

25

Chapitre

Sommes d'espaces vectoriels

Résumé

APRÈS avoir étudié les espaces vectoriels, nous allons nous intéresser à un cas particulier de sous-espace vectoriel : la somme de deux (ou plusieurs) sous-espaces vectoriels. Nous étudierons un cas particulier, le cas où la somme est directe, et nous verrons le lien entre les bases des sous-espaces vectoriels et une base de la somme directe.

Plan du cours

Chapitre 25. Sommes d'espaces vectoriels

I. Somme de sous-espaces vectoriels	3
II. Supplémentaire et projections	10
Exercices	15
Corrigés	17

« Être, c'est être la somme de tout ce qu'on a été. L'homme ne comprend et n'accepte l'immortalité qu'à condition de se souvenir. Être, pour la créature intelligente, c'est comparer perpétuellement ce qu'on a été avec ce qu'on est. »

Victor Hugo (1802 – 1885). *Choses vues*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

- ① Savoir déterminer la somme de deux (ou plusieurs) sous-espaces vectoriels ☐
- ② Savoir démontrer qu'une somme est directe..... ☐
- ③ Savoir démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires..... ☐
- ④ Déterminer une base (ou une famille génératrice) d'une somme connaissant une base (ou une famille génératrice) des s.e.v..... ☐
- ⑤ Savoir déterminer l'expression d'une projection sur F parallèlement à G ☐
- ⑥ Connaissant un projecteur, savoir déterminer sur quel s.e.v et parallèlement à quel s.e.v. ☐

I. Somme de sous-espaces vectoriels

1. Définition

Définition 25.1. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On appelle **somme** de F et G , et on note $F + G$ l'ensemble

$$F + G = \{u + v, \quad u \in F, \quad v \in G\}$$

Ainsi, un élément de $F + G$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Exemple 25.1

On a par exemple $\mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$, en notant $\mathbb{R}u_1$ la droite vectorielle engendrée par u_1 .

Proposition 25.1.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E , contenant F et G .

Démonstration

Tout d'abord, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , 0_E appartient à F et G . Mais alors $0_E + 0_E \in F + G$, et donc $0_E \in F + G$.

Soient ensuite u et v deux éléments de $F + G$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On écrit $u = u_F + u_G$ et $v = v_F + v_G$, avec $(u_F, v_F) \in F^2$ et $(u_G, v_G) \in G^2$. Mais alors, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E :

$$\lambda u + v = \lambda(u_F + u_G) + (v_F + v_G) = \underbrace{(\lambda u_F + v_F)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda u_G + v_G)}_{\in G} \in F + G$$

Ainsi, $\lambda u + v \in F + G$: $F + G$ est bien un sous-espace vectoriel de E .

Enfin, pour tout $u \in F$ et $v \in G$, on constate par définition que $u = u + 0_G \in F + G$ et $v = 0_F + v \in F + G$. Ainsi, $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$.

On peut généraliser à la somme de plusieurs sous-espaces vectoriels :

Définition 25.2. Somme de n sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . On appelle **somme** des F_i , l'ensemble

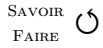
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_i &= F_1 + \dots + F_n = \{x_1 + \dots + x_n, \quad x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n\} \\ &= \{x \in E, \quad \exists (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, x = x_1 + \dots + x_n\}. \end{aligned}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E , contenant les F_i .



Méthode

Pour montrer que $x \in F + G$, on raisonne en général par analyse et synthèse : on suppose que $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ et on cherche f, g en fonction de x .

**Exemple 25.2**

On note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = z = 0\}$. Montrer que $(2, 3, 0) \in F + G$.

Solution

On note $e = (2, 3, 0)$. On cherche $(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$. $f \in F$ donc $f = (x, 0, 0)$ pour $x \in \mathbb{R}$. De même, $g \in G$ donc $g = (0, y, 0)$ pour $y \in \mathbb{R}$. Mais alors

$$e = f + g \iff (2, 3, 0) = (x, y, 0) \iff x = 2 \text{ et } y = 3.$$

Ainsi, $e = \underbrace{(2, 0, 0)}_{\in F} + \underbrace{(0, 3, 0)}_{\in G} \in F + G$.

Exercice 25.3

Soient (a, b) et (c, d) deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\text{Vect}((a, b)) + \text{Vect}((c, d)) = \mathbb{R}^2$.

Solution

On raisonne de même. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $f \in \text{Vect}((a, b))$ et $g \in \text{Vect}((c, d))$ tel que $(x, y) = f + g$.

$f \in \text{Vect}((a, b))$ donc il existe λ tel que $f = \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$; de même, il existe μ tel que $g = \mu(c, d) = (\mu c, \mu d)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} (x, y) = f + g &\iff (x, y) = (\lambda a + \mu c, \lambda b + \mu d) \\ &\iff \begin{cases} a\lambda + c\mu = x \\ b\lambda + d\mu = y \end{cases} \end{aligned}$$

Deux méthodes pour conclure :

- On écrit matriciellement :

$$\begin{cases} a\lambda + c\mu = x \\ b\lambda + d\mu = y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible, puisque $\det(A) = ad - bc \neq 0$, les vecteurs (a, b) et (c, d) n'étant pas colinéaires. Le système admet donc (au moins) une solution

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{dx - cy}{ad - bc} \\ \mu = \frac{ay - bx}{ad - bc} \end{cases}.$$

- Ou alors on résout le système, mais en raisonnant par implication (et on vérifie à la synthèse que le résultat obtenu convient). Dans ce cas, on peut multiplier par n'importe quel réel. Par la méthode du pivot :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a\lambda + c\mu = x \\ b\lambda + d\mu = y \end{cases} &\implies \begin{cases} a\lambda + & c\mu = x \\ & (ad - bc)\mu = ay - bx \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \lambda = \frac{dx - cy}{ad - bc} \\ \mu = \frac{ay - bx}{ad - bc} \end{cases}. \end{aligned}$$

On remarque que λ et μ ont un sens puisque $ad - bc \neq 0$: les deux vecteurs (a, b) et (c, d) ne sont pas colinéaires.

On passe à la synthèse : on constate que

$$(x, y) = \frac{dx - cy}{ad - bc}(a, b) + \frac{ay - bx}{ad - bc}(c, d) \in \text{Vect}((a, b)) + \text{Vect}((c, d)).$$

Ainsi, $\text{Vect}((a, b)) + \text{Vect}((c, d)) = \mathbb{R}^2$.

Remarque

En général, pour montrer que $E = F + G$, on procède par double inclusion.

Exemple 25.4

En reprenant les espaces de l'exemple 25.2, montrer que $F + G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$.

Solution

Raisonnons par double inclusion et notons $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$.

- Si $u \in F + G$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tel que $u = f + g$. Puisque $f \in F$, f s'écrit $(x, 0, 0)$, et puisque $g \in G$, g s'écrit $(0, y, 0)$. Mais alors

$$u = (x, 0, 0) + (0, y, 0) = (x, y, 0) \in H.$$

Ainsi, $F + G \subset H$.

- Réciproquement, soit $u \in H$. Il s'écrit $u = (x, y, 0)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mais alors

$$u = \underbrace{(x, 0, 0)}_{\in F} + \underbrace{(0, y, 0)}_{\in G} \in F + G.$$

Ainsi, $H \subset F + G$.

2. Somme directe

De manière générale, si $u \in F + G$, u peut avoir plusieurs écritures sous la forme $f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$: il n'y a pas forcément unicité.

Définition 25.3.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que la somme $F + G$ est **directe** si pour tout $u \in F + G$, il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $u = f + g$. Dans ce cas, on notera la somme $F \oplus G$ au lieu de $F + G$.

Remarque

On peut généraliser à la somme de n sous-espaces vectoriels : la somme $F_1 + \dots + F_n$ est **directe** si, pour tout $x \in F_1 + \dots + F_n$, il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tel que $x = x_1 + \dots + x_n$.

On note alors $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ ou bien $\bigoplus_{i=1}^n F_i$.

Proposition 25.2.

Soient $(F_1, \dots, F_n)$ n sous-espaces vectoriels de E . La somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \quad (x_1 + \dots + x_n = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0).$$

Démonstration

On procède par double implication.

- Supposons $F_1 + \dots + F_n$ directe. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 0$. Remarquons que

$$\underbrace{0}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{0}_{\in F_n} = 0.$$

Par unicité de la décomposition (car la somme est directe), on en déduit que $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$.

- Réciproquement, supposons que si $x_1 + \dots + x_n = 0$ avec $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ alors $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Soit $x \in F_1 + \dots + F_n$. On prend deux décompositions de $x : x = x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$ avec $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$. Par soustraction :

$$0 = x_1 + \dots + x_n - (y_1 + \dots + y_n) = \underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{(x_n - y_n)}_{\in F_n}.$$

D'après la propriété supposée, on dispose d'une décomposition de 0, qui est donc nulle :

$$x_1 - y_1 = \dots = x_n - y_n = 0 \implies x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n.$$

Ainsi, la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe.

Dans le cas de la somme de deux sous-espaces vectoriels, on dispose d'un résultat plus simple :

Proposition 25.3.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration

Supposons $F \cap G = \{0\}$. Soit u un élément de $F + G$, et deux décompositions $u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, avec $(f_1, f_2) \in F^2$ et $(g_1, g_2) \in G^2$. Mais alors

$$u - u = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2) = (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2) = 0$$

et donc $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$. Or, $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$. Puisqu'ils sont égaux, on en déduit que $f_1 - f_2 \in F \cap G$ et $g_2 - g_1 \in F \cap G$, c'est-à-dire $f_1 - f_2 = 0$ et $g_2 - g_1 = 0$: ainsi, $f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$ et la décomposition est unique.

Réciproquement, supposons la somme directe. Soit $w \in F \cap G$. Remarquons qu'on peut écrire $w = w + 0 = 0 + w$ puisque $w \in F$ et $w \in G$. Par unicité de la décomposition, on en déduit que $w = 0$: ainsi, $F + G = \{0\}$.

**Méthode**

Pour montrer qu'une somme $F + G$ est directe, on montre que $F \cap G = \{0\}$.

Pour montrer qu'une somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe, on prend une décomposition de 0, sous la forme $x_1 + \dots + x_n = 0$, avec $x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n$, et on démontre que $x_1 = \dots = x_n = 0$.

SAVOIR
FAIRE

Exemple 25.5

Soient F, G et H trois sous-ensembles de $\mathbb{R}_3[X]$ définis par

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X) = P(-X)\}, \quad G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$$

$$\text{et } H = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(2) = P(3) = 0\}.$$

Montrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$, et que la somme $F + G + H$ est directe.

Solution

Tout d'abord, F, G et H sont bien des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$. Ils sont bien inclus dans $\mathbb{R}_3[X]$ et si $(P, Q) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors,

$$(\lambda P + Q)(X) = \lambda P(X) + Q(X) = \lambda \underbrace{P(-X)}_{\text{car } P \in F} + \underbrace{Q(-X)}_{\text{car } Q \in F} = (\lambda P + Q)(-X)$$

Donc $\lambda P + Q \in F$ et F est un s.e.v. de $\mathbb{R}_3[X]$ (le même raisonnement permet de justifier que G et H le sont également).

Montrons que la somme $F + G + H$ est directe. Soient $(P, Q, R) \in F \times G \times H$ tels que $P + Q + R = 0$. Montrons que $P = Q = R = 0$. On peut écrire $P = -Q - R$. Puisque $Q \in G$, Q admet 1 et 2 comme racines. De même, $R \in H$ admet également 1 et 2 comme racines.

En appliquant en 1 et en 2, on en déduit que

$$P(1) = -Q(1) - R(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(2) = -Q(2) - R(2) = 0.$$

Mais $P(X) = P(-X)$ donc $P(-1) = P(1) = 0$ et $P(-2) = P(2) = 0$. Ainsi, P est de degré 3 et admet au moins 4 racines distinctes : il est nul, et $P = 0$. Il nous reste $Q + R = 0$. Q s'écrit $\lambda X(X-1)(X-2)$ et Q s'écrit $\mu(X-1)(X-2)(X-3)$ (car on connaît ses racines et son degré max). Ainsi

$$\lambda X(X-1)(X-2) + \mu(X-1)(X-2)(X-3) = 0.$$

En appliquant en 0, on obtient $\mu = 0$ et donc $R = 0$ et en appliquant en 3, on obtient $\lambda = 0$ soit $Q = 0$.

Ainsi, la somme est directe.



Attention

Si $F_1 + \dots + F_n$ est directe, alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, avec $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0\}$. Mais la réciproque n'est valable que pour la somme de deux espaces vectoriels, pas plus.

Par exemple, si $F = \text{Vect}((1, 0))$, $G = \text{Vect}((0, 1))$ et $H = \text{Vect}((1, 1))$, on vérifie rapidement que $F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{0\}$. Cependant, la somme $F + G + H$ n'est pas directe puisque

$$(1, 1) = \underbrace{(0, 0)}_{\in F} + \underbrace{(0, 0)}_{\in G} + \underbrace{(1, 1)}_{\in H} = \underbrace{(1, 0)}_{\in F} + \underbrace{(0, 1)}_{\in G} + \underbrace{(0, 0)}_{\in H}$$

et la décomposition n'est donc pas unique.

3. Théorème de concaténation des bases

Si on connaît une base de F et une base de G , et si la somme $F + G$ est directe, on en déduit une base de $F + G$ en « réunissant » les bases respectives de F et G : c'est ce qu'on appelle la concaténation.

Définition 25.4. Concaténation

Soient $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathcal{G} = (y_1, \dots, y_p)$ deux familles d'un espace vectoriel E . On appelle **concaténation** des familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, la famille $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$, que l'on note $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Commençons par un premier résultat :

Proposition 25.4. Famille génératrice d'une somme

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que F et G admettent des familles génératrices, respectivement notées $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Alors la famille $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ engendre $F + G$.

Démonstration

Notons $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathcal{G} = (y_1, \dots, y_p)$. Soit $u \in F + G$. Il existe $(f, g) \in F \times G$ tels que $u = f + g$. Puisque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont génératrices respectivement de F et G , on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=1}^p \mu_j y_j$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p)$ sont des réels. Mais alors

$$u = f + g = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^p \mu_j y_j \in \text{Vect}((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)).$$

Ainsi, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est génératrice de $F + G$.

Exemple 25.6

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille de vecteurs de E , alors pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k) + \text{Vect}(x_{k+1}, \dots, x_p).$$

Ainsi,

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \text{Vect}(x_1) + \dots + \text{Vect}(x_p).$$

On en déduit alors le théorème important :

Théorème 25.5. Concaténation de bases

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E , admettant des bases, notées respectivement $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

F et G sont en somme directe si et seulement si la concaténation des bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est une base de $F + G$.

Remarque

D'après la proposition précédente, il faut retenir que la somme est directe si et seulement la concaténation des deux bases est libre.

Démonstration

Raisonnons par double implication. On note $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathcal{G} = (y_1, \dots, y_p)$.

- Supposons la somme directe. On note $\mathcal{B} = (\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Montrons que cette famille est libre (elle sera donc une base de $F + G$, puisqu'elle est génératrice). Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p)$ des réels tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^p \mu_j y_j = 0.$$

On constate que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in F$ et $\sum_{j=1}^p \mu_j y_j \in G$. La somme étant directe, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^p \mu_j y_j = 0.$$

Les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ formant des bases, elles sont libres. Ainsi, la relation précédente implique que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et $\mu_1 = \dots = \mu_p = 0$: la famille $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est libre, et est donc une base de $F + G$.

- Réciproquement, on suppose que $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ forme une base de $F + G$. Montrons que la somme est directe. Soit $(f, g) \in F \times G$ tel que $f + g = 0$. Puisque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des bases respectives de F et G , on peut écrire $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ et $g = \sum_{j=1}^p \mu_j y_j$. Mais alors

$$f + g = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^p \mu_j y_j = 0$$

La famille $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ étant une base de $F + G$, elle est libre : la relation précédente implique que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_p = 0$: donc $f = g = 0$: la somme est directe.

On peut généraliser le résultat à une famille de sous-espaces vectoriels :

Théorème 25.6. Concaténation de bases

Soient E un espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E , admettant des bases, notées respectivement $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$.

La somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si la concaténation des bases $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ est une base de $F_1 + \dots + F_n$.

Exemple 25.7

Reprendre l'exemple 25.5 en utilisant le résultat précédent.

Solution

Déterminons tout d'abord une base de F, G et H . Rapidement, nous avons vu que

$$G = \text{Vect}(X(X-1)(X-2)) \quad \text{et} \quad H = \text{Vect}((X-1)(X-2)(X-3)).$$

Chaque polynôme étant non nul, $(X(X-1)(X-2))$ forme une base de G et $((X-1)(X-2)(X-3))$ une base de H .

Soit $P \in F$. P s'écrit $aX^3 + bX^2 + cX + d$. Puisque $P(-X) = P(X)$, on peut écrire $a(-X)^3 + b(-X)^2 + c(-X) + d = aX^3 + bX^2 + cX + d \iff 2aX^3 + 2cX = 0 \iff a = c = 0$.

Ainsi, P s'écrit $bX^2 + d$ et donc $F = \text{Vect}(1, X^2)$. Cette famille est libre (car les polynômes sont échelonnés en degré et non nuls) donc forme une base de F .

Concaténons les bases : on note $\mathcal{B} = (X(X-1)(X-2), (X-1)(X-2)(X-3), 1, X^2)$. Elle est génératrice de $F + G + H$. Montrons qu'elle est libre. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $aX(X-1)(X-2) + b(X-1)(X-2)(X-3) + c + dX^2 = 0$. En évaluant en 0, 1, 2 et 3, on en déduit

$$\begin{cases} -6b + c = 0 \\ c + d = 0 \\ c + 4d = 0 \\ 6a + c + 9d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

La famille est donc libre et est une base de $F + G + H$: cette somme est directe.

Exercice 5.

II. Supplémentaire et projections

1. Supplémentaire

Définition 25.5.

Soient E un espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F et G sont **supplémentaires** s'ils sont en somme directe, et que leur somme donne l'espace E tout entier, c'est-à-dire

$$F \oplus G = E$$

Remarque

Ainsi, deux espaces F et G sont supplémentaires si tout élément de E s'écrit de manière unique $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Proposition 25.7.

Soient E un espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$.

Démonstration

Cela découle de la propriété vue précédemment pour la somme directe.



Méthode

Pour montrer que $F \oplus G = E$, on vérifie que $F \cap G = \{0\}$, et que pour tout élément $u \in E$, il existe au moins un couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $u = f + g$.

On raisonne alors par analyse et synthèse : on suppose l'existence de la décomposition, que l'on trouve (analyse). On vérifie ensuite qu'elle convient (synthèse)

Exemple 25.8

Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, puis que $F \oplus G = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Solution

Tout d'abord, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, par exemple parce que

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ et } G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- **Somme directe** : Soit $u \in F \cap G$. Il existe donc $(t, t') \in \mathbb{R}^2$ tels que $u = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} t' \\ t' \end{pmatrix}$. Mais alors,

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ t' \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = t' = 0$$

Ainsi, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F \cap G = \{0\}$: la somme est directe.

- **Analyse** : soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On cherche t et t' tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t' \\ t' \end{pmatrix}$$

soit $t' = y$ et $t = x - y$.

Synthèse : soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On constate que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}}_{\in G}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in F + G$.

Bilan : F et G sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

SAVOIR
FAIRE

Exercice 25.9

On note $P(\mathbb{R})$ (respectivement $I(\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $P(\mathbb{R})$ et $I(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution

Tout d'abord, $P(\mathbb{R})$ et $I(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet, si $(f, g) \in P(\mathbb{R})^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, remarquons que $\lambda f + g$ est définie sur $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x).$$

Ainsi, $\lambda f + g$ est bien paire. Le raisonnement est similaire pour $I(\mathbb{R})$.

- **Somme directe** : soit $f \in P(\mathbb{R}) \cap I(\mathbb{R})$. Ainsi, pour tout réel x :

$$f(-x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x) \implies f(x) = -f(x) \implies f(x) = 0.$$

Ainsi, $f = 0$ et $P(\mathbb{R}) \cap I(\mathbb{R}) = \{0\}$. La somme est donc directe.

- **Analyse**. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On cherche $p \in P(\mathbb{R})$ et $i \in I(\mathbb{R})$ telles, pour tout réel x

$$f(x) = p(x) + i(x).$$

Appliquons en $-x$: pour tout réel x

$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$$

par parité de p et imparité de i . Mais alors

$$\begin{cases} p(x) & + i(x) & = f(x) \\ p(x) & - i(x) & = f(-x) \end{cases} \implies \begin{cases} p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}.$$

- **Synthèse**. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons, pour tout réel x

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Remarquons tout d'abord que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) + i(x) = f(x).$$

Montrons que p est paire. p est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = p(x).$$

Ainsi, p est paire. De même, pour tout réel x :

$$i(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = \frac{-(f(x) - f(-x))}{2} = -i(x).$$

Ainsi i est impaire.

On a finalement montré que f s'écrit $p + i$, avec $p \in P(\mathbb{R})$ et $i \in I(\mathbb{R}) : P(\mathbb{R}) + I(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et la somme étant directe

$$P(\mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Remarque

En vertu du théorème de concaténation des bases, si F et G admettent des bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, alors F et G sont supplémentaires si et seulement si la concaténation de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ forme une base de E .



Attention

Il n'y a pas unicité du supplémentaire ! Par exemple, si $F = \text{Vect}((1, 0))$, on peut remarquer que $\text{Vect}((0, 1))$ et $\text{Vect}((1, 1))$ sont des supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

2. Projections sur un supplémentaire

Définition 25.6. Projection vectorielle

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Ainsi, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(u_x, v_x) \in F \times G$ tel que $x = u_x + v_x$.

- L'application $p : E \rightarrow E$ définie par $p : x \mapsto u_x$ est appelée **projection vectorielle sur F parallèlement à G** .
- L'application $q : E \rightarrow E$ définie par $q : x \mapsto v_x$ est appelée **projection vectorielle sur G parallèlement à F** .

Exercices 1, 2 et 3.

Les projections vectorielles sont les applications « naturelles » qui permettent de récupérer la composante sur l'un des supplémentaires. Comme leur nom l'indique, ce sont des projections. On démontre tout d'abord un lemme utile.

Lemme 25.8.

On reprend les mêmes notations que la définition précédente.

Soit p la projection sur F parallèlement à G . Alors

$$\forall x \in F, p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in G, p(y) = 0_E.$$

Démonstration

Par unicité de la décomposition sur $F \oplus G$:

- Si $x \in F$, alors $x = \underset{\in F}{x} + \underset{\in G}{0}$ et donc $p(x) = x$.
- Si $y \in G$, alors $y = \underset{\in F}{0} + \underset{\in G}{y}$ et donc $p(y) = 0$.

Proposition 25.9.

On reprend les mêmes notations que la définition 25.6. Les projections p sur F parallèlement à G , et q sur G parallèlement à F sont des projections. De plus :

- $\text{Ker}(p) = G$ et $\text{Im}(p) = F$,
- $\text{Ker}(q) = F$ et $\text{Im}(q) = G$.

Démonstration

Soit $x \in E$. On écrit $x = u_x + v_x$ avec $(u_x, v_x) \in F \times G$. On montre rapidement que p est linéaire.

Par définition, $p(x) = u_x \in F$ et d'après le lemme précédent, $p(p(x)) = p(u_x) = u_x = p(x)$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $p \circ p(x) = p(x)$: p est bien une projection, et de plus $\text{Im}(p) \subset F$ puisque $p(x) = u_x \in F$.

Réciproquement, si $x \in F$, d'après le lemme, $p(x) = x$ et donc $x \in \text{Im}(p)$.

Enfin, si $x \in G$, d'après le lemme, $p(x) = 0$: $x \in \text{Ker}(p)$. Réciproquement, si $x \in \text{Ker}(p)$, on a $p(x) = 0$. On écrit $x = u_x + v_x$ avec $(u_x, v_x) \in F \times G$. Alors $p(x) = 0 \implies u_x = 0$ et finalement $x = v_x \in G$: $\text{Ker}(p) \subset G$.

Le raisonnement est identique pour q .

Ainsi, une projection vectoriel est un projecteur particulier. Mais il y a une réciproque :

Théorème 25.10.

Soit E un espace vectoriel, et p un projecteur de E . Alors :

- $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$,
- p est la projection sur $\text{Im}(p)$, parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Démonstration

Démontrons le premier point. Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Mais alors $p(x) = p \circ p(y) = p(y)$ car c'est un projecteur. Or, $x \in \text{Ker}(p)$, donc $p(x) = 0$. Ainsi, $p(y) = 0$, c'est-à-dire $x = 0$: $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\}$.

Raisonnons par analyse et synthèse. Soit $x \in E$. On cherche $y \in \text{Ker}(p)$ et $z \in \text{Im}(p)$ tel que $x = y + z$. $z \in \text{Im}(p)$ donc il existe $u \in E$ tel que $z = p(u)$. Alors, en appliquant p :

$$p(x) = p(y + z) = p(y) + p(z) = 0 + p \circ p(u) = p(u) = z.$$

Ainsi, $z = p(x)$ et $y = x - p(x)$.

On passe à la synthèse. Soit $x \in E$. On note $y = x - p(x)$ et $z = p(x)$. Par définition, $z \in \text{Im}(p)$. Enfin, $p(y) = p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0_E$. Ainsi, $y \in \text{Ker}(p)$.

Ainsi, $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

Pour le deuxième point, il suffit de constater que, si $x \in E$, alors

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im}(p)} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in \text{Ker}(p)}$$

d'après la décomposition précédente, et finalement p est bien la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

 Exercices 6, 7 et 8.

Exercices

25

Exercices

Sommes directes

●○○ Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^3$ (10 min.)

Montrer que les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}((1, -1, 0))$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Expliciter les projections sur F parallèlement à G , et sur G parallèlement à F .

●○○ Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (10 min.)

Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites constantes et G l'ensemble des suites convergentes de limite nulle. Montrer que $E = F \oplus G$ et expliciter les projections sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F .

●○○ Exercice 3 Dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (10 min.)

On note $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On définit F et G par

$$F = \{x \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}, \quad \text{et} \quad G = \{f \in E, f(0) = 0, f'(0) = 0\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , et qu'ils sont supplémentaires dans E . Expliciter les projections sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F .

●○○ Exercice 4 Dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (15 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

1. Justifier rapidement que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) + \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R}) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. La somme est-elle directe ?
3. Déterminer un supplémentaire de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

●○○ Exercice 5 Sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (15 min.)

On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$. On introduit F, G et H par : $F = \{f \in E, f \text{ est constante}\}$, $G = \{f \in E, f \text{ est nulle sur } [0, +\infty[\}$ et $H = \{f \in E, f \text{ est nulle sur }]-\infty, 0] \}$.

Montrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E , puis que $E = F \oplus G \oplus H$.

Projecteurs et applications linéaires

●○○ Exercice 6 Projecteur de $\mathbb{R}^2$ (10 min.)

Soit $p : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (2y - 3x, 4y - 6x) \end{cases}$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^2$. Déterminer

des sous-espaces F et G tels que p est la projection sur F parallèlement à G (on explicitera des bases de F et G).

●○○ Exercice 7 Projecteur de $\mathbb{R}^3$ (10 min.)

Soit $p : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + z, y + z, 0) \end{cases}$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer des sous-espaces F et G tels que p est la projection sur F parallèlement à G (on explicitera des bases de F et G).

●●○ Exercice 8 Une application et une somme directe (15 min.)

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (-x - 2y - 2z, 4x + 5y + 4z, -x - y) \end{cases}$.

On note $E_1 = \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $E_2 = \text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

1. Déterminer une base de E_1 et de E_2 .
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Pour aller plus loin

●●● Exercice 9 Condition de directitude (20 min.)

Soit E un espace vectoriel. Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Montrer que la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad F_k \cap (F_1 + \dots + F_{k-1}) = \{0\}.$$

●●● Exercice 10 Lien entre f et f^2 (20 min.)

Soit E un espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
2. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ si et seulement si $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.
3. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ si et seulement si $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$.
4. Montrer alors le résultat

$$\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E \iff \begin{cases} \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \\ \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \end{cases}.$$

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

Tout d'abord, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$: pour F , c'est évident. Pour G , constatons que $(0, 0, 0) \in G$, et si $u = (x, y, z) \in G$, $v = (x', y', z') \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$ vérifie

$$(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda \underbrace{(x - y + z)}_{=0 \text{ car } u \in G} + \underbrace{(x' - y' + z')}_{=0 \text{ car } v \in G} = 0.$$

Montrons qu'ils sont supplémentaires :

- Soit $u \in F \cap G$. $u \in F$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = (\lambda, -\lambda, 0)$. Mais $u \in G$, donc $\lambda - (-\lambda) + 0 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 0$: $u = (0, 0, 0)$.

La somme est directe.

- Pour montrer que la somme vaut $\mathbb{R}^3$, raisonnons par analyse et synthèse. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $f \in F$ et $g \in G$ tel que $u = f + g$.

$f \in F$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = (\lambda, -\lambda, 0)$.

$g \in G$: g s'écrit (a, b, c) avec $a - b + c = 0$. On cherche donc λ, a, b, c tel que :

$$u = f + g \quad \text{et} \quad a - b + c = 0 \implies (x, y, z) = (\lambda + a, -\lambda + b, c) \quad \text{et} \quad a - b + c = 0.$$

On doit donc résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} a & & + \lambda = x \\ & b & - \lambda = y \\ & & c = z \\ a - b + c & & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{x+y-z}{2} \\ b = \frac{x+y+z}{2} \\ c = z \\ \lambda = \frac{x-y+z}{2} \end{cases}$$

Ainsi,

$$f = \left(\frac{x-y+z}{2}, -\frac{x-y+z}{2}, 0 \right) \quad \text{et} \quad g = \left(\frac{x+y-z}{2}, \frac{x+y+z}{2}, z \right).$$

On passe à la synthèse. Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et f, g définis comme précédemment, alors on constate rapidement que

$$f \in F \quad \text{et} \quad f + g = (x, y, z)$$

et $g \in G$ car :

$$\frac{x+y-z}{2} - \frac{x+y+z}{2} + z = 0$$

La somme donne donc bien $\mathbb{R}^3$.

Pour déterminer l'expression des projections p sur F parallèlement à G , et q sur G parallèlement à F , il suffit d'utiliser l'analyse et synthèse :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) = \underbrace{\left(\frac{x-y+z}{2}, -\frac{x-y+z}{2}, 0 \right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{x+y-z}{2}, \frac{x+y+z}{2}, z \right)}_{\in G}.$$

Mais alors, par définition de p et q :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(x, y, z) = \left(\frac{x-y+z}{2}, -\frac{x-y+z}{2}, 0 \right) \quad \text{et} \quad q(x, y, z) = \left(\frac{x+y-z}{2}, \frac{x+y+z}{2}, z \right).$$

Exercice 2

Tout d'abord, F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E : toute combinaison linéaire de suites constantes est constante et converge donc, toute combinaison linéaire de suites convergentes vers 0 converge vers 0, et la suite nulle est dans F et G . Montrons que $F \oplus G = E$.

- Somme directe. Soit $u \in F \cap G$. La suite u est donc constante : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = (\lambda, \lambda, \dots)$. Mais $u \in G$, donc u converge vers 0. Or u étant constante, nécessairement, $\lambda = 0$ et u est la suite nulle : $F \cap G = \{0\}$.

- La somme fait E . Soit $u \in E$. On cherche deux suites $(v, w) \in F \times G$ telles que $u = v + w$. v est constante, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $v = (\lambda, \lambda, \dots)$, et w converge vers 0. Mais alors, puisque u converge également, alors par passage à la limite

$$\lim u_n = \lim v_n + w_n = \lambda + 0.$$

Nécessairement, $\lambda = \lim u_n$, et $w = u - v$. Cela termine l'analyse.

Passons à la synthèse. Soit u une suite convergente. On définit v la suite constante égale à $\lim u_n$, et w la suite $u - v$. Par construction, $u = v + w$, et v est constante. Or $w = u - v$ et u et v convergent ; donc par passage à la limite

$$\lim w_n = \lim u_n - v_n = \lim u_n - \lim u_n = 0.$$

Ainsi, $w \in G$ et cela termine la synthèse.

Pour déterminer les projections p de F parallèlement à G , et q de G parallèlement à F , on utilise la synthèse :

$$\forall u \in E, \quad u = \underbrace{(\lim u_n, \lim u_n, \dots)}_{\in F} + \underbrace{(u - (\lim u_n, \lim u_n, \dots))}_{\in G}.$$

Ainsi

$$\forall u \in E, \quad p(u) = \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \right)_{n \geq 0} \quad \text{et} \quad q(u) = u - \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \right)_{n \geq 0}.$$

Exercice 3

F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E . Les fonctions sont bien $\mathcal{C}^1$, la fonction nulle est dans F et G , et la stabilité par combinaison linéaire est rapide à vérifier.

Montrons que $F \oplus G = E$.

- Somme directe. Soit $f \in F \cap G$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f : x \mapsto ax + b$. Mais, $f \in G$ donc $f(0) = f'(0) = 0$, ce qui donne $b = 0$ et $a = 0$. Ainsi, f est la fonction nulle et $F \cap G = \{0\}$.

- La somme fait E . Soit $f \in E$. On cherche deux fonctions $(g, h) \in F \times G$ telles que $f = g + h$. $g \in F$ donc g s'écrit $x \mapsto ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ains :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b + h(x).$$

En dérivant (les fonctions sont $\mathcal{C}^1$), on a également

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = a + h'(x).$$

On évalue alors en 0 : puisque $h \in G$, $h(0) = h'(0)$ et finalement

$$f(0) = b \quad \text{et} \quad f'(0) = a.$$

Ainsi $g : x \mapsto f'(0)x + f(0)$ et $h = f - g$. Cela termine l'analyse.

Passons à la synthèse. Soit $f \in E$. On définit g et h par

$$g : x \mapsto f'(0)x + f(0) \quad \text{et} \quad h = f - g.$$

Par construction, $f = g + h$ et $g \in F$. Montrons que $h \in G$. En évaluant en 0 :

$$h(0) = f(0) - g(0) = f(0) - f(0) = 0.$$

En dérivant puis évaluant en 0 :

$$h'(0) = f'(0) - g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0..$$

Ainsi, $h \in G$ et cela termine la synthèse.

Notons p la projection sur F parallèlement à G , et q la projection sur G parallèlement à F . D'après l'analyse et synthèse :

$$\forall f \in E, \quad f = \underbrace{(x \mapsto f'(0)x + f(0))}_{\in F} + \underbrace{(g - x \mapsto f'(0)x + f(0))}_{\in G}.$$

Ainsi,

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \quad p(f)(x) = f'(0)x + f(0) \quad \text{et} \quad q(f)(x) = f(x) - (f'(0)x + f(0)).$$

Exercice 4

1. La matrice nulle est bien triangulaire (supérieure ou inférieure) donc est dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$. Enfin, une combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures reste triangulaire supérieure (idem pour les triangulaires inférieures). Donc $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$ sont bien des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On raisonne par analyse et synthèse. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche $(T, S) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$ tels que $M = T + S$. On écrit $T = (t_{i,j})$ et $S = (s_{i,j})$. Alors

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \dots & s_{n,n} \end{pmatrix}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i < j &\implies t_{i,j} = m_{i,j} \\ i > j &\implies s_{i,j} = m_{i,j} \\ i = j &\implies t_{i,i} + s_{i,i} = m_{i,i}. \end{aligned}$$

On choisit alors, par exemple pour $i = j$ $t_{i,i} = m_{i,i}$ et $s_{i,i} = 0$. Par construction, $T + S = M$ et T et S sont bien triangulaires, respectivement supérieure et inférieure.

Remarquons que l'analyse et synthèse nous a montré qu'il n'y a pas unicité de la décomposition : on aurait pu poser $s_{i,i} = m_{i,i}$ et $t_{i,i} = 0$, et obtenu ainsi une autre décomposition. Ainsi $F + G = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ mais la somme n'est pas directe.

3. D'après l'analyse et synthèse, pour avoir unicité, il faut et il suffit que la condition $i = j$ nous donne unicité de la décomposition. On peut par exemple choisir comme supplémentaire de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaire inférieure **dont la diagonale est nulle**.

Exercice 5

Le fait que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E est laissé en exercice au lecteur. Montrons que $F \oplus G \oplus H = E$.

• Somme directe. Soient $(f, g, h) \in F \times G \times H$ telles que $f + g + h = 0$. f étant constante, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f : x \mapsto \lambda$. Puisque $f + g + h = 0$ on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + g(x) + h(x) = 0 \implies \lambda + g(x) + h(x) = 0.$$

On évalue en 0 : $g(0) = h(0) = 0$ et donc $\lambda = 0 : f = 0$. Ainsi, pour tout réel x , $g(x) + h(x) = 0$. $g \in G$ donc g est nulle sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 + h(x) = 0 \implies h(x) = 0.$$

Or, h est nulle sur $\mathbb{R}^-$, donc h est nulle sur $\mathbb{R}$. On en déduit alors que g est nulle également. Finalement $f = g = h = 0$: la somme est directe.

- La somme fait E . Procédons par analyse et synthèse.

Soit f une fonction de E . On cherche $(u, v, w) \in F \times G \times H$ telle que $u + v + w = f$. u est constante, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $u = x \mapsto \lambda$. Pour tout réel x :

$$f(x) = \lambda + v(x) + w(x).$$

En évaluant en 0, puisque $v(0) = w(0) = 0$, on en déduit que $\lambda = f(0)$. Ensuite, v est nulle sur $\mathbb{R}^+$ et w est nulle sur $\mathbb{R}^-$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = f(0) + w(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^-, \quad f(x) = f(0) + v(x).$$

On a donc identifié v et w et finalement terminé l'analyse.

Passons à la synthèse. Soit $f \in E$. On définit u, v et w ainsi :

$$u : x \mapsto f(0), \quad v : x \mapsto \begin{cases} f(x) - f(0) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad w : x \mapsto \begin{cases} f(x) - f(0) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Par construction, u est constante, v est nulle sur $\mathbb{R}^+$ et w est nulle sur $\mathbb{R}^-$. Enfin, pour tout x , $u(x) + v(x) + w(x) = f(x)$. Il reste un point à vérifier : que v et w sont continues. Elles le sont, par construction, sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Il reste à vérifier la continuité en 0. Or (par exemple pour v), par continuité de f :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - f(0) = f(0) - f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} v(x).$$

Ainsi, v est bien continue en 0.

On a bien montré que $F + G + H = E$ et donc que $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 6

Tout d'abord, vérifions que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} p(\lambda u + v) &= p((\lambda x + x', \lambda y + y')) \\ &= (2(\lambda y + y') - 3(\lambda x + x'), 4(\lambda y + y') - 6(\lambda x + x')) \\ &= ((\lambda(2y - 3x) + 2y' - 3x', \lambda(4y - 6x) + 4y' - 6x')) \\ &= \lambda(2y - 3x, 4y - 6x) + (2y' - 3x', 4y' - 6x') = \lambda p(u) + p(v). \end{aligned}$$

Ainsi, p est linéaire. Montrons que c'est un projecteur : déterminons $p \circ p$.

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad p \circ p(x, y) &= p(p(x, y)) = p((2y - 3x, 4y - 6x)) \\ &= (2(4y - 6x) - 3(2y - 3x), 4(4y - 6x) - 6(2y - 3x)) \\ &= (2y - 3x, 4y - 6x) = p(x, y). \end{aligned}$$

p est bien un projecteur. Il nous reste à déterminer $F = \text{Im}(p)$ et $G = \text{Ker}(p)$ pour conclure que p est la projection sur F parallèlement à G .

- Soit $(x, y) \in \text{Ker}(p)$. Alors :

$$\begin{aligned} p(x, y) = 0 &\iff (2y - 3x, 4y - 6x) = (0, 0) \\ &\iff \begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ -6x + 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ y = y \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Ker}(p) = \left\{ \left(\frac{2}{3}x, y \right), \quad y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\left(\frac{2}{3}, 1 \right) \right) = \text{Vect}((2, 3)).$$

- Prenons la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\text{Im}(p) = \text{Vect}(p(1, 0), p(0, 1)) = \text{Vect}((-3, -6), (2, 4)).$$

Puisque $(-3, -6) = -\frac{3}{2}(2, 4)$, les vecteurs sont colinéaires. Finalement

$$\text{Im}(p) = \text{Vect}((2, 4))$$

et $(2, 4)$ est libre (un seul vecteur non nul), donc forme une base de l'image.

Bilan : p est le projecteur sur $\text{Vect}(2, 3)$, parallèlement à $\text{Vect}(2, 4)$.

Exercice 7

Démontrons rapidement que p est bien en endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} p(\lambda u + v) &= p(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x' + \lambda z + z', \lambda y + y' + \lambda z + z', 0) \\ &= (\lambda(x + z) + x' + z', \lambda(y + z) + y' + z', 0) \\ &= \lambda(x + z, y + z, 0) + (x' + z', y' + z', 0) = \lambda p(u) + p(v). \end{aligned}$$

Ainsi, p est linéaire, de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Pour montrer qu'il s'agit d'un projecteur, il faut démontrer que $p \circ p = p$. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} p \circ p(u) &= p(x + z, y + z, 0) \\ &= (x + z + 0, y + z + 0, 0) = (x + z, y + z, 0) = p(u). \end{aligned}$$

Ainsi, p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

Par propriété d'un projecteur, il projette sur $F = \text{Im}(p)$, parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$.

- Déterminons F . On prend (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)). \end{aligned}$$

Remarquons que $(1, 1, 0) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0)$. Ainsi la famille n'est pas libre et finalement

$$F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$$

cette famille étant libre car non colinéaire.

- Déterminons G . $(x, y, z) \in \text{Ker}(p)$ si et seulement si $(x + z, y + z, 0) = (0, 0, 0)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z \end{cases}.$$

Ainsi,

$$G = \{(-z, -z, z), \quad z \in \mathbb{R}\}$$

c'est-à-dire

$$G = \text{Vect}((-1, -1, 1)).$$

Exercice 8

1. Soit $u = (x, y, z) \in \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$. Alors

$$\begin{aligned} (-x - 2y - 2z, 4x + 5y + 4z, -x - y) - (x, y, z) &= (0, 0, 0) \iff \begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 4x + 4y + 4z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}, \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_1 = \{(-y - z, y, z), \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1), \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

et finalement,

$$E_1 = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

et la famille forme une base de E_1 puisque les vecteurs sont non colinéaires.

De même, $u = (x, y, z) \in \text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})$. Alors

$$\begin{aligned} (-x - 2y - 2z, 4x + 5y + 4z, -x - y) - 2(x, y, z) = (0, 0, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y + 4z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y - 2z = 0 \\ -y - 4z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -4z, \quad z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_2 = \{(2z, -4z, z), \quad z \in \mathbb{R}\}$$

et finalement,

$$E_2 = \text{Vect}((2, -4, 1))$$

2. On va utiliser le théorème sur la concaténation des bases : si la concaténation des bases de E_1 et E_2 forment une base de $\mathbb{R}^3$, alors $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$.

• Montrons la liberté. Soient a, b, c trois réels tels que $a(-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1) + c(2, -4, 1) = (0, 0, 0)$. Alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} -a - b + 2c = 0 \\ a - 4c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + 2c = 0 \\ -b - 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + 2c = 0 \\ -b - 2c = 0 \\ -c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, le système est de Cramer et admet comme unique solution $a = b = c = 0$: la famille est donc libre.

• Montrons qu'elle est génératrice. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Cherchons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a(-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1) + c(2, -4, 1) = (x, y, z)$. Alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} -a - b + 2c = x \\ a - 4c = y \\ b + c = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + 2c = x \\ -b - 2c = x + y \\ b + c = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + 2c = x \\ -b - 2c = x + y \\ -c = x + y + z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4x - 3y - 4z \\ b = x + y + 2z \\ c = -x - y - z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi

$$(x, y, z) = (-4x - 3y - 4z)(-1, 1, 0) + (x + y + 2z)(-1, 0, 1) + (-x - y - z)(2, -4, 1).$$

La famille est donc génératrice, et finalement la concaténation des deux bases de E_1 et E_2 forment une base de $\mathbb{R}^3$: on peut conclure que

$$E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3.$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 9

Raisonnons par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons la somme $F_1 + \dots + F_n$ directe. On se fixe $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Soit $x \in F_k \cap (F_1 + \dots + F_{k-1}) = \{0\}$. Ainsi, $x \in F_k$ et $x \in F_1 + \dots + F_{k-1}$. Par définition, il existe donc $(u_1, \dots, u_{k-1}) \in F_1 \times \dots \times F_{k-1}$ tel que $x = u_1 + \dots + u_{k-1}$. On peut réécrire

$$\underbrace{u_1}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{u_{k-1}}_{\in F_{k-1}} + \underbrace{(-x)}_{\in F_k} + \underbrace{0}_{\in F_{k+1}} + \dots + \underbrace{0}_{\in F_n} = 0.$$

Puisque la somme $\bigoplus_{i=1}^n F_i$ est directe, on en déduit que

$$u_1 = \dots = u_{k-1} = -x = 0$$

et finalement $x = 0$. L'autre inclusion étant évidente, on en déduit que si la somme est directe

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad F_k \cap (F_1 + \dots + F_{k-1}) = \{0\}.$$

$\Leftarrow$ Supposons que, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $F_k \cap (F_1 + \dots + F_{k-1}) = \{0\}$. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 0$. Montrons par récurrence descendante que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = 0$.

- Pour $i = n$, remarquons que la relation précédente s'écrit encore

$$x_1 + \dots + x_{n-1} = -x_n.$$

Ainsi, $x_n \in F_n$ mais également $x_n \in F_1 + \dots + F_{n-1}$. Par hypothèse, $x_n = 0$.

- Supposons que pour $k \in \llbracket p, n \rrbracket$ (avec $p \geq 2$), $x_k = 0$. Mais alors, la relation précédente s'écrit

$$x_1 + \dots + x_{p-1} + \underbrace{x_p + \dots + x_n}_{=0 \text{ par H.R.}} = x_1 + \dots + x_{p-1} = 0.$$

Par la même méthode que pour l'initialisation :

$$x_1 + \dots + x_{p-2} = -x_{p-1}$$

et donc

$$x_{p-1} \in F_{p-1} \cap (F_1 + \dots + F_{p-2}).$$

Par hypothèse, on peut donc en déduire que $x_{p-1} = 0$.

Ainsi, par récurrence descendante, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = 0$: la somme est donc directe.

On a donc démontré par double implication que

$$F_1 + \dots + F_n \text{ est directe} \iff \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad F_k \cap (F_1 + \dots + F_{k-1}) = \{0\}.$$

Exercice 10

Remarque

Ces résultats théoriques sont classiques et à savoir refaire.

1. Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi, $f(x) = 0_E$ et par application de f , $f(f(x)) = f(0_E) = 0_E : x \in \text{Ker}(f^2)$.

Soit $y \in \text{Im}(f^2)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x) = f(f(x))$. En notant $z = f(x)$, on a donc $y = f(z)$ avec $z \in E : y \in \text{Im}(f)$.

Ainsi,

$$\boxed{\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f).}$$

2. L'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ vient d'être démontrée. Raisonnons par double implication :

$\Rightarrow$ Supposons $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$. Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. En regroupant ces deux informations :

$$0_E = f(x) = f(f(y)) = f^2(y).$$

Ainsi, $y \in \text{Ker}(f^2)$. Mais comme $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$, on en déduit que $y \in \text{Ker}(f)$, c'est-à-dire $f(y) = 0_E$. Or, $x = f(y)$ et donc $x = 0_E$.

On a donc bien $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, l'autre inclusion étant immédiate.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ et montrons que $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$, ce qui permettra de conclure puisque l'autre inclusion a été démontrée lors de la première question.

Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$. Alors, $f^2(x) = 0_E$, c'est-à-dire $f(f(x)) = 0_E$. Notons $y = f(x)$. D'une part, $y \in \text{Im}(f)$, et d'autre part, puisque $f(f(x)) = 0_E$, $f(y) = 0_E$ et donc $y \in \text{Ker}(f)$. Puisque $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, on peut en déduire que $y = 0_E$, et donc $f(x) = 0_E : x \in \text{Ker}(f)$.

Cela montre donc l'inclusion $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.

On a donc bien démontré :

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}.}$$

3. Montrons également par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$, et montrons $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$ par analyse et synthèse.

Soit $x \in E$ et supposons qu'il existe $y \in \text{Ker}(f)$ et $z \in \text{Im}(f)$ tels que $x = y + z$. Ainsi, $f(y) = 0$ et il existe $u \in E$ tel que $z = f(u)$. Alors, par linéarité de f :

$$x = y + z \implies f(x) = f(y) + f(z) = 0_E + f(f(u)) = f^2(u)$$

Puisque $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$, $f(x) \in \text{Im}(f)$ donc $f(x) \in \text{Im}(f^2)$. Ainsi, il existe bien un $u \in E$ vérifiant $f(x) = f^2(u)$. On obtient un unique $z = f(u)$, puis un unique $y = x - z$.

Synthèse : soit $x \in E$. Soit $u \in E$ tel que $f(z) = f^2(u)$ (qui existe par hypothèse). On pose alors

$$z = f(u) \quad \text{et} \quad y = x - f(u).$$

On remarque que $y + z = x$, $z \in \text{Im}(f)$ par définition. Enfin

$$f(y) = f(x) - f^2(u) = f(x) - f(x) = 0 \text{ puisque } f(x) = f^2(u).$$

Cela conclut notre raisonnement : pour tout $x \in E$, il existe $y \in \text{Ker}(f)$ et $z \in \text{Im}(f)$ tels que $x = y + z : E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$.

$\Leftarrow$ Supposons $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$. Montrons que $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$, ce qui permettra de conclure puisque l'autre inclusion a été démontrée lors de la première question.

Soit $y \in \text{Im}(f)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$, il existe $a \in \text{Ker}(f)$ et $b \in \text{Im}(f)$ tels que $x = a + b$. Mais alors

$$y = f(x) = f(a) + f(b) = f(b).$$

Or $b \in \text{Im}(f)$: il existe $c \in E$ tel que $b = f(c)$ et finalement

$$y = f(b) = f^2(c) \in \text{Im}(f^2).$$

Ainsi, $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

On a donc bien démontré :

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2) \iff \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(f) = E.}$$

4. Il suffit de regrouper les deux résultats précédent :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E &\iff \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(f) = E \\ &\iff \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2).\end{aligned}$$