive régulièrement qu'on souhaite changer les bases qu'on utilise sur l'espace vectoriel de départ ou d'arrivé.

Définition 27.5. Matrice de passage

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage** P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi,

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n)$$

On a un lien entre matrice de passage et matrice d'une application linéaire :

Proposition 27.14.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ ···

deux bases de E. Alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ désigne la matrice de id_E, de $(E,\mathcal{B}')$ dans $(E,\mathcal{B})$:

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E).$$

Exercice 27.15

Soient $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ deux bases de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Solution

On fera attention à l'ordre. On a, rapidement, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$:

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Pour la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$, on décompose les éléments de la base $\mathcal{B}$ suivant la base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Proposition 27.15.

Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, alors P est inversible, et P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Démonstration

En effet, d'après un résultat précédent, puisque $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$, on a bien

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)\right)^{-1}$$

Proposition 27.16. Formules de passage

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E. Alors

- Pour tout vecteur u de E,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$
- Si f est un endomorphisme de E, alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

⚠ **Attention**

On fera attention à l'intuition ! La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ permet, à partir d'un vecteur u décomposé suivant $\mathcal{B}'$ d'obtenir ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 27.16

Soit $f : \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Donner la matrice A de f dans la base canonique, et la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Donner la matrice de passage P de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$.
4. Exprimer A en fonction de P et D, puis en déduire A^n pour tout entier n.

Solution

1. On montre classiquement que f est linéaire, et donc, que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Dans la base canonique, que l'on note $\mathcal{C}$:
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Ainsi,
$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Dans la base $\mathcal{B}$:
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Ainsi,
$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Par définition
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
4. D'après la formule de passage, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \times P$$
soit $D = P^{-1}AP$, ou encore $A = PDP^{-1}$. Par récurrence rapide, on peut alors montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$. D étant diagonale, on a, pour tout entier n, $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et enfin, par calcul :
$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
et donc
$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} & \dfrac{-3^n+1}{2} \\ \dfrac{-3^n+1}{2} & \dfrac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}}$$

Remarque

Ainsi, si A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.

Définition 27.6. Matrices semblables

On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont **semblables** s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = P^{-1}BP$.

Remarque

Il s'agit d'une **relation d'équivalence** :

- A est semblable avec elle-même.
- Si A est semblable à B alors B est semblable à A :
$$A = P^{-1}BP \implies B = PAP^{-1} = Q^{-1}AQ \text{ avec } Q = P^{-1}.$$
- Si A est semblable à B et B semblable à C alors A est semblable à C.

II. Rang d'une matrice

Nous allons rendre plus rigoureuse la définition de rang d'une matrice vue dans le chapitre 17.

Définition 27.7.

Soit $A \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On appelle **rang** de A, et on note $\text{rg}(A)$, le rang de la famille composée des n vecteurs définie par les colonnes de A, dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Si on note $\mathcal{F}$ cette famille :
$$\text{rg}(A) = \text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$$

Remarque

- Puisque $\mathcal{F}$ contient n vecteurs, on a $\text{rg}(\mathcal{F}) \leqslant n$. Puisque $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, on a $\text{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$. Ainsi $\text{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.
- Si $v_1, \dots, v_k$ sont des vecteurs de E, alors $\text{rg}(v_1, \dots, v_k) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_k))$.

Commençons par un lien fort entre rang d'une application linéaire et rang de sa matrice dans des bases :

Proposition 27.17.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\text{rg}(f) = \text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\right)$

Ainsi, le rang d'une application linéaire de E dans F est égal au rang de sa matrice dans n'importe quelles bases de E et F.

Démonstration

Comme $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, par définition, on a $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Puisque $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille de vecteurs de F, la remarque précédente entraîne que
$$\text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_n))) = \text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\right)$$

Exemple 27.17

On reprend l'application T de l'exercice 27.5. On avait comme matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes 2 et 3 sont identiques donc $\mathrm{rg}(T) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les trois colonnes de cette matrice forment une famille libre (matrice échelonnée sans colonne nulle) donc $\mathrm{rg}(T) = 3$.

Exercice 27.18

Soit $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{F} = ((1,2,-7,4),(-1,0,2,5),(0,-3,5,0),(-2,1,4,1))$$

Déterminer la matrice A de $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. En notant f l'application linéaire canoniquement associée à A, déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

Solution

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice de $\mathcal{F}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -7 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effectuant les opérations du pivot sur les colonnes :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \\ -7 & -5 & 5 & -10 \\ 4 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -7 & -5 & -5 & 5 \\ 4 & 9 & 27 & -27 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -7 & -5 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & 27 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -7 & -5 & -5 \\ 4 & 9 & 27 \end{pmatrix}$. On observe que les trois colonnes de cette dernière matrice forment une famille libre (car la matrice est échelonnée sans colonne nulle). Ainsi $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Alors

$$\forall\,(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad f(x,y,z,t) = (x-y-2t, 2x-3z+t, -7x+2y+5z+4t, 4x+5z+t).$$

et d'après le théorème précédent, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = 3$.

Le théorème du rang nous assure alors que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - \mathrm{rg}(f) = 1$.

On peut constater que si on ajoute la première, la troisième et la quatrième colonne de A et qu'on enlève la deuxième, on obtient la colonne nulle. Cela signifie que, si on note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $f(e_1) - f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 0$. Ainsi $f(e_1 - e_2 + e_3 + e_4) = 0$ et donc

$$(1, -1, 1, 1) = e_1 - e_2 + e_3 + e_4 \in \mathrm{Ker}(f).$$

Le sous espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1 et on en connait un vecteur non nul. Il est donc engendré par ce vecteur : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, -1, 1, 1))$.

Corollaire 27.18.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

Démonstration

Notons $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

A est inversible si et seulement si φ est bijective. Or, elle est bijective si et seulement si elle est surjective et donc si et seulement si $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$. Comme $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(A)$, on en déduit le corollaire.

On termine par une propriété sur le rang de la transposée :

Proposition 27.19.

Soit $A \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration

Admis

On en déduit alors une propriété :

Corollaire 27.20.

Le rang d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est aussi le rang de la famille des p vecteurs définie par les vecteurs lignes de A (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'effectuer des opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille ne modifie par le rang de la famille. On en déduit, grâce aux propositions précédentes, la méthode de détermination du rang suivant :

Méthode

- Pour déterminer le rang d'une matrice, on réalise des opérations élémentaires sur les colonnes ou bien sur les lignes de A (selon ce qui semble le plus simple) pour la mettre sous forme échelonnée. Le rang d'une matrice échelonnée en colonne (respectivement en ligne) est alors égal au nombre de colonnes (respctivement de lignes) non nulles.
- Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on calcule le rang de la matrice de cette famille dans une base quelconque.
- Pour déterminer le rang d'une application linéaire, on calcule le rang de sa matrice dans des bases quelconques.

III. Matrices carrées et endomorphismes

1. Matrice d'une puissance d'endomorphismes en dimension finie

En utilisant les propriétés précédentes, nous allons pouvoir déterminer un lien entre les polynômes d'endomorphismes en dimension finie, et les polynômes de matrices.

Proposition 27.21.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^k\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^k$

Démonstration

On le démontre par récurrence.

On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^0\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{id}_E\right) = \mathrm{I}_n = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^k\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^k$. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{k+1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f \circ f^k\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^k\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\underbrace{\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^k}_{\text{H.R.}} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{k+1}.$$

La formule est donc vraie au rang $k+1$. D'où la proposition par récurrence.

Corollaire 27.22.

Soit f un endomorphisme de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On a $A^2 = A$ si et seulement si f est un projecteur de E.

Remarque

Ces deux résultats restent vrais si on ne prend pas la même base de départ et d'arrivée.

2. Matrice de la réciproque d'un automorphisme en dimension finie

Reformulons un résultat précédent sur la matrice d'une application linéaire réciproque :

Proposition 27.23.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a $f \in GL(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in GL_n(\mathbb{R})$. Dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1}$$

Lors du premier semestre, nous avons vu différents critères d'inversibilité de matrices, que l'on peut désormais démontrer.

Théorème 27.24. Critère du noyau

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. A est inversible si et seulement si

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = 0 \Rightarrow X = 0$$

Démonstration

Si A est inversible et si $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est tel que $AX = 0$, alors

$$0 = A^{-1}0 = A^{-1}(AX) = \mathrm{I}_n X = X$$

Réciproquement supposons que, pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AX = 0$, on a $X = 0$. Considérons f l'endomorphisme canoniquement associé à A (notons $\mathcal{B}$ la base canonique de

$\mathbb{R}^n$). Si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0$ donc $A \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0$ et donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0$. Ainsi, $x = 0$ et $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est injective et donc bijective puisqu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie. Nous en déduisons que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible.

Théorème 27.25. Critère de l'image

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si

$$\forall\, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \exists\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad Y = AX$$

Démonstration

Si A est inversible et $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $X = A^{-1}Y$ vérifie $Y = AX$.

Réciproquement supposons que, pour tout $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $Y = AX$.

Considérons f l'endomorphisme canoniquement associé à A (notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Si $y \in \mathbb{R}^n$, alors il existe $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = AX$ (par hypothèse). Ainsi $y = f(x)$ où $x \in \mathbb{R}^n$ est tel que $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. On en déduit que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}^n$: f est surjective et donc bijective puisqu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie. Nous en déduisons que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible.

Théorème 27.26.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si il existe $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = \mathrm{I}_n$ (on dit que A est inversible à droite), alors A est inversible et $A^{-1} = B$
- Si il existe $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $BA = \mathrm{I}_n$ (on dit que A est inversible à gauche), alors A est inversible et $A^{-1} = B$

Démonstration

- Supposons qu'il existe $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = \mathrm{I}_n$. Donnons-nous $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors le vecteur $X = BY$ vérifie $AX = ABY = \mathrm{I}_n Y = Y$. Le critère de l'image entraîne que A est inversible et on a $A^{-1} = A^{-1}\mathrm{I}_n = A^{-1}AB = B$
- Supposons qu'il existe $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $BA = \mathrm{I}_n$. Donnons-nous $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$. On a $0 = B(AX) = (BA)X = \mathrm{I}_n X = X$. Le critère du noyau entraîne que A est inversible et on a $A^{-1} = \mathrm{I}_n A^{-1} = BAA^{-1} = B$

Proposition 27.27.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un système (S) de n équations à n inconnues est de Cramer si et seulement si sa matrice associé A est inversible.

Démonstration

Supposons que (S) soit équivalent à $AX = B$, avec $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si A est inversible, alors $A\left(A^{-1}B\right) = \left(AA^{-1}\right)B = B$ et donc $X = A^{-1}B$ est solution du système. Si Y est une autre solution de (S), alors $AY = B = AX$ et donc $A(X - Y) = 0$. En multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient $X - Y = 0$. Ainsi il y a une unique solution au système : il est bien de Cramer.

Pour la réciproque, montrons la contraposée. Supposons que A n'est pas inversible. Le critère du noyau n'est donc pas vérifié : il existe $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X_0 \neq 0$ et $AX_0 = 0$.

- Si (S) n'admet pas de solution alors, (S) n'est pas de Cramer par définition.
- Si (S) admet une solution, alors il existe $X_s \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX_s = B$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, on a $A(X_s + \lambda X_0) = AX_s + \lambda AX_0 = B + 0 = B$ donc $X_s + \lambda X_0$ est solution du système. Comme $X_0 \neq 0$, on en déduit que (S) admet une infinité de solutions et n'est pas de Cramer.

Par contraposée, si (S) est de Cramer, alors A est inversible.

3. Retour sur les polynômes d'endomorphismes et de matrices

On termine par un théorème fondamental, qui sera utile l'année prochaine :

Théorème 27.28.

- Tout endomorphisme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie admet au moins un polynôme non nul annulateur.
- Toute matrice carrée admet au moins un polynôme non nul annulateur.

Démonstration

- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $n = \dim(E)$. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2, et la famille $\left(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n^2}\right)$ comporte $n^2 + 1$ éléments donc elle est liée : il existe donc des scalaires $a_0, \dots, a_{n^2}$ non tous nuls tels que
$$a_0\mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_{n^2} f^{n^2} = 0$$
Par conséquent le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n^2} X^{n^2}$ annule f et n'est pas le polynôme nul.
- Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. L'espace vectoriel $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2, et la famille $\left(\mathrm{I}_n, A, A^2, \dots, A^{n^2}\right)$ comporte $n^2 + 1$ éléments donc elle est liée : il existe donc des scalaires $a_0, \dots, a_{n^2}$ non tous nuls tels que
$$a_0\mathrm{Id}_E + a_1 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2} = 0$$
Par conséquent le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n^2} X^{n^2}$ annule A et n'est pas le polynôme nul.

Remarque

- On peut même montrer que, si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe un polynôme annulateur de f degré au plus $n = \dim(E)$.
- Tout comme pour les matrices, l'existence d'un polynôme P annulateur de f tel que $P(0) \neq 0$ entraîne que f est un automorphisme et fournit une méthode permettant de calculer f^{-1} en fonction de puissances de f.

Exercices
27

Exercices

Matrices de famille, d'applications linéaires

●○○ **Exercice 1 Applications et bases canoniques** (10 min.)

Pour chacune des applications linéaires suivantes, donner sa matrice relativement aux bases canoniques.

1. $f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (2x-3y+t, 9x-4z) \end{array} \right.$

2. $g: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ (x,y,z,t,u) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+3z-t+6u \\ x+5y+t \\ -3x+y+2z-4u \end{pmatrix} \end{array} \right.$

3. $h: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ (x,y) & \longmapsto & (y-x, x, x-y, y, 0, x+y) \end{array} \right.$

4. $u: \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array} \right.$

5. $\varphi: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(0), P''(0)) \end{array} \right.$

6. $\psi: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & P - X^3P' \end{array} \right.$

●○○ **Exercice 2 Endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$** (5 min.)

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice fixée. Donner la matrice de l'application $f: \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM + MA$ dans la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

●○○ **Exercice 3 Une base pas canonique** (10 min.)

1. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Montrer que $f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2(X+1)P - (X^2-2X+1)P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

●○○ **Exercice 4 Encore des applications sur les polynômes** (15 min.)

1. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = (X^2+1)P' + XP$.
   Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$ et donner sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
2. Soit ψ l'application définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ par
   $$\psi(P) = (P(0), P'(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3.$$
   a) Montrer que ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer la matrice de ψ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.
   c) En déduire ψ^{-1}.

●○○ **Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^3$** (10 min.)

Déterminer la matrice de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$u(x,y,z) = (x-y+z, x+y-2z, z-x-y)$$
dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En déduire une expression de u^3.

●○○ **Exercice 6 Inversion sans inverse** (10 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_5(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_4[X]$ définie par $f : P \longmapsto P(X+1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
3. En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1}.
   On pourra introduire $h : P \longmapsto P(X-1)$.

Rang

●○○ **Exercice 7 Rang et application linéaire** (10 min.)

Soit E un espace de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par

$$f(e_1) = 3e_2 + e_3, f(e_2) = e_1 + e_4, f(e_3) = e_2 - e_1 + e_4 \quad \text{et} \quad f(e_4) = 2e_1 + 3e_2 + e_3 + 2e_4.$$

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Quel est le rang de f ? Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.

●○○ **Exercice 8 Des matrices et des rangs** (15 min.)

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

●○○ **Exercice 9 Un rang à paramètre** (10 min.)

Déterminer, suivant la valeur de a, le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

●●○ **Exercice 10 Une grande matrice** (15 min.)

Donner le rang de la matrice $n \times n$ suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & n+1 & 2n+1 & \cdots & (n-1)n+1 \\ 2 & n+2 & 2n+2 & \cdots & (n-1)n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

●○○ **Exercice 11 La totale** (15 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $f : P \longmapsto P(X+1) - P(X)$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer son rang. Donner une base de $\operatorname{Im}(f)$ et de $\operatorname{Ker}(f)$.
3. Calculer $f(5X^3+3X+4)$ à l'aide d'opérations matricielles.

●○○ Exercice 12 Des valeurs propres (15 min.)

Calculer le rang de $M-\lambda \mathrm{I}_3$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ lorsque

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M=\begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Application, changement de bases

●○○ Exercice 13 Un changement de base (15 min.)

Soit $f:\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f:\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3x+y-z \\ -x+5y-3z \\ 4y-2z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et préciser sa matrice A dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Soient $e_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la matrice B de l'application linéaire f dans la base $\mathscr{B}$.

●●○ Exercice 14 Sur les fonctions (20 min.)

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par les fonctions

$$f_1:x\longmapsto \mathrm{e}^{-x}, \quad f_2:x\longmapsto (x+1)\mathrm{e}^{-x}, \quad \text{et} \qquad f_3:x\longmapsto (x^2-1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que $\mathscr{B}=(f_1,f_2,f_3)$ est une base de E.
2. Soit $d:f\longmapsto f'$. Montrer que d est un endomorphisme de E et donner sa matrice A dans la base $\mathscr{B}$.
3. Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   On pourra écrire $A=-\mathrm{I}_3+N$ avec N une matrice dont les puissances sont faciles à calculer.
4. En déduire l'expression de $f^{(n)}$ lorsque $f:x\longmapsto (ax^2+bx+c)\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

Pour aller plus loin

●●● Exercice 15 Sur les matrices magiques (20 min.)

Soit $n\geqslant 3$. Une matrice $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite magique si, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on a

$$\sum_{i=1}^n m_{i,j}=\sum_{i=1}^n m_{j,i}=\sum_{i=1}^n m_{i,i}=\sum_{i=1}^n m_{i,n+1-i}.$$

On note $MG(n)$ l'ensemble des matrices magiques d'ordre n.

1. Donner un exemple de matrice magique pour $n=3$.
2. Montrer que $MG(n)$ est un espace vectoriel.

3. Soit φ l'application de $MG(n)$ dans $\mathfrak{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-2}$ définie par
$$\varphi\left(\begin{pmatrix} & & M_1 & & m_{1,n} \\ & & & & \vdots \\ & & & & m_{n-2,n} \\ m_{n-1,1} & \cdots & \cdots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & \cdots & \cdots & m_{n,n-1} & m_{n,n}\end{pmatrix}\right) = \left(M_1, m_{1,n}, m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, m_{n-1,4}, \dots, m_{n-1,n-2}\right).$$
Montrer que φ est un isomorphisme.
4. En déduire la dimension de $MG(n)$.

●●○ Exercice 16 Une matrice combinante (15 min.)

Soit A la matrice de $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie, pour tout $(i,j) \in [\![1,\, n+1]\!]^2$ par
$$a_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
On pourra développer $(X+1)^j$.
2. En déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.

●●○ Exercice 17 Matrice à diagonale dominante (15 min.)

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est à diagonale dominante si pour tout $i \in [\![1,\, n]\!]$:
$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j}.$$
Montrer que si A est à diagonale dominante, alors A est inversible.
On pourra s'intéresser au noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Sujets de concours

●●○ Exercice 1 Etude d'un endomorphisme de polynômes (30 min.)

Soient f et g deux applications définies par :
$$f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad g : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}\right. .$$

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   b) Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On la notera A.
   c) f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. a) Montrer que g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
   b) g est-elle surjective ?
   c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g)$. L'application g est-elle injective ?
   d) En déduire, de deux façons différentes, la dimension de $\mathrm{Ker}(g)$.
3. On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que $AB = BD$
   b) Montrer que B est inversible et expliciter B^{-1}
   c) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b et c.

5. En déduire que

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n\to+\infty} g\left(f^n(P)\right) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

●●○ Exercice 2 Endomorphisme, matrice et diagonalisation (30 min.)

Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ où

$$u_1 = (1,1,1,1), \quad u_2 = (1,1,-1,-1), \quad u_3 = (1,-1,1,-1) \quad \text{et} \quad u_4 = (1,-1,-1,1)$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$
2. Soit f l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que $f(e_k) = u_k$ pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$.
   a) Justifier que $f \in GL\left(\mathbb{R}^4\right)$ et donner sa matrice dans la base $\mathcal{C}$.
   b) Expliciter f^2.
   c) Déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{C}$.
3. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites définies par $(x_0, y_0, z_0, t_0) \in \mathbb{R}^4$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} 4x_{n+1} = x_n + y_n + z_n + t_n \\ 4y_{n+1} = x_n + y_n - z_n - t_n \\ 4z_{n+1} = x_n - y_n + z_n - t_n \\ 4t_{n+1} = x_n - y_n - z_n + t_n \end{cases}$$

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = {}^t\begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n & t_n \end{pmatrix}$. Déterminer A tel que $X_{n+1} = AX_n$.
   b) En déduire que les quatre suites tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
4. On pose $E = \mathrm{Ker}\left(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}\right)$ et $F = \mathrm{Ker}\left(f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}\right)$.
   a) Montrer que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.
   b) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{E}$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{E}$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

Il faudrait tout d'abord démontrer que les applications sont linéaires. On le laisse en exercice au lecteur. On prend les bases canoniques des différents espaces. On notera, pour chacune des applications suivantes, $\mathcal{B}$ la base de l'espace de départ, et $\mathcal{C}$ la base de l'espace d'arrivée.

1. $f(1,0,0,0) = (2,9)$, $f(0,1,0,0) = (-3,0)$, $f(0,0,1,0) = (0,-4)$ et $f(0,0,0,1) = (1,0)$. Finalement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Par le même raisonnement :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. De même :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On prend la base canonique $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. On a

$$u(E_{1,1}) = E_{1,1}, \quad u(E_{1,2}) = E_{2,1}, \quad u(E_{2,1}) = E_{1,2} \quad \text{et} \quad u(E_{2,2}) = E_{2,2}.$$

Finalement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$:

$$\varphi(1) = (1,0,0), \quad \varphi(X) = (0,1,0), \quad \varphi(X^2) = (0,0,2) \quad \text{et} \quad \varphi(X^3) = (0,0,0).$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. ψ est bien linéaire (par linéarité de la dérivée). Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $X^3P' \in \mathbb{R}_4[X]$ et donc $\psi(P) \in \mathbb{R}_4[X]$. Prenons les bases $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X3)$. Remarquons que

$$\psi(1) = 1, \quad \psi(X) = X - X^3 \quad \text{et} \quad \psi(X^2) = X^2 - X^3(2X) = X^2 - 2X^4.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On prend $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, et on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Alors

$$\begin{aligned}
f(E_{1,1}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\\
f(E_{1,2}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a+d \\ 0 & c \end{pmatrix}\\
f(E_{2,1}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a+d & b \end{pmatrix}\\
f(E_{2,1}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 2d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1. La famille $\mathcal{B}$ est échelonnée en degré, donc libre. Par ailleurs, son cardinal est 3, égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$. On peut conclure qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrons tout d'abord la linéarité. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda P + Q) &= 2(X+1)(\lambda P + Q) - (X^2 - 2X + 1)(\lambda P + Q)'\\
&= \lambda 2(X+1)P + 2(X+1)Q - (X^2 - 2X + 1)(\lambda P' + Q') \text{ par linéarité de la dérivée}\\
&= \lambda(2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P') + (2(X+1)Q - (X^2 - 2X + 1)Q') = \lambda f(P) + f(Q).
\end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire. Par ailleurs, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on écrit $P(X) = aX^2 + bX + c$ et alors

$$f(P) = 2(X+1)(aX^2+bX+c) - (X^2-2X+1)(2aX+b) = (b+6a)X^2 + (2c+4b-2a)X + 2c - b \in \mathbb{R}_2[X].$$

Ainsi, f est un endomorphisme.
On aurait pu raisonner sur les degrés, en constatant que si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\deg(f(P)) \leqslant 3$ et n'est pas égal à 3 car les coefficients dominants se simplifient.
3. Rapidement, dans $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2)$:

$$\begin{aligned}
f(1) &= 2(X+1) = 2X + 2 = 2(X-1) + 4,\\
f(X-1) &= 2(X+1)(X-1) - (X^2 - 2X + 1) = X^2 + 2X - 3 = (X-1)^2 + 4(X-1)\\
f((X-1)^2) &= 2(X+1)(X-1)^2 - (X^2 - 2X + 1)2(X-1) = 4X^2 - 8X + 4 = 4(X-1)^2
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1. La linéarité est classique. Par ailleurs, si P est de degré au plus n, alors $(X^2+1)P'$ est de degré au plus $n+1$ et XP également. Par somme, $f(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
Notons $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{C} = (1, X, \dots, X^{n+1})$ celle de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Alors

$$\begin{aligned} f(1) &= X \\ \forall\, p \in [\![1,\, n]\!], \quad f(X^p) &= (X^2+1)(pX^{p-1}) + XX^p = (p+1)X^{p+1} + pX^{p-1}. \end{aligned}$$

La matrice de f dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & & n+1 \end{pmatrix}$$

2.
a) ψ est une application linéaire (méthode usuelle) de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$. Puisque $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathbb{R}^3)$, il suffit de montrer l'injectivité pour en déduire la bijectivité.
Soit $P \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Alors $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifie $\psi(P) = (0,0,0)$, c'est-à-dire $P(0) = P'(0) = P(1) = 0$. Ainsi, par propriété sur les polynômes, $X^2(X-1)$ divise P (car 0 est racine au moins double, et 1 est racine). Or P est de degré au plus 2 : cela impose que $P = 0$ et finalement $\mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$.
Bilan : ψ est bien un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
b) Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{C} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$. Rapidement

$$f(1) = (1,0,1), \quad f(X) = (0,1,1) \quad \text{et} \quad f(X^2) = (0,0,1).$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) ψ^{-1} existe (question a) et sa matrice dans les bases canoniques est données par la matrice inverse de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$. Par pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Finalement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\psi^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\psi)^{-}1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On décode :

$$f((1,0,0)) = 1 - X^2, \quad f((0,1,0)) = X - X^2 \quad \text{et} \quad f((0,0,1)) = X^2.$$

et finalement

$$\boxed{\forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = x(1-X^2) + y(X-X^2) + zX^2 = (z-y-x)X^2 + yX + x}.$$

Exercice 5

Tout d'abord, u est bien un endomorphisme (linéarité classique). Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$u((1,0,0)) = (1,1,-1), \quad u((0,1,0)) = (-1,1,-1) \quad \text{et} \quad u((0,0,1)) = (1,-2,1).$$

Ainsi, la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par propriété, la matrice de u^3 dans la base canonique est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u^3) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)\big)^3 = \begin{pmatrix} -8 & -6 & 9 \\ 9 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On décode :

$$\boxed{\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \quad u^3(x,y,z) = (-8x-6y+9z, 9x+y-3z, -6x+z).}$$

Exercice 6

1. Tout d'abord, notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ dont la matrice dans la base canonique est A. Cela a un sens car $\dim(\mathbb{R}_4[X]) = 5$ et $A \in \mathfrak{M}_5(\mathbb{R})$. Notons g l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_5(\mathbb{R})$ définie par $g : P \longmapsto P(X+1)$. Remarquons, d'après la matrice A que

$$f(1) = 1, \quad f(X) = 1+X, \quad f(X^2) = 1+2X+X^2 = (X+1)^2,$$

$$f(X^3) = 1+3X+3X^2+X^3 = (X+1)^3 \quad \text{et} \quad f(X^3) = 1+4X+6X^2+4X^3+X^4 = (X+1)^4.$$

On constate que f et g coïncident sur une base de $\mathbb{R}_4[X]$, donc par unicité sont égales : $f = g$.
2. On constate que la matrice A est inversible, puisque triangulaire supérieure avec des coefficients tous non nuls sur la diagonale. Ainsi, f est bijective et est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
3. Pour trouver l'inverse, on pourrait faire la méthode du pivot. Mais, puisque f est bijective, on va plutôt chercher sa bijection reciproque, ce qui nous permettra de déterminer la matrice de f^{-1} qui sera A^{-1}.
Vue la définition de f, on peut tenter de noter $h : P \longmapsto P(X-1)$. h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ et pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$

$$f\circ h(P(X)) = f(P(X-1)) = P(X) \quad \text{et} \quad h\circ f(P(X)) = h(P(X+1)) = P(X).$$

Ainsi, $h\circ f = f\circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_4[X]}$: par définition, h est la bijection réciproque de f^{-1} : $h = f^{-1}$.
Par théorème, A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base canonique. Ainsi, après calcul :

$$\begin{aligned} h(1) &= 1, \quad h(X) = X-1 \\ h(X^2) &= (X-1)^2 = X^2-2x+1, \quad h(X^3) = (X-1)^3 = X^3-3X^2+3X-1 \\ h(X^4) &= (X-1)^4 = X^4-4X^3+6X^2-4X+1. \end{aligned}$$

Finalement

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

1. Par définition :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Par opération sur des colonnes

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice étant échelonnée, on peut lire son rang, qui vaut 3. Ainsi, $\mathrm{rg}(f) = 3$. De plus, les opérations sur les colonnes nous donne que

$$f(e_1) = f(e_4) - 2f(e_2)$$

Puisque $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$, la relation précédente nous donne $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.
Puisque $\mathrm{rg}(f) = 3$, on est sur que cette famille est une base de l'image.
Enfin, $f(e_1) = f(e_4) - 2f(e_2) \iff f(e_1 - e_4 + 2e_2) = 0$: ainsi, $e_1 - e_4 + 2e_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = 1$, et puisque $e_1 - e_4 + 2e_2 \neq 0$, ce vecteur est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
Bilan : $\mathrm{rg}(f) = 3$ et on a les bases :

$$(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = (3e_2+e_2, e_1+e_4, e_2-e_1+e_4) \text{ base de } \mathrm{Im}\,(f) \quad \text{et} \quad (e_1+2e_2-e_4) \text{ base de } \mathrm{Ker}(f).$$

Exercice 8

On applique la méthode du pivot sur les colonnes pour échelonner la matrice, ce qui permet d'en déduire le résultat.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, A est de rang 2.

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, B est de rang 3 : la matrice B est donc inversible.

$$C \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C est de rang 2. Enfin :

$$D \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D est de rang 2.

Exercice 9

Nous allons effectuer des opérations (légales !) sur les colonnes afin de déterminer le rang de la matrice, que l'on note A.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1-a^4 \\ a^2 & 0 & 1-a^4 & a-a^5 \\ a^3 & 1-a^4 & a-a^5 & a^2-a^6 \end{pmatrix}$$

La famille obtenue est échelonnée, si et seulement si $1-a^4 \neq 0$, c'est-à-dire $a \notin \{-1,1\}$. Dans ce cas, son rang vaut 4.

- Si $a=1$, la matrice devient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1 (une seule colonne non nulle).

- Si $a=-1$, la matrice devient :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est également de rang 1.

Finalement

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 4 \text{ si } a \notin \{-1,1\}, \quad \mathrm{rg}(A) = 1 \text{ sinon.}}$$

Exercice 10

Nous allons à nouveau effectuer des opérations sur les colonnes. Notons A_n la matrice, et commençons par soustraire la première à toutes les autres, en supposant pour commencer que $n \geqslant 2$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & n & 2n & \cdots & (n-1)n \\ 2 & n & 2n & \cdots & (n-1)n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & 2n & \cdots & n(n-1) \end{pmatrix}$$

En utilisant la deuxième colonne et en la soustrayant 2, 3, ..., $(n-1)$ fois dans les suivantes :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les deux premières colonnes n'étant pas colinéaires, nous en déduisons que A_n est de rang 2.

Si $n=1$, la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1.

Finalement

$$\boxed{\mathrm{rg}(A_n) = 2 \text{ si } n \geqslant 1, \quad \mathrm{rg}(A_1) = 1.}$$

Exercice 11

1. Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $P(X+1) \in \mathbb{R}_3[X]$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Par ailleurs, f est linéaire : si $(P,Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)(X+1)-(\lambda P+Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1)+Q(X+1)-\lambda P(X)-Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1)-P(X))+(Q(X+1)-Q(X)) = \lambda f(P)+f(Q). \end{aligned}$$

Prenons la base canonique $\mathcal{B}=(1,X,X^2,X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Rapidement :

$$\begin{aligned} f(1)=0, \quad f(X)=X+1-X=1 \\ f(X^2)=(X+1)^2-X^2=2X+1 \quad \text{et} \quad f(X^3)=(X+1)^3-X^3=3X^2+3X+1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Remarquons que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est échelonnée, de rang 3. Ainsi, $\mathrm{rg}(f)=3$. D'après le calcul précédent, et en effectuant des combinaisons linéaires :

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(0,1,2X+1,3X^2+3X+1) = \mathrm{Vect}(1,X,X^2) = \mathbb{R}_2[X].$$

Le théorème du rang (puisqu'on est en dimension finie) garantit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \mathrm{rg}(f) = 1$. Or $1 \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $\mathrm{Vect}(1) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par égalité des dimensions

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}[X].$$

3. Dans la base canonique :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(5X^3+3X+4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Par produit matriciel

$$\mathrm{Mat}_{BB}(f(5X^3+3X+4)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(5X^3+3X+4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

soit, par calcul matriciel

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(5X^3+3X+4)) = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et en décodant

$$f(5X^3+3X+4) = 15X^2+15X+8.$$

Exercice 12

Notons $A_\lambda = M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. On effectue des opérations sur les colonnes afin de déterminer le rang.

$$\begin{aligned} A_\lambda &\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 2+\lambda(1-\lambda) & 0 \\ 3 & 6+3\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 2+\lambda-\lambda^2 & 0 \\ 3 & 6+3\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $2+\lambda-\lambda^2 \neq 0$ et $2-\lambda \neq 0$, la matrice est échelonnée, et son rang vaut 3. Ainsi, si $\lambda \notin \{-1, 2\}$, la matrice est de rang 3.

- Si $\lambda = 2$, la matrice devient :

$$A_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonne ne sont pas colinéaires : la matrice est de rang 2.

- Si $\lambda = -1$, la matrice devient

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

et à nouveau la matrice est de rang 2.

Finalement,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A_\lambda) = 3 \text{ si } \lambda \notin \{-1, 2\}, \quad \operatorname{rg}(A_\lambda) = 2 \text{ sinon.}}$$

Notons B_λ dans le deuxième cas :

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} -5-\lambda & -8 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ -3 & -5 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Par opérations sur les colonnes :

$$\begin{aligned} B_\lambda &\sim \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5-\lambda \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 2-\lambda & -5 & -3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda-1 & 8-2(5+\lambda) \\ 2-\lambda & -2\lambda-1 & -12+(5+\lambda)(2-\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda-1 & -2-2\lambda \\ 2-\lambda & -2\lambda-1 & -2-3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda-1 & 0 \\ 2-\lambda & -2\lambda-1 & (-2-3\lambda-\lambda^2)-2(-2\lambda-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda-1 & 0 \\ 2-\lambda & -\lambda-1 & -\lambda^2+\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, si $-\lambda-1 \neq 0$ et $-\lambda^2+\lambda \neq 0$, c'est-à-dire si $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$, la matrice est échelonnée sans colonnes nulles : elle est de rang 3.

- Si $\lambda = 0$, alors

$$B_0 \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2 (échelonnée, avec une colonne nulle).
- Si $\lambda = 1$, alors

$$B_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est également de rang 2.
- Enfin, si $\lambda = -1$

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

qui est aussi de rang 2.
Finalement,

$$\boxed{\operatorname{rg}(B_\lambda) = 3 \text{ si } \lambda \notin \{-1, 0, 16\}, \quad \operatorname{rg}(A_\lambda) = 2 \text{ sinon.}}$$

Exercice 13

1. Méthode classique. On obtient comme matrice dans la base canonique

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. (e_1, e_2, e_3) est de cardinal 3, celui de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre. On prend (a, b, c) trois réels tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$. Après résolution, on obtient $a = b = c = 0$, et donc la famille est libre.
Bilan : $\mathcal{B}$ est une base.
3. Deux méthodes possibles :

- Méthode 1 : formule de changement de base. On écrit $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son inverse vaut

$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Par la formule de changement de base :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P^{-1}AP$$

et donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Méthode 2 : on écrit $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3 en résolvant des systèmes. On obtient

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2e_2 + e_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 + e_3$$

et donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14

1. Par définition, $\mathcal{B}$ engendre E puisque $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$. Montrons la liberté : soient (a, b, c) trois réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$. Ainsi

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad a\mathrm{e}^{-x} + b(x+1)\mathrm{e}^{-x} + c(x^2-1)\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

En prenant $x = -1$, on obtient $a\mathrm{e}^1 = 0$, soit $a = 0$. En prenant alors $x = 1$, on obtient $2b\mathrm{e}^{-1} = 0$, soit $b = 0$ et finalement $c = 0$ (par exemple en prenant $x = 0$). Au final, la famille (f_1, f_2, f_3) est libre et $\mathcal{B}$ forme une base de E.

2. d est une application linéaire (par linéarité de la dérivée). Montrons que d est un endomorphisme ; pour cela, on calcule l'image par d de la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
&d(f_1) = x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x} = -f_1 \in E\\
&d(f_2) = x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = f_1 - f_2 \in E\\
&f(f_3) = x \longmapsto 2x\mathrm{e}^{-x} - (x^2-1)\mathrm{e}^{-x}\\
&\qquad = x \longmapsto 2(x+1-1)\mathrm{e}^{-x} - f_3(x) = x \longmapsto 2(x+1)\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} - f_3(x) = 2f_2 - 2f_1 - f_3 \in E.
\end{aligned}$$

Puisque $d(f_1), d(f_2)$ et $d(f_3)$ sont des éléments de E, par linéarité (et puisque E est un sous-espace vectoriel), pour tout $f \in E$, $d(f) \in E$: d est bien un endomorphisme de E. Sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, d'après le calcul précédent, est

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Remarquons que

$$A = -I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On constate que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que $N^3 = 0$. Ainsi, pour tout $k \geqslant 3$, $N^k = 0_3$. I_3 et N commutant, la formule du binôme de Newton donne, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
A^n = (-I_3 + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-I_3)^{n-k} N^k\\
&= \binom{n}{0}(-I_3)^n N^0 + \binom{n}{1}(-I_3)^{n-1}N^1 + \binom{n}{2}(-I_3)^{n-2}N^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}(-I_3)^{n-k}N^k}_{=0}\\
&= (-1)^n I_3 + n(-1)^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}N^2\\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & -2n(-1)^{n-1} + 2\frac{n(n-1)}{2}(-1)^n \\ 0 & (-1)^n & 2n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement, ce résultat étant également valable pour $n = 0$ et $n = 1$, on en déduit que

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & n(n+1)(-1)^n \\ 0 & (-1)^n & 2n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.}$$

4. A^n désigne l'image dans la base $\mathscr{B}$ de d^n. Ainsi,

$$\begin{aligned}
d^n(f_1) &= (-1)^n f_1\\
d^n(f_2) &= (-1)^n f_2 + n(-1)^{n-1} f_1\\
d^n(f_3) &= (-1)^n f_3 + 2n(-1)^{n-1} f_2 + n(n+1)(-1)^n f_1.
\end{aligned}$$

Soit $f : x \longmapsto (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$. Remarquons que

$$ax^2+bx+c = a(x^2-1)+b(x+1)+a-b+c$$

Finalement, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
d^n(f) &= ad^n(f_3)+bd^n(f_2)+(a-b+c)d^n(f_1)\\
&= a((-1)^n f_3 + 2n(-1)^{n-1} f_2 + n(n+1)(-1)^n f_1) + b((-1)^n f_2 + n(-1)^{n-1} f_1) + (a-b+c)(-1)^n f_1\\
&= (an(n+1)(-1)^n + bn(-1)^{n-1} + (a-b+c)(-1)^n) f_1 + (2an(-1)^{n-1} + b(-1)^n) f_2 + a(-1)^n f_3.
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $d^n : f \longmapsto f^{(n)}$, on en déduit finalement

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R}, \forall\, n\in\mathbb{N},\quad f^{(n)}(x) = \left((an(n+1) - bn + (a-b+c)) + (b-2an)(x+1) + a(x^2-1)\right)(-1)^n \mathrm{e}^{-x}.}$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 15

1. Un exemple de matrice magique de taille 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1\\ 2 & 4 & 6\\ 7 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

2. Soient M et N deux matrices de $MG(n)$, et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors la matrice

$$P = \lambda M + N = \left(\lambda m_{i,j} + n_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

vérifie, pour tout $j\in[\![1,\, n]\!]$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n p_{i,j} = \sum_{i=1}^n (\lambda m_{i,j} + n_{i,j}) &= \lambda \sum_{i=1}^n m_{i,j} + \sum_{i=1}^n n_{i,j}\\
&= \lambda \sum_{i=1}^n m_{j,i} + \sum_{i=1}^n n_{j,i} \text{ car } M\in MG(n),\ N\in MG(n)\\
&= \sum_{i=1}^n (\lambda m_{j,i} + n_{j,i}) = \sum_{i=1}^n p_{j,i}.
\end{aligned}$$

Les autres égalités se vérifient de la même manière. Ainsi, $\lambda M+N\in MG(n)$, et $MG(n)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

3. φ est une application linéaire. Soient M et N deux matrices de $MG(n)$, et $\lambda unrel$. Alors

$P = \lambda M + N = \left(\lambda m_{i,j} + n_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda M + n) &= \left((\lambda m + n)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}}, \lambda m_{1,n} + n_{1,n}, \lambda m_{n-1,1} + n_{n-1,1}, \dots, \lambda m_{n-1,n-2} + n_{n-1,n-2}\right) \\
&= \left((\lambda m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}}, \lambda m_{1,n}, \lambda m_{n-1,1}, \dots, \lambda m_{n-1,n-2}\right) \\
&\quad + \left((n_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}}, n_{1,n}, n_{n-1,1}, \dots, n_{n-1,n-2}\right) \\
&= \lambda \left((m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}}, m_{1,n}, m_{n-1,1}, \dots, m_{n-1,n-2}\right) \\
&\quad + \left((n_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}}, n_{1,n}, n_{n-1,1}, \dots, n_{n-1,n-2}\right) = \lambda\varphi(M) + \varphi(N).
\end{aligned}$$

Elle est bijective. Notons ψ l'application de $\mathfrak{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-2}$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi(M_1, m_{1,n}, m_{n-1,1}, \dots, m_{n-1,n-2}) = \begin{pmatrix}
 & & M_1 & & m_{1,n} \\
 & & & & \vdots \\
 & & & & \ell - \sum_{j=1}^{n-1} m_{n-2,j} \\
m_{n-1,1} & \dots & \dots & m_{n-1,n-1} & \ell - \sum_{j=1}^{n-1} m_{n-1,j} \\
\ell - \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,1} & \dots & \dots & \ell - \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,n-1} & m_{n,n}
\end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \ell = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \quad \text{et} \quad m_{n,n} = \ell - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\ell - \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j}\right).$$

Par construction, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-2}}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{MG(n)}$. Par ailleurs, ψ est linéaire (qui fonctionne comme pour φ). Il faut pour terminer vérifier que φ est à valeur dans $MG(n)$, ce qui est le cas par construction (la somme sur les lignes et les colonnes par construction valent ℓ, les diagonales aussi).

Finalement, φ est bijective et $\varphi^{-1} = \psi$: φ est un isomorphisme.

4. Par propriétés des dimensions,

$$\dim\left(\mathfrak{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-2}\right) = \dim(\mathfrak{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R})) + \dim(\mathbb{R}^{n-2}) = (n-2)(n-1) + (n-2) = n(n-2).$$

Finalement

$$\boxed{\dim(MG(n)) = n(n-2).}$$

Exercice 16

1. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. On rappelle que, d'après la formule du binôme de Newton :

$$(X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i.$$

Notons alors $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P(X+1)$. f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et le résultat précédent montre que

$$\forall\, j \in [\![0, n]\!], \quad f(X^j) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i = \sum_{i=0}^{j} a_{i+1,j+1} X^i.$$

On en déduit que, en notant $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathcal{R}[-n]$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \dots & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} = A.$$

2. Notons alors $g : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par $g(P) = P(X-1)$. g est également un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Ainsi, f est un isomorphisme, et $f^{-1} = g$. Ainsi,

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g).$$

Or,

$$\forall\, j \in [\![0,\, n]\!], \quad g(X^j) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i (-1)^{j-i}$$

et finalement

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n-1}{0} & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2} & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \binom{n-1}{n-1} & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}$$

Exercice 17

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Remarquons alors que, puisque $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $AX = 0$, c'est-à-dire

$$\forall\, i \in [\![1,\, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0.$$

Supposons que $x \neq 0$. Il existe donc au moins un x_i non nul. Notons i_0 l'indice de la plus grande valeur, en absolue, des x_i :

$$|x_{i_0}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

Par hypothèse, puisque $x \neq 0$, $|x_{i_0}| \neq 0$. Mais alors, puisque

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = 0$$

on a alors

$$a_{i_0,i_0} x_{i_0} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0,j} x_j$$

ou, en passant en valeur absolue et par inégalité triangulaire

$$\left|a_{i_0,i_0} x_{i_0}\right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} \left|a_{i_0,j} x_j\right|.$$

Divisons par $|x_{i_0}| \neq 0$:

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|}$$

ou encore, puisque $|x_{i_0}|$ est la plus grande valeur, pour tout j, $\frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leqslant 1$ et alors

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|.$$

Ceci est absurde car contredit le fait que la matrice soit à diagonale dominante.
Finalement, $\mathrm{Ker}(f) = 0$ et puisque f est un endomorphisme en dimension finie, f est bijective, et donc sa matrice associée A est inversible.

Corrigés des sujets de concours

Sujet 1

1.
a) f est linéaire : si $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \frac{1}{2}\left((\lambda P+Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P+Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)\\ &= \lambda\frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(Q\left(\frac{X}{2}\right)+Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

De plus, si P est de degré au plus 2, $f(P)$ également, donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$: c'est bien un endomorphisme.
b) On a

$$\begin{aligned} f(1) = 1, \quad f(X) &= \frac{1}{2}\left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2}\right) = \frac{X}{2} + \frac{1}{4}\\ f(X^2) &= \frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{4} + \frac{(X+1)^2}{4}\right) = \frac{X^2}{4} + \frac{X}{4} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ainsi, en notant $\mathcal{B}$ la base canonique :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

c) La matrice A est triangulaire, dont les termes sur la diagonale sont non nuls : la matrice A est inversible, et donc f est bijective.
2.
a) g est clairement linéaire, et à valeur dans $\mathbb{R}$ donc est une forme linéaire.
b) g est non nulle donc est surjective. Par exemple, on peut constater que si $a \in \mathbb{R}$, alors, en notant P_a le polynôme constant égal à a, $g(P_a) = a$.
c) Par définition :

$$P \in \mathrm{Ker}(g) \iff P(1) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], \quad P = (X-1)Q(X).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(g) &= \{(aX+b)(X-1), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\}\\ &= \{aX^2 + (b-a)X - b, \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \mathrm{Vect}(X^2 - X, X-1). \end{aligned}$$

La famille $(X^2 - X, X - 1)$ est libre car échelonnée en degré, donc forme une base du noyau. g n'est donc pas injective.
d) D'après ce qui précède $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 2$. Autre possibilité : g est une forme linéaire non nulle donc, d'après le théorème du rang (on est en dimension finie),

$$\dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \mathrm{rg}(g) = 3 - 1 = 2.$$

3.
a) Par le calcul, $AB = BD$.
b) B est triangulaire supérieure dont tous les termes sur la diagonale sont non nuls : elle est inversible. Par la méthode du pivot :

$$B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La première question donne $A = BDB^{-1}$, puisque B est inversible. Par récurrence rapide, on en déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A = BD^nB^{-1}$. D étant diagonale,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.$$

Par calcul

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}}$$

4. Soit $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Notons X la matrice représentant P dans la base $\mathcal{B}$: $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Mais alors, $f^n(P)$ est représenté dans la base $\mathcal{B}$ par

$$\begin{aligned} A^nX &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + b\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\times 4^n}\right) \\ \frac{b}{2^n} + c\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) \\ \frac{c}{4^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En décodant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f^n(P) = a + b\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\times 4^n}\right) + \left(\frac{b}{2^n} + c\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)\right)X + \frac{c}{4^n}X^2.$$

5. D'après ce qui précède, si $P = a + bX + cX^2$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ g(f^n(P)) = a + b\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\times 4^n}\right) + \frac{b}{2^n} + c\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) + \frac{c}{4^n}.$$

Par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} g(f^n(P)) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}.$$

Or
$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 a+bt+ct^2 = \left[at+\frac{bt}{2}+\frac{ct}{3}\right]_0^1 = a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}.$$
Finalement
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} g(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Sujet 2

1. Remarquons tout d'abord que $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Montrons la liberté de la famille, ce qui suffira pour conclure. Soient x, y, z, t quatre réels tels que $xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4 = 0$. Alors
$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y-z-t=0 \\ x-y+z-t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+\ y+\ z+\ t=0 \\ 2z+2t=0 \\ 2y\qquad +2t=0 \\ 2y+2z\qquad =0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x+\ y+\ z+\ t=0 \\ 2y\qquad +2t=0 \\ 2z+2t=0 \\ 2z-2t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{cases}.$$
La famille est libre et est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

2.

a) f est un endomorphisme qui transforme une base de $\mathbb{R}^4$ (la base canonique) en une base de $\mathbb{R}^4$ ($\mathcal{B}$) : c'est donc un automorphisme. Dans la base canonique :
$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
b) Après calcul,
$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_4.$$
Ainsi, $f^2 = 4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$.

c) D'après ce qui précède, $B^2 = 4I_4$ donc $B \times \left(\frac{1}{4}B\right) = I_4$. Ainsi,
$$B^{-1} = \frac{1}{4}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.

a) Après calcul,
$$X_{n+1} = AX_n \text{ avec } A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
b) Remarquons, d'après le résultat précédent que
$$A^2 = \frac{1}{16}B^2 = \frac{1}{4}I_4.$$

Par récurrence rapide :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad A^{2p} = \frac{1}{4^p} I_4 \quad \text{et} \quad A^{2p+1} = \frac{1}{4^p} A$$

et à nouveau par récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

Finalement, $\forall\, p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
x_{2p} &= \frac{1}{4^p} x_0 \quad \text{et} \quad x_{2p+1} = \frac{1}{4^p}\left(x_0 + y_0 + z_0 + t_0\right)\\
y_{2p} &= \frac{1}{4^p} y_0 \quad \text{et} \quad y_{2p+1} = \frac{1}{4^p}\left(x_0 + y_0 - z_0 - t_0\right)\\
z_{2p} &= \frac{1}{4^p} z_0 \quad \text{et} \quad z_{2p+1} = \frac{1}{4^p}\left(x_0 - y_0 + z_0 - t_0\right)\\
t_{2p} &= \frac{1}{4^p} t_0 \quad \text{et} \quad t_{2p+1} = \frac{1}{4^p}\left(x_0 - y_0 - z_0 + t_0\right)
\end{aligned}$$

Toutes ces suites tendent vers 0 lorsque p tend vers l'infini. Puisque (x_{2p}) et (x_{2p+1}) tendent vers 0, on en déduit par théorème que (x_n) tend vers 0, et ceci est valable pour les quatre suites.

4. a) $(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ si et seulement si

$$\begin{cases} -x + y + z + t = 0 \\ x - y - z - t = 0 \\ x - y - z - t = 0 \\ x - y - z - t = 0 \end{cases} \iff \left\{ x = y + z + t \right.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) &= \left\{(y + z + t, y, z, t), \quad (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\right\}\\
&= \operatorname{Vect}\left((1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1)\right).
\end{aligned}$$

Ces vecteurs sont libre. En effet :

$\operatorname{rg}((1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)) = \operatorname{rg}((1,1,0,0),(0,-1,1,0),(0,-1,0,1)) = \operatorname{rg}((1,1,0,0),(0,-1,1,0),(0,0,-1$

De même, $(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3x + y + z + t = 0 \\ x + 3y - z - t = 0 \\ x - y + 3z - t = 0 \\ x - y - z + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y - z - t = 0 \\ x - y + 3z - t = 0 \\ x - y - z + 3t = 0 \\ 3x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3y - z - t = 0 \\ -4y + 4z = 0 \\ -4y + 4t = 0 \\ -8y + 4z + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3y - z - t = 0 \\ -4y + 4z = 0 \\ 4z - 4t = 0 \\ -4z + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \\ t = t \end{cases}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) = \mathrm{Vect}((-1, 1, 1, 1)).$$

Remarquons que $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})) + \dim(\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})) = 3 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Montrons alors que la somme est directe.
Soit $u \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) \cap \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$. Alors

$$(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})(u) = 0 \quad \text{et} \quad (f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})(u) = 0$$

soit

$$f(u) - 2u = 0 \quad \text{et} \quad f(u) + 2u = 0$$

ou encore, en soustrayant : $4u = 0$ et donc $u = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) \cap \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) = \{0\}$. La somme est directe, et la somme des dimensions est égale à la dimension de l'espace cherchée : on peut en déduire que $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.
b) Puisque $E \oplus F = \mathbb{R}^4$, prenons (e_1, e_2, e_3) une base de E, et (e_4) une base de F. Par concaténation, et la somme étant directe (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. Or :

$$\begin{aligned}
e_1 \in E &\iff (f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})(e_1) = 0 \iff f(e_1) = 2e_1 \\
e_2 \in E &\iff (f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})(e_2) = 0 \iff f(e_2) = 2e_2 \\
e_3 \in E &\iff (f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})(e_3) = 0 \iff f(e_3) = 2e_3 \\
e_4 \in E &\iff (f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})(e_4) = 0 \iff f(e_4) = -2e_4.
\end{aligned}$$

Ainsi, dans la base $\mathcal{D} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, la matrice de f est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{D}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$