Chapitre 24

Séries

Résumé

Dans ce chapitre, on introduit la notion de série, une suite liée à une somme de termes d'une suite. On y verra des méthodes de calculs, mais aussi des théorèmes pour montrer des convergences ou divergences de séries, sans pouvoir nécessairement calculer la somme de la série.

Plan du cours

Chapitre 24. **Séries**

- I. Définition **3**
- II. Propriétés **6**
- III. Conditions de convergence **7**
- IV. Séries de référence **8**
- V. Théorèmes de convergence **12**
- VI. Convergence absolue **15**
- **Exercices** **19**
- **Corrigés** **25**

> « *L'homme n'est rien d'autre que la série de ses actes.* »
>
> Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770–1831). *Encyclopédie des sciences philosophiques*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de série :

- connaître la définition d'une série, d'une somme et du reste d'une série . . . . ☐
- connaître les différentes opérations usuelles . . . . ☐
- connaître le lien entre suite et série . . . . ☐
- connaître la condition nécessaire de convergence . . . . ☐
- connaître les séries de référence . . . . ☐

② Concernant les théorèmes de convergence :

- connaître le théorème de comparaison . . . . ☐
- connaître le théorème d'équivalence et de négligeabilité . . . . ☐

③ Concernant l'absolue convergence :

- connaître la définition . . . . ☐
- connaître le lien entre absolue convergence et convergence . . . . ☐

I. Définition

1. Séries

Définition 24.1.

Soit (u_n) une suite réelle. On appelle **série de terme général** u_n, et on note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$, la suite des sommes partielles (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Remarque

Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de terme général u_n n'est également définie qu'à partir de n_0, ce que l'on note $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$. La suite des sommes partielles est $(S_n)_{n\geqslant n_0}$, avec $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

⚠ **Attention**

La série $\sum u_n$ est bien une suite ! C'est la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant n_0}$.

Exemple 24.1

Soit u la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$. La série de terme général u_n est notée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**.

Exercice 24.2

Déterminer les premiers termes de la suite des sommes partielles de la série harmonique.

Solution

On note $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles associées à la série harmonique, c'est-à-dire $\forall\, n \geqslant 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors on a

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \quad S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

2. Convergence

La série $\sum u_n$ étant une suite, on peut s'intéresser à sa convergence.

Définition 24.2.

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite des sommes partielles (S_n) converge. Dans ce cas :

- la limite de la suite (S_n) est alors appelée **somme** de la série, et est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. On ⋯

a ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- on appelle **reste** de la série la suite (R_n) définie par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n$$

Conséquence 24.1.

Si la série $\sum u_n$ converge, alors le reste (R_n) tend vers 0.

Démonstration

En effet, puisque la série converge, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et donc $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Attention

L'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la série converge, alors que l'écriture $\sum u_n$ a bien un sens, puisqu'elle désigne une suite.

Remarque

Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies (puisqu'en réalité, ce sont des limites, et il faut donc toujours s'assurer de la convergence). C'est pourquoi on calculera (presque) toujours les sommes partielles, qui sont des sommes finies, avant de passer à la limite.

Remarque

Étudier la série $\sum u_n$, c'est déterminer si la série converge ou diverge.

On dit que deux séries ont **même nature** si elles sont toutes les deux convergentes, ou toutes les deux divergentes.

Proposition 24.2.

Soient u et v deux suites qui ne diffèrent que d'un nombre fini de termes. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Ainsi, modifier un nombre fini de termes d'une série ne change pas sa nature. On peut donc faire des suppositions sur les premiers termes d'une suite pour déterminer la nature d'une série.

Démonstration

Supposons que pour tout $n \geqslant N$, $u_n = v_n$. Alors, pour $n \geqslant N$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{N} (u_k - v_k).$$

c'est-à-dire, en notant respectivement (S_n) et (T_n) les suites des sommes partielles associées à u et v :

$$S_n = T_n + \sum_{k=0}^{N}(u_k - v_k).$$

Le terme $\sum_{k=0}^{N}(u_k - v_k)$ étant fini, (S_n) converge si et seulement si (T_n) converge.

3. Premiers exemples

Exemple 24.3

Soit (u_n) la suite définie pour tout n par $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Etudier la série $\sum u_n$.

Solution

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Alors

$$\forall\, n,\ S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$. Par somme et produit, on en déduit donc que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$

Exemple 24.4

Montrer que la série harmonique, de terme général $\frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$, est divergente.

Solution

Pour tout $n \geqslant 1$, notons $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
Nous avons vu dans le chapitre sur le calcul différentiel que l'on a, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

En additionnant ces inégalités, on obtient alors

$$\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_n$$

Or, on a

$$\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1), \text{ les termes se téléscopant.}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1) = +\infty$, par comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$$

☞ *Exercices 1 et 2.*

II. Propriétés

1. Opérations sur les séries

Les opérations sur les sommes finies se transposent, dans certains cas, aux séries :

Théorème 24.3. Linéarité

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et λ un réel non nul.

- Les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature (c'est-à-dire qu'elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes). Si elles sont convergentes, on a alors
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont toutes les deux convergentes, alors la série $\sum(u_n+v_n)$ est également convergente, et on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k+v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$
- Si $\sum u_n$ est convergente, et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum(u_n+v_n)$ est également divergente.

Attention

La réciproque du deuxième point n'est pas vraie. Par exemple, si pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n}$, alors la série $\sum u_n + v_n$ converge (vers 0) alors que ni $\sum u_n$ ni $\sum v_n$ ne convergent. Il faudra donc toujours s'assurer que les séries convergent avant de séparer les sommes.

Démonstration

Cela repose sur la linéarité de la somme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors
$$\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$
Donc la série $\sum \lambda u_n$ converge et sa somme vaut $\lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
$$\sum_{k=0}^{n}(u_k+v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k$$
Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, le résultat précédent garantit que $\sum(u_n+v_n)$ converge, et que sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

Si $\sum u_n$ converge, et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n+v_n)$ ne peut converger (sinon, par différence, $\sum v_n$ converge également, ce qui est absurde).

Conséquence 24.4.

L'ensemble des séries convergentes forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Suite et série

Théorème 24.5. Théorème suite série

Soit (u_n) une suite. Alors (u_n) converge si, et seulement si, la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge. Dans ce cas, en notant ℓ la limite de (u_n), on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)=\ell-u_0.$$

Démonstration

Notons $S_n=\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)$. On constate que $S_n=u_{n+1}-u_0$ par télescopage. Ainsi, (S_n) converge si et seulement si (u_n) converge. Si (u_n) converge vers ℓ, par passage à la limite, on obtient bien $\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)=\ell-u_0$.

III. Conditions de convergence

1. Limite de la suite et convergence

Théorème 24.6.

Soit (u_n) une suite réelle. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.

Démonstration

Pour tout n, notons $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. Alors, pour tout $n\geqslant 1$, on a $u_n=S_n-S_{n-1}$. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (S_n) admet, par définition, une limite que l'on note ℓ. Mais alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty} S_{n-1}=\ell$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell-\ell=0$$

Remarque

La contraposée du théorème est intéressante : si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ n'est pas convergente. Par exemple, la série $\sum \frac{2n}{n+1}$ diverge, car son terme général ne tend pas vers 0.
On dit dans ce cas que la série **diverge grossièrement**.

⚠ **Attention**

Cette condition est nécessaire, mais pas suffisante : en effet, on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et pourtant la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 24.5

Soit q un réel. On s'intéresse à la série $\sum q^n$. Alors, pour que la série $\sum q^n$ converge, il faut que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, c'est à dire $|q| < 1$. On verra plus tard que la réciproque, dans ce cas, est vraie.

2. Séries à termes positifs

Le cas des séries à termes positifs est plus simple à étudier.

Définition 24.3. Séries à termes positifs

On dit qu'une série $\sum u_n$ est **à termes positifs** si, pour tout n, $u_n \geqslant 0$.

Théorème 24.7.

Soit (u_n) une suite à termes positifs. Alors la série $\sum u_n$ est convergente, si et seulement si, la suite des sommes partielles (S_n) est majorée.

Démonstration

Notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On a alors $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$: la suite (S_n) est donc croissante. D'après les théorèmes sur les suites monotones, (S_n) converge si et seulement si la suite (S_n) est majorée.

IV. Séries de référence

1. Séries géométriques et dérivées

Définition 24.4. Série géométrique

Pour tout entier p, la série $\sum\limits_{n\geqslant p} q^n$ s'appelle **série géométrique** de raison q.

Théorème 24.8.

La série $\sum q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Plus généralement, la série $\sum\limits_{n\geqslant p} q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas, $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} q^n = \dfrac{q^p}{1-q}$

Démonstration

La suite (q^n) converge vers 0 si et seulement si $|q| < 1$. Par condition nécessaire de convergence, la série $\sum q^n$ ne peut pas converger si $|q| \geqslant 1$.

Supposons alors que $|q| < 1$. Notons, pour $n \geqslant p$, $S_n = \sum\limits_{k=p}^{n} q^k$. On a $S_n = \dfrac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$. Or,

$\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$ car $|q| < 1$. Donc la suite (S_n) converge vers $\frac{q^p}{1-q}$: la série converge, et sa somme vaut $\frac{q^p}{1-q}$.

On dispose également de deux séries, appelées séries géométriques dérivées première et deuxième :

Théorème 24.9. Série géométrique dérivée

- **Série géométrique dérivée première**
  La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$
- **Série géométrique dérivée seconde**
  La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas,
  $$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Démonstration

Démontrons le premier résultat. Si $|q| \geqslant 1$, la suite (nq^{n-1}) ne converge pas vers 0, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ ne peut converger.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, notons $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$. T_n est une fonction dérivable sur $]-1;1[$, et on a
$$T_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$
D'autre part, pour tout $x \in]-1,1[$, $T_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. On a donc également
$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad T_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)x^n = \lim\limits_{n\to+\infty} nx^{n+1} = 0$ (car $|x| < 1$ et par croissances comparées), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$ converge, et on a bien
$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Remarque

On remarque que $nq^n = qnq^{n-1}$ et que $n(n-1)q^n = q^2 n(n-1)q^{n-2}$. Ainsi, si $|q| < 1$, les séries $\sum nq^n$ et $\sum n(n-1)q^n$ convergent également, et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^n = \frac{2q^2}{(1-q)^3}$$
Les sommes peuvent commencer à 0, puisque les termes manquants sont nuls.

Savoir Faire

Exercice 24.6

Montrer que la série $\sum(n^2+n+1)2^{-n}$ converge, et déterminer sa somme.

Solution

On se ramène à des séries géométriques, éventuellement dérivée, en utilisant la remarque $n^2 = n(n-1)+n$.

$$\begin{aligned}(n^2+n+1)2^{-n} &= (n(n-1)+n+n+1)2^{-n}\\ &= n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

Les séries $\sum n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n$ sont convergentes, puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$. Par linéarité, la série $\sum(n^2+n+1)2^{-n}$ converge, et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1)2^{-n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + 2\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\ &= 4+4+2 = 10\end{aligned}$$

2. Séries de Riemann

Définition 24.5. Série de Riemann

La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ est appelée **série de Riemann**.

Théorème 24.10.

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

Démonstration

Nous avons déjà traité le cas $\alpha=1$. Si $\alpha<0$, $\dfrac{1}{n^\alpha}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ et si $\alpha=0$, $\dfrac{1}{n^\alpha}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$. Ainsi, si $\alpha\leqslant 0$, la série est grossièrement divergente.

Prenons $\alpha>0$. On note $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^\alpha}$ est alors décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[\![k,\,k+1]\!]$, on a, par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k+1)^\alpha}\leqslant\frac{1}{t^\alpha}\leqslant\frac{1}{k^\alpha} &\implies \int_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^\alpha}\mathrm{d}t\leqslant\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{k^\alpha}\mathrm{d}t\\ &\implies \frac{1}{(k+1)^\alpha}\leqslant\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_k^{k+1}\leqslant\frac{1}{k^\alpha}\\ &\implies \frac{1}{(k+1)^\alpha}\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{k^{\alpha-1}}\right)\leqslant\frac{1}{k^\alpha}\end{aligned}$$

En ajoutant ces inégalités, et par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$
$$\implies S_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1 \right) \leqslant S_n$$

- Si $\alpha \in]0, 1[$, $\alpha - 1 < 0$ et donc
$$\frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1 \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
Par comparaison, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: la série diverge.
- Si $\alpha \in]1, +\infty[$, $\alpha - 1 > 0$ et l'inégalité précédente devient
$$S_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{\alpha - 1}.$$
De plus, la suite (S_n) est croissante, puisque
$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0.$$
La suite (S_n) est donc croissante et majorée ; d'après le théorème de convergence monotone, la suite (S_n) converge, et la série converge donc.

Remarque

Même si la série converge, on ne connait pas explicitement la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, sauf dans certains rares cas.

☞ *Exercice 4*

3. Série exponentielle

Définition 24.6. Série exponentielle

La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$ est appelée série exponentielle.

Théorème 24.11.

Pour tout réel x, la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge, et on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

Démonstration

Vu dans le chapitre 21 : c'est une application de la formule de Taylor-Lagrange.

Méthode

Pour déterminer si une série converge ou non, et éventuellement calculer sa limite, on essaiera si possible de se ramener à une des séries usuelles (géométriques, Riemann ou exponentielle).

Exemple 24.7

Déterminer la nature de la série de terme générale $u_n = \frac{(-3)^{n+1}}{n!}$.

Solution

Remarquons tout d'abord que

$$u_n = \frac{(-3)^n(-3)}{n!} = -3\frac{(-3)^n}{n!}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-3)^n}{n!}$ converge puisqu'il s'agit de la série exponentielle, et sa somme vaut e^{-3}. Par produit, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{n!} = -3\mathrm{e}^{-3}$$

Remarque

Par décalage d'indice, on a également, pour tout réel x, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ converge également, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{e}^x$$

et de manière plus générale

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{x^{n-p}}{(n-p)!} = \mathrm{e}^x$$

☞ *Exercice 3*

V. Théorèmes de convergence

1. Théorème de comparaison

Pour majorer (S_n), on commence en général par majorer (u_n). On somme alors ces majorants pour en déduire un majorant de (S_n). On dispose ainsi du théorème suivant :

Théorème 24.12. Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**. On suppose que pour tout n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

Alors, si la série $\sum v_n$ est convergente, la série $\sum u_n$ est également convergente. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Démonstration

Si on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, on a, pour tout n, $S_n \leqslant T_n$ (addition des inégalités).

De plus, la suite (T_n) est également croissante, de limite T. Donc pour tout n, $T_n \leqslant T$. Donc

$$\forall\, n, S_n \leqslant T_n \leqslant T$$

La suite (S_n) est donc majorée, et d'après le théorème précédent, la série $\sum u_n$ converge. L'inégalité précédente donne alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \leqslant T = \lim_{n\to+\infty} T_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Exemple 24.8

Soit (u_n) une suite à termes positifs vérifiant, pour tout n, $u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Puisque la série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une série convergente, la série $\sum u_n$ est donc convergente, et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant 2$.

On dispose également d'un critère de divergence, qui est la contraposée du théorème précédent :

Théorème 24.13.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à **termes positifs**. On suppose que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors, si la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$, alors la série $\sum v_n$ diverge également vers $+\infty$.

Exemple 24.9

Soit (u_n) une suite à termes positifs vérifiant pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$. Alors, puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum u_n$ est également divergente.

☞ *Exercices 3 et 4.*

2. Equivalence et négligeabilité

On peut utiliser les équivalents :

Théorème 24.14.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**. On suppose que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors, la série $\sum v_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum u_n$ est également convergente.

Démonstration

La suite (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang (pour pouvoir parler d'équivalent). Puisque $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, il existe un rang N à partir duquel $\frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$.
Mais alors, pour tout $n \geqslant N$, puisque (v_n) est à termes positifs :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n.$$

La série $\sum v_n$ étant convergente, on peut alors écrire

$$0 \leqslant \sum_{k=N}^{n} u_k \leqslant \frac{3}{2} \sum_{k=N}^{n} v_k \leqslant \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Finalement, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ est croissante (car série à terme positif) et majorée : elle converge et la série $\sum u_n$ converge donc.

Savoir Faire

Exemple 24.10

Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n+3^n}$ converge.

Solution

Remarquons que

$$\frac{1}{2^n+3^n} \sim \frac{1}{3^n}$$

Puisque les deux suites sont à termes positifs, et que la série $\sum \frac{1}{3^n}$ converge (série géométrique), on en déduit que par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n+3^n}$ converge.

On dispose également d'un critère en cas de négligeabilité :

Théorème 24.15.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**. On suppose que $u_n = \mathrm{o}_{+\infty}(v_n)$.
Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est également convergente.
Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ est également divergente.

Démonstration

La suite (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang (pour pouvoir parler de négligeabilité).
Puisque $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe un rang N à partir duquel $\frac{u_n}{v_n} \leqslant 1$.
Mais alors, pour tout $n \geqslant N$, puisque (v_n) est à termes positifs :

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

La série $\sum v_n$ étant convergente, on peut alors écrire

$$0 \leqslant \sum_{k=N}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Finalement, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ est croissante (car série à terme positif) et majorée : elle converge et la série $\sum u_n$ converge donc.

Savoir Faire

Exemple 24.11

Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n^2}$ est une série convergente.

Solution

Remarquons que $\mathrm{e}^{-n^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n^2}}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} n^2\mathrm{e}^{-n^2} = 0 \text{ par croissances comparées}$$

Les deux suites (e^{-n^2}) et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sont positives, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann).
Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum \mathrm{e}^{-n^2}$ converge.

Remarque

Dans les cas où on ne peut pas calculer la somme de la série en se ramenant à une somme usuelle, on peut essayer, via équivalence ou négligeabilité, montrer la convergence ou la divergence de la série en se ramenant, comme dans l'exemple précédent, à une somme de Riemann.
Si $u_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$, et si la série est à terme positif, alors la série $\sum u_n$ converge.
Le cas $\alpha = 2$ est souvent utilisé, mais pas toujours !
Si $\frac{1}{n^\alpha} = o_{+\infty}(u_n)$ avec $\alpha < 1$, et si la série est à terme positif, alors la série $\sum u_n$ diverge.

☞ *Exercice 5.*

Savoir Faire

Exercice 24.12

Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$.

Solution

Ce sont des cas particuliers de séries appelées les séries de Bertrand.
Remarquons tout d'abord que les deux séries sont à termes positifs. De plus :

$$\frac{1}{n^2 \ln n} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \text{ puisque } \frac{\frac{1}{n^2 \ln n}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{1}{n^{1/2}\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (car $3/2 > 1$), par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2 \ln n}$ converge.
De même

$$\frac{1}{n^{3/4}} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right) \text{ puisque } \frac{\frac{1}{n^{3/4}}}{\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}} = \frac{\ln n}{n^{1/4}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ par croissance comparée.}$$

Puisque $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/4}}$ diverge (car $\frac{3}{4} < 1$), par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ diverge.

☞ *Exercice 11.*

VI. Convergence absolue

1. Définition

Définition 24.7.

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Exemple 24.13

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente : en effet, la série $\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann).

2. Absolue convergence et convergence

Théorème 24.16.

Soit (u_n) une suite réelle. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration

On note x et y les suites définies pour tout n par

$$x_n = \frac{u_n + |u_n|}{2} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{|u_n| - u_n}{2}.$$

Par construction et définition de la valeur absolue,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y_n \leqslant |u_n|.$$

Puisque la série est absolument convergente, et que les suites (x_n) et (y_n) sont à termes positifs, par comparaison, on peut en déduire que $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent.
Mais alors

$$\forall\, n, \quad u_n = \frac{x_n - y_n}{2}$$

et par linéarité, la série $\sum u_n$ converge également.

Remarque

Pour démontrer qu'une série de signe quelconque est convergente, il peut ainsi être judicieux de montrer qu'elle est absolument convergente, et se ramener donc à une série à termes positifs.

Les séries absolument convergentes sont « stables », comme on peut le voir avec ce théorème (hors-programme) :

Théorème 24.17.

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Alors la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Ainsi, changer l'ordre de sommation d'une série absolument convergente ne change ni sa convergence, ni la valeur de la somme.

3. Convergence et absolue convergence

Remarque

La réciproque du theoreme 24.16 n'est pas vraie : une série peut être convergente sans être absolument convergente. On dit, dans ce cas, que la série est **semi-convergente**.

Par exemple, nous avons vu dans un exercice du chapitre 20, que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente (de limite $\ln(2)$). En revanche, elle n'est pas absolument convergente, puisque la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

Les séries semi-convergentes sont, quant à elles, très « instables », comme le montre le théorème suivant (hors-programme) :

Théorème 24.18. Théorème de réarrangement de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente, et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ell.$$

En réarrangeant les termes de la série, on peut ainsi obtenir toute valeur possible.

4. Etudier une série

Méthode

Pour étudier une série $\sum u_n$, on suit différentes étapes :

1. On vérifie si la suite (u_n) tend vers 0. Si non, la série est divergente.
2. On s'intéresse à la suite (u_n) et on regarde si elle est équivalente, négligeable devant, ou majorée par une suite dont on sait que la série converge (par exemple, parce que c'est une série de référence). Dans ce cas, on peut conclure quant à la convergence (mais pas sur la somme de la série)
3. Si on demande de déterminer la somme, on pose la suite des sommes partielles (S_n) et on vérifie si on peut la calculer. Si oui, on peut conclure quant à la convergence, et la valeur de la somme le cas échéant.
4. Si tout ce qui précède n'a pas abouti, on essaie de majorer (ou minorer) les sommes partielles (S_n) si la série est à termes positifs, ou alors on s'intéresse à l'absolue convergence sinon.

Remarque

On ne peut pas forcément calculer la somme de la série, même si on arrive à prouver que la série converge.

Exemple 24.14

Soit u la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n^2(n^2+1)}$. Etudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$

Solution

Plusieurs méthodes pour cette série.

1. **Théorème de comparaison** : on constate que

$$u_n \sim \frac{1}{n^4}$$

La suite (u_n) et la suite $\left(\frac{1}{n^4}\right)$ sont des suites à termes positifs, et la série $\sum \frac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann avec $4 > 1$). Par équivalence de suite à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

2. **Majoration** : on constate que

$$n^2(n^2+1) = n^4 + n^2 \geqslant n^2 \text{ donc } 0 \leqslant \frac{1}{n^2(n^2+1)} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

La suite (u_n) est à termes positifs et majorée par la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ dont la série converge (série de Riemann avec $2 > 1$). Par majoration, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

3. **Calcul des sommes partielles** : Remarquons tout d'abord que la suite (u_n) converge vers 0. On peut écrire u_n sous la forme

$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+1} = v_n - w_n$$

Or, la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge (série de Riemann). De plus, pour tout $n \geqslant 1$,

$$0 < w_n \leqslant \frac{1}{n^2} = v_n$$

Par comparaison, (w_n) étant à termes positifs et la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ étant convergente, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge également.

Par somme, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge également, et

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n^2+1)} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$$

☞ *Exercices 9 et 10*

Exercices 24

Exercices

Calcul de sommes partielles

●○○ **Exercice 1** Un calcul de série par téléscopage (10 min.)

On considère la série numérique de terme général $\dfrac{1}{4n^2-1}$ $(n \geqslant 1)$ et on note S_N sa N-ème somme partielle.

1. Vérifier que : $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$
2. Montrer que :
$$S_N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right)$$
3. En déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2-1}$ est convergente.

●○○ **Exercice 2** Suites des sommes partielles (20 min.)

Pour chacune des suites suivantes (définies pour $n \geqslant 3$), calculer la suite des sommes partielles, et déterminer si la série associée est convergente. Le cas échéant, donner la valeur de la somme.

1. $u_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$
2. $v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$
3. $w_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Pour la 3), on pourra essayer de décomposer $\frac{1}{n(n+1)}$ sous la forme $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ pour a, b deux réels bien choisis.

Comparaison

●○○ **Exercice 3** Minoration (5 min.)

Soit u la suite définie pour tout $n \geqslant 2$ par
$$u_n = \frac{n}{n^2-1}$$
Montrer pour tout pour $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$. Montrer alors que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

●○○ **Exercice 4** Majoration (5 min.)

Démontrer que $\sum\limits_{n\geqslant 3} \dfrac{5}{4^n \ln(n)}$ converge.

●○○ **Exercice 5** Équivalence et négligeabilié (20 min.)

Étudier la convergence des séries de terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{n+3}{n^3+n+2}$,
2. $u_n = \dfrac{1}{2^n+3}$,
3. $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{2^n}$,

4. $u_n = \dfrac{n^3 - 6n^2 + n - 12}{2^n}$,
5. $u_n = \dfrac{-n+3}{n^4+1}$,
6. $u_n = (-1)^n \mathrm{e}^{-3n}$,
7. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)$,
8. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3-1}}$,
9. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n\,(n^2+3)}}$,
10. $u_n = \dfrac{\cos(3^n)}{4n^2 - 3n + 6}$,
11. $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$,
12. $u_n = \dfrac{\pi^2}{n} + 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$,
13. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,
14. $u_n = \dfrac{(-1)^n n!}{n^n}$,
15. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$,
16. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+5}\right)$,
17. $u_n = n\ln(n)e^{-\sqrt{n}}$,
18. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
19. $u_n = \dfrac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$,
20. $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$,
21. $u_n = \sqrt{\tan\left(\dfrac{1}{2022 + n\sqrt{n}}\right)}$.

●●○ **Exercice 6 Séries à paramètres** (20 min.)

Étudier la nature des séries suivantes en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}}\right)$,
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right)$,
4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$,
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\alpha^{\ln(n)}}$,
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{1 - \left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^n}$.

Séries usuelles

●○○ **Exercice 7 Séries usuelles** (20 min.)

Justifier la convergence des séries suivantes, et calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)}{5^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n} \frac{n^2-n+1}{3^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n} \frac{(-1)^n n}{2^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n} \frac{1}{2^n n!}$

●○○ **Exercice 8 Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$** (20 min.)

On considère la série numérique de terme général $\frac{1}{n^2}$ ($n \geqslant 1$). On note T_N sa N-ème somme partielle.

1. Vérifier que :
$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$
2. En déduire que :
$$\forall\, N \geqslant 1, \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \leqslant T_N \leqslant 2 - \frac{1}{N}$$
3. Montrer que la suite (T_N) est majorée.
4. Déterminer la monotonie de la suite $(T_N)_{N\geqslant 2}$.
5. En déduire la convergence de la série initiale.
6. Établir l'encadrement suivant :
$$\frac{3}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$$

Suites et séries

●●○ Exercice 9 Suites et séries I - EDHEC (20 min.)

Soit u la suite définie par $u_0 \in]0;1[$ et pour tout n, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Démontrer que pour tout n, $0 < u_n < 1$. Montrer alors que la suite u converge, et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum_n u_n^2$ converge et calculer sa somme.
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geqslant 0} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$?

●●○ Exercice 10 Suites et séries II (30 min.)

On considère la suite (u_n) définie par

$$0 < u_0 < 1 \text{ et } \forall \ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_n^2}$$

1. Montrer que pour tout n, u_n existe et appartient à $]0;1[$.
2. Montrer que pour tout n, $u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Pour aller plus loin

●●○ Exercice 11 Séries de Bertrand (20 min.)

On appelle **séries de Bertrand** les séries du type $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Supposons que $\alpha > 1$. Montrer que la série de Bertrand converge.
2. Supposons que $\alpha < 1$. Montrer que la série de Bertrand diverge.
3. Supposons que $\alpha = 1$.
   a) Montrer que si $\beta \leqslant 0$, la série de Bertrand diverge.
   b) On pose $T_n = \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\beta}$. Montrer que si $\beta > 1$, la suite (T_n) est bornée, et si $\beta \leqslant 1$, la suite (T_n) diverge vers $+\infty$.
   c) En encadrant $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\beta}$ et en sommant, montrer que la série de Bertrand converge si et seulement si $\beta > 1$.

●●○ Exercice 12 Séries alternées (30 min.)

- Pour tout n, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
- (Généralisation) Soit u une suite positive, décroissante de limite nulle. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$. Démontrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, et en déduire que la série $\sum_n (-1)^n u_n$ converge.

Remarque : on a déjà démontré, autrement, que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ *converge, vers* $-\ln(2)$.

●●● Exercice 13 Sur la série harmonique (25 min.)

On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. En encadrant $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[k,\, k+1]$, prouver que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la nature de la série $\sum_n v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On notera γ sa limite [1].
3. Soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$. Donner un équivalent de R_n.
4. Soit w_n tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$, et soit $t_n = w_{n+1} - w_n$. Donner un équivalent du reste $\sum_{k \geqslant n} t_k$. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

●●○ Exercice 14 Formule de Stirling (15 min.)

1. Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.
2. On pose (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
3. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :
$$n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n} n^n \mathrm{e}^{-n}.$$

●●○ Exercice 15 Espace ℓ^2 (15 min.)

Soit $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles u telles que $\sum u_n^2$ converge.

1. Montrer que pour tous réels x et y, $xy \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.
2. En déduire que si u et v sont deux éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$, alors $\sum u_n v_n$ converge.
3. Montrer alors que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes.

●●● Exercice 16 Critère de d'Alembert (15 min.)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0,\, +\infty[\cup \{+\infty\}.$$

1. Montrer que, si $\lambda < 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
On pourra comparer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec le terme général d'une suite géométrique de raison inférieure stricte à 1.
2. Montrer que, si $\lambda > 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Montrer que, si $\lambda = 1$, alors on ne peut pas conclure en général, en donnant deux exemples astucieusement choisis.

●●● Exercice 17 Règle de Raabe-Duhamel (20 min.)

Soit (u_n) une suite réelle à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe deux réels α et c tels que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \ln\left(n^\alpha u_n\right)$. Montrer que $n^{3/2}\left(v_{n+1} - v_n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(v_{n+1} - v_n\right)$.
3. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

[1] Cette constante est appelée constante d'Euler.

4. Application : soient x et y deux réels strictement positifs. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+y)u_{n+1} = (n+x)u_n$. Déterminer la nature de $\sum u_n$.
5. Application : soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} x^{H_n}$ où $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne la série harmonique.

Sujets de concours

●○○ Sujet 1 EML maths appro – 2023 (45 min.)

Dans cet exercice, x désigne un élément de $]0,\,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.
   b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Démontrer que
   $$S_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant S_n - \frac{1}{n}.$$
   c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, un encadrement de S_n.
   d) Démontrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$;
2. ***Informatique***.
   a) On considère la fonction suivante écrite en langage Python.

```python
def rang(a):
    k=1
    s=1
    while s<a:
        k=k+1
        s=s+1/k
    return k
```

   Expliquer ce que produit l'appel `rang(50)`.
   b) Le code suivant renvoie :

Console Python
```python
>>> from numpy import exp
>>> print(exp(49))
1.9073465724950998e+21
```

   Expliquer rapidement ce que cela laisse penser si l'on fait l'appel `rang(50)`.
3. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,\,x]$. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$
   c) Démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.
   d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

●●○ Sujet 2 Ecricome maths appro – 2008 (50 min.)

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. a) Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.
   b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
2. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f'_n(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.
3. **Étude de la dérivabilité de F.**
   a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $(x, x_0) \in [n, +\infty[^2$,
   $$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{n^3}.$$
   b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$, la nature de la série de terme générale $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)|$.
   c) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbb{R}^+$,
   $$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K|h|.$$
   d) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' = G$.
4. **Recherche d'un équivalent en $+\infty$.**
   Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
   a) Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant f_k(x).$$
   b) En déduire que, pour $n \geqslant 2$,
   $$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.$$
   c) En déduire que :
   $$\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$
   d) Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. On constate que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{2n-1}{(2n-1)(2n+1)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\right)\\ &= \frac{1}{(2n)^2-1^2} = \frac{1}{4n^2-1}\end{aligned}$$

2. Posons, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{2n-1}$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} u_n - u_{n+1}\\ &= \frac{1}{2}\left(u_1 - u_{N+1}\right) \text{ par télescopage}\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}\right)\end{aligned}$$

3. On constate, d'après la question précédente, que

$$S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2} \text{ par somme}$$

Ainsi, la suite des sommes partielles converge, donc la série de terme général $\frac{1}{4n^2-1}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 2

Constatons que

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}\\ &= \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}\\ &= \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\end{aligned}$$

Notons pour tout entier $n \geqslant 3$, $S_n = \sum_{k=3}^{n} u_k$. Alors,

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \text{ par téléscopage.}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{\ln(3)}$. Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 3} u_n$ converge, et

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} u_n = \frac{1}{\ln(3)}}$$

De même,

$$v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln(n)$$

Notons, pour tout entier $n \geqslant 3$, $T_n = \sum_{k=3}^{n} v_k$. Alors,

$$T_n = \sum_{k=3}^{n} \ln(k-1) - \ln(k) = \ln(2) - \ln(n) \text{ par téléscopage.}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} T_n = -\infty$. Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 3} v_n$ diverge.

Méthode

Dans le cas d'une série avec des fractions rationnelles, on essaie de décomposer en éléments simples, et on observe ce qu'il se passe.

Pour tout entier $n \geqslant 3$, on a

$$w_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Notons alors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $U_n = \sum_{k=3}^{n} w_k$. Alors,

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} \text{ par téléscopage.} \end{aligned}$$

On constate alors que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 3} w_n$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{3}}$$

Exercice 3

Méthode

Pour montrer qu'une série converge ou diverge, on peut raisonner par comparaison.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $n^2 - 1 \leqslant n^2$. Par passage à l'inverse, on en déduit donc que pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^2-1} \geqslant \frac{1}{n^2}$. Ainsi,

$$\forall\ n \geqslant 2,\ u_n = \frac{n}{n^2-1} \geqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

La série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n}$ est une série à termes positifs et divergente. Par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 2}u_n$ diverge.

Exercice 4

Pour tout $n\geqslant 3$, $\ln(n)\geqslant 1$. Donc, pour $n\geqslant 3$, $4^n\ln(n)\geqslant 4^n$. Par passage à l'inverse, on en déduit donc que

$$\forall\ n\geqslant 3,\ 0\leqslant \frac{5}{4^n\ln(n)}\leqslant\frac{5}{4^n}$$

La série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{5}{4^n}$ est à termes positifs et convergente (série géométrique de raison $q=\frac{1}{4}$). Par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{5}{4^n\ln(n)}$, qui est également à termes positifs, converge.

Exercice 5

On va raisonner par équivalence ou négligeabilité.

> **Attention**
> Attention, il faut que les suites soient à termes positifs.

1. $u_n\sim\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$. Les suites sont à termes positifs, et la série $\sum\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2>1$). Par théorème d'équivalence de suites à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.
2. De la même manière, $u_n\sim\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$. La série $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge (série géométrique, avec $-1<\frac{1}{2}<1$). Les suites étant à termes positifs, par le même théorème d'équivalence, on en déduit que $\sum u_n$ converge.
3. A nouveau, $u_n\sim\frac{n^2}{2^n}=n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Cette dernière série converge (série géométrique dérivée seconde, avec $-1<\frac{1}{2}<1$), et les suites sont à termes positifs. Par théorème d'équivalence, $\sum u_n$ converge.
4. La suite (u_n) n'est pas toujours à termes positifs, mais n^3-6n^2+n-12 tend vers $+\infty$, donc sera positif à partir d'un certain rang. La suite (u_n) est donc positive à partir d'un certain rang. De plus

$$u_n\sim\frac{n^3}{2^n}$$

Cela ne fait pas partie des séries usuelles. En revanche, on constate que $\frac{n^3}{2^n}=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En effet :

$$\frac{\frac{n^3}{2^n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^5}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \text{ par croissances comparées}$$

La série $\sum\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann avec $2>1$). Par théorème de négligeabilité de séries à termes positifs, la série $\sum\frac{n^3}{2^n}$ converge également. Finalement, par théorème d'équivalence, la série $\sum u_n$ converge.
5. La suite (u_n) est négative pour $n\geqslant 3$. On passe à la convergence absolue :

$$\left|\frac{-n+3}{n^4+1}\right|\sim\frac{n}{n^4}=\frac{1}{n^3}$$

La série $\sum\frac{1}{n^3}$ converge (Riemann avec $3>1$). Donc la série $\sum|u_n|$ converge par théorème d'équivalence de suites à termes positifs. Par théorème, la série $\sum u_n$ converge également.
6. La suite (u_n) n'est pas de signe constant. On a $|u_n|=\mathrm{e}^{-3n}$, ce qu'on peut écrire :

$$|u_n|=(\mathrm{e}^{-3})^n$$

La série de terme général $\sum \left(\mathrm{e}^{-3}\right)^n$ converge (série géométrique, avec $-1 < \mathrm{e}^{-3} < 1$). Par théorème d'équivalence, $\sum |u_n|$ converge, et donc $\sum u_n$ converge.

7. La suite u est à terme positif (car $0 \leqslant \frac{\pi}{4n} \leqslant \frac{\pi}{4}$) et on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{n^{3/2}}$. La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann, avec $\frac{3}{2} > 1$). Par comparaison de suite à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

8. De même, $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3-1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/4}}$ par exponentiation, série divergente (Riemann avec $\frac{3}{4} \leqslant 1$). Par comparaison de séries à termes, la série $\sum u_n$ diverge.

9. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$). La série $\sum u_n$ converge.

10. Intuitivement, la série va converger. On peut montrer par exemple que $u_n = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$:

$$\frac{u_n}{1/n^{3/2}} = \frac{n^{3/2}\cos(3^n)}{4n^2-3n+6} = \frac{\cos(3^n)}{4n^{1/2} - \frac{3}{n^{1/2}} + \frac{6}{n^{3}2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ par encadrement.}$$

La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, la séries $\sum u_n$ converge.

11. Remarquons que $0 \leqslant \cos^2(n) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant n\cos^2(n) \leqslant n$ et finalement, pour tout n, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$. Par comparaison, puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et que les séries sont à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge également.

12. Un développement asymptotique nous donne :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\pi^2}{n} + 1 - \left(1 - \left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)^2 + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right) \\ &= \frac{\pi^2}{2n} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n} \end{aligned}$$

La série $\sum \dfrac{\pi^2}{2n}$ est une série à termes positifs divergente (harmonique). Par équivalence, la suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang, et sa série diverge.

13. On écrit tout d'abord $u_n = \mathrm{e}^{n^2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$. Montrons que u_n est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{1/n^2} &= n^2 u_n = n^2 \mathrm{e}^{n^2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} \\ &= n^2\mathrm{e}^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \mathrm{e}^{2\ln(n) - n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Remarquons alors que

$$2\ln(n) - n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\underbrace{\left(2\frac{\ln(n)}{n} - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}-1 \text{ car } n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim n\times\frac{1}{n}=1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Par composée, $\frac{u_n}{1/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par négligeabilité, la série $\sum u_n$ converge.

14. D'après Stirling :

$$\begin{aligned} |u_n| &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}}{n^n} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n} \end{aligned}$$

On remarque alors rapidement que $|u_n| = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui nous permet de conclure par comparaison.

15. Série difficile car on n'a pas forcément d'intuition. En réalité, un équivalent suffit :
$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{n\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(n)}} = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(n)}.$$
Or $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, donc par continuité de exp :
$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^0 = 1.$$
Finalement
$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
Les séries étant à termes positifs, et la série $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ diverge.

16. La suite (u_n) est à termes strictement négatifs. De plus, $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n+5} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$. La série de terme général $-\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique). Par comparaison de séries à termes négatifs, la série $\sum u_n$ diverge.

17. Intuitivement, l'exponentielle va l'emporter. Montrons que $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$:
$$\begin{aligned}\frac{u_n}{1/n^2} &= n^2 u_n = n^3\ln(n)\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\\ &= \frac{\ln(n)}{n} \times n^4\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ par croissances comparées.}\end{aligned}$$
Les séries étant à termes positifs, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeant, par comparaison, la série $\sum u_n$ converge.

18. Par équivalent rapide, $u_n \sim \frac{1}{n}$ ce qui nous garantit que la série diverge.

19. Série difficile : montrons que $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
$$\begin{aligned}\frac{u_n}{1/n^2} &= \frac{n^2}{(\ln(n))^{\ln(n)}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\ln(n^2)}}{\mathrm{e}^{\ln(n)\ln(\ln(n))}}\\ &= \mathrm{e}^{\ln(n)(2-\ln(\ln(n)))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$
Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

20. De même :
$$\begin{aligned}\frac{u_n}{1/n^2} &= n^2\mathrm{e}^{n^3\ln(\cos(1/n))}\\ &= \mathrm{e}^{2\ln(n)+n^3\ln(\cos(1/n))}\\ &= \mathrm{e}^{n\left(\frac{2\ln(n)}{n}+n^2\ln(\cos(1/n))\right)}\end{aligned}$$
Or $n^2\ln(\cos(1/n)) \sim n^2(\cos(1/n)-1) \sim -n^2\frac{1}{2n^2} = -\frac{1}{2}$. Ainsi, $\frac{2\ln(n)}{n} + n^2\ln(\cos(1/n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$ et par composée, $\frac{u_n}{1/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On peut alors conclure par comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum u_n$ converge.

21. A nouveau par équivalent et exponentiation :
$$\sqrt{\tan\left(\frac{1}{2022+n\sqrt{n}}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2022+n\sqrt{n}}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n}}} = \frac{1}{n^{3/4}}.$$
Par comparaison, la série $\sum \frac{1}{n^{3/4}}$ diverge ($3/4 \leqslant 1$) et est à terme positif, donc la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 6

Pour la première, on remarque que si $\alpha < 0$, $\frac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et si $\alpha = 0$, $\frac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans les deux cas

$$n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi, la série diverge grossièrement si $\alpha \leqslant 0$. Si $\alpha > 0$, alors $\frac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par équivalence classique :

$$\begin{aligned} n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}}\right) &\underset{+\infty}{\sim} n\frac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^{\alpha/2}} \quad \text{car } 1+n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} n^\alpha \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha/2-1}}. \end{aligned}$$

Les séries sont à termes positifs. D'après le résultat sur les séries de Riemann, $\sum \frac{1}{n^{\alpha/2-1}}$ converge si et seulement si $\frac{\alpha}{2} - 1 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 4$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 4$.
Bilan : la première série converge si et seulement $\alpha > 4$.

Pour la deuxième, remarquons que :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Par exponentiation

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^\alpha \sqrt{n}^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha n^{\alpha/2}}.$$

Les séries sont à termes positifs, donc $\sum \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha$ converge si et seulement si $\sum \frac{1}{2^\alpha n^{\alpha/2}}$ converge, c'est-à-dire, d'après les séries de Riemann, si et seulement si $\frac{\alpha}{2} > 1$, soit $\alpha > 2$.
Bilan : la deuxième série converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Pour la troisième, si $\alpha < 0$, $\exp\left(-\ln(n)^\alpha\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et si $\alpha = 0$, $\exp\left(-\ln(n)^\alpha\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\mathrm{e}}$. Dans les deux cas, la limite est différente de 0 et la série est donc grosisèrement divergente.
Si $\alpha > 0$, on remarque que

$$\begin{aligned} n^2\exp(-\ln(n)^\alpha) &= \mathrm{e}^{2\ln(n)-\ln(n)^\alpha} \\ &= \mathrm{e}^{\ln(n)(2-\ln(n)^{\alpha-1})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ si } \alpha > 1 \\ n\exp(-\ln(n)^\alpha) &= \mathrm{e}^{\ln(n)(2-\ln(n)^{\alpha-1})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ si } \alpha < 1 \\ \exp(-\ln(n)) &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

On a donc démontré que :

- Si $\alpha > 1$, $\exp(-\ln(n)^\alpha) = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente,

- si $\alpha = 1$, $\exp(-\ln(n)^\alpha) = \frac{1}{n}$, série divergente,
- si $\alpha < 1$, $\frac{1}{n} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\exp(-\ln(n)^\alpha)\right)$, et $\sum \frac{1}{n}$ est une série divergente.

Bilan : par comparaison de séries à terme positif, on peut en déduire que la série est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour la quatrième, si $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\alpha^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc
$$\frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \alpha^n.$$
Par équivalence de séries à terme positif, la série converge si et seulement si $\alpha \in]-1, 1[$.
Si $\alpha > 1$, alors $\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par équivalence,
$$\frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n}} = \frac{1}{\alpha^n} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n.$$
Puisque $\alpha > 1$, la série $\sum \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$ converge et par théorème de comparaison de séries à terme positif, notre série converge.
Enfin, si $\alpha < -1$, on peut majorer :
$$\left|\frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}\right| \leqslant \frac{|\alpha|^n}{1+2\alpha^{2n}}$$
et on applique le résultat précédent.
Bilan : la quatrième série converge pour toute valeur de α.

On écrit tout d'abord
$$\frac{1}{\alpha^{\ln(n)}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(n)\ln(\alpha)}} = \frac{1}{n^{\ln(\alpha)}}.$$
On peut alors appliquer le critère des séries de Riemann : la série $\sum \frac{1}{n^{\ln(\alpha)}}$ converge si et seulement si $\ln(\alpha) > 1$, c'est-à-dire $\alpha > \mathrm{e}$.
Bilan : la série $\sum \frac{1}{\alpha^{\ln(n)}}$ converge si et seulement si $\alpha > \mathrm{e}$.

On écrit tout d'abord, pour $n \geqslant 1$:
$$\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^\alpha}}$$
et donc
$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^n &= 1 - \mathrm{e}^{n\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^\alpha}}\right)} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)} \end{aligned}$$
Si $\alpha \leqslant 0$, par composée, $1 - \left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. La série diverge donc grossièrement.
Si $\alpha > 0$, $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par développement asymptotique :
$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^n &= 1 - \mathrm{e}^{-n\left(\frac{1}{n^\alpha}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n^{\alpha-1}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

et par exponentiation :

$$\sqrt{1-\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}}.$$

Les séries sont à termes positifs, et par critère de Riemann, $\sum \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}}$ converge si et seulement si $\frac{\alpha-1}{2} > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 3$.

Bilan : la série $\sum \sqrt{1-\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^n}$ converge si et seulement si $\alpha > 3$.

Exercice 7

Remarquons que

$$\frac{n(n-1)}{5^n} = \frac{1}{5^2}\frac{n(n-1)}{5^{n-2}} = \frac{1}{5^2} \times n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$ converge (série géométrique dérivée seconde, avec $-1 < \frac{1}{5} < 1$) et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3}$$

Par produit, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)}{5^n}$ converge, et

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{5^n} = \frac{1}{5^2}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3}}$$

De même,

$$\frac{n^2-n+1}{3^n} = \frac{n(n-1)}{3^n} + \frac{1}{3^n} = n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Par le même raisonnement, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge (série géométrique dérivée seconde telle que $-1 < \frac{1}{3} < 1$). De plus, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{3^n}\right)$ converge (série géométrique, $-1 < \frac{1}{3} < 1$). Par somme, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n^2-n+1}{3^n}$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-n+1}{3^n} = \frac{1}{3^2}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}}}$$

Pour la troisième série, on constate que

$$\frac{(-1)^n n}{2^n} = -\frac{1}{2}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge (série géométrique dérivée, avec $-1 < -\frac{1}{2} < 1$), et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}$$

Par produit, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ converge, et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}}$$

Enfin, on constate que

$$\frac{1}{2^n n!} = \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}$$

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n n!}$ est la série exponentielle en $\frac{1}{2}$, qui converge, et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} = e^{1/2} = \sqrt{e}}$$

Exercice 8

1. Après calculs :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Puisque $n-1 \leqslant n \leqslant n+1$, par produit puis en appliquant la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$$

d'où le résultat.

2. On somme le résultat précédent pour n allant de 2 à N. On obtient, par télescopage :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 - \frac{1}{N}$$

et Si $N \geqslant 2$, on peut écrire $T_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2}$, on en déduit

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \leqslant T_N - 1 \leqslant 1 - \frac{1}{N}$$

puis le résultat en ajoutant 1 à chaque membre de l'égalité. Celui-ci est valable également pour $N=1$.

3. La suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ étant à termes positifs, la suite (T_N) est croissante. D'après ce qui précède, pour tout $N \geqslant 2$:

$$T_N \leqslant 2 - \frac{1}{N} \leqslant 2$$

la suite (T_N) est donc majorée. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (T_n) converge.

4. Puisque la suite des sommes partielles converge, par définition, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

5. On utilise l'encadrement vu plus haut : puisque, pour tout $N \geqslant 2$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \leqslant T_N \leqslant 2 - \frac{1}{N}$$

et que les trois membres admettent une limite, par passage à la limite, on en déduit que

$$\boxed{\frac{3}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 2}$$

Exercice 9

1. Le premier résultat se montre par récurrence sur n, en constatant que si $u_n \in]0;1[$ alors $u_n - u_n^2 \leqslant u_n < 1$ et $u_n > u_n^2$, donc $0 < u_{n+1} < 1$. De plus, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante. Elle est minorée par 0, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. En notant l sa limite, et puisque la fonction $f : x \mapsto x - x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème du point fixe, $l = l - l^2$ et donc $l = 0$.
Bilan : la suite u converge vers 0.
2. Par définition, $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$. Notons, pour tout entier n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$. D'après ce qui précède,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1} \text{ par télescopage.}$$

Puisque la suite (u_n) converge vers 0, (S_n) converge vers u_0. Donc, par définition, la série $\sum_n u_n^2$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0$$

3. Notons $T_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)$. Par télescopage,

$$T_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$$

Puisque (u_n) converge vers 0, par composée, $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = -\infty$$

La série $\sum_n (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge.

Exercice 10

1. Montrons par récurrence la proposition P_n : "u_n existe et $0 < u_n < 1$".
- Pour $n = 0$, puisque $0 < u_0 < 1$, la proposition P_0 est vraie.
- On suppose que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n. Montrons que P_{n+1} est vraie.

Puisque, par hypothèse de récurrence, $0 < u_n < 1$, alors

$$0 < u_n^2 < u_n < 1 \Leftrightarrow 1 < 1 + u_n^2 < 1 + u_n < 2$$

soit, puisque la fonction racine est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

$$1 < \sqrt{1 + u_n^2} < \sqrt{1 + u_n} < \sqrt{2}$$

u_{n+1} existe donc. De plus, d'une part,

$$\sqrt{1 + u_n} - \sqrt{1 + u_n^2} > 0$$

et d'autre part $-\sqrt{1 + u_n^2} < -1$ et donc

$$\sqrt{1 + u_n} - \sqrt{1 + u_n^2} < \sqrt{2} - 1 < 1$$

donc $0 < u_{n+1} < 1$: la proposition P_{n+1} est donc vraie.
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
2. On constate que, pour tout entier n (et puisque $u_n < 1$) :

$$u_{n+1} = \frac{(1 + u_n) - (1 + u_n^2)}{\sqrt{1 + u_n} + \sqrt{1 + u_n^2}} = \frac{u_n - u_n^2}{\sqrt{1 + u_n} + \sqrt{1 + u_n^2}} \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{1 + u_n} + \sqrt{1 + u_n^2}}$$

Puisque $u_n \geqslant 0$, alors $\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2} \geqslant 2$ et donc
$$u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$$
On peut alors montrer, par récurrence rapide, que pour tout entier n,
$$u_n \leqslant u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
Puisque la suite (u_n) est positive, et que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et à termes positifs et converge, par théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ converge.

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 11

Remarque

Lorsqu'on le peut, on compare à une série de Riemann. Ici, on va utiliser l'« astuce du $\frac{\alpha+1}{2}$ ».

1. Soit $\alpha > 1$. Notons tout d'abord que $\frac{\alpha+1}{2} > 1$ et que
$$\frac{\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}}{\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}} = \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \times n^{\frac{\alpha+1}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}(\ln n)^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ car } \frac{\alpha-1}{2} > 0.$$
Ainsi,
$$\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right).$$
Puisque $\frac{\alpha+1}{2} > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ est convergente.

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\boxed{\alpha > 1, \text{ la série } \sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \text{ converge.}}$

2. Soit $\alpha < 1$. De la même manière, notons que $\frac{\alpha+1}{2} < 1$. Mais alors
$$\frac{\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}}{\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}} = \frac{(\ln n)^\beta}{n^{\frac{1-\alpha}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{par croissance comparée car } \frac{1-\alpha}{2} > 0.$$
Ainsi,
$$\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}\right).$$
Puisque $\frac{\alpha+1}{2} < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ est divergente.

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\boxed{\alpha < 1, \text{ la série } \sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \text{ diverge.}}$

3. a) Supposons $\beta \leqslant 0$. Si $\beta = 0$, il s'agit de la série harmonique qui diverge. Si $\beta < 0$:
$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n(\ln n)^\beta}} = (\ln n)^\beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n(\ln n)^\beta}\right).$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\boxed{\beta < 0, \text{ la série } \sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \text{ diverge.}}$

b) Soit $\beta > 0$. La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$ est continue sur $[2, n]$. T_n existe et

$$\begin{aligned} T_n = \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} &= \left[-\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln t)^{\beta-1}}\right]_2^n \\ &= \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} - \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln n)^{\beta-1}} \end{aligned}$$

- Si $\beta > 1$, T_n converge vers $\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}$: la suite (T_n) est donc bornée.
- Si $\beta \leqslant 1$, (T_n) diverge vers $+\infty$ par somme de limites.

c) Soit $k \geqslant 2$. Pour tout $t \in [k,\, k+1]$:

$$\begin{aligned} k \leqslant t \leqslant k+1 &\implies \ln k \leqslant \ln t \leqslant \ln(k+1) \\ &\implies (\ln k)^\beta \leqslant (\ln t)^\beta \leqslant (\ln(k+1))^\beta \\ &\implies k(\ln k)^\beta \leqslant t(\ln t)^\beta \leqslant (k+1)(\ln(k+1))^\beta \qquad \text{par produit d'inégalité à termes positifs} \\ &\implies \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta} \leqslant \frac{1}{t(\ln t)^\beta} \leqslant \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \qquad \text{par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale

$$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} \leqslant \frac{1}{k(\ln k)^\beta}.$$

Notons alors $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\beta}$. (S_n) est croissante puisque

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^\beta} > 0.$$

En sommant les inégalités précédentes de 2 à n :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta} \leqslant \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \\ \implies &\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leqslant T_{n+1} \leqslant S_n \\ \implies &S_{n+1} - \frac{1}{2(\ln 2)^\beta} \leqslant T_{n+1} \leqslant S_n \end{aligned}$$

soit, en ré-écrivant, pour $n \geqslant 3$:

$$T_{n+1} \leqslant S_n \leqslant T_n + \frac{1}{2(\ln 2)^\beta}$$

- $\boxed{\text{Si } \beta > 1}$, (T_n) est bornée. L'inégalité précédente garantit que (S_n) est bornée également. Étant croissante, le théorème de la limite monotone permet de conclure que (S_n) converge : $\boxed{\text{la série converge.}}$
- $\boxed{\text{Si } \beta \leqslant 1}$, $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ et l'encadrement précédent garantit que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: $\boxed{\text{la série diverge.}}$

Exercice 12

- Remarquons que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < 0$$

donc la suite (S_{2n}) est décroissante. De même,

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0$$

donc la suite (S_{2n+1}) est croissante. Enfin,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{2n+1} = 0$$

Ainsi, les suites $(S_{2n}$ et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Etant adjacentes, elles convergent et ont la même limite. Puisque (S_{2n}) est (S_{2n+1}) convergent vers la même limite, on en déduit que (S_n) elle-même converge vers cette limite, et donc que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

- La généralisation se fait de la même manière.

Exercice 13

1. Puisque $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour $t \in [k,\, k+1]$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

On intègre entre k et $k+1$. Par croissance de l'intégrale (ou inégalité de la moyenne), on a

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k} \mathrm{d}t$$

soit

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

En sommant,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
\text{soit par telescopage} \quad & H_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n \\
\text{ou encore} \quad & H_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n \\
\text{et finalement} \quad & \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Soit, en divisant par $\ln(n)$,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n)}.$$

Par quotient, les deux termes extrèmes tendent vers 1. Par encadrement, $\frac{H_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, soit

$$\boxed{H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

2. Déterminons un équivalent de (v_n) :

$$\begin{aligned}
v_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) \\
&= H_{n+1} - H_n - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{2n^2 - 2n(n+1) + (n+1)}{2n^2(n+1)} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \underbrace{\frac{-n+1}{2n^2(n+1)}}_{\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

donc $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

Puisque la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} -\frac{1}{2n^2}$ converge (Riemann, avec $2 > 1$) et que les suites sont à termes négatifs, par comparaisons de suites, on peut en déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

Or, remarquons que la suite partielle de la série (v_n) se télescope :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_1.$$

Puisque la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge, la suite $(u_{n+1} - u_1)$ converge, et donc (u_n) converge également.

3. On remarque que le reste a un sens, puisque la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

On s'inspire de la question 1. On va encadrer $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ sur $[k,\, k+1]$, intégrer puis sommer. Par décroissance de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ sur $[k,\, k+1]$ (pour $k \geqslant 1$),

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

soit par inégalité de la moyenne sur $[k,\, k+1]$:

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^2}$$

ou encore

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

En sommant entre n et p :

$$\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2}.$$

et par télescopage

$$\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{p+1} \leqslant \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2}.$$

On peut passer à la limite (le reste converge) :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

et finalement

$$R_{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant R_n \text{ ou encore } \frac{1}{n} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

En multipliant par n :

$$1 \leqslant nR_n \leqslant 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi, par encadrement, $nR_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et donc

$$\boxed{R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

4. On réfléchit comme en 2 :

$$\begin{aligned} t_n &= (H_{n+1} - \ln(n+1) - \gamma) - (H_n - \ln(n) - \gamma) \\ &= H_{n+1} - H_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

Mais alors, comme nous l'avons vu en 2, $t_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

Il reste alors à utiliser le résultat suivant : si $t_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$, alors $\sum_{k=n}^{\infty} t_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2}$. Et en utilisant le résultat de la question 3,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} t_k \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

Par télescopage,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} t_k = \left(\lim_{n\to+\infty} w_n\right) - w_n.$$

Or, par définition de γ, $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Finalement

$$-w_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n} \text{ soit } w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

c'est-à-dire $w_n = \frac{1}{2n} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.
En utilisant la définition de w_n, on peut alors écrire :

$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).}$$

Remarque

Le résultat de la question 4 serait à démontrer : si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, à termes positifs (ou négatifs) et si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, alors les restes $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ et $S_n = \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$ sont équivalents.

Démonstration

Pour cela, on écrit $a_n = b_n + \mathrm{o}_{+\infty}(b_n)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait

$$\left|\frac{a_n - b_n}{b_n}\right| \leqslant \varepsilon$$

(c'est la définition de $\mathrm{o}_{+\infty}(b_n)$). On peut écrire alors

$$|a_n - b_n| \leqslant \varepsilon |b_n|.$$

Mais alors, par inégalité triangulaire, pour $n \geqslant N$:

$$\begin{aligned} |R_n - S_n| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k - b_k\right| &\leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |a_k - b_k| \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon |b_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} |b_k| = \varepsilon S_n. \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $R_n - S_n = \mathrm{o}_{+\infty}(S_n)$, c'est-à-dire $R_n \underset{+\infty}{\sim} S_n$.

⚠ **Attention**
Bien sûr, ce résultat n'est pas au programme.

Exercice 14

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$ la suite des sommes partielles. Par télescopage :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) \\ &= x_{n+1} - x_0. \end{aligned}$$

Ainsi, (S_n) converge si et seulement si (x_{n+1}) converge, c'est-à-dire si et seulement si (x_n) converge.
Bilan : $\sum y_n$ et (x_n) sont de même nature.
2. Remarquons tout d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. La suite (v_n) a donc un sens. Calculons le quotient :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)}\sqrt{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-n-1}\sqrt{n+1}n!}{(n+1)!n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1)^{n}\mathrm{e}^{-1}\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}} \\ &= \mathrm{e}^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sqrt{1+\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Mais alors, à l'aide d'un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= -1 + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= -1 + n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}. \end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{12n^2}$ est convergente (série de Riemann avec $2 > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, on peut en déduire que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est convergente.
3. Appliquons le premier point. Notons $x_n = \ln(u_n)$ pour tout entier n et $y_n = x_{n+1} - x_n$. Remarquons alors que

$$y_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

La série $\sum y_n$ converge (d'après la question précédente). D'après le premier point, on en déduit que la suite (x_n) converge, vers un réel ℓ. Mais alors, par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $u_n = \exp(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\ell} = K > 0$. Ainsi

$$u_n = \frac{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \underset{+\infty}{\sim} K \iff \boxed{n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{K}n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}.}$$

Exercice 15

1. Pour tous réels x et y, on constate que $(x-y)^2 \geqslant 0$. En développant :
$$x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0 \iff xy \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$$
2. Soient u et v deux suites de ℓ^2. Ainsi, $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ sont convergente. D'après la propriété précédente :
$$0 \leqslant |u_n v_n| = |u_n| \cdot |v_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right) = \frac{1}{2}\left(u_n^2+v_n^2\right).$$
La série $\sum \frac{1}{2}\left(u_n^2+v_n^2\right)$ est une série convergente comme somme de deux suites convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |u_n v_n|$ est convergente.Ainsi, la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente, et donc convergente.
3. Montrons que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites convergentes. Tout d'abord, si $u \in \ell^2$, la série $\sum u_n^2$ converge et donc $u_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la suite (u_n) est bien convergente (vers 0).

- La suite nulle appartient à ℓ^2 puisque la série $\sum 0^2$ est bien convergente.
- Soient u et v deux suites de ℓ^2 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Remarquons que, pour tout entier n :
$$\left(\lambda u_n + v_n\right)^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + v_n^2.$$

Par hypothèse, $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent (car u et v appartiennent à ℓ^2). D'après la question précédente, $\sum u_n v_n$ est convergente également. Par somme, la série $\sum \left(\lambda u_n + v_n\right)^2$ est donc bien convergente, et $\lambda u + v \in \ell^2$.

Ainsi, $\boxed{\ell^2 \text{ est bien un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites convergentes.}}$

Exercice 16

1. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda < 1$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda < \ell < 1$. Par convergence vers $\lambda < k$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell.$$
Mais alors, par télescopage et positivité de la suite u :
$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} = \prod_{k=n_0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \ell^{n-n_0+1} = \frac{1}{\ell^{n_0-1}}\ell^n.$$
La série de terme général $\sum_{n\geqslant n_0} \ell^n$ est convergente (géométrique avec $0<\ell<1$). Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant n_0} \frac{u_{n+1}}{u_0}$ est convergente, de même que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.

Bilan : $\boxed{\text{si } \lambda < 1, \text{ la série } \sum u_n \text{ est convergente.}}$

2. Par le même raisonnement, si $\lambda > 1$, prenons $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \ell < \lambda$. Le même raisonnement que précédemment implique qu'il existe un rang n_0, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \ell$. Par télescopage, et positivité de la siute u, pour tout $n \geqslant n_0$
$$\frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} \geqslant \ell^{n-n_0+1} = \frac{1}{\ell^{n_0-1}}\ell^n.$$
Cette fois-ci, puisque $\ell > 1$, la série $\sum_{n\geqslant n_0} \ell^n$ est divergente. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est divergente.

Bilan : $\boxed{\text{si } \lambda > 1, \text{ la série } u_n \text{ est divergente.}}$

3. Si $\lambda = 1$, « tout peut arriver ». Prenons u et v les suites définies pour tout $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^2}.$$

Remarquons que, pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

et pourtant la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique). De même :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

et cette fois-ci, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann avec $2 > 1$).
Bilan : si $\lambda = 1$, on ne peut pas conclure.

Exercice 17

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$\begin{aligned} n^{3/2}(v_{n+1} - v_n) &= n^{\frac{3}{2}}\left(\ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n)\right) \\ &= n^{3/2} \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}\right) \\ &= n^{3/2} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \end{aligned}$$

Utilisons l'hypothèse et effectuons un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} n^{3/2}(v_{n+1} - v_n) &= n^{3/2} \ln\left(\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{c}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= n^{3/2} \ln\left(1 + \left(c - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\right)\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \left(c - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\right)\frac{1}{n^{1/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^{3/2}(v_{n+1} - v_n) = 0.}$$

2. On en déduit, par continuité de la valeur absolue, d'après ce qui précède, que

$$|v_{n+1} - v_n| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum |v_{n+1} - v_n|$ est convergente. Ainsi

$$\boxed{\sum (v_{n+1} - v_n) \text{ est absolument convergente.}}$$

3. Notons (S_n) la suite des sommes partielles de la série précédente : pour tout n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} - v_k$. Par télescopage :

$$S_n = v_{n+1} - v_0.$$

Puisque la série converge, (S_n) converge, on en déduit que la suite (v_{n+1}) et donc (v_n) est également convergente. Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$n^\alpha u_n = \exp v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^\ell > 0$$

soit finalement

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^\ell}{n^\alpha} = \frac{\lambda}{n^\alpha}.}$$

4. Essayons d'appliquer ce qui précède. Par une récurrence rapide, on constate, puisque x et y sont strictement positifs, que la suite (u_n) est à termes strictement positifs. Mais alors :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+x}{n+y} &= \frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{y}{n}} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{y}{n}+\frac{y^2}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1-\frac{y-x}{n}+\frac{y^2-xy}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

D'après la règle de Raabe-Duhamel, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^{y-x}}.}$$

Par comparaison de séries à termes positifs :
- Si $y - x > 1$, c'est-à-dire si $y > x+1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $y - x \leqslant 1$, c'est-à-dire si $y \leqslant x+1$, la série $\sum u_n$ diverge.

5. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = x^{H_n} = x^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}.$$

Puisque $x \in \mathbb{R}_+^*$, u est à terme strictement positifs. Calculons alors :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{H_{n+1}}}{x^{H_n}} &= x^{H_{n+1}-H_n} \\ &= x^{\frac{1}{n+1}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln(x)} \\ &= 1+\frac{\ln(x)}{n+1}+\frac{\ln^2(x)}{2(n+1)^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

D'après la règle de Raabe-Duhamel (qu'on pourrait, de manière rigoureuse, appliquer à (u_{n-1}) et non (u_n)), il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^{-\ln(x)}} = \lambda x^{\ln(n)}.}$$

Si $x < 1$, alors puisque pour $n \geqslant 1$, $\ln(n) \leqslant n$, $|x|^{\ln(n)} \leqslant |x|^n$. Par comparaison à une série géométrique convergente, la série $\sum u_n$ converge.
Si $x \geqslant 1$, la série diverge grossièrement.
Ainsi,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } x \in\,]-1, 1[.}$$

Corrigés des sujets de concours

Sujet 1

1. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [\![k, k+1]\!]$. Alors, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$k \leqslant t \leqslant k+1 \implies \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Par croissance de l'intégrale (puisque $k \leqslant k+1$), on a alors

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.}$$

b) Soit $n \geqslant 2$. Sommons ces inégalités pour k entre 1 et $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{g} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

En faisant le changement d'indice $i = k+1$ dans la première somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - 1 = S_n - 1.$$

La somme de droite s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}.$$

Enfin, par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Finalement, l'inégalité s'écrit

$$\boxed{S_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant S_n - \frac{1}{n}.}$$

c) Remarquons tout d'abord que

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(|t|)]_1^n = \ln(n).$$

Réécrivons alors l'inégalité précédente :

$$S_n - 1 \leqslant \ln(n) \implies S_n \leqslant \ln(n) + 1$$

et

$$\ln(n) \leqslant S_n - \frac{1}{n} \implies \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant S_n.$$

Finalement

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 2, \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant \ln(n) + 1.}$$

d) Divisons l'inégalité précédente par $\ln(n) > 0$: pour $n \geqslant 2$, on a

$$1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Par quotient

$$\frac{1}{n\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Finalement
$$\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{\ln(n)} = 1.$$
Par encadrement,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$$
soit
$$\boxed{S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

2. a) Comme son nom l'indique, c'est un algorithme de seuil : l'instruction `rang(a)` renvoie le premier rang n à partir duquel $S_n \geqslant a$. Ainsi, `rang(50)` renvoie le premier rang à partir duquel $S_n \geqslant 50$.
b) Puisque $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, on peut imaginer que (S_n) dépassera 50 à peu près lorsque $(\ln(n))$ le fera. Or $\ln(n) \geqslant 50 \iff n \geqslant \mathrm{e}^{50}$.
L'instruction laisse donc à penser qu'il faudra attendre la 10^{21} rang avant que (S_n) ne dépasse 50 (c'est donc une convergence vers $+\infty$ extrêmement lente).
3. a) Puisque $t \in [0,\, x]$ et $x < 1$, on est sûr que $t \neq 1$. On reconnait alors la somme des termes usuelles et
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}.}$$

b) Le terme $\frac{x^k}{k}$ laisse à penser que nous avons intégrer le résultat précédent.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque, pour tout $t \in [0,\, x]$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$$
alors
$$\int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$
Par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned}\int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^x t^{k-1}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}.\end{aligned}$$
Toujours par linéarité :
$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \\ &= [-\ln(|1-t|)]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \\ &= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Finalement, on obtient bien
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.}$$

c) Procédons par encadrement. Pour tout $t \in [0,\, x]$:
$$t \leqslant x \implies 1-x \leqslant 1-t.$$

et finalement, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

Enfin, puisque $t \leqslant x \leqslant 1$, $1-t \geqslant 0$. Finalement, pour tout $t \in [0, x]$:

$$0 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

Mais alors, par produit (puisque $t^n \geqslant 0$) :

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}$$

et par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\mathrm{d}t.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^n}{1-x}\mathrm{d}t &= \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{1-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

L'inégalité s'écrit alors

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Or, $0 < x < 1$, donc par croissances comparées

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0.$$

Par encadrement, on en déduit donc que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0.}$$

d) On combine les deux derniers résultats. La question 3.c) garantit alors que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(1-x).$$

Or, la question 3.a) nous indique que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^k}{k}$ converge. On peut en déduire que la série converge, et que

$$\boxed{\forall\, x \in]0, 1[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).}$$

Sujet 2

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ fixé. Tout d'abord, $f_n(x)$ est bien définie pour tout $n \geqslant 1$. Remarquons que,

$$f_n(x) = \frac{n+x-n}{n(n+x)} = \frac{x}{n(n+x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{n^2}$ converge, comme série de Riemann avec $2 > 1$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, $f_n(0) = 0$. Ainsi, $\boxed{F(0) = 0}$. Remarquons enfin que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f_k(1) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \text{ par télescopage.}\end{aligned}$$

Or $1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ainsi, $\boxed{F(1) = 1}$.

2. Tout d'abord, f_n est bien dérivable sur $\mathbb{R}^+$, comme somme de fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

Notons alors que, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f_n'(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n'(x)$ converge.

3. a) On suite l'indication. φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $n \geqslant 1$. φ est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[n, +\infty[$. Soit $(x, x_0) \in [n, +\infty[$. L'inégalité de Taylor-Lagrange, à l'ordre 1, garantit donc que,

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{|x - x_0|^2}{2!} \max_{[x,\, x_0]} |\varphi^{(2)}(t)|.$$

Or, pour tout $t > 0$, $\varphi^{(2)}(t) = \frac{2}{t^3}$. Ainsi, pour tout $t \in [n, +\infty[$, et par décroissance de la fonction inverse :

$$t \geqslant n \implies 0 \leqslant \varphi^{(2)}(t) \leqslant \frac{2}{n^3}.$$

Ainsi,

$$\max_{[x,\, x_0]} |\varphi^{(2)}(t)| \leqslant \frac{2}{n^3}$$

et l'inégalité s'écrit alors

$$\boxed{|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.}$$

b) Prenons $x \in \mathbb{R}^+$, $h \neq 0$ tel que $x + h \in \mathbb{R}^+$. Appliquons le résultat précédent à $n + x$ et $n + x + h$ respectivement, tous les deux dans $[n, +\infty[$:

$$|\varphi(n + x + h) - \varphi(n + x) - (n + x + h - (n + x))\varphi'(n + x)| \leqslant \frac{(n + x + h) - (n + x))^2}{n^3}.$$

c'est-à-dire

$$\left| \frac{1}{n + x + h} - \frac{1}{n + x} + h\frac{1}{(n + x)^2} \right| \leqslant \frac{h^2}{n^3}.$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned}|f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)| &= \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x+h}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)-h\frac{1}{(n+x)^2}\right| \\ &= \left|\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+x+h}-h\frac{1}{(n+x)^2}\right| \\ &= \left|\frac{1}{n+x+h}-\frac{1}{n+x}+h\frac{1}{(n+x)^2}\right|.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)| \leqslant \frac{h^2}{n^3}.$$

Remarquons que la série, pour h fixé non nul, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{h^2}{n^3}$ converge (Riemann avec $3>1$). Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $|f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)|$ converge.

c) On utilise le résultat précédent. La série de terme général $f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)$ étant absolument convergente, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)\right| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{h^2}{n^3}.\end{aligned}$$

Or, les séries $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$, $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x+h)$, et $\sum_{n\geqslant 1} f_n'(x)$, convergent (questions 1. et 2.). Par linéarité de sommes de séries convergentes :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x+h)-\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)-h\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \\ &= F(x+h)-F(x)-hG(x).\end{aligned}$$

En notant $C=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$, on peut en déduire

$$|F(x+h)-F(x)-hG(x)| \leqslant Ch^2.$$

Factorisons par $h \neq 0$:

$$\left|h\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-G(x)\right)\right| \leqslant Ch^2.$$

En divisant par $|h|>0$:

$$\boxed{\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-G(x)\right| \leqslant C|h|.}$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Lorsque h tend vers 0, $C|h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Par théorème d'encadrement on en déduit que

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} G(x).$$

Ainsi, F est dérivable en x, et $F'(x)=G(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $F'=G$.

4. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [k,\, k+1]$. Notons $g : t \longmapsto \frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}$. f est dérivable sur $[k,\, k+1]$ et on a

$$\forall\, t \in [k,\, k+1], \quad g'(t) = -\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(t+x)^2} \leqslant 0 \text{ car } x \geqslant 0.$$

Ainsi, g est décroissante sur $[k,\, k+1]$, et donc

$$g(k+1) \leqslant g(t) \leqslant g(k) \implies f_{k+1}(x) \leqslant \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \leqslant f_k(x).$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens) :

$$\int_k^{k+1} f_{k+1}(x)\mathrm{d} \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f_k(x)\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant f_k(x).}$$

b) Soit $n \geqslant 2$. Sommons ces inégalités de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)$$

soit, par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) \leqslant \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x).$$

Premièrement, en sommant jusqu'à $n+1$ au lieu de n, la partie de droite s'écrit

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

D'autre part, par changement d'indice :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) &= \sum_{k=2}^{n} f_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f_1(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+x}\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \frac{x}{1+x}
\end{aligned}$$

et finalement

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \frac{x}{1+x} \leqslant \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \implies \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t + \frac{x}{x+1}$$

et finalement

$$\boxed{\int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.}$$

5. Calculons l'intégrale. Par linéarité :

$$\begin{aligned}
\int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t &= \left[\ln|t| - \ln|t+x|\right]_1^n \\
&= \ln(n) - \ln(n+x) - (\ln(1) - \ln(1+x)) \\
&= \ln\left(\frac{n(1+x)}{n+x}\right)
\end{aligned}$$

Passons à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\frac{n(1+x)}{n+x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n(1+x)}{n} = 1+x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+x.$$

Par continuité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que

$$\ln\left(\frac{n(1+x)}{n+x}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x).$$

Finalement, par passage à la limite dans l'inégalité précédente :

$$\ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).}$$

6. Pour $x > 0$, $\ln(1+x) > 0$. Divisons l'inégalité précédente par $\ln(1+x)$:

$$1 \leqslant \frac{F(x)}{\ln(1+x)} \leqslant \frac{x}{(x+1)\ln(1+x)} + 1.$$

Par équivalence,

$$\frac{x}{(x+1)\ln(1+x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x\ln(1+x)} = \frac{1}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

la limite se faisant par quotient. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x+1)\ln(1+x)} + 1 = 1.$$

Par théorème d'encadrement

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\ln(1+x)} = 1$$

c'est-à-dire

$$\boxed{F(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(1+x).}$$