26

Chapitre

Espaces vectoriels de dimension finie

Résumé

Après avoir étudié les espaces vectoriels et applications linéaires dans un cadre général, nous allons dans ce chapitre nous intéresser au cas où les espaces vectoriels admettent des bases finies : ils seront alors de dimension finie. Dans ce cas, nous disposons de nombreux résultats permettant de démontrer des propriétés de manière plus efficace.

Plan du cours

> *« Il y a trois dimensions de l'amour : la profondeur, la durée et la confiance. »*
>
> André Maurois (1885-1967).

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

- Concernant les espaces vectoriels de dimension finie :
  - ① Savoir justifier qu'un espace vectoriel est de dimension fini .... ☐
  - ② Connaître les théorèmes de la base incomplète et de la base extraite .... ☐
  - ③ Connaître les dimensions des espaces vectoriels de référence .... ☐
  - ④ Savoir justifier qu'en dimension finie une famille est une base .... ☐
  - ⑤ Connaître les propriétés du rang d'une famille de vecteurs .... ☐
  - ⑥ Connaître les propriétés de la dimension (somme, somme directe) .... ☐
  - ⑦ Savoir déterminer un supplémentaire en dimension finie .... ☐
- Concernant les applications linéaires en dimension finie :
  - ⑧ Connaître la définition du rang .... ☐
  - ⑨ Savoir justifier qu'une application est un isomorphisme .... ☐
  - ⑩ Connaître les propriétés du rang .... ☐
  - ⑪ Connaître et savoir appliqué le théorème du rang .... ☐
  - ⑫ Savoir montrer qu'une application est injective, surjective ou bijetive avec le rang . ☐
- Concernant les hyperplans :
  - ⑬ Connaître la définition d'un hyperplan .... ☐
  - ⑭ Savoir déterminer une équation d'un hyperplan .... ☐

I. Des résultats préliminaires

1. Rappels et compléments sur les familles

Rappel

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteur de E.

- La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est dite **génératrice** si et seulement si $(e_1, \cdots, e_n)$ engendre E, c'est-à-dire si
$$\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = E$$
- La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est dite **libre** si et seulement si
$$\forall\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$
- La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une **base** de E si et seulement si la famille est libre et génératrice.

Exercice 26.1

Parmi les familles suivantes, déterminer les familles libres, génératrices dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

1. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.
3. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

Solution

Concernant la liberté, on part de $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et on résout le système. S'il est de Cramer, la famille est libre, sinon, elle est liée. On obtient que les première et deuxième familles sont libres, mais la troisième est liée ; par exemple
$$-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
Montrer qu'une famille est génératrice, on résout $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Si ce système a au moins une solution pour tout (x, y, z) fixé, la famille est génératrice. Si ce système n'a pas de solution, on exhibe un contre-exemple et la famille n'est pas génératrice. Ainsi, la première est génératrice, mais la deuxième et la troisième ne le sont pas. Par exemple, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ n'est atteint ni avec la deuxième matrice, ni avec la troisième.
Bilan : la première famille est donc une base, la deuxième est libre mais pas génératrice et la dernière est ni libre ni génératrice.

Nous allons rappeler également des propriétés des familles génératrices et libres, qui nous serviront pour définir la notion de dimension d'un espace vectoriel.

Lemme 26.1. Cas des familles génératrices

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice.

- Si $y \in E$, alors $(x_1, \dots, x_n, y)$ est également génératrice.
- S'il existe $\ell \in [\![1,\, n]\!]$ tel que x_ℓ s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$, alors la famille $\mathcal{F}$ privée de x_ℓ est également génératrice.

Démonstration

- Soit $x \in E$. $\mathcal{F}$ étant génératrice, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Mais alors,
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + O \times y$$
et finalement $(x_1, \dots, x_n, y)$ engendre E.
- Quitte à renommer les vecteurs, on peut supposer que $\ell = n$. Puisque $x_n \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ tels que $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$.

  Soit alors $x \in E$. Il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$. Mais alors
$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i + \mu_n \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i}_{=x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_i + \mu_n \lambda_i) x_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Lemme 26.2. Cas des familles libres

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille libre.

- Si $n \geqslant 2$, si on retire un vecteur de $\mathcal{F}$, la famille est encore libre.
- Si $y \in E$ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire $y \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$), alors $(x_1, \dots, x_n, y)$ est encore libre.

Démonstration

- On se donne $\ell \in [\![1,\, n]\!]$. Notons $\mathcal{G}$ la famille $\mathcal{F}$ à laquelle on a retiré le vecteur x_ℓ et montrons que $\mathcal{G}$ est libre. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-1}, \lambda_{\ell+1}, \dots,\ \lambda_n)$ tels que
$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{\ell-1} x_{\ell-1} + \lambda_{\ell+1} x_{\ell+1} + \dots + \lambda_n x_n.$$
En posant $\lambda_\ell = 0$, on a donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. La famille $\mathcal{F}$ étant libre, pour tout i, $\lambda_i = 0$ et finalement, $\mathcal{G}$ est également libre.
- Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} y = 0$. Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, on peut écrire
$$y = -\frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{n+1}} x_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$
ce qui est absurde par hypothèse. Donc $\lambda_{n+1} = 0$. Mais alors, par liberté de la famille $\mathcal{F}$:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \implies \forall\, i \in [\![1,\, n]\!],\ \lambda_i = 0.$$
Ainsi, $(x_1 \dots, x_n, y)$ est libre.

2. Théorème de l'échange

Nous allons énoncer un théorème important concernant des familles libres et génératrices, nous permettant de créer des familles génératrices « intéressantes ».

Théorème 26.3. Théorème de l'échange

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne deux familles $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ et $\mathcal{G} = (y_1, \dots, y_n)$ de E. On suppose que $\mathcal{F}$ est libre, et $\mathcal{G}$ est génératrice.
Alors $p \leqslant n$, et si on remplace p vecteurs quelconque de la famille $\mathcal{G}$ par les p vecteurs de la famille $\mathcal{F}$, la famille obtenue est une famille génératrice de E.

Démonstration

$\mathcal{G}$ étant génératrice de E, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$. Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ alors $x_1 = 0$ ce qui est impossible car la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre. Quitte à renommer les vecteurs, on peut donc supposer que $\lambda_1 \neq 0$. Alors

$$y_1 = \frac{1}{\lambda_1} x_1 - \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i y_i \in \mathrm{Vect}(x_1, y_2, \dots, y_n).$$

Puisque $(y_1, \dots, y_n)$ engendre E, $(x_1, y_1, \dots, y_n)$ également (d'après le lemme) mais alors $(x_1, y_2, \dots, y_n)$ également (deuxième piont du lemme). On a ainsi remplacé un vecteur de $\mathcal{G}$ par x_1.
On réitère ce processus. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $k \leqslant \min(p-1, n-1)$. On suppose que l'on a remplacé $y_1, \dots, y_k$ par $x_1, \dots, x_k$ avec $(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n)$ famille génératrice de E (éventuellement en permutant des vecteurs). Il existe alors $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i + \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j y_j.$$

$(\mu_{k+1}, \dots, \mu_n) \neq (0, \dots, 0)$ car sinon $x_{k+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ et la famille ne serait pas libre. Quitte à permuter des vecteurs de la famille $\mathcal{G}$, on peut écrire

$$y_{k+1} = \frac{1}{\mu_{k+1}} \left(x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i - \sum_{j=k+2}^{n} \mu_j y_j \right) \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n).$$

Ainsi, toujours d'après le lemme, $(x_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+1}, \dots, y_n)$ engendre E (on a ajouté un vecteur à une famille génératrice), et donc $(x_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n)$ (on retire un vecteur combinaison linéaire des autres).
Supposons alors que $p > n$. On répétant ce processus n fois, on obtient que $(x_1, \dots, x_n)$ engendre E. Mais alors $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, ce qui est absurde puisque $\mathcal{F}$ est libre. Donc $p \leqslant n$. En répétant p fois ce processus, on a bien remplacé p vecteurs de la famille $\mathcal{G}$ par les p vecteurs de la famille $\mathcal{F}$, en obtenant une nouvelle famille génératrice.

On en déduit un premier résultat :

Proposition 26.4.

Soit E un espace vectoriel, engendré par n vecteurs. Alors toute famille de $n+1$ vecteurs de E est nécessairement liée.

Démonstration

Si E est engendré par n vecteurs, il existe une famille $\mathcal{G}$ génératrice composée de n vecteurs.
Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E composée de p vecteurs, d'après le théorème de l'échange,

$p \leqslant n$. Ainsi, par contraposée, si la famille est composée de $n+1$ vecteurs, elle est liée.

Exemple 26.2

Soit $\mathcal{F}$ la famille $((1,1),(1,2),(3,1))$. Justifier que la famille $\mathcal{F}$ est liée.

Savoir Faire

Solution

Puisque $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((1,0),(0,1))$, toute famille composée de strictement plus de 2 vecteurs est liée ; ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est liée.

II. Espaces vectoriels de dimension finie

1. Définition

Définition 26.1. Dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice de E ayant un nombre fini d'éléments.

Exemple 26.3

Par exemple, $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie, puisque la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice.

Remarque

On dit que E est de dimension infinie sur $\mathbb{R}$ s'il n'existe pas de famille génératrice finie de E, c'est-à-dire si toute famille génératrice de E est infinie.

Exercice 26.4

Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Solution

Supposons que $\mathbb{R}[X]$ soit de dimension finie. Il existe une famille génératrice finie $(P_1,\dots,P_n)$. Notons $d = \max(\deg(P_1),\dots,\deg(P_n))$. Alors nécessairement

$$X^{d+1} \notin \text{Vect}(P_1,\dots,P_n)$$

ce qui est absurde si la famille est génératrice. Donc $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

2. Existence d'une base en dimension finie

Un premier résultat important sur les espaces de dimension finie : ils admettent nécessairement une base :

Théorème 26.5. Existence d'une base en dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{F}$ une famille libre de E, et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E, telles que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E vérifiant $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

En particulier, E admet au moins une base.

Démonstration

Si $\mathcal{G}$ ne contient que le vecteur nul, alors $E = \{0\}$. La famille $\mathcal{L}$ est donc forcément vide et donc on prend $\mathcal{B} = \mathcal{L}$ qui est bien une base de E.

Supposons désormais que $\mathcal{G}$ contient au moins un vecteur non nul. La sous-famille de $\mathcal{G}$ composée uniquement de ce vecteur est libre. On peut donc supposer que $\mathcal{L}$ est composée de $p \geqslant 1$ vecteurs.

L'ensemble

$$A = \{\text{card}(\mathcal{L}),\ \mathcal{F} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{G}, \mathcal{L} \text{ est une famille libre } \}$$

est donc une partie de $\mathbb{N}$ non vide (elle contient $\text{card}(\mathcal{F}) = p$ puisque $\mathcal{L} = \mathcal{F}$ est une famille libre vérifiant $\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$) et majorée par n (toute famille libre $\mathcal{L}$ qui vérifie $\mathcal{F} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ contient au plus n vecteurs).

Elle admet donc un plus grand élément $q \in [\![p, n]\!]$. Donnons-nous alors une famille libre $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ et $\text{card}(\mathcal{B}) = q$. Montrons que cette famille est une base.

Elle est libre par construction ; il suffit de montrer qu'elle est génératrice. Notons $\mathcal{B} = \big(e_1, \dots, e_q\big)$. Comme $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$, notons $\mathcal{G} = \big(e_1, \dots, e_q, e_{q+1}, \dots, e_n\big)$.

- Si $q = n$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{G}$ est génératrice.
- Supposons donc que $q < n$. Soit $k \in [\![q+1, n]\!]$. La famille $\big(e_1, \dots, e_q, e_k\big)$ est liée (car sinon ce serait une famille libre $\mathcal{L}$ à $q+1$ éléments vérifiant $\mathcal{F} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ et cela contredirait la maximalité de q) donc il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_q, \lambda_k$ non tous nuls tels que
$$0 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_q e_q + \lambda_k e_k$$
On a $\lambda_k \neq 0$ (sinon la liberté de $\mathcal{B}$ entraîne que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_q = 0$ ce qui est exclu). On a donc
$$e_k = -\frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=1}^{q} \lambda_i e_i \in \text{Vect}(\mathcal{B})$$
On vient de montrer que les vecteurs $e_{q+1}, \dots, e_n$ s'écrivent comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Puisque tout vecteur x de E est combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$, cela implique que x est encore combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ (d'après le deuxième point du lemme sur les familles génératrices). Ainsi $\mathcal{B}$ est une famille génératrice et donc une base de E.

On en déduit alors deux théorèmes fondamentaux en dimension finie :

Théorème 26.6. Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toute famille libre de E peut être complétée en base de E.

Démonstration

E étant de dimension finie, elle admet une famille génératrice finie $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{F}$ une famille libre, et $\mathcal{G}'$ la famille composée de la concaténation de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Cette nouvelle famille est génératrice (d'après le lemme) et $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}'$. D'après le théorème précédent, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}'$. Les vecteurs éventuellement ajoutés proviennent de la famille $\mathcal{G}'$, et donc de $\mathcal{G}$.

Théorème 26.7. Théorème de la base extraite

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors, de toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Démonstration

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Soit $\mathcal{F} = \varnothing$ une famille libre, telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. D'après le théorème, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$: $\mathcal{B}$ est extraite de $\mathcal{G}$.

3. Dimension d'un espace vectoriel

Un résultat va nous permettre de définir la notion de dimension :

Proposition 26.8. Cardinal d'une base en dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E admettent le même nombre de vecteurs.

Démonstration

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E, de cardinal respectif n et p.

- $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{C}$ est génératrice ; d'après le théorème de l'échange, $n \leqslant p$.
- $\mathcal{C}$ est libre et $\mathcal{B}$ est génératrice ; d'après le théorème de l'échange, $p \leqslant n$.

Ainsi, $n = p$.

Définition 26.2. Dimension d'un espace vectoriel

On appelle **dimension** d'un espace vectoriel de dimension finie le cardinal d'une des bases de E. On le note $\dim_{\mathbb{R}}(E)$, ou plus simplement $\dim(E)$.

Commençons par donner la dimension d'espaces usuels.

Proposition 26.9. Dimension des espaces vectoriels usuels

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n, \quad \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 \quad \text{et} \quad \dim(\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p.$$

Démonstration

On a vu les bases canoniques de ces trois espaces

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}((1,0,\dots),\dots,(0,\dots,0,1)), \quad \mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^n)$$

et

$$\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left((E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \right).$$

Un seul espace est de dimension nulle : l'espace vectoriel réduit au vecteur nul :

Proposition 26.10.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Alors $\dim(E) = 0$ si et seulement si $E = \{0\}$.

Démonstration

Si $E = \{0\}$, E admet comme base $\varnothing$, de cardinal 0. Ainsi, $\dim(E) = 0$.

Réciproquement, si $E \neq \{0\}$, il existe un vecteur non nul x dans E et donc (x) est une famille libre. Mais alors $\dim(E) \geqslant 1$ et $\dim(E) \neq 0$. Par contraposée, si $\dim(E) = 0$ alors $E = \{0\}$.

On dispose enfin d'un théorème permettant de prouver rapidement qu'une famille est une base :

Théorème 26.11.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors

- toute famille libre de E a au plus n éléments ;
- toute famille génératrice a au moins n éléments ;
- si $\mathcal{F}$ est une famille de E de p éléments, alors

$$\mathcal{F} \text{ est une base } \iff \mathcal{F} \text{ est libre et } p = n \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice et } p = n.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E.

- Si $\mathcal{F}$ est libre, d'après le théorème de l'échange avec $\mathcal{B}$ qui est génératrice, on en déduit que $\operatorname{card}(\mathcal{F}) \leqslant \operatorname{card}(\mathcal{B})$, soit $p \leqslant n$.
- Si $\mathcal{F}$ est génératrice, d'après le théorème de l'échange avec $\mathcal{B}$ qui est libre, on en déduit que $\operatorname{card}(\mathcal{B}) \leqslant \operatorname{card}(\mathcal{F})$, soit $n \leqslant p$.
- Si $\mathcal{F}$ est une base, elle est libre et génératrice, donc d'après ce qui précède, $n = p$. Réciproquement :
  - Si $\mathcal{F}$ est libre et $n = p$, le théorème de la base incomplète garantit qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. Or $n = p$ donc $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = \operatorname{card}(\mathcal{B})$: ainsi $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ est une base.
  - Si $\mathcal{F}$ est génératrice et $n = p$, le théorème de la base extraite garantit qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Or $n = p$ donc $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = \operatorname{card}(\mathcal{F})$: ainsi $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ est une base.

Méthode

Quand on est dans un espace de dimension finie, pour montrer qu'une famille est une base, on démontre

- soit que la famille est libre et de cardinal égal à la dimension ;
- soit que la famille est génératrice et de cardinal égal à la dimension.

Savoir Faire

Exemple 26.5

Montrer que la famille $(1, X-1, X^2-1, X^3-1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution

La famille est échelonnée en degré, et ne contient pas de polynôme nul, donc est libre. De plus, elle est composée de 4 vecteurs, et $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$. Ainsi, la famille est une base.

Remarque

En généralisant, si $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille vérifiant pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_i) = i$, alors la famille forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, elle est échelonnée en degré et sans polynôme nul, donc libre, et de bon cardinal.

III. Sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie

1. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 26.12.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors

- F est de dimension finie ;
- $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
- $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$

Démonstration

Si $F = \{0\}$, alors $\dim(F) = 0 \leqslant \dim(E)$ et $F = E$ si et seulement si $E = \{0\} = F$.

Si $F \neq \{0\}$, il existe $x_1 \in F$ non nul. La famille $\mathcal{F}_1 = (x_1)$ est donc libre. Si elle est génératrice, elle forme une base de F et $\dim(F) = 1$.

Si elle n'est pas génératrice, il existe $x_2 \in F$ tel que $x_2 \notin \mathrm{Vect}(x_1)$. Mais alors la famille $\mathcal{F}_2 = (x_1, x_2)$ est libre. Si elle est génératrice, elle forme une base de F et $\dim(F) = 2$.

On réitère ce processus. Si la famille $\mathcal{F}_k = (x_1, \dots, x_k)$, libre, n'est pas génératrice, il existe $x_{k+1} \in F$ tel que $x_{k+1} \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$. Mais alors, la famille $\mathcal{F}_{k+1} = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ est libre.

En réitérant ce processus, cela se terminera nécessairement puisque la famille libre $\mathcal{F}_k$ que l'on construit est également libre dans E, qui est de dimension finie n : au maximum, en n étape, on aura terminé. Si non, on construirait une famille de $n+1$ vecteurs libres dans un espace, E, de dimension n, ce qui est absurde.

Par ailleurs, par construction, $\dim(F) \leqslant \dim(E)$, et si $\dim(F) = \dim(E)$, la famille construite est une base de E et donc $F = E$.

Méthode

Ainsi, pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F est l'espace E tout entier, il peut être judicieux de montrer que $\dim(F) = \dim(E)$.

Exemple 26.6

Soit $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Montrer que $E = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Solution

On peut voir que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, il s'agit d'une base de E et $\dim(E) = 2$. Or $E \subset \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\dim(E) = \dim(\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$. Ainsi, $E = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Corollaire 26.13. Égalité de deux sous-espaces vectoriels

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F = G$ si et seulement si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer le résultat précédent en constatant que F est un sous-espace vectoriel de G, et G est de dimension finie.

2. Rang d'une famille de vecteurs

Définition 26.3.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ la dimension de l'espace vectoriel $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. On le note $\text{rg}(e_1, \cdots, e_p)$.

Remarque

Le rang d'une famille existe puisque l'espace vectoriel $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ admet une famille génératrice finie, donc est de dimension finie.

Propriété 26.14.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre si et seulement si $\text{rg}(e_1, \cdots, e_p) = p$.

De plus, si E est de dimension finie n, $(e_1, \cdots, e_p)$ est génératrice si et seulement si $\text{rg}(e_1, \cdots, e_p) = n$, et est une base si et seulement si $\text{rg}(e_1, \cdots, e_p) = n = p$.

Démonstration

$(e_1, \cdots, e_p)$ est libre si et seulement si $(e_1, \cdots, e_p)$ forme une base de $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. Ainsi, si $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre, alors $\text{rg}(e_1, \cdots, e_p) = p$. Réciproquement, si $\text{rg}(e_1, \cdots, e_p) = p$, alors $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille libre, sinon la dimension de $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p) < p$.
Le cas de la famille génératrice se traite de la même manière.

Remarque

Si $(e_1, \cdots, e_k)$ est une sous famille libre de $(e_1, \cdots, e_p)$, alors $\text{rg}(e_1, \cdots, e_p) \geqslant k$. Si $(e_1, \cdots, e_k)$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$, alors $\text{rg}(e_1, \cdots, e_n) \leqslant k$.

De plus, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille de vecteurs de E, espace de dimension finie, alors

$$\text{rg}(e_1, \dots, e_p) \leqslant \min\left(p, \dim(E)\right).$$

Nous avons vu, dans un chapitre précédent, que si on effectue une opérations élémentaire sur une famille de vecteurs (échanger deux vecteurs, multiplier l'un des vecteurs par un scalaire non nul ou ajouter à l'un des vecteurs un autre vecteur de la famille multiplié par un scalaire), alors le sous-espace qu'elle engendre est inchangé. Cela nous permet d'en déduire le résultat suivant :

Proposition 26.15.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Soient $k \in [\![1, p]\!]$, et $(f_1, \dots, f_k)$ une famille obtenue en appliquant une succession finie d'opérations élémentaires sur $(e_1, \dots, e_p)$, et en enlevant des vecteurs nuls ou qui sont des combinaisons linéaires des autres. Alors

$$\text{rg}(f_1, \dots, f_k) = \text{rg}(e_1, \dots, e_p).$$

On en déduit alors le résultat :

Corollaire 26.16.

Le rang d'une famille finie de vecteurs est le maximum des cardinaux de ses sous familles libres.

Méthode

Quand on dispose d'une famille de vecteurs, pour en déterminer le rang, on enlève les vecteurs nuls et combinaison linéaire d'autres vecteurs, jusqu'à obtenir une famille libre.

Exemple 26.7

Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = ((1,2,3),(1,-1,1),(-1,4,1),(2,1,4))$.

Solution

Tout d'abord, $\text{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \min(\dim(\mathbb{R}^3),4) = 3$. On note (x_1,x_2,x_3,x_4) les quatre vecteurs. On constate alors que

$$\begin{aligned} x_3 = x_1 - 2x_2 &\text{ donc } \text{rg}(x_1,x_2,x_3,x_4) = rg(x_1,x_2,x_4) \\ x_4 = x_1 + x_2. &\text{ donc } \text{rg}(x_1,x_2,x_4) = \text{rg}(x_1,x_2). \end{aligned}$$

La famille (x_1,x_2) est libre, car les vecteurs sont non colinéaires, donc $\text{rg}(x_1,x_2) = 2$.
Finalement, $\text{rg}(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2$.
On peut également procéder par un pivot, pour simplifier de proche en proche :

$$\begin{aligned} \text{rg}((1,2,3),(1,-1,1),(-1,4,1),(2,1,4)) &= \text{rg}((1,2,3),(0,-3,-2),(0,6,4),(0,-3,-2)) \text{ en utilisant } x_1 \\ &= \text{rg}((1,2,3),(0,-3,-2),(0,0,0),(0,0,0)) \\ &= \text{rg}((1,2,3),(0,-3,-2)) = 2. \end{aligned}$$

où on a enlevé les vecteurs nuls. Les vecteurs obtenus forment une famille libre ; ils sont dits ”échelonnés”.

3. Somme d'un espace vectoriel de dimension finie

Commençons par un premier résultat :

Proposition 26.17.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et F et G deux supplémentaires de E. Alors

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E).$$

Démonstration

Cela découle de la concaténation des bases de supplémentaires.

En dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet au moins un supplémentaire :

Théorème 26.18.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $F \oplus G = E$. De plus,

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

Réciproquement, si F et G sont en somme directe, et si $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ alors F ...

et G sont supplémentaires dans E. Connaissant $(e_1, \cdots, e_k)$ une base de F, et $(f_1, \cdots, f_{n-k})$ une base de G, alors $(e_1, \cdots, e_k, f_1, \cdots, f_{n-k})$ est une base de E.

Démonstration

Démontrons le premier résultat. F est un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie. Donc F est de dimension finie et admet donc une base. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant libre dans E, on peut la compléter en une base de E : $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Par définition, $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, et notons $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
Montrons que F et G sont supplémentaires dans E. Déjà, puisque la famille $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est libre (car une partie d'une base de E), on sait que $\dim(G) = n-p$ et donc $\dim(F)+\dim(G) = p + (n-p) = n = \dim(E)$. Il suffit donc simplement de montrer que $F \cap G = \{0\}$ pour en déduire que F et G sont supplémentaires.
Soit $x \in F \cap G$. Par définition, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Ainsi, en soustrayant : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i - \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, par liberté de la famille : $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = -\lambda_{p+1} = \dots = -\lambda_n = 0$: finalement $x = 0$ et $F \cap G = \{0\}$.
Réciproquement, si $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F)+\dim(G) = \dim(E)$, prenons $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F et $(f_1, \dots, f_{n-k})$ une base de F. Il faut montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_{n-k})$ forme une base de E pour conclure que $F + G = E$ et donc $F \oplus G = E$. Puisque $\mathcal{B}$ est composée de $n = \dim(E)$ éléments, il suffit de montrer la liberté de la famille. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_{n-k})$ des réels tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_k e_k + \sum_{i=1}^{n-k} \mu_k f_k = 0.$$

Mais alors

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_k e_k}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{n-k} \mu_k f_k}_{\in G} \in F \cap G.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_k e_k = -\sum_{i=1}^{n-k} \mu_k f_k = 0$, et par liberté des familles, $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \mu_1 = \dots = \mu_{n-k} = 0$: la famille est bien libre, et forme donc une base de E.

On peut généraliser à la somme directe de n sous-espaces vectoriels :

Théorème 26.19.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E vérifiant $F_1 \oplus \dots \oplus F_n = E$. Alors

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i).$$

De plus, si on dispose d'une base $\mathcal{B}_i$ de chacun des F_i, alors la concaténation de ces n bases forme une base de E. On dit qu'il s'agit d'**une base adaptée à la décomposition** $F_1 \oplus \dots \oplus F_n = E$.

Dans le cas où la somme n'est pas directe, on dispose d'une formule permettant de déterminer la dimension de la somme :

Proposition 26.20. Formule de Grassmann

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration

On part d'une base de $F \cap G$, qui est de dimension finie. On la note $(e_1, \dots, e_k)$ avec $\dim(F \cap G) = k$. On la complète en base de F : $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_p)$ ($\dim(F) = p$) et en base de G : $(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_q)$ (avec $\dim(G) = q$). Montrons que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_p, f_{k+1}, \dots, f_q)$ forme une base de $F + G$.

- Liberté. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_{k+1}, \dots, \mu_q)$ des réels tels que
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=k+1}^{q} \mu_i f_i = 0.$$
On peut réécrire
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{i=k+1}^{q} \mu_i f_i}_{\in G} \in F \cap G.$$
Ainsi, il existe réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ tels que
$$-\sum_{i=k+1}^{q} \mu_i f_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=k+1}^{q} \mu_i f_i.$$
Puisque $(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_q)$ forme une base de G, elle est libre et finalement $\mu_{k+1} = \dots = \mu_q = 0$. Par un raisonnement similaire, $\lambda_{k+1} + \dots + \lambda_p = 0$ et finalement
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0.$$
Par liberté de $(e_1, \dots, e_k)$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ et la famille $\mathcal{B}$ est libre.
- Génératrice. $\mathcal{B}$ est clairement génératrice : si $x \in F + G$, il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. Par définition des bases, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_q)$ des réels tels que
$$y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad z = \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_+ \sum_{i=k+1}^{q} \mu_i f_i$$
et finalement
$$x = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) e_i + \sum_{i=k+1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=k+1}^{q} \lambda_i f_i \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}).$$

Puisque $\mathcal{B}$ forme une base de $F + G$, on peut en déduire que
$$\dim(F+G) = p + (q-k) = p + q - k = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Les résultats précédents permettent d'en déduire la proposition suivante :

Proposition 26.21.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-esapces vectoriels de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- $E = F \oplus G$,
- $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0\}$,
- $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F + G = E$.

Démonstration

L'équivalence des deux premiers points a déjà été traitée dans la proposition 26.18. Remarquons également que 2 et 3 sont équivalentes. En effet, d'après la formule de Grassmann, si $F+G=E$, alors $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$ implique $\dim(F\cap G)=0$, et donc $F\cap G=\{0\}$.

Et si $F\cap G=\{0\}$, la formule de Grassmann amène $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$ et par inclusion et égalité des dimensions, $F+G=E$.

Méthode

En dimension finie, pour démontrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E, on peut alors raisonner ainsi :

- On montre que la somme est directe : $F\cap G=\{0\}$.
- On montre ensuite que $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$.

On conclut alors que F et G sont supplémentaires dans E.

Savoir Faire

Exercice 26.8

Soient $E=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $F=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Solution

Constatons que la famille $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est libre (car non nulle), ainsi que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ (vecteurs non colinéaires). Ainsi, $\dim(E)=1$ et $\dim(F)=2$. Enfin, soit $u\in E\cap F$. Alors, il existe x tel que $u=\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}$, et y,z vérifiant $u=y\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{pmatrix}y+2z\\z\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}\Leftrightarrow z=y=x=0$$

Ainsi, $u=0$ et $E\cap F=\{0\}$. La somme $E+F$ est donc directe, et $\dim(E)+\dim(F)=3=\dim(\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$: E et F sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Méthode

En dimension finie n, pour déterminer un supplémentaire de F :

- On détermine la dimension p et une base $(e_1,\dots,e_p)$ de F;
- On cherche alors $n-p$ vecteurs $(e_{p+1},\dots,e_n)$ de E qui complètent la base de F en une base de E (en général, on regarde du côté de la base canonique)
- On conclut alors qu'un supplémentaire de F est $\text{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$.

Savoir Faire

Exercice 26.9

Déterminer un supplémentaire, dans $\mathbb{R}_4[X]$, de $F=\{P\in\mathbb{R}_4[X],\quad P(1)=P'(1)=0\}$.

Solution

Tout d'abord, F est bien un s.e.v. de $\mathbb{R}_4[X]$. Cherchons une base de F : $P \in F$ si et seulement si 1 est racine (au moins) double de P, c'est-à-dire si et seulement si $X^2 \mid P$. Puisque les polynômes de F sont de degré 4 :

$$\begin{aligned} F &= \{X^2(aX^2 + bX + c), \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{ax^4 + bx^3 + cX^2, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(X^2, X^3, X^4). \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B} = (X^2, X^3, X^4)$ est génératrice de F, et étant échelonnée en degré, est libre : elle forme une base de F.

Complétons $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}_4[X]$; en reconnaissant la base canonique, $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ forme une base de $\mathbb{R}_4[X]$, et finalement un supplémentaire de F est

$$\mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X].$$

Par récurrence, on en déduit également le corollaire suivant :

Corollaire 26.22.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors $F_1 + \dots + F_n$ est de dimension finie et

$$\dim(F_1 + \dots + F_n) \leqslant \dim(F_1) + \dots + \dim(F_n),$$

avec égalité si et seulement si la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe.

IV. Dimension finie et application linéaire

1. Applications linéaires en dimension finie

En dimension finie, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ.

Proposition 26.23.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Méthode

Pour déterminer l'image d'une application linéaire, on prend donc une base de l'espace de départ, et on détermine l'image de cette base par une application linéaire. On détermine ensuite une base de l'image en vérifiant la liberté éventuelle de la famille obtenue.

Savoir Faire

Exercice 26.10

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(a,b,c) = (a+b+c, a+c, a-b+c)$. Démontrer que f est linéaire, et déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Solution

Soient $x = (a, b, c), y = (a', b', c')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + y) &= f(\lambda a + a', \lambda b + b', \lambda c + c') \\
&= (\lambda a + a' + \lambda b + b' + \lambda c + c', \lambda a + a' + \lambda c + c',\ \lambda a + a' - (\lambda b + b') + \lambda c + c') \\
&= (\lambda(a + b + c) + (a' + b' + c'), \lambda(a + c) + (a' + c'), \lambda(a - b + c) + (a' - b' + c')) \\
&= \lambda(a + b + c, a + c, a - b + c) + (a' + b' + c', a' + c', a' - b' + c') \\
&= \lambda f(x) + f(y)
\end{aligned}$$

Ainsi f est une application linéaire, et donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Une base de $\mathbb{R}^3$ est $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$. On a

$$f(1, 0, 0) = (1, 1, 1), \quad f(0, 1, 0) = (1, 0, -1), \quad \text{et} \quad f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

Ainsi, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1), (1, 0, -1), (1, 1, 1))$. La famille n'est pas libre, puisqu'elle contient deux fois $(1, 1, 1)$. En revanche, $((1, 1, 1), (1, 0, -1))$ est libre, car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi,

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1), (1, 0, -1))$$

et $((1, 1, 1), (1, 0, -1))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Remarque

Si $E = F \oplus G$, on a vu que, connaissant une base de F et de G, on en déduit une base de E. Mais alors, connaissant $f|_F$ et $f|_G$, les restrictions de f à F et G, on en déduit complètement f.

Réciproquement, connaissant l'image par une application linéainre sur une base, on peut déterminer de manière unique cette application :

Théorème 26.24.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soient F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(v_1, \dots, v_n)$ n des vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ vérifiant, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = v_i$. Il s'agit de l'application :

$$f : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

De plus :

- f est injective si et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre ;
- f est surjective si et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice ;
- f est bijective si et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de F.

Exemple 26.11

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par $f((1, 0)) = (0, 1)$ et $f((0, 1)) = (1, 0)$. Alors f est bijective ; en effet, $((0, 1), (1, 0))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

On en déduit une conséquence pratique pour démontrer que deux applications linéaires sont égales :

Théorème 26.25.

Soient E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F coïcidant sur une base de E. Alors $f = g$.

2. Isomorphisme en dimension finie

En dimension finie, on dispose de plusieurs théorèmes nous permettant de justifier qu'une application est bijective :

Proposition 26.26.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

Démonstration

Si f est un isomorphisme, d'après ce qui précède, l'image d'une base est une base.

Réciproquement, soit f une application linéaire de E dans F qui transforme une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E en une base $(f_1, \dots, f_n)$ de F. Par caractérisation par l'image d'une base, f est uniquement déterminée, et puisque $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de F, f est un isomorphisme.

Ce résultat nous permet d'en déduire que deux espaces vectoriels isomorphes ont nécessairement la même dimension. On rappelle la définition :

Définition 26.4. Espaces vectoriels isomorphes

On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme $f : E \to F$.

Savoir Faire

Exercice 26.12

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ définie pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ par $f(a, b, c) = aX^2 + bX + c$. Montrer que f est linéaire, puis déterminer noyau et image. En déduire que $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes.

Solution

Soient $x = (a, b, c), y = (a', b', c')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= f(\lambda a + a', \lambda b + b', \lambda c + c') \\ &= (\lambda a + a')X^2 + (\lambda b + b')X + (\lambda c + c') \\ &= \lambda(aX^2 + bX + c) + (a'X^2 + b'X + c') \\ &= \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire.

- Soit $x = (a, b, c) \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors $f(a, b, c) = 0$, c'est-à-dire $aX^2 + bX + c = 0$. Par identification des coefficients, $a = b = c = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$: la fonction f injective.
- $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On a rapidement

  $$f(1, 0, 0) = X^2, \quad f(0, 1, 0) = X, \quad \text{et} \quad f(0, 0, 1) = 1$$

  Ainsi, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$ en reconnaissant la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. f est donc bijective.

Bilan : f est donc un isomorphisme. Ainsi, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes.

Alors, d'après le théorème 26.26, en dimension finie, si deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes, alors ils ont la même dimension :

Théorème 26.27.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration

Soit f un isomorphisme de E dans F. f transforme une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E en une base $(f_1, \dots, f_n)$ de F. Les bases ont le même cardinal, et donc $\dim(E) = \dim(F)$.

Réciproquement, si $\dim(E) = \dim(F)$, notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et f l'application linéaire transformant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ étant une base de F, f est bijective, et E et F sont donc isomorphes.

Remarque

Ainsi, tout espace vectoriel de dimension n (avec $n \geqslant 1$) est isomorphe à $\mathbb{R}^n$, lui-même de dimension n.

Enfin, une proprieté important des isomorphismes : ils conservent le rang d'une famille de vecteurs :

Proposition 26.28.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f : E \to F$ un isomorphisme. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors

$$\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{rg}(f(v_1), \dots, f(v_n)).$$

Démonstration

Par définition du rang, $\mathrm{rg}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \dim(\mathrm{Vect}(f(v_1), \dots, f(v_n))) = \dim f(\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n))$.

Montrons alors que $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ et $f(\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n))$ sont isomorphes. Ils auront ainsi la même dimension, ce qui nous permettra de conclure.

Notons g l'application $f|_{\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_n)}^{f(\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_n))}$. g étant une restriction d'une application linéaire, elle est linéaire. Par définition, elle est surjective. Enfin, elle est injective : si $x \in \mathrm{Ker}(g)$, alors $x \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ vérifie $f(x) = 0$. Mais f est un isomorphisme, donc $x = 0$.

3. Rang d'une application linéaire

Intuitivement, et d'après les différents éléments précédents, on pourrait s'intéresser à l'image d'une application linéaire et sa dimension si elle existe : c'est son rang.

Proposition 26.29. Rang d'une application linéaire

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et F un espace vectoriel. Soit f une application linéaire de E dans F.

Alors $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension finie, et $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) \leqslant \dim(E)$. On note alors $\mathrm{rg}(f)$, et on appelle le **rang** de f, la dimension de l'image de f.

Démonstration

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $f(e_1), \dots, f(e_n))$ forme une famille génératrice de l'image de f. Ainsi, d'après le théorème de l'échange, $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension finie, et $\mathrm{rg}(f) \leqslant n = \dim(E)$.

On dispose d'un lien entre rang d'une application linéaire, et rang d'une famille de vecteurs :

Proposition 26.30.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et F un espace vectoriel. Soit f une application linéaire de E dans F. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Alors $\mathrm{rg}(f)$ est égal au rang de la famille de vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Démonstration

Par définition,

$$\mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \dim(\mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))) = \dim(f(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = \dim(f(E)) = \mathrm{rg}(f).$$

Remarque

Puisque $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, si E et F sont de dimension finies, alors $\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$.

Une seule application est de rang 0 : l'application nulle.

Proposition 26.31.

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors $\mathrm{rg}(f) = 0$ si et seulement si f est l'application nulle.

Démonstration

En effet, $\mathrm{rg}(f) = 0$ si et seulement si $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$, ou encore f est l'application nulle.

4. Théorème du rang

En dimension finie, on dispose d'un lien fort entre la dimension de l'image, celle du noyau et la dimension de l'espace de départ : c'est le théorème du rang.

Théorème 26.32. Théorème du rang

Soit E un espace vectoriel **de dimension finie**, F un espace vectoriel, et f une application linéaire de E dans F. Alors

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E).$$

Démonstration

Prenons une base de $\mathrm{Ker}(f)$ (qui existe, car $\mathrm{Ker}(f) \subset E$ et E est de dimension finie). On note $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Complétons celle-ci en une base de E : $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E, et $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont supplémentaires dans E par construction.

Le résultat précédent garantit que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}\,(f)$, et puisque $(e_1, \dots, e_p)$ sont dans le noyau de f, $f(e_1) = \dots = f(e_p) = 0$. Finalement

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)).$$

Montrons que la famille $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est libre. Soient $(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n)$ des réels tels que

$$\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0.$$

Par linéarité
$$f\left(\lambda_{p+1}e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n\right) = 0$$
et donc
$$\lambda_{p+1}e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n \in \mathrm{Ker}(f).$$
Or, par définition, $\lambda_{p+1}e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Par supplémentarité, on en déduit que $\lambda_{p+1}e_{p+1}+\dots+\lambda_n e_n = 0$, et par liberté de la famille des (e_i), $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$.
Finalement, $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$. Ainsi
$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = (n-p) + p = n = \dim(E)$$
ce qui termine la démonstration.

Attention
Le théorème du rang n'est valable que si l'espace de départ est de dimension finie. En revanche, F n'a pas à être de dimension finie.

Le théorème du rang nous permet d'en déduire plusieurs résultats :

Corollaire 26.33.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F.
- Si f est injective, alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
- Si f est surjective, alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.
- f est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
- f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Démonstration
- Si f est injective, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. Le théorème du rang nous donne $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ et puisque $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$.
- Si f est surjective, $\mathrm{Im}\,(f) = F$ et donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$. Le théorème du rang nous donne
$$\dim(E) = \dim(F) + \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{\geqslant 0} \geqslant \dim(F).$$
- f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, si et seulement si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, si et seulement si $\mathrm{rg}(f) + 0 = \dim(E)$ par le théorème du rang.
- f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$ si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$, puisque $\mathrm{Im}\,(f) \subset F$.

Ce résultat nous permet, finalement, d'énoncer un résultat permettant de justifier qu'une application est bijective dans le cas de la dimension finie :

Théorème 26.34.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
- f est un isomorphisme de E dans F.
- f est injective et $\dim(E) = \dim(F)$.
- f est surjective et $\dim(E) = \dim(F)$.

…

En particulier, si $\dim(E) = \dim(F)$ (ce qui est le cas d'un endomorphisme), alors

$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est bijective.}$$

Démonstration

Le premier point implique, d'après les résultats précédents, les deux points suivants.

Si f est injective et $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est injective et donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$. Or $\dim(E) = \dim(F)$, donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$ et f est également surjective : f est bijective.

Si f est surjective et $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est surjective et donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$. Or $\dim(F) = \dim(E)$ donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ et f est égalemnet injective : f est bijective.

Méthode

Pour montrer, en *dimension finie*, qu'un endomorphisme est bijectif, il suffit de montrer qu'il est injectif.

Exemple 26.13

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout (a, b, c) par $f(a, b, c) = (a + b, a + c, b + c)$. Montrer que f est un isomorphisme.

Solution

On démontre rapidement que f est une application linéaire, et est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Soit $x = (a, b, c) \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors, en résolvant le système :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (a + b, a + c, b + c) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$ et f est injective. Mais alors, étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, elle est bijective.

Attention

Ce résultat est faux, dans le cas général, en dimension infinie.

Exercice 26.14

Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P'$. Montrer que f est surjective. Est-elle bijective ?

Solution

f est linéaire, puisque la dérivée l'est (exercice de TD du chapitre 11). Il s'agit donc d'un endomorphisme, puisque $f(P) = P' \in \mathbb{R}[X]$. Déterminons son image. On prend $(1, X, \dots, X^n \dots)$ une base de $\mathbb{R}[X]$. Mais alors

$$f(1) = 0, \quad f(X) = 1, \quad f(X^2) = 2X, \dots, f(X^n) = nX^{n-1} \dots$$

Ainsi, en utilisant les propriétés de l'espace vectoriel engendré :

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(1, 2X, 3X^2, \dots, nX^{n-1}, \dots) = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^{n-1}, \cdots)$$

Donc $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}[X]$: f est surjective. Cependant, f n'est pas bijective, puisqu'elle n'est pas injective. En effet $f(1) = 0$ et donc $1 \in \mathrm{Ker}(f)$.

5. Formes linéaires et hyperplans

Nous allons, dans cette dernière partie, nous intéresser à des sous espaces vectoriels de dimension la plus grande possible sans être l'espace tout entier : les hyperplans.

Définition 26.5.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n (avec $n \geqslant 1$). On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Exemple 26.15

Dans $\mathbb{R}^2$, un hyperplan est une droite vectoriel. Dans $\mathbb{R}^3$, un hyperplan est un plan vectoriel.

Intéressons nous aux formes linéaires en dimension finie :

Proposition 26.35.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n (avec $n \geqslant 1$), et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Si φ n'est pas identiquement nulle, alors φ est surjective, et $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n-1$.

Démonstration

Par définition d'une forme linéaire, $\text{Im}\,(\varphi) \subset \mathbb{R}$: $\text{rg}(\varphi) \leqslant \dim(\mathbb{R}) = 1$. Puisque φ est non nulle, $\text{rg}(\varphi) \geqslant 1$. Donc $\text{rg}(\varphi) = 1$ et donc φ est surjective. Enfin, le théorème du rang nous donne

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \text{rg}(\varphi) = n-1.$$

Il y a alors un lien étroit entre hyperplan et forme linéaire :

Théorème 26.36.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n (avec $n \geqslant 1$). Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- H est un hyperplan de E.
- Il existe une droite vectorielle D de E telle que $H \oplus D = E$.
- Il existe une forme linéaire non identiquement nulle φ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

Démonstration

Montrons par implications successives.

- $1 \implies 2$ Soit H un hyperplan. E étant de dimension finie, H également et $\dim(H) = \dim(E) - 1$. Par un théorème vu précédemment, H admet un supplémentaire D, et $\dim(D) = \dim(E) - \dim(H) = 1$; ainsi D est une droite vectorielle.
- $2 \implies 3$ Soit H et D une droite vectorielle telle que $H \oplus D = E$. D étant de dimension 1, $\dim(H) = n-1$. D étant une droite vectorielle, on peut écrire $D = \text{Vect}(u)$ avec $u \neq 0$. Définissons la forme linéaire suivante : si $x = h + \lambda u$, avec $h \in H$ (possible par supplémentarité), alors $\varphi(x) = \lambda$. On montre rapidement que φ est linéaire de E dans $\mathbb{R}$, donc est une forme linéaire. Par construction, puisque $H \oplus D = E$, $\text{Ker}(\varphi) = H$. Enfin, φ n'est pas identiquement nul puisque $\dim(D) = 1 \neq 0$.
- $3 \implies 1$ S'il existe φ, forme linéaire non nulle, telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$, alors $\text{Im}\,(\varphi) = \mathbb{R}$ (car non identiquement nulle). Le théorème du rang garantit alors que $\text{rg}(\varphi) + \dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(E)$ et donc $\dim(H) = \dim(E) - 1$: H est bien un hyperplan.

Ainsi, un hyperplan est définie comme étant le noyau d'une forme linéaire, ce qui nous permet de définir la notion d'équation d'un hyperplan :

Définition 26.6.

Soit φ une forme linéaire non nulle de E. L'équation $\varphi(x) = 0$, d'inconnue $x \in E$, est appelée **une équation** de l'hyperplan $H = \text{Ker}(\varphi)$.

Remarque

Pour déterminer un supplémentaire d'un hyperplan H, il suffit de trouver une droite vectorielle non incluse dans H, donc un vecteur qui ne vérifie pas l'équation de H.

Exercice 26.16

Soit $H = \{(x, y, z, t),\ x + y - 2z + t = 0\}$. Justifier que H est un hyperplan, et déterminer un supplémentaire de H.

Solution

Notons $\varphi : (x, y, z, t) \longmapsto x + y - 2z + t$. Alors φ est une forme linéaire, et $H = \text{Ker}(\varphi)$: H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Pour trouver un supplémentaire, déterminons un vecteur qui n'est pas dans H. Par exemple, $(1, 0, 0, 0) \notin H$ puisque $1 + 0 - 2 \times 0 + 0 = 1 \neq 0$. Ainsi

$$H \oplus \text{Vect}((1, 0, 0, 0)) = E.$$

Exercices 26

Exercices

Dans l'ensemble des exercices, et sauf mention contraire, E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Bases et dimensions finies

●○○ **Exercice 1 Des espaces de dimension finie** (15 min.)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels de dimension finie. On précisera leur dimension et une base.

1. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall\,x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\sin(x) + b\cos(x) + c\}$.
2. L'ensemble des suites réelles arithmétiques.
3. Les ensembles de matrices $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}), \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. $\{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(A) = 0\}$, où $\mathrm{Tr}(M)$ est la somme des termes diagonaux d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
5. $\left\{x \longmapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} + Q(x)\mathrm{e}^{-\alpha x},\ (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2\right\}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

●○○ **Exercice 2 Base or not base ?** (10 min.)

1. À quelle condition sur x les vecteurs $(0,1,x), (x,1,-1)$ et $(x,1,1+x)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
2. À quelle condition sur λ les vecteurs $X^2-\lambda$, $X^2+\lambda$ et $(X+\lambda)^2$ forment-ils une base sur $\mathbb{R}_2[X]$?

●○○ **Exercice 3 Complétons tous en rond** (10 min.)

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,2,-1,3), (3,-2,0,1)$ et $(-5,6,-1,1)$. Déterminer une base de F et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

●●○ **Exercice 4 Une base de polynômes** (15 min.)

On définit, pour tout $k \in [\![0,\, n]\!]$, $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

1. Montrer que, pour tout $j \in [\![0,\, n]\!]$, X^j est combinaison linéaire de $P_j, \dots, P_n$.
2. En déduire que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Supplémentaires

●○○ **Exercice 5 Supplémentaires** (15 min.)

Dans chacun des cas suivants, justifier que F est un sous-espace vectoriel de E, déterminer sa dimension, et un supplémentaire de F dans E.

1. $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(2) = P(4) = 0\}$.

●○○ **Exercice 6 Des supplémentaires, encore** (5 min.)

Dans chacun des cas suivants, montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,2,3))$.

2. Pour $n \geqslant 1$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathrm{Vect}(X(X-1),(X-1)(X-2),X(X-2))$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, X^3 | P\}$.

Applications linéaires en dimension finie

●○○ Exercice 7 Rang d'une application définie par une image (15 min.)

Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $f(1,1,0) = (1,2,0)$, $f(1,0,1) = (3,-1,2)$ et $f(0,1,1) = (5,3,2)$. Déterminer le rang de f de deux façons différentes.

●○○ Exercice 8 Une application linéaire (15 min.)

Soit a un réel, et $E_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad x+y+z=a \right\}$. Soit $f : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'application par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$$

1. A quelle condition sur a l'espace E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
2. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire le rang de f. L'application f est-elle injective ? surjective ?
4. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = E_0$.
5. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

●○○ Exercice 9 Une application linéaire sur les polynômes (15 min.)

Soit $f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ définie par

$$f : P(X) \mapsto P(X) - XP'(X)$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Donner une base du noyau de f.
3. Donner la dimension et une base de l'image de f.

●●○ Exercice 10 D'après oral ESCP (10 min.)

Dans cet exercice, on suppose que $\dim(E) = 3$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

●○○ Exercice 11 Une autre application sur les polynômes (10 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f : P \longmapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme, et déterminer noyau et image de f.
2. En déduire que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = P(X+1) - P(X)$.
3. Montrer que le polynôme P précédent est unique à l'addition d'un réel près.

Hyperplans

●●○ Exercice 12 Condition d'égalité d'hyperplans (15 min.)

Soient H et K deux hyperplans de E. Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles telles que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $K = \mathrm{Ker}(\psi)$.

Montrer que $H = K$ si et seulement si φ et ψ sont colinéaires dans l'espace $E^\star$, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.

●●○ **Exercice 13 Intersection de deux hyperplans** (15 min.)
Déterminer la dimension de l'intersection de deux hyperplans distincts de E.
On pourra commencer par justifier que la dimension est minorée par $n-2$.

Exercices théoriques

●●○ **Exercice 14 Une majoration du rang** (10 min.)
Soit E un $\mathbb{R}$-e.v de dimension quelconque. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$,

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) \leqslant \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p) + n - p.$$

●●○ **Exercice 15 Endomorphismes nilpotents** (20 min.)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non nulle. On suppose que f est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(f) \leqslant n-1$.
2. Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille
$$\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$$
est libre.
3. En déduire que $p \leqslant n$.

●●○ **Exercice 16 Est-il nilpotent ?** (15 min.)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que :

$$\forall\, x \in E, \quad \exists\, p \in \mathbb{N}, \quad f^p(x) = 0.$$

Montrer que f est nilpotent. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

●●○ **Exercice 17 Rang d'une somme** (15 min.)
Soient f et g des endomorphismes de E. Montrer que

$$\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

puis que

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f-g).$$

●●○ **Exercice 18 D'après Oral ESCP** (15 min.)
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires.
Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Im}(f)$ ou $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

Pour aller plus loin

●●● **Exercice 19 Une racine carrée ?** (25 min.)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Soient $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E telle que $\left(x_1, \dots, x_p, f(x_1), \dots, f(x_{p-1})\right)$ est libre. Montrer que $\left(x_1, \dots, x_p, f(x_1), \dots, f(x_p)\right)$ est également une famille libre.
2. a) Soit $x_1 \neq 0$. Montrer que $(x_1, f(x_1))$ est une famille libre.
   b) Montrer que, si $n \neq 2$, alors il existe x_2 tel que $(x_1, x_2, f(x_1))$ est une famille libre.
   c) En déduire que $n \geqslant 4$.
3. Montrer que n est pair.
4. Donner un exemple de tel endomorphisme f dans le cas où $n = 2$.

●●○ Exercice 20 D'après oral HEC (20 min.)

Supposons que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u^2 - 2u + \mathrm{id} = 0.$$

1. Montrer que u est un automorphisme de E.
2. Comparer $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et en déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})) \geqslant \frac{n}{2}$.
3. Supposons que $\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})) = n - 1$.
   a) Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id})$. Justifier l'existence de $n - 1$ vecteurs $e_2, \dots, e_n$ de E tels que $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $u\,(e_n) = e_1 + e_n$.
   b) Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

●●○ Exercice 21 D'après EDHEC (30 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,\, n]\!]$, on note $f_k : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto x^k \mathrm{e}^{-x}$.

On note E_n le sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ engendré par la famille $(f_0, \dots, f_n)$. On note enfin d l'application définie sur E par $d : f \longmapsto f'$.

1. Montrer que d est une application linéaire sur E et que E_n est stable par d. On note alors d_n la restriction de d à E_n.
2. Montrer que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de E_n.
3. Calculer $d_n\,(f_0)$ puis montrer que, pour tout $k \in [\![1,\, n]\!]$, $d_n\,(f_k) = k f_{k-1} - f_k$.
4. Pour tout $k \in [\![0,\, n]\!]$, on note g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g_k : x \longmapsto \dfrac{1}{k!} f_k$. Montrer que la famille
$$(-g_0, g_0 - g_1, g_1 - g_2, \dots, g_{n-1} - g_n)$$
est une base de E_n.
5. a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1,\, n]\!]$, $d_n\,(g_k) = g_{k-1} - g_k$.
   b) En déduire que $d_n \in GL\,(E_n)$.
   c) Exprimer $d_n^{-1}\,(f_j)$ dans la base $(f_0, \dots, f_n)$, pour tout $j \in [\![1,\, n]\!]$
   On pourra sommer de 1 à j la formule de la question a).

●●● Exercice 22 Retour des polynômes de Lagrange (3 min.)

Soient $a_0, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts.

1. Montrer que l'application f, définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f : P \longmapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est un isomorphisme.
2. En déduire que, pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P qui vérifie $P(a_k) = b_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
3. Notons $(e_1, \dots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $k \in [\![0,\, n]\!]$, expliciter $f^{-1}\,(e_{k+1})$. En déduire l'expression du polynôme P dont l'existence (et l'unicité) a été montrée dans la question précédente.

●●● Exercice 23 Des résultats étranges (30 min.)

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2) \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2) \iff \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E.$$
2. Montrer que la dimension de E n est paire si et seulement s'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}(f)$.
   On pourra, connaissant une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ de E, construire f vérifiant $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f^2)) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Sujets de concours

●●○ Sujet 1 EML 2023 voie S – problème (partiel) (50 min.)

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel de dimension finie n.

Lorsque F est un espace vectoriel de dimension finie, on admettra que la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \times \dim F.$$

Préliminaire

1. Justifier que les espaces E et E^* ont la même dimension.
2. Soit φ un élément de E^*.
   a) Quelles sont les dimensions possibles pour l'image $\operatorname{Im}\varphi$ de φ ?
   b) En déduire que φ est soit nulle, soit surjective.
   c) On suppose que φ n'est pas l'application nulle. Démontrer que $\ker\varphi$ est un hyperplan de E.
3. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\forall\,(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k.$$

Partie I – Des exemples

4. **Premier exemple**
   Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[x]$ des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
   On considère l'application $g : E \to \mathbb{R}$ définie par : $g(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.
   a) Démontrer que g est un élément de E^*.
   b) Quelle est la dimension du noyau de g ?
   c) Pour $k \in \{1, \dots, p\}$, on considère la fonction polynôme $Q_k : x \longmapsto x^k - \frac{1}{k+1}$.
   Démontrer que la famille $(Q_1, \dots, Q_p)$ est une base du noyau de g.
5. **Second exemple**
   Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace $\mathbb{R}_p[x]$ des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
   On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par : $f(P) = P(0)$.
   a) Démontrer que f est un élément de E^*.
   b) Déterminer le noyau de f.
6. Dans cette question, on revient au cadre général.
   Soient f et g deux éléments de E^*, non nuls, tels que $\ker f \subset \ker g$.
   a) Démontrer que $\ker f = \ker g$.
   b) Justifier de l'existence d'un élément x_0 de E qui n'appartient pas au noyau de f.
   c) Démontrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Vect}(x_0)$, où $\operatorname{Vect}(x_0)$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur x_0.
   d) On pose $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Démontrer que h est nulle.
   e) Que peut-on en conclure pour les formes linéaires f et g ?

Partie II – Hyperplans et formes linéaires

7. On a vu à la question 2c que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. Le but de cette question est de démontrer que **tout hyperplan de E est le noyau d'une**

forme linéaire non nulle.
Soit H un hyperplan de E.

a) Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H. Justifier de l'existence d'un vecteur e_n dans E tel que $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ soit une base de l'espace vectoriel E.

b) Soit φ l'élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ défini par :

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}.$$

Justifier que cette définition est correcte et démontrer que $\ker \varphi = H$.

Dans la suite de cette partie, on considère un entier $p \geqslant 2$ et une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de formes linéaires sur E, ainsi que l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array} \right. .$$

On tiendra pour acquis que l'application f est linéaire.

8. Démontrer que : $\ker f = \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i$.
9. On suppose dans cette question que l'application f est surjective.
   a) On note $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Justifier que ε_1 admet un antécédent x par f.
   b) Démontrer que la famille $(f_1, \dots, f)$ est libre dans E^*.
10. On suppose dans cette question que l'application f n'est pas surjective.
    a) Que peut-on dire de la dimension m de $\operatorname{Im} f$?
    b) En complétant une base $(e_1, \dots, e_m)$ de $\operatorname{Im} f$ en une base de $\mathbb{R}^p$, démontrer que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$.
    c) En déduire que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^* (on pourra utiliser la question 6).
11. On suppose dans cette question que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans E^*.
    a) Justifier que f est surjective.
    b) Démontrer que : $\dim \left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \right) = n - p$.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. Remarquons que par définition,

$$F = \{x \longmapsto a\sin(x) + b\cos(x) + c,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos, 1)$$

où 1 désigne la fonction constante égale à 1. La famille $(\sin, \cos, 1)$ est donc génératrice de F, qui est de dimension finie. Constatons qu'elle est libre : s'il existe (a,b,c) tels que $a\sin + b\cos + c = 0$, alors en évaluant en 0, $\frac{\pi}{2}$ et π par exemple, on en déduit

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

La famille $(\sin, \cos, 1)$ est donc une base de F, qui est de dimension 3.

2. On note F l'ensemble des suites arithmétiques. Remarquons que :

$$F = \{\forall\, n \in N,\ u_n = a + bn, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((u_n), (v_n))$$

où (u_n) est la suite constante égale à 1, et (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n = n$. Donc F est de dimension finie. De plus, (u, v) est libre ; en effet, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tels que $au + bv = 0$. Alors, pour tout n, $a + bn = 0$ implique $a = b = 0$: la famille est libre, et finalement $\dim(F) = 2$.

3. Pour les matrices triangulaires, il suffit de repartir de la définition. En notant $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les matrices élémentaires, remarquons que

$$T_n^+(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{1,n}, E_{2,2}, \dots E_{2,n}, \dots, E_{n,n}) = \mathrm{Vect}\left(\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\right).$$

Ainsi, $T_n^+(\mathbb{R})$ est de dimension finie, et la famille précédente est libre car extraite de la base canonique, elle-même libre. Finalement, $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ forme une base de $T_n^+(\mathbb{R})$ et sa dimension est $\dim(T_n^+(\mathbb{R})) = \sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Par le même raisonnement,

$$T_n^-(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{n,n}) = \mathrm{Vect}\left(\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\right).$$

qui est également libre : $\dim(T_n^-(\mathbb{R})) = \sum\limits_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ remarquons qu'une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ va s'écrire

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} s_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^{n} s_{i,i} E_{i,i}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left(\left(E_{i,j} + E_{j,i}\right)_{1\leqslant j<i\leqslant n}, \left(E_{i,i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\right).$$

Cette famille est libre : s'il existe $(s_{i,j})$ des réels tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} s_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^{n} s_{i,i} E_{i,i} = 0$$

alors, la famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ étant une base, on en déduit que les $(s_{i,j})$ sont tous nuls. Finalement, c'est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \sum\limits_{i=1}^{n} i-1+\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = \frac{(n-1)n}{2}+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Enfin, pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, remarquons qu'une matrice $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ va s'écrire

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} s_{i,j}(E_{i,j}-E_{j,i})$$

(les termes sur la diagonale étant nécessairement nuls). Alors

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left(\left(E_{i,j}-E_{j,i}\right)_{1\leqslant j<i\leqslant n}\right).$$

On démontre, comme précédemment, que cette famille est libre et forme une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

4. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Remarquons que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ si et seulement si $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0$, soit si et seulement si $a_{n,n} = -\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_{i,i}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\{A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\quad \mathrm{Tr}(A)=0\} &= \left\{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{n,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i}\end{pmatrix},\quad (a_{i,j})\in\mathbb{R}^{n^2-1}\right\}\\ &= \mathrm{Vect}((E_{1,1}-E_{n,n}),E_{1,2},\dots,E_{1,n},E_{2,1},(E_{2,2}-E_{n,n}),\dots,E_{2,n},\dots E_{n,n-1})\\ &= \mathrm{Vect}\left(\left(E_{i,j}\right)_{i\neq j},\left(E_{i,i}-E_{n,n}\right)_{1\leqslant i\leqslant n-1}\right).\end{aligned}$$

L'ensemble est donc de dimension finie, car engendrée par une famille finie. Par ailleurs, la famille précédente est libre, puisque que si une combinaison linéaire est nulle, en reprenant l'expression de la matrice, cela donne tous les coefficients nuls. Ainsi, sa dimension est n^2-1.
5. Remarquons que :

$$\begin{aligned}F &= \left\{x\longmapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}+Q(x)\mathrm{e}^{-\alpha x},\ (P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2\right\}\\ &= \{x\longmapsto (a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0)\mathrm{e}^{\alpha x}+(b_nx^n+\dots+b_0)\mathrm{e}^{-\alpha x},\quad (a_0,\dots,a_n,b_0,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^{2n+2}\}.\\ &= \mathrm{Vect}\ \underbrace{(x\longmapsto x^n\mathrm{e}^{\alpha x},\dots,x\longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x},x\longmapsto x^n\mathrm{e}^{-\alpha x},\dots x\longmapsto \mathrm{e}^{-\alpha x})}_{=\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

Ainsi, F est de dimension finie. Or $\mathcal{B}$ est libre. Soit une combinaison linéaire telle que

$$x\longmapsto a_nx^n\mathrm{e}^{\alpha x}+\dots+a_0\mathrm{e}^{\alpha x}+b_nx^n\mathrm{e}^{-\alpha x}+\dots+b_0 = 0.$$

Notons p le plus grand indice tel que $a_p\neq 0$, s'il existe. La relation précédente s'écrit alors

$$x\longmapsto a_px^p\mathrm{e}^{\alpha x}+\dots+a_0\mathrm{e}^{\alpha x}+b_nx^n\mathrm{e}^{-\alpha x}+\dots+b_0 = 0.$$

Or

$$a_px^p\mathrm{e}^{\alpha x}+\dots+a_0\mathrm{e}^{\alpha x}+b_nx^n\mathrm{e}^{-\alpha x}+\dots+b_0 \underset{+\infty}{\sim} a_px_p$$

car $a_p\neq 0$ et donc

$$a_px^p\mathrm{e}^{\alpha x}+\dots+a_0\mathrm{e}^{\alpha x}+b_nx^n\mathrm{e}^{-\alpha x}+\dots+b_0 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$$

ce qui est absurde puisque la somme est nulle. Donc tous les a_i sont nuls. Notons alors q le plus grand indice tel que $b_q\neq 0$. La relation devient

$$x\longmapsto b_qx^q\mathrm{e}^{-\alpha x}+\dots+b_0 = 0$$

soit, en divisant par $\mathrm{e}^{-\alpha x}$
$$\forall x, \quad b_q x^q + \ldots + b_0 = 0$$
Or, $b_p x^p + \ldots + b_0 \underset{+\infty}{\sim} b_p x^p$ car $b_q \neq 0$, et donc $b_q x^q + \ldots + b_0 \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pm\infty$, ce qui est absurde puisque la somme est nulle. Finalement, tous les coefficients sont nuls, et la famille est libre. Ainsi, $\dim(F) = 2n + 2$.

Exercice 2

Les deux familles sont de cardinal 3, la dimension de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$. Il suffit donc de vérifier la liberté ou la génératricité.

1. Déterminons le rang de la famille de vecteurs :
$$\mathrm{rg}((0,1,x),(x,1,-1),(x,1,1+x)) = \mathrm{rg}((0,1,x),(x,1,-1),0,0,2+x)).$$
Si $x \neq 0$ et $2 + x \neq 0$, c'est-à-dire si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-2\}$, la famille est échelonnée, donc de rang 3 : la famille est une base.
Si $x = 0$, on obtient :
$$\begin{aligned} \mathrm{rg}((0,1,0),(0,1,-1),(0,1,1)) &= \mathrm{rg}((0,1,0),(0,1,-1),(0,0,2)) \\ &= \mathrm{rg}((0,1,0),(0,0,0),(0,0,2)) = \mathrm{rg}((0,1,0),(0,0,2) = 2 \end{aligned}$$
puisque les vecteurs ne sont pas colinéaires : la famille est de rang 2, donc n'est pas génératrice ; ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
De même, si $x = -2$:
$$\mathrm{rg}((0,1,-2),(-2,1,-1),(-2,1,-1)) = \mathrm{rg}((0,1,-2),(-2,1,-1)) = 2$$
car les vecteurs ne sont pas colinéaires : la famille n'est pas génératrice et n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^3$.
2. De même :
$$\mathrm{rg}(X^2 - \lambda, X^2 + \lambda, (X + \lambda)^2) = \mathrm{rg}(X^2 - \lambda, 2\lambda, -2\lambda X + \lambda^2 + \lambda)$$
Si $\lambda \neq 0$, la famille est échelonnée en degré, sans vecteurs nul : elle est libre et forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Si $\lambda = 0$, cela devient :
$$\mathrm{rg}(X^2, X^2, X^2) = \mathrm{rg}(X^2) = 1$$
et la famille n'est pas libre et n'est donc pas une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3

Par définition,
$$F = \mathrm{Vect}((1,2,-1,3),(3,-2,0,1),(-5,6,-1,1)).$$
Vérifions si la famille définissant F est libre. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$a(1,2,-1,3) + b(3,-2,0,1) + c(-5,6,-1,1) = (0,0,0,0).$$
Cela donne
$$\left\{\begin{aligned} a + 3b - 5c &= 0 \\ 2a - 2b + 6c &= 0 \\ -a \quad\quad - c &= 0 \\ 3a + b + c &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} a + 3b - 5c &= 0 \\ -8b + 16c &= 0 \\ 3b - 6c &= 0 \\ -8b + 16c &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} a &= -c \\ b &= 2c \\ c &= c \end{aligned}\right. .$$
La famille est donc liée : par exemple, $-(1,2,-1,3) + 2(3,-2,0,1) + (-5,6,-1,1) = (0,0,0,0)$. Ainsi
$$F = \mathrm{Vect}((1,2,-1,3),(3,-2,0,1)).$$

et forme une base de F (car vecteurs non colinéaires) : F est de dimension 2.
Pour compléter en une base de $\mathbb{R}^4$, de dimension 4, il faut donc trouver deux vecteurs libres qui n'appartiennent pas à F. Remarquons que

$$(x,y,z,t) \in F \iff \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} a + 3b - 5c &= x \\ 2a - 2b + 6c &= y \\ -a \qquad\;\; - c &= z \\ 3a + b + c &= t \end{cases}$$

Résolvons pour obtenir la ou les équations vérifiées par (x,y,z,t) :

$$\begin{cases} a + 3b - 5c &= x \\ 2a - 2b + 6c &= y \\ -a \qquad\;\; - c &= z \\ 3a + b + c &= t \end{cases} \iff \begin{cases} a + 3b - 5c &= x \\ \quad -8b + 16c &= y - 2x \\ \quad\;\; 3b - 6c &= x + z \\ \quad -8b + 16c &= t - 3x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + 3b - 5c &= x \\ \quad -8b + 16c &= y - 2x \\ 0 &= 3y + 2x + 8z \\ 0 &= y + x - t \end{cases}$$

Ainsi, $(x,y,z,t) \in F \iff y + x - t = 0$ et $3y + 2x + 8z = 0$. Remarquons que $(1,0,0,0) \notin F$ et $(0,1,0,0) \notin F$ car leurs coordonnées ne vérifient pas les équations de F. Or, la famille $(1,0,0,0),(0,1,0,0))$ est libre (extraite de la base canonique). Donc

$$((1,2,-1,3),(3,-2,0,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0))$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4

- La formule du binôme de Newton nous donne :

$$1 = (X + (1-X))^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k (1-X)^{p-k}$$

et donc

$$\begin{aligned} X^j &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^{k+j} (1-X)^{p-k} \\ &= \sum_{i=j}^{p+j} \binom{p}{i-j} X^i (1-X)^{p-(i-j)} \end{aligned}$$

Pour $p = n - j$ (possible car $j \in [\![0,\, n]\!]$) :

$$X^j = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} X^i (1-X)^{n-i} = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} P_j.$$

Ainsi, $X^j \in \mathrm{Vect}(P_j, \dots, P_n)$.

- La question précédente garantit que

$$\forall\, j \in [\![0,\, n]\!], \quad X^j \in \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_n).$$

Ainsi, puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel :

$$\mathrm{Vect}(X^0, \dots, X^n) \subset \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_n).$$

La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est donc génératrice. Par ailleurs, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ et la famille contient $n+1$ vecteurs. Par théorème,

$$\boxed{(P_0, \dots, P_n) \text{ forme une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Exercice 5

1. F est bien un sous-espace vectoriel de E : il contient le polynôme nul, et si $(P, Q) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$(\lambda P + Q)(2) = \lambda P(2) + Q(2) = 0 \quad \text{et} \quad (\lambda P + Q)(4) = \lambda P(4) + Q(4) = 0.$$

Ainsi, $\lambda P + Q \in F$. Cherchons une base de F. $P \in F$ si et seulement si 2 et 4 sont racines de P, donc si et seulement si $(X-2)(X-4)$ divise P. Ainsi

$$\begin{aligned} F &= \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ (X-2)(X-4) \text{ divise } P\} \\ &= \{(X-2)(X-4)Q(X),\ Q \in \mathbb{R}_2[X]\} \\ &= \{(X-2)(X-4)(aX^2+bX+c),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}\left(((X-2)(X-4)X^2, (X-2)(X-4)X, (X-2)(X-4))\right)$$

et la famille $\mathcal{F} = ((X-2)(X-4)X^2, (X-2)(X-4)X, (X-2)(X-4))$ est libre (car échelonnée en degré) donc forme une base de F : $\dim(F) = 3$.
Complétons cette base : on remarque que les degrés de la famille $\mathcal{F}$ sont respectivement $4, 3$ et 2. Ainsi,

$$\mathrm{Vect}\left(((X-2)(X-4)X^2, (X-2)(X-4)X, (X-2)(X-4), X, 1)\right)$$

est une famille libre car échelonnée en degré, de cardinal 5, égal à la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$: il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_4[X]$. On peut alors conclure que $G = \mathrm{Vect}(X, 1)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 6

Nous sommes en dimension finie. On va utiliser les propriétés sur les dimensions.
1. Remarquons que $x + 3y + 2z = 0 \iff x = -3y - 2z$. Ainsi

$$\begin{aligned} F &= \{(-2y-3z, y, z), \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((-2,1,0), (-3,0,1)). \end{aligned}$$

Les deux vecteurs sont non colinéaires, et on peut donc conclure que

$$\dim(F) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(G) = 1.$$

Par somme, $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(F) + \dim(G)$. Il reste simplement à montrer que l'intersection est réduite à 0. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = \lambda(1,2,3) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$. De plus, $x + 2y + 3z = 0$ et donc

$$\lambda + 4\lambda + 9\lambda = 0 \implies \lambda = 0.$$

Finalement, $(x,y,z) = (0,0,0)$ et $F \cap G = \{0\}$.
On peut donc conclure finalement que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Par propriété sur les polynômes, $X^3 \mid P$ si et seulement s'il existe Q tel que $P = X^3 Q$ avec $\deg(Q) = \deg(P) - 3 = n - 3$. Ainsi, $X^3 \mid P$ si et seulement s'il existe $(a_0, \dots, a_{n-3}) \in \mathbb{R}^{n-3}$ tels que

$$P = X^3(a_0 + a_1 X + \dots + a_{n_3} X^{n-3}) = a_0 X^3 + a_1 X^4 + \dots + a_{n-3} X^n.$$

La famille $(X^3, \dots, X^n)$ est donc génératrice de G, et est libre car échelonnée en degré. Ainsi

$$\dim(G) = n - 2.$$

De même, F est de dimension 3 puisque la famille $(X(X-1), (X-1)(X-2), X(X-2))$ est libre. En effet, s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $aX(X-1) + b(X-1)(X-2) + cX(X-2) = 0$, alors en appliquant en 0, 1 et 2, on obtient successivement $b = 0$, puis $c = 0$ et finalement $a = 0$.
Ainsi, $\dim(F) + \dim(G) = 3 + (n-2) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Montrons que la somme est directe pour pouvoir conclure.

Soit $P \in F \cap G$. Puisque $P \in F$, P est de degré 2 au maximum, puisque combinaison linéaire de polynôme de degré 2. Or, puisque $P \in G$, $X^3 \mid P$ donc 0 est racine au moins triple de P. Etant de degré 2, cela implique que $P = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$.
Par théorème sur les dimensions, on en conclut donc que $\mathbb{R}_n[X] = F \oplus G$.

Exercice 7

Pour montrer l'existence et l'unicité, on va utiliser le théorème de caractérisation d'une application linéaire sur une base.
Pour montrer l'existence et l'unicité de l'endomorphisme f, il suffit de vérifier que la famille $\mathcal{F} = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Le théorème de caractérisation nous confirmera l'existence et l'unicité. La famille $\mathcal{F}$ est de cardinal la dimension de $\mathbb{R}^3$. Il suffit de montrer la liberté. Or remarquons que

$$a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,1)=(0,0,0) \iff \begin{cases} a+b \quad\; = 0 \\ a \quad\; + c = 0 \\ \quad\; b + c = 0 \end{cases} \iff a=b=c=0.$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est libre, et de bon cardinal : elle forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Pour déterminer le rang, on va utiliser deux méthodes : la détermination de l'image, et la détermination du noyau puis le théorème du rang.

- Détermination de l'image. Par théorème,

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left((1,2,0),(3,-1,2),(5,3,2)\right).$$

Constatons que la famille n'est pas libre. En effet :

$$2(1,2,0)+(3,-1,2)=(5,3,2).$$

Ainsi

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left((1,2,0),(5,3,2)\right)$$

et cette famille est libre puisque les vecteurs sont non colinéaires. On peut donc conclure que $((1,2,0),(3,-1,2))$ forme une base de $\mathrm{Im}\,(f)$, et finalement

$$\boxed{\mathrm{rg}(f)=2.}$$

- Deuxième méthode : déterminons le noyau de f. Tout d'abord, puisque $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. Mais alors

$$\begin{aligned}
x(1,1,0)+y(1,0,1)+z(0,1,1) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff x(1,2,0)+y(3,-1,2)+z(5,3,2)=(0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} x+3y+5z=0 \\ 2x-\ y+3z=0 \\ \quad 2y+2z=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+3y+5z=0 \\ -7y-7z=0 \\ \quad 2y+2z=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+3y+5z=0 \\ y \quad = -z \\ \quad z=z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R} \\
&\iff \begin{cases} x=-2z \\ y=-z \\ z=\ z \end{cases}, z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{-2z(1,1,0) - z(3,-1,2) + z(5,3,2), \quad z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0,2z,0), z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0,2,0)).\end{aligned}$$

Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ (le vecteur étant non nul). D'après le théorème du rang (puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie) :

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2.}$$

Exercice 8

1. Si $a \neq 0$, le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans E_a, donc E_a ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Si $a = 0$, on peut montrer que E_0 est bien un s.e.v. (par exemple, comme ensemble de solutions d'un système homogène linéaire de 1 équation à 3 inconnues.

2. Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda X + Y) &= f\begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda y + y') - (\lambda z + z') \\ (\lambda z + z') - (\lambda x + x') \\ (\lambda x + x') - (\lambda y + y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(y-z) + y' - z' \\ \lambda(z-x) + z' - x' \\ \lambda(x-y) + x' - y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y'-z' \\ z'-x' \\ x'-y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(X) + f(Y) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même : c'est un endomorphisme.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(X) = 0$ nous donne $\begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $x = y = z$.

Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Nous sommes en dimension finie. D'après ce qui précède, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ (engendré par un vecteur non nul). Par le théorème du rang

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

et donc $\mathrm{rg}(f) = 3 - 1 = 2$. f n'est pas injective (car son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$) et n'est pas surjective (puisque son rang ne vaut pas 3, la dimension de l'espace d'arrivée).

4. Remarquons que

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une base de E_0 et $\dim(E_0) = 2$. Ainsi, $\text{rg}(f) = \dim(E_0) = 2$. Il suffit de montrer une inclusion pour pouvoir conclure.

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}\,(f)$. Il existe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$. Mais alors

$$a+b+c = (y-z)+(z-x)+(x-y) = 0$$

et donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_0$. Donc $\text{Im}\,(f) \subset E_0$ et par égalité des dimensions, $\text{Im}\,(f) = E_0$.

5. Nous sommes en dimension finie. Puisque $\dim(\text{Im}\,(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = 2+1 = 3 = \dim(\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, il suffit de montrer que $\text{Im}\,(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont en somme directe pour conclure qu'ils sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \text{Im}\,(f) \cap \text{Ker}(f)$. D'après ce qui précède, X s'écrit $X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ (car $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$) avec $x \in \mathbb{R}$. Mais de plus, $X \in \text{Im}\,(f) = E_0$. Donc ses coordonnées vérifient l'équation $x+y+z = 0$, ce qui donne ici $x+x+x = 0$, et donc $x = 0$. Ainsi, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bilan : $\text{Im}\,(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$, et puisque $\dim(\text{Im}\,(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, on en déduit que $\text{Im}\,(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 9

1. Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$, et λ un réel. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q) - X(\lambda P+Q)' \\ &= \lambda P + Q - X\lambda P' - XQ' \\ &= \lambda(P - XP') + Q - XQ' \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire. Si P est de degré maximum 4, P' est de degré maximum 3, et donc XP' est également de degré 4 au maximum. Ainsi, $f(P) \in \mathbb{R}_4[X]$ et f est donc un endomorphisme.
2. Soit $P \in \text{Ker}(f)$. On écrit P dans la base canonique $P = a+bX+cX^2+dX^3+eX^4$. P est dans le noyau si et seulement si

$$a+bX+cX^2+dX^3+eX^4 - X(b+2cX+3dX^2+4eX^3) = 0 \iff a - cX^2 - 2dX^3 - 3eX^4 = 0.$$

Après identification, on obtient $a = c = d = e = f = 0$, et donc

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(X)$$

3. D'après le théorème du rang (on est en dimension finie), on a

$$\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_4[X]) \Leftrightarrow \text{rg}(f) = 5-1 = 4$$

On détermine l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$:

$$f(1) = 1,\ f(X) = 0,\ f(X^2) = -X^2,\ f(X^3) = -2X^3 \quad \text{et} \quad f(X^4) = -3X^4.$$

Ainsi, $(1, -X^2, -2X^3, -3X^4)$ est génératrice et de bon cardinal (car $\text{rg}(f) = 4$) : c'est une base de l'image :

$$\text{Im}\,(f) = \text{Vect}(1, -X^2, -2X^3, -3X^4) = \text{Vect}(1, X^2, X^3, X^4)$$

Exercice 10

On est en dimension finie. Par définition, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \in \{0,1,2,3\}$, de même pour $\mathrm{rg}(f)$.
Remarquons que $f^2 \neq 0$ donc $f \neq 0$: $\mathrm{rg}(f) \geqslant 1$. De plus, $\mathrm{rg}(f) \neq 3$ car sinon, f est surjective et donc bijective en dimension finie ; et dans ce cas f^3 ne peut être nulle.
Finalement, $\mathrm{rg}(f) \in \{1,2\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \in \{1,2\}$.
Puisque $f^2 \neq 0$, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$. De fait, $x \neq 0$. Notons alors $\mathcal{B} = (f(x), f^2(x))$ et montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathrm{Im}\,(f)$, ce qui nous permettra de conclure que $\mathrm{rg}(f) \geqslant 2$ et donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.
Tout d'abord, par définition, $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$ et $f^2(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$.
Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda f(x) + \mu f^2(x)$. En appliquant f et par linéarité

$$f(\lambda f(x) + \mu f^2(x)) = \lambda f^2(x) + \mu f^3(x) = \lambda f^2(x) + 0 \text{ car } f^3 = 0$$

Ainsi, puisque $f(x) \neq 0$, $\lambda = 0$ et finalement $\mu f^2(x) = 0$, soit $\mu = 0$.
La famille $(f(x), f^2(x))$ est libre dans $\mathrm{Im}\,(f)$, donc $\mathrm{rg}(f) \geqslant 2$ et finalement $\mathrm{rg}(f) = 2$.
Par le théorème du rang :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - \mathrm{rg}(f) = 1.}$$

Exercice 11

1. f est bien une application linéaire. En effet, si $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X) = \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc $P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$. Il s'agit donc bien d'un endomorphisme.
Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, $P(X+1) - P(X) = 0$, soit $P(X+1) = P(X)$. On en déduit donc que pour tout entier q, $P(q) = P(0)$ (par récurrence rapide sur p). Remarquons alors que $P(X) - P(0)$ est un polynôme de degré au maximum n, ayant une infinité de racine : il est donc nul. On en déduit que $P(X) = P(0)$ est un polynôme constante. Réciproquement, si P est constant, il vérifie $P(X+1) - P(X) = 0$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}[X].}$$

Soit $P \in \mathrm{Im}\,(f)$. Il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = Q(X+1) - Q(X)$. Or $Q(X)$ et $Q(X+1)$ ont le même coefficient dominant. Par soustraction, $\dim(P) \leqslant n-1$. Ainsi, $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or, le théorème du rang (puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie) garantit que

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n + 1 - 1 = n.$$

Puisque $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n = \dim(\mathrm{Im}\,(f))$, on peut conclure que

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

2. Le résultat précédent garantit que, $f : \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_{n+1}[X]$ définie par $f(P) = P(X+1) - P(X)$, vérifie $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi,

$$\forall\, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \exists\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad Q = f(P) = P(X+1) - P(X).$$

3. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soient P, R deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $Q = P(X+1) - P(X) = R(X+1) - R(X)$. Ainsi, $(P-R)(X+1) = (P-R)(X)$. En utilisant le même résultat vu dans la première question, on en déduit que $P - R$ est constant, et donc P et R diffèrent d'un réel. Réciproquement, s'ils diffèrent d'un réel, ils vérifient $f(P) = f(R)$.

Exercice 12

Tout d'abord, le sens réciproque, qui est le plus simple. S'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\varphi = \lambda\psi$, alors, puisque $\lambda \neq 0$:

$$x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(x) = 0 \iff \lambda\psi(x) = 0 \iff \psi(x) = 0 \iff x \in \mathrm{Ker}(\psi).$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$.
Réciproquement, supposons que $H = K$. Puisqu'on est en dimension finie, il existe $u \in E$ tel que $H \oplus \mathrm{Vect}(u) = E$.
Soit alors $x \in E$. Il existe $v \in H$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $x = v + \mu u$. Mais alors, par linéarité de φ :

$$\varphi(x) = \varphi(v) + \mu\varphi(u) = \mu\varphi(u).$$

Puisque $H = K$, $\psi(v) = \varphi(v)$ car $v \in \mathrm{Ker}(\varphi) = H = K = \mathrm{Ker}(\psi)$. Ainsi

$$\psi(x) = \mu\psi(u).$$

Remarquons que $\varphi(u) \neq 0$ et $\psi(u) \neq 0$ car φ et ψ ne sont pas identiquement nulles. Mais alors

$$\varphi(x) = \mu\varphi(u) = \mu\frac{\psi(x)}{\psi(u)}\varphi(u) = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}\psi(x).$$

En notant $\lambda = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$, et le résultat précédent étant vrai pour tout x :

$$\varphi = \lambda\psi$$

et φ et ψ sont bien colinéaires.

Exercice 13

Soient H et K deux hyperplans de E. Tout d'abord, $H+K$ est de dimension $n-1$ ou n (puisque $H \subset H+K \subset E$). Or, d'après la formule de Grassmann :

$$\dim(H+K) = \dim(H) + \dim(K) - \dim(H \cap K)$$

on en déduit que

$$n-1 \leqslant n-1+n-1-\dim(H\cap K) \leqslant n \implies \boxed{n-2 \leqslant \dim(H\cap K) \leqslant n-1.}$$

Or, si $\dim(H \cap K) = n-1$, puisque $H \cap K \subset H$, cela induit par égalité des dimensions que $H \cap K = H$, ainsi $K \subset K$, puis $K = H$ par égalité des dimensions : c'est absurde, car les hyperplans sont distincts.
Finalement

$$\boxed{\dim(H\cap K) = n-2.}$$

Exercice 14

Montrons le par récurrence descendante sur p. Soit P la proposition définie pour $p \in [\![1, n]\!]$ par « $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) \leqslant \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) + n - p$ ».

- Pour $p = n$, on a immédiatement que

$$\mathrm{rg}(x_1, \dots x_n) \leqslant \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) + n - n = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n).$$

Ainsi P_n est vérifiée.

- Supposons la proposition P vérifiée pour un certain entier $p \in [\![2, n]\!]$, et montrons que P_{p-1} est vérifiée.

Par hypothèse de récurrence,

$$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) \leqslant \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) + n - p.$$

Or,

– si $x_p \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{p-1})$, $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{p-1})$ et donc
$$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_{p-1});$$
– sinon, $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{p-1}) \oplus \mathrm{Vect}(x_p)$ et donc
$$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_{p-1}) + 1.$$

Dans tous les cas
$$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_{p-1}) + 1$$
soit, en utilisant l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) &\leqslant \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) + n - p \\ &\leqslant (\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_{p-1}) + 1) + n - p \\ &\leqslant \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_{p-1}) + n - (p-1).\end{aligned}$$
Ainsi, P_{p-1} est vérifiée.
On conclut par récurrence descendante :
$$\boxed{\forall\, p \in [\![1,\, n]\!], \quad \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) \leqslant \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) + n - p.}$$

Exercice 15

1. Tout d'abord, $\mathrm{Im}\,(f) \subset E$ et donc $\mathrm{rg}(f) \leqslant n$. Si $\mathrm{rg}(f) = n$, alors f est surjective, et donc bijective puisqu'on est en dimension finie. Or $f^k = 0$, et en appliquant f^{-1} $k-1$ fois, on obtient $f = 0$, ce qui est absurde, car $f = 0$ n'est pas bijective.
Finalement, $\boxed{\mathrm{rg}(f) \leqslant n - 1.}$
2. Puisque p est le plus petit entier tel que $f^p = 0$, il existe au moins un vecteur $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$. Montrons alors que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre. Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1})$ des réels tels que
$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$$
(en notant que $f^0(x_0) = \mathrm{id}(x_0) = x_0$). Supposons que les λ_i ne sont pas tous nuls.
Prenons le plus petit entier $i_0 \in [\![1,\, p-1]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Ainsi, la relation s'écrit
$$\underbrace{\sum_{i=0}^{i_0-1} \lambda_i f^i(x_0)}_{=0} + \sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0 \text{ soit } \sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$$
En appliquant f^{p-i_0-1}, et par linéarité, on obtient alors
$$\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i f^{p+i-i_0-1}(x_0) = 0$$
et par nilpotence de f, $f^{p+i-i_0-1} = 0$ pour $i > i_0$. Finalement, il vient
$$\lambda_{i_0} f^{p-1}(x_0) = 0$$
et puisque $f^{p-1}(x_0) \neq 0$ par hypothèse, $\lambda_{i_0} = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.
Finalement, tous les λ_i sont nuls et la famille est libre.
3. En dimension finie, une famille libre a, au plus, $n = \dim(E)$ éléments. Puisque la famille $(x_0, \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre, on en déduit que le nombre d'éléments, p est plus petit que n : $\boxed{p \leqslant n}$.

Remarque
C'est un résultat important et une démonstration classique : si une application est nilpotente en dimension finie, son ordre de nilpotence est forcément inférieur ou égal à la dimension de l'espace.

Exercice 16

Nous sommes en dimension finie. Il existe donc une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Par hypothèse

$$\forall\, i \in [\![1,\, n]\!],\ \exists p_i \in \mathbb{N}, \quad f^{p_i}(e_i) = 0.$$

Posons alors $p = \max(p_1, \dots, p_n)$. Par composition :

$$\forall\, i \in [\![1,\, n]\!], \quad f^p(e_i) = f^{p-p_i}\left(f^{p_i}(e_i)\right) = 0.$$

Mais alors, pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Par linéarité de f^p :

$$f^p(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^p(e_i) = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, $f^p(x) = 0$: f est bien nilpotente.
En dimension infinie, on peut prendre pour f la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, en dérivant suffisamment de fois, il existe n tel que $f^n(P) = 0$. Pour autant, la dérivation n'est pas une application nilpotente. En effet, si on suppose qu'il existe n tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])}$, en prenant $P = X^n$, on obtient une absurdité : $n! = 0$.

Exercice 17

Montrons que $\mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$. On raisonnera alors par dimension. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(f+g)$. Il existe donc $y \in E$ tel que $x = (f+g)(y)$. Or

$$x = (f+g)(y) = f(y) + g(y) \in \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g).$$

L'inclusion est donc montrée, et puisqu'on est en dimension finie , on peut en déduire que

$$\dim(\mathrm{Im}\,(f+g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)).$$

Or, d'après la formule de Grassmann,

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)) &= \dim(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(g)) - \underbrace{\dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g))}_{\geqslant 0} \\ &\leqslant \dim(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(g)). \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathrm{rg}(f+g) = \dim(\mathrm{Im}\,(f+g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(g)) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Appliquons cette inégalité deux fois :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) &= \mathrm{rg}(f-g+g) \leqslant \mathrm{rg}(f-g) + \mathrm{rg}(g) \\ \mathrm{rg}(g) &= \mathrm{rg}(g-f+f) \leqslant \mathrm{rg}(g-f) + \mathrm{rg}(f). \end{aligned}$$

Or, $\mathrm{Im}\,(f-g) = \mathrm{Im}\,(g-f)$. En effet,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Im}\,(f-g) &\implies \exists y \in E, \quad x = f(y) - g(y) \\ &\implies \exists y \in E, \quad x = -f(-y) - (-g(-y)) \text{ par linéarité} \\ &\implies \exists y \in E, \quad x = g(-y) - f(-y) \in \mathrm{Im}\,(g-f) \end{aligned}$$

La réciproque se fait de la même manière.
Finalement

$$\operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg}(f-g) + \operatorname{rg}(g) \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(g) \leqslant \operatorname{rg}(f-g) + \operatorname{rg}(g)$$

ce qui donne

$$\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) \leqslant \operatorname{rg}(f-g) \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(g) - \operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg}(f-g)$$

soit finalement

$$\boxed{|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f-g).}$$

Exercice 18

Tout d'abord, puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de dimension 3, $\operatorname{rg}(f) \in [\![0, 3]\!]$ et $\dim(\operatorname{Ker}(f)) \in [\![0, 3]\!]$.
Raisonnons par contraposée. Supposons $\operatorname{Ker}(f) \not\subset \operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(f) \not\subset \operatorname{Ker}(f)$. Nécessairement, $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$ et $\operatorname{Im}(f) \neq \{0\}$: f n'est pas injective, et donc pas surjective (car en dimension finie). Ainsi

$$\operatorname{rg}(f) \in [\![1, 2]\!] \quad \text{et} \quad \dim(\operatorname{Ker}(f) \in [\![1, 2]\!].$$

• Si $\operatorname{rg}(f) = 1$. Prenons $e_1 \in \operatorname{Im}(f)$ tel que $e_1 \notin \operatorname{Ker}(f)$ (existe par hypothèse). Ainsi $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(e_1)$. Mais alors $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$. En effet, si $x \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda e_1$ mais alors, puisque $e_1 \notin \operatorname{Ker}(f)$, $x \notin \operatorname{Ker}(f)$ sauf si $\lambda = 0$.
Finalement, $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$ et d'après la formule du rang $\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$: on en déduit que $\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$.
• Si $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$, notons $e_1 \in \operatorname{Ker}(f)$ tel que $e_1 \notin \operatorname{Im}(f)$. Le même raisonnement que précédemment impose que $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$ et les espaces $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 19

1. Montrons que $(x_1, \dots, x_p, f(x_1), \dots, f(x_p))$ est libre. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p)$ des réels tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i f(x_i) = 0 \quad (1).$$

Appliquons f, et utilisons $f^2 = -\operatorname{id}_E$. Par linéarité

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i f(x_i)\right) &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i f^2(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \quad (2). \end{aligned}$$

Effectuons alors l'opération $\lambda_p(1) - \mu_p(2)$. Cela donne

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\lambda_i \lambda_p + \mu_i \mu_p\right) x_i + \sum_{i=1}^{p-1} \left(\mu_i \lambda_p - \lambda_i \mu_p\right) f(x_i) = 0$$

Par liberté de la famille $(x_1, \dots, x_p, f(x_1), \dots, f(x_{p-1}))$, on en déduit que

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!], \quad \lambda_i \lambda_p + \mu_i \mu_p = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, i \in [\![1, p-1]\!], \quad \mu_i \lambda_p - \lambda_i \mu_p = 0.$$

Pour $i = p$, on obtient alors

$$\lambda_p^2 + \mu_p^2 = 0$$

soit $\lambda_p = \mu_p = 0$. La relation (1) s'écrit alors

$$\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{p-1} \mu_i f(x_i) = 0 \quad (1)$$

et par liberté de la famille $(x_1, \ldots, x_p, f(x_1), \ldots, f(x_{p-1}))$,

$$\forall\, i \in [\![1, p-1]\!], \quad \lambda_i = \mu_i = 0.$$

Ainsi, la famille $(x_1, \ldots, x_p, f(x_1), \ldots, f(x_p))$ est bien libre.
2.
a) Si $x_1 \neq 0$, la famille (x_1) est libre. Le résultat précédent garantit que $(x_1, f(x_1))$ est libre.
b) Si $n \neq 2$, la famille $(x_1, f(x_1))$ est libre mais ne peut pas être génératrice, car sinon $(x_1, f(x_1))$ est une base de E et $\dim(E) = 2$. Finalement, n'étant pas génératrice, il existe $x_2 \in E$ tel que $x_2 \notin \text{Vect}(x_1, f(x_1))$. Ainsi, la famille $(x_1, f(x_1), x_2)$ est libre.
c) On applique le résultat de la question 1 : $(x_1, x_2, f(x_1))$ est libre, donc $(x_1, x_2, f(x_1), f(x_2))$ est également libre. Mais alors, il existe une famille libre de cardinal 4, donc $n \geqslant 4$.
3. On réitère le processus de la question 2. Supposons qu'à un certain rang k, la famille $(x_1, \ldots, x_k, f(x_1), \ldots, f(x_k))$ est génératrice. Alors étant libre, elle forme une base et $\dim(E) = 2k$ est pair.
Si elle n'est pas génératrice, il existe un vecteur $x_{k+1} \in E$ tel que $x_{k+1} \notin \text{Vect}(x_1, \ldots, x_k, f(x_1), \ldots, f(x_k))$.
Mais alors, la famille $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, f(x_1), \ldots, f(x_k))$ est libre, et d'après la question 1,
$(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, f(x_1), \ldots, f(x_{k+1}))$ est également libre. Ainsi, on a construit une nouvelle famille composée de deux nouveaux vecteurs libres.
Ce processus s'arrêtera puisque E est de dimension fini.

Exercice 20

1. u est un endomorphisme. Constatons que :

$$u^2 - 2u + \text{id} = 0 \iff u\,(u - 2\text{id}) = -\text{id} \iff u\,(2\text{id} - u) = \text{id}.$$

Par critère, étant en dimension finie, u est bijective et $u^{-1} = 2\text{id} - u$. Ainsi,

$$\boxed{u \text{ est un automorphisme de } E.}$$

2. Soit $x \in \text{Im}\,(u - \text{id})$. Il existe y tel que $x = (u - \text{id})(y) = u(y) - y$. Mais alors, par linéarité de u :

$$\begin{aligned}(u - \text{id})(x) &= u(u(y) - y) - (u(y) - y)\\ &= u^2(y) - u(y) - u(y) + y = u^2(y) - 2u(y) + y = 0\end{aligned}$$

puisque $u^2 - 2u + \text{id} = 0$. Ainsi, $x \in \text{Ker}(u - \text{id})$ et $\text{Im}\,(u - \text{id}) \subset \text{Ker}(u - \text{id})$.
Étant en dimension finie, on peut donc en déduire que $\text{rg}(u - \text{id}) \leqslant \dim(\text{Ker}(u - \text{id}))$. Mais le théorème du rang nous donne également que

$$\text{rg}(u - \text{id}) + \dim(\text{Ker}(u - \text{id})) = n.$$

Finalement, en utilisant ces deux résultats :

$$n = \text{rg}(u - \text{id}) + \dim(\text{Ker}(u - \text{id})) \leqslant 2\dim(\text{Ker}(u - \text{id}))$$

et donc

$$\boxed{\dim(\text{Ker}(u - \text{id})) \geqslant \frac{n}{2}.}$$

3.

a) Le théorème du rang nous garantit que $\mathrm{rg}(u-\mathrm{id}) = n - \dim(\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})) = 1$. Ainsi, si $e_1 \in \mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id})$ est non nul, (e_1) forme une famille libre et de bon cardinal de $\mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id})$: (e_1) forme donc une base de $\mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id})$.
Puisque $\mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$, on peut compléter la famille (e_1) en une base de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$, que l'on note $(e_1, \dots, e_{n-1})$ (dimension finie, avec $\dim(\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})) = n-1$).
Enfin, puisque $e_1 \in \mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id})$, il existe $e_n \in E$ tel que $e_1 = (u-\mathrm{id})(e_n) = u(e_n) - e_n$, ce qui se note également $u(e_n) = e_1 + e_n$.
On a donc bien construit une famille $(e_2, \dots, e_n)$ qui vérifie les critères de l'énoncé.
b) Montrons que cette famille est libre. Cela suffira pour conclure, puisqu'elle sera de bon cardinal. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. En appliquant $u - \mathrm{id}$, et puisque $(e_1, \dots, e_{n-1})$ sont des éléments de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$, il reste

$$\lambda_n (u-\mathrm{id})(e_n) = 0 \iff \lambda_n (u(e_n) - e_n) = \lambda_n e_1 = 0.$$

Or $e_1 \neq 0$ par hypothèse : $\lambda_n = 0$. La relation devient alors

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i = 0.$$

Or, par construction, $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$, donc est une famille libre : on peut en déduire que $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.
Finalement, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, de cardinal égal à la dimension de E : $(e_1, \dots, e_n)$ forme une base de E.

Exercice 21

1. La dérivée est une application linéaire sur E : si $(f, g) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a bien évidemment $d(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda d(f) + d(g)$.
Remarquons que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$f_k' : x \longmapsto k x^{k-1} \mathrm{e}^{-x} - x^k \mathrm{e}^{-x}$$

et pour $k = 0$, $f_0' = -f_0$. Ainsi $d(f_k) \in E_n$. Ceci étant valable pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et la famille $(f_0, \dots, f_n)$ engendrant E_n, on peut conclure que E_n est stable par d.
2. La famille $(f_0, \dots, f_n)$ est génératrice de E_n. Montrons la liberté. Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$. Mais alors, pour tout réel x et en multipliant par e^{-x} :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i \mathrm{e}^{-x} = 0 \iff \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i = 0.$$

Ainsi, le polynôme $x \longmapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$ est nul, donc tous ses coefficients le sont : $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$.
La famille est donc libre, et finalement forme bien une base de E_n.
3. Rapidement (calcul déjà fait en 1), $d_n(f_0) = -f_0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$d_n(f_k) : x \longmapsto k x^{k-1} \mathrm{e}^{-x} - x^k \mathrm{e}^{-x} = k f_{k-1}(x) - f_k(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a donc bien $d_n(f_k) = k f_{k-1} - f_k$.
4. Par combinaison linéaire usuelle :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}(-g_0, g_0 - g_1, g_1 - g_2, \dots, g_{n-1} - g_n) &= \mathrm{Vect}(-g_0, -g_1, g_1 - g_2, \dots, g_{n-1} - g_n) \\
&= \mathrm{Vect}(-g_0, -g_1, -g_2, g_2 - g_3, \dots, g_{n-1} - g_n) \\
&= \mathrm{Vect}(-g_0, -g_1, \dots, -g_n) \text{ en réitérant le processus.}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\mathrm{Vect}(-g_0, g_0 - g_1, g_1 - g_2, \dots, g_{n-1} - g_n) = \mathrm{Vect}\left(-f_0, -f_1, -\frac{f_2}{2}, \dots, -\frac{f_n}{n!}\right) = \mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_n) = E_n.$$

La famille étant de bon cardinal, et génératrice, on peut conclure qu'il s'agit d'une base de E_n.

5.
a) En utilisant la question 3 :

$$\begin{aligned}\forall\, k \in [\![1,\, n]\!], \quad d_n(g_k) &= d_n\left(\frac{f_k}{k!}\right)\\ &= \frac{1}{k!} d_n(f_k) \text{ par linéarité}\\ &= \frac{1}{k!}\left(kf_{k-1} - f_k\right) = \frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k = g_{k-1} - g_k.\end{aligned}$$

b) Remarquons que $d_n(f_0) = -g_0$ et d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1,\, n]\!]$:

$$d_n(f_k) = d_n(k!g_k) = k!(g_{k-1} - g_k).$$

Ainsi, d_n transforme la base $(f_0, \dots, f_n)$ en la base $(-g_0, g_0 - g_1, \dots, g_{n-1} - g_n)$. Par critère, d_n est donc une application bijective de E_n.
c) Suivons l'indication :

$$\sum_{i=1}^{j} d_n(g_i) = \sum_{i=1}^{j} g_{k-1} - g_k = g_0 - g_j \text{ par telescopage.}$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1,\, n]\!]$:

$$g_j = g_0 - \sum_{i=1}^{j} d_n(g_i) = -\sum_{i=0}^{j} d_n(g_i) \text{ car } g_0 = -d_n(g_0).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}f_j = j!g_j &= j!\left(-\sum_{i=0}^{j} -d_n(g_i)\right)\\ &= \sum_{i=0}^{j} d_n(-j!g_i)\\ &= \sum_{i=0}^{j} d_n\left(-\frac{j!}{i!} f_i\right)\end{aligned}$$

Par composition par d_n^{-1} qui est linéaire :

$$\begin{aligned}\forall\, j \in [\![1,\, n]\!], \quad d_n^{-1}(f_j) &= \sum_{i=0}^{j} d_n^{-1}\left(d_n\left(-\frac{j!}{i!} f_i\right)\right)\\ &= \sum_{i=0}^{j} -\frac{j!}{i!} f_i.\end{aligned}$$

Ce résultat est valable pour $j = 0$, puisque $d_n(f_0) = -f_0$ donc $d_n^{-1}(f_0) = -f_0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall\, j \in [\![1,\, n]\!], \quad d_n^{-1}(f_j) = -\sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!} f_i.}$$

Exercice 22

1. Il faut d'abord montrer la linéarité. Soient (P, Q) deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, et λ un réel. Alors

$$\begin{aligned}f(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(a_0), \dots, (\lambda P + Q)(a_n))\\ &= (\lambda P(a_0) + Q(a_0), \dots, \lambda P(a_n) + Q(a_n))\\ &= \lambda(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) + (Q(a_0), \dots, Q(a_n)) = \lambda f(P) + f(Q).\end{aligned}$$

De plus, f est injective. En effet, si $P \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n)) = (0, \dots, 0)$. Ainsi, $(a_0, \dots, a_n)$ sont des racines de P, deux-à-deux distinctes par hypothèse. Or $P \in \mathbb{R}_n[X]$: P est de degré au plus n et admet $n+1$ racines distinctes. Cela implique que $P = 0$.

f est donc une application linéaire injective de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, espaces vectoriels de dimension $n+1$ tous les deux. Par théorème, elle est bijective.

$\boxed{f \text{ est un isomorphisme.}}$

2. f étant bijective, par définition, pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = (b_0, \dots, b_n)$, c'est-à-dire

$$\forall\, i \in [\![0,\, n]\!], \quad P(a_i) = b_i.$$

3. Soient $(e_1, \dots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $i \in [\![0,\, n]\!]$. Posons

$$P_i = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (X - a_k)$$

Alors

$$\forall\, k \neq i, \quad P_i(a_k) = 0 \quad \text{et} \quad P_i(a_i) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (a_i - a_k) \neq 0$$

Ainsi,

$$f(P_i) = (0, \dots, 0, \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (a_i - a_k), 0, \dots, 0) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (a_i - a_k) e_{i+1}.$$

Par linéarité, on peut donc conclure que

$$\forall\, i \in [\![1,\, n+1]\!], \quad f^{-1}(e_{i+1}) = \frac{P_i}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (a_i - a_k)} = \frac{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (X - a_k)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (a_i - a_k)}.$$

Finalement, par caractérisation d'une application linéaire sur une base :

$$\begin{aligned} \forall\, (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad f^{-1}(b_0, \dots, b_n) &= f^{-1}(b_0 e_1 + \dots + b_n e_{n+1}) \\ &= b_0 f^{-1}(e_1) + \dots + b_n f^{-1}(e_{n+1}). \end{aligned}$$

On peut conclure que

$$\boxed{\forall\, (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad f^{-1}(b_0, \dots, b_n) = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (X - a_k)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (a_i - a_k)}.}$$

Exercice 23

1. Nous sommes en dimension finie, on peut donc utiliser le théorème du rang. Ainsi,

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = E = \mathrm{rg}(f^2) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2)).$$

- Si $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$, cette égalité devient $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f^2))$. Or, $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ puisque si $x \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(x) = 0$ et par composition $f(f(x)) = f^2(x) = 0$. Par inclusion et égalité des dimensions, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

• Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, l'égalité devient $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$. Or, $\mathrm{Im}\,(f^2) \subset \mathrm{Im}\,(f)$ puisque si $x \in \mathrm{Im}\,(f^2)$ alors il existe $y \in E$ tel que $x = f^2(y) = f(f(y)) \in \mathrm{Im}\,(f)$. Par inclusion et égalité des dimensions, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$.
• Supposons $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$. Tout d'abord, le théorème du rang nous donne déjà $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(E)$. Il reste à montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$ pour pouvoir conclure. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et $f(x) = 0$. Cela devient $f^2(y) = 0$: $y \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Or $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$: $f(y) = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. On peut donc conclure que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$ et finalement, par égalité de dimension, que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$.
• Enfin, supposons $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$ et montrons que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$, ce qui permettra de conclure puisqu'on a déjà montré que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2) \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
On a déjà l'inclusion $\mathrm{Im}\,(f^2) \subset \mathrm{Im}\,(f)$. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(f)$. Il existe donc $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Par supplémentarité, il existe $a \in \mathrm{Ker}(f)$ et $b \in \mathrm{Im}\,(f)$ tel que $y = a + b$, c'est-à-dire il existe $c \in E$ tel que $y = a + f(c)$. En appliquant f, on en déduit

$$f(y) = \underbrace{f(a)}_{=0} + f^2(c) = f^2(c).$$

Or $f(y) = x$, donc $x = f^2(c) \in \mathrm{Im}\,(f^2)$.
2. Si $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}(f)$, le théorème du rang nous donne $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2\mathrm{rg}(f) = n$ et donc n est pair.
Réciproquement, supposons n pair, qu'on écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ une base de E (qui existe car de dimension finie). Définissons f par la caractérisation sur une base : soit f l'unique application linéaire vérifiant :

$$\forall\, i \in [\![1,\, p]\!], \quad f(e_i) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, i \in [\![p+1,\, 2p]\!], \quad f(e_i) = e_{i-p}.$$

Par définition, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et toujours par définition

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_{2p})) = \mathrm{Vect}(0, \dots, 0, e_1, \dots, e_p) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p).$$

Ainsi, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}(f)$.
3. Tout d'abord, nous avons vu plusieurs fois que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$. Puisqu'on est en dimension finie, $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f^2))}$ car ce sont des sous-espaces vectoriels de E.
Soit g l'application $f|_{\mathrm{Im}\,(f)}$. g est linéaire de $\mathrm{Im}\,(f)$ dans E et le théorème du rang donne

$$\mathrm{rg}(g) + \dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{rg}(f).$$

Constatons que

$$x \in \mathrm{Ker}(g) \iff x \in \mathrm{Im}\,(f) \text{ et } f(x) = 0 \iff x \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(f).$$

Par ailleurs :

$$x \in \mathrm{Im}\,(g) \iff \exists y \in \mathrm{Im}\,(f), \quad x = f(y) \iff \exists z \in \mathrm{Im}\,(f), \quad x = f(f(z)) \iff x \in \mathrm{Im}\,(f^2).$$

Finalement

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f^2)) = \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f^2).$$

Or, le théorème du rang appliqué à f et f^2 nous donne également

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n = \mathrm{rg}(f^2) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2))$$

donc les deux relations précédentes s'écrivent

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Pour terminer, puisque $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, $\dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))$ et donc

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2\dim(\mathrm{Ker}(f)).}$$

Corrigés des sujets de concours

Sujet 1

Préliminaire

1. Nous sommes en dimension finie. Par propriété,
$$\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{R})) = \dim(E) \times \dim(R) = \dim(E) \times 1 = \dim(E).$$
Ainsi, E et E° ont même dimension.
2. a) Par définition, $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$, donc $\dim(\operatorname{Im}\varphi) \leqslant \dim(R) = 1$. Ainsi, la dimension de $\operatorname{Im}\varphi$ vaut 0 ou 1.
b) Si $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 0$, cela signifie que $\operatorname{Im}\varphi = \{0\}$: tout élément de E est envoyé sur 0 ; la fonction φ est donc la fonction nulle.
Si $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 1 = \dim(\mathbb{R})$, puisque $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$, par égalité des dimensions, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$: φ est surjective.
Finalement, φ est soit nulle, soit surjective.
c) Le théorème du rang, appliqué à φ, nous donne
$$\dim(E) = \dim(\ker\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi).$$
Si φ est non nulle, d'après ce qui précède, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 1$ et le théorème du rang donne alors
$$\boxed{\dim(\ker\varphi) = \dim(E) - 1 = n - 1.}$$
Ainsi, $\ker\varphi$ est un hyperplan.
3. Prenons la base canonique de $\mathbb{R}^p$, que l'on note $(e_1, \dots, e_p)$. Par linéarité de f, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on peut écrire
$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_p) &= f\left(x_1e_1 + \dots + x_pe_p\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} x_k f(e_k). \end{aligned}$$
Or, f étant une forme linéaire, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $f(e_k) \in \mathbb{R}$; notons alors λ_k le réel $f(e_k)$. On en déduit que, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$
$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{k=1}^{p} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k.$$

Partie I – Des exemples

4. a) Rapidement, g est linéaire. En effet, si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale :
$$g(\lambda P + Q) = \int_0^1 (\lambda P + Q)(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t = \lambda g(P) + g(Q).$$
Puisque $g : E \to \mathbb{R}$ est linéaire, g est une forme linéaire : $g \in E^*$.
b) g n'est pas nulle, puisque par exemple $g(1) = 1$. D'après le préliminaire, le noyau de g est un hyperplan de $\mathbb{R}_p[x]$ et donc
$$\boxed{\dim(\ker g) = (p+1) - 1 = p.}$$
c) Montrons tout d'abord que les polynômes Q_k sont dans le noyau de g.
Soit $k \in [\![1, p]\!]$. On calcule :
$$\begin{aligned} g(Q_k) &= \int_0^1 \left(x^k - \frac{1}{k+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x}{k+1}\right]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $Q_k \in \ker g$.
La famille $(Q_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est échelonnée en degré, sans polynôme nulle : elle est donc libre. Puisqu'elle est de bon cardinal (c'est-à-dire ici p, la dimension du noyau), il s'agit bien d'une base du noyau de g.
5. a) f est bien linéaire. En effet, pour tout $(P, Q) \in \mathrm{e}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = \lambda f(P) + f(Q).$$

Puisque $f : E \to \mathbb{R}$ est linéaire, il s'agit d'une forme linéaire : $f \in E^*$.
b) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \ker f$. Alors $f(0) = 0$ est équivalent à $a_0 = 0$. Ainsi

$$\boxed{\ker f = \{a^n X^n + \dots + a_1 X, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^n).}$$

6. a) f et g étant non nuls, d'après les préliminaires, $\dim(\ker f) = \dim(\ker g) = n-1$. Puisqu'on a l'inclusion $\ker f \subset \ker g$ et l'égalité des dimensions, on en conclut que $\ker f = \ker g$.
b) Puisque $\dim(\ker f) = n - 1 < \dim(E)$, il existe un élément x_0 de E qui n'appartient pas à $\ker f$.
c) Puisque $x_0 \notin \ker f$, $x_0 \neq 0$ et donc $\dim(\mathrm{Vect}(x_0)) = 1$. Ainsi, $\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Vect}(x_0)) = n - 1 + 1 = n = \dim(E)$. Il suffit donc de montrer que la somme est directe.
Pour cela, prenons $x \in \ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda x_0$. Puisque $x \in \ker f$, $f(x) = 0$, c'est-à-dire $\lambda f(x_0) = 0$. Or, par hypothèse, $f(x_0) \neq 0$, donc nécessairement $\lambda = 0$ et finalement $x = 0$.
Ainsi, $\ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0) = \{0\}$ et par égalité des dimensions, on en déduit bien que

$$\boxed{\ker f \oplus \mathrm{Vect}(x_0) = E.}$$

d) On va utiliser la décomposition précédente. Soit $x \in E$. Il existe $y \in \ker f$ et $z \in \mathrm{Vect}(x_0)$ tels que $x = y + z$. Puisque $z \in \mathrm{Vect}(x_0)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z = \lambda x_0$. Mais alors :

$$\begin{aligned} h(x) = h(y + \lambda x_0) &= g(x_0) f(y + \lambda x_0) - f(x_0) g(y + \lambda x_0) \\ &= g(x_0) f(y) + \lambda g(x_0) f(x_0) - f(x_0) g(y) - \lambda f(x_0) g(x_0) \text{ par linéarité} \\ &= g(x_0) f(y) - f(x_0) g(y). \end{aligned}$$

Or $y \in \ker f$, donc $f(y) = 0$. Mais, d'après la question 5a) $\ker f = \ker g$, donc $y \in \ker f = \ker g$ et finalement $g(y) = 0$. On conclut donc que $h(x) = 0$.
Ceci étant valable pour tout $x \in E$, on peut conclure que $\underline{h \text{ est l'application nulle.}}$
e) Puisque $f(x_0) \neq 0$, et qu'il s'agit d'un réel (car f est une forme linéaire), on peut écrire

$$g = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} f.$$

On a montré que les applications f et g sont colinéaires. Ainsi, si f et g sont des formes linéaires non nulles telles que $\ker f \subset \ker g$ alors f et g sont colinéaires.

Partie II – Hyperplans et formes linéaires

7. a) $(e_1, \dots, e_{n-1})$ étant une base de $H \subset E$, il s'agit d'une famille libre de E. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de E. Puisque $\dim H = \dim E - 1$, il existe donc un vecteur e_n tel que $(e_1, \dots, e_n)$ forme une base de E.
b) $(e_1, \dots, e_n)$ étant une base de E, φ est définie par l'image sur une base de E. L'application φ existe et est unique. φ étant non nulle (car $\varphi(e_n) \neq 0$), la dimension du noyau est $n - 1$. Remarquons que, par définition de φ :

$$\forall\, i \in [\![1, p-1]\!], \quad \varphi(e_i) = 0$$

et donc, pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, $e_i \in \ker \varphi$. Puisque $\ker \varphi$ est un espace vectoriel,

$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1}) \subset \ker \varphi \iff H \subset \ker \varphi.$$

Puisque $\dim(\ker \varphi) = \dim H$, on a bien démontré que $\ker \varphi = H$.

8. Raisonnons par double inclusion.
$\subset$ Soit $x \in \ker f$. Ainsi, $f(x) = (0, 0, \dots, 0)$, c'est-à-dire $f_i(x) = 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$: $x \in \ker f_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, c'est-à-dire $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker f$.
$\supset$ Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i$. Alors, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i(x) = 0$, et donc $f(x) = (0, \dots, 0)$: $x \in \ker f$.
9. a) Puisque f est surjective, tout élément de $\mathbb{R}^p$ admet au moins un antécédent par f. Puisque $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^p$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = \varepsilon_1$.
b) Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i f_i = 0.$$

Puisque $f(x) = \varepsilon_1$, on en déduit que $f(x) = (1, 0, \dots, 0)$, c'est-à-dire que $f_1(x) = 1, f_2(x) = 0, \dots f_p(x) = 0$. Appliquons l'égalité précédente en x :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = 0 \implies \lambda_1 = 0.$$

En procédant de même pour tout vecteur ε_i de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Ainsi, la famille $\underline{(f_1, \dots, f_p) \text{ est libre.}}$
10. a) Puisque f n'est pas surjective, $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^p$, et donc

$$\boxed{\dim(\operatorname{Im} f) \leqslant p - 1.}$$

b) Complétons la base de $\operatorname{Im} f$, $(e_1, \dots, e_m)$ en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Remarquons alors que, puisque $m \leqslant p - 1$:

$$\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_m) \subset \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1}) = H.$$

Puisque H est de dimension $p - 1$ (car la famille $(e_1, \dots, e_{p-1})$, extraite d'une base, est libre), H est un hyperplan. Ainsi, $\operatorname{Im} f$ est inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^p$.
c) D'après ce qui précède, $\operatorname{Im} f \subset H$, et d'après la question 6, $H = \ker \varphi$ pour une forme linéaire φ non nulle. Ainsi,

$$\forall\, x \in E, \quad \varphi(f(x)) = 0$$

Puisque φ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^p$, alors, d'après les préliminaires, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p.$$

Les λ_i ne sont pas tous nuls, puisque φ n'est pas nulle. Mais alors

$$\forall\, x \in E,\ \varphi(f(x)) = 0 \implies \forall\, x \in E,\ \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_p f(x) = 0$$

c'est-à-dire $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$: $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille liée.
11. a) On a montré à la question 9 que si f n'est pas surjective, alors $(f_1, \dots, f_p)$ est liée. Par contraposée, si $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, alors f est surjective.
b) Puisque f est surjective, $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^p) = p$. Le théorème du rang appliqué à f, nous donne

$$n = \dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\ker f) + p.$$

Or, d'après la question 7, $\ker f = \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i$. Finalement

$$\boxed{\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i\right) = n - p.}$$