Chapitre 23

Développements limités

Résumé

Dans ce chapitre, on introduit la notion de développement limité, en lien avec le chapitre précédent. Nous verrons ensuite des applications de ceux-ci, dans le calcul de limite et de position relative.

Plan du cours

> *« La joie est-elle un sentiment surnaturel ? Ne doit-elle pas être l'état normal de l'homme ? Plus le développement intellectuel et moral d'un homme est élevé, plus l'homme est libre, et plus la vie lui donne de satisfaction. »*

Anton Pavlovitch Tchekhov (1860–1904). *Le Moine noir*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les développements limités :

- connaître la définition d'un développement limité . . . . ☐
- savoir obtenir des développements limités (somme, produit, composée, troncature, quotient, intégration) . . . . ☐
- connaître les développements limités usuels . . . . ☐

② Savoir utiliser la formule de Taylor-Young pour déterminer des développements limités. ☐

③ Savoir utiliser les développements limités :

- pour déterminer des limites et des équivalents . . . . ☐
- pour déterminer des positions relatives . . . . ☐
- pour déterminer des asymptotes et position relatives . . . . ☐

I. Développements limités

1. Définition

Définition 23.1. Développement limité en x_0

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0, et n un entier naturel. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe des réels $a_0, a_1 \dots, a_n$ tels qu'au voisinage de x_0 on ait

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)$$

La partie $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$ est appelée **partie régulière** du développement limité, et $o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)$ le **terme complémentaire** ou le **reste**.
On abrégera régulièrement « développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 » en $\mathrm{DL}_n(x_0)$.

Remarque

L'idée d'un développement limité est de trouver une approximation locale d'une fonction f par un polynôme. Le terme complémentaire est essentiel, puisqu'il permet d'indiquer l'ordre du développement limité.

Remarque

Pour que f admette un développement limité en x_0, il faut qu'elle soit définie au voisinage de x_0 : c'est une propriété locale.
Plutôt que d'écrire le reste $o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)$, on pourra écrire $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple 23.1

On a le développement limité à l'ordre 1 suivant : $\ln(1+x) = x + o_0(x)$. En effet,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 = 0$$

Exercice 23.2

Montrer qu'on a le développement limité suivant : $\mathrm{e}^x = 1 + x + o_0(x)$.

Solution

En effet

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 - 1 = 0$$

Citons le cas particulier, que l'on va souvent utiliser, du développement limité au voisinage de 0 :

Définition 23.2. Développement limité en 0

Soit f une fonction définie au voisinage de 0, et n un entier naturel. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n au voisinage de 0 s'il existe des réels $a_0, a_1 \dots, a_n$ tels qu'au voisinage de x_0 on ait

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o_0\left(x^n\right)$$

Remarque

f admet un développement limité en x_0 si et seulement si la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ admet un développement limité en 0 (par rapport à la variable h). Dans la suite, on n'énoncera ainsi que les résultats pour les développements limités en 0.

Exercice 23.3

Montrer que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$. Déterminer alors un développement limité à l'ordre 2 de sin en $\frac{\pi}{2}$.

Solution

On a en effet, d'après un résultat du chapitre 21

$$\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

donc

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\frac{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{\cos(x)-1}{x^2} + \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

On a donc bien $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$. Mais alors, pour x au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, posons $x = h + \frac{\pi}{2}$, avec h au voisinage de 0. On obtient

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin\left(h+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + o_0(h^2)\\ &= 1 - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + o_{\frac{\pi}{2}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\end{aligned}$$

Proposition 23.1.

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0. Alors la partie régulière est unique.

Démonstration

Montrons-le dans le cas d'un voisinage de 0. Ecrivons $f(x) = P(x)+o_0(x^n) = Q(x)+o_0(x^n)$ avec P, Q deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n. Mais alors

$$P(x) - Q(x) = o_0(x^n) \quad \text{soit} \quad \lim_{x\to 0} \frac{P(x)-Q(x)}{x^n} = 0$$

Or, puisque $\deg(P-Q) \leqslant n$, ce résultat est impossible, sauf si $P - Q = 0$. En effet, si $P - Q \neq 0$, alors $P(x) - Q(x) \underset{0}{\sim} \alpha_p x^p$ avec $p \leqslant n$ et $\alpha_p \neq 0$. Mais alors

$$\frac{P(x)-Q(x)}{x^n} \underset{0}{\sim} \alpha_p x^{p-n} \xrightarrow[x\to 0]{} \alpha_p \neq 0 \text{ ou } \pm\infty.$$

Ainsi, $P = Q$ et la partie régulière est unique.

Exercice 23.4

Déterminer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ (on pourra s'intéresser à $1 + x + \ldots + x^n$).

Solution

Remarquons que, pour $x \neq 1$:

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Ainsi, pour $x \neq 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Or

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$$

Ainsi, $\frac{x^{n+1}}{1-x} = o_0(x^n)$ et donc

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o_0(x^n)$$

2. Propriétés des DL

Proposition 23.2. Troncature

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)$$

et soit $0 \leqslant p < n$. Alors f admet un développement limite à l'ordre p, donné par

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_p(x-x_0)^p + o_{x_0}\left((x-x_0)^p\right)$$

Démonstration

Supposons que l'on dispose d'un $\mathrm{DL}_n(x_0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)$$

Alors, si $0 \leqslant p < n$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_p(x-x_0)^p + a_{p+1}(x-x_0)^{p+1} + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right) \\ &= a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_p(x-x_0)^p + (x-x_0)^p\left(a_{p+1}(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^{n-p}\right) + o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right) \end{aligned}$$

Or $o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right) = o_{x_0}\left((x-x_0)^p\right)$ et

$$a_{p+1}(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^{n-p} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0.$$

Ainsi,

$$(x-x_0)^p\left(a_{p+1}(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^{n-p}\right) + o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right) = o_{x_0}\left((x-x_0)^p\right).$$

Exemple 23.5

Ainsi, si $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + o_0(x^3)$ alors $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$.

Proposition 23.3. Opérations sur les DL

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. On écrit
$$f(x) = P(x) + o_0(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o_0(x^n)$$
avec P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Pour tout réel λ, $\lambda f + g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est $\lambda P + Q$.
- $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est la troncature du polynôme $P \times Q$ à l'ordre n.
- Si $f(0) = 0$, $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est la troncature du polynôme $Q \circ P$ à l'ordre n.

Démonstration

Le premier point se fait aisément, en utilisant les règles de prépondérance :
$$\lambda f(x) + g(x) = \lambda P(x) + o_0(x^n) + Q(x) + o_0(x^n) = (\lambda P + Q)(x) + o_0(x^n)$$
Pour le deuxième point, on écrit astucieusement :
$$f \times g - P \times Q = f \times g - f \times Q + f \times Q - Q \times P = f \times (g - Q) + Q \times (f - P)$$
Mais alors
$$f \times g - P \times Q = f o_0(x^n) + Q o_0(x^n) = o_0(x^n)$$
Le dernier point est admis.

Attention

Pour $f \times g$, $P \times Q$ a un degré $2n$, mais n'apporte qu'une information jusqu'à l'ordre n, et donc tout monôme de degré strictement supérieur à n sont à supprimer.
Ces résultats sont valables de manière générale en x_0, quitte à poser $f(x_0 + h)$.

Exercice 23.6

Déterminer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Solution

On part du développement limité
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o_0(x^n)$$
et on compose $f : x \mapsto -x$ (qui vérifie bien $f(0) = 0$) par $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:
$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)$$
De même, on compose $x \mapsto x^2$ par le précédent et on tronque le résultat à l'ordre n :
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^p x^{2p} + \ldots + o_0(x^n)$$

Proposition 23.4. Parité

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. …

- Si f est paire, alors sa partie régulière ne contient que des termes de degrés pairs.
- Si f est impaire, alors sa partie régulière ne contient que des termes de degrés impairs.

Démonstration

Ecrivons $f(x) = P(x) + I(x) + o(x^n)$, où P contient les termes pairs, et I les termes impairs du développement limité. Mais alors $f(-x) = P(x) - I(x) + o(x^n)$. Par unicité du développement limité, par exemple si f est paire, on a nécessairement $I(x) = 0$.

3. Quotient

Méthode

Pour déterminer le développement limité d'un quotient $\frac{f}{g}$, on écrira $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et on se ramènera au développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ par composée.

Exercice 23.7

Déterminer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{-x^2+x+1}$.

Solution

On utilise le développement limité à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+x}$ et on compose $x \mapsto x - x^2$ par celui-ci, en tronquant à l'ordre 3 : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o_0\left(x^3\right)$ donc

$$\frac{1}{1+x-x^2} = 1 - (x - x^2) + (x - x^2)^2 - (x - x^2)^3 + o_0\left(x^3\right)$$

soit, après développement et troncature

$$\frac{1}{1+x-x^2} = 1 - x + x^2 + (x^2 - 2x^3) - x^3 + o_0(x^3) = 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + o_0\left(x^3\right)$$

Dans le cas d'un produit ou d'un quotient par un monôme, on a des résultats plus intéressants, puisqu'on ne perd pas d'information :

Proposition 23.5. Cas particulier des monômes

- Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o_0(x^n)$ alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$:
$$x^p f(x) = a_0 x^p + a_a x^{p+1} + \ldots + a_n x^{n+p} + o_0\left(x^{n+p}\right)$$
- Si $f(x) = a_p x^p + \ldots + a_n x^n + o_0(x^n)$ alors
$$\frac{f(x)}{x^p} = a_p + \ldots + a_n x^{n-p} + o_0\left(x^{n-p}\right).$$

Ceci est bien sûr valable en x_0 et pas uniquement en 0.

Exemple 23.8

On a vu que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$. On peut alors écrire

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = -\frac{x}{2} + o_0\left(x\right).$$

4. Développement limité, continuité et dérivabilité

Proposition 23.6.

f admet un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de x_0 de la forme $f(x) = \ell + o_{x_0}(1)$ si et seulement si f est continue (ou prolongeable par continuité) en x_0 et $f(x_0) = \ell$.

Démonstration

En effet, $f(x) - \ell = o_{x_0}(1) \iff \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - \ell}{1} = 0$.

Proposition 23.7.

f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0 de la forme $f(x) = a + b(x - x_0) + \mathrm{o}_{x_0}(x - x_0)$ si et seulement si f est dérivable en x_0 et $f(x_0) = a$ et $f'(x_0) = b$.

Démonstration

En effet, par troncature, $f(x) = a + \mathrm{o}_{x_0}(1)$ si et seulement si f est continue en x_0 et $f(x_0) = a$. Enfin

$$f(x) = a + b(x - x_0) + \mathrm{o}_{x_0}(x - x_0) \iff \frac{f(x) - a}{x - x_0} = b + \mathrm{o}_{x_0}(1) \xrightarrow[x \to x_0]{} b$$

⚠ **Attention**

Ce résultat, vrai si f est continue ou dérivable, n'est plus vrai pour les dérivées d'ordre supérieur. Ainsi, une fonction peut avoir un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 sans être deux fois dérivable en 0.

Exemple 23.9

Soit $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que $f(x) = o_0(x^2)$ mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Solution

Rapidement, pour $x \neq 0$, on a $\frac{f(x)}{x^2} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0$ en 0 (par encadrement classique). Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Calculons alors le taux d'accroissement de f' en 0 :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x)}{x} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le premier terme admet une limite en 0 (qui vaut 0). En revanche, le deuxième terme n'en admet pas (car cos n'admet pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$). Ainsi, f' ne peut être dérivable en 0, et f n'est donc pas deux fois dérivable en 0.

5. Intégration

Proposition 23.8.

Soit f une fonction continue sur un intervalle contenant 0. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{=P(x)} + \mathrm{o}_{x_0}(x^n)$$

Alors une primitive de f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0, dont la partie régulière est la primitive de P valant $F(0)$ en 0 :

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \mathrm{o}_{x_0}(x^{n+1})$$

Démonstration

Posons $Q(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. La fonction $t \mapsto F(t) - Q(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$ (pour x bien choisi), donc par inégalité des accroissements finis

$$\left| \frac{F(x) - Q(x) - (F(0) - Q(0))}{x - 0} \right| \leqslant \max_{t\in[0;x]} |(F-Q)'(t)| = \max_{t\in[0;x]} |f(t) - P(t)|$$

Ainsi,

$$\left| \frac{F(x) - Q(x)}{x^{n+1}} \right| \leqslant \frac{\max\limits_{t\in[0;x]} |f(t) - P(t)|}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

puisque $f(x) - P(x) = o_0(x^n)$.

Exercice 23.10

Déterminer un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ et un $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \arctan(x)$.

Solution

On part d'un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ que l'on intègre :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)$$

et donc

$$\ln(1+x) = \underbrace{\ln(1+0)}_{=0} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$$

De même, on écrit un $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ que l'on intègre :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o_0(x^{2n})$$

et donc

$$\arctan(x) = \underbrace{\arctan(0)}_{=0} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1})$$

II. Formule de Taylor-Young

1. Formule de Taylor-Young

Théorème 23.9. Formule de Taylor-Young

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ où I est un intervalle contenant x_0. Alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o_{x_0}((x-x_0)^n)$$

Démonstration

La preuve est admise. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, il s'agit d'une conséquence de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 23.11

Déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de exp.

Solution

exp est de classe $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ pour tout entier n (puisqu'en réalité, exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$) et on a

$$\forall\ k \in \mathbb{N}, \quad \exp^{(k)} = \exp \quad \text{et donc} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}, \quad \exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$$

Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 et

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}x^k + o_0(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o_0(x^n)$$

2. Développements limités usuels

En utilisant la formule de Taylor-Young, on obtient les développements limités au voisinage de 0 suivants, qui sont à *connaître par cœur*.

a. $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, logarithme et arctan

♡ **Proposition 23.10.**

On dispose des $\mathrm{DL}_n(0)$ suivants :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o_0(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o_0(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o_0(x^n) \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o_0(x^n) \\
\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o_0(x^{2n}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0\left(x^{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

Démonstration

Pour le premier, on n'utilise pas la formule de Taylor-Young, mais plutôt le résultat des sommes géométriques :

$$\begin{aligned} 1+x+\ldots+x^n &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} - x^n \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}0} = \frac{1}{1-x} + o_0(x^n) \end{aligned}$$

En remplaçant x par $-x$ (qui tend vers 0 en 0) on obtient

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o_0(x^n).$$

Par intégration du précédent :

$$\ln(1+x) = \ln(1) + x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o_0\left(x^{n+1}\right)$$

et par substitution

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \ldots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_0\left(x^{n+1}\right).$$

Par composition avec $x \mapsto x^2$ (qui tend vers 0 en 0) dans le deuxième développement limité :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o_0\left(x^{2n}\right)$$

et par intégration

$$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0\left(x^{2n+1}\right)$$

3. Exponentielle et fonctions trigonométriques

Proposition 23.11.

On dispose des $\mathrm{DL}_n(0)$ suivants :

$$\begin{aligned} \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1}) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+2}) \\ \tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5) \end{aligned}$$

Démonstration

Les quatre découlent de la formule de Taylor-Young, les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0, donc admettent des développements limités en 0 à tout ordre. Il suffit d'utiliser les dérivées vues dans le chapitre 19.

Remarque

tan étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, elle admet un développement limité à tout ordre. Il n'y a cependant pas de formule « simple » donnant le développement limité.

4. Puissances

Proposition 23.12.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dispose des $\mathrm{DL}_n(0)$ suivants :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_0(x^n).$$

Démonstration

On applique la formule de Taylor-Young, la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. On constate rapidement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(n)} : x \mapsto \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad \text{et} \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).$$

La formule de Taylor-Young s'écrit alors

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_0(x^n)$$

Remarque

Le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ est intéressant. On constate alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\dots\frac{-2n+3}{2} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}1\times 3\times\dots\times(2n-3)}{2^n} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n\times 2\times 4\times\dots\times(2n-2)} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n 2^{n-1}(n-1)!}
\end{aligned}$$

Pour les premières valeurs :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + o_0(x) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o_0\left(x^2\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o_0\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

III. Applications

1. Calcul de limite

On peut utiliser les développements limités pour lever des formes indéterminées.

Exercice 23.12

Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)(\mathrm{e}^x+1) - 3(\ln(1+x)+1) + 1}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Solution

Dans le premier cas, on utilise le développement limité de exp et de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 2 (car le x^2 au dénominateur nous en donne l'intuition) :

$$\frac{(x+1)(1+x+\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)+1)-3(x-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)+1)+1}{x^2} = \frac{3x^2+o_0(x^2)}{x^2} = 3+\mathrm{o}_0(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 3$$

De même, en effectuant un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{x-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)-x}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

2. Recherche d'équivalents

Proposition 23.13.

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o_0(x^n)$$

Soit p l'indice du premier coefficient a_p non nul. On appelle **forme normalisée** du développement limité l'écriture

$$f(x) = x^p\left(a_p + a_{p+1}x + \ldots + a_nx^{n-p} + o_0(x^{n-p})\right)$$

et dans ce cas

$$f(x) \underset{0}{\sim} a_px^p$$

Remarque

On peut raisonner en dehors de 0, en faisant un développement limité à l'ordre n de $x \mapsto f(x_0+x)$.

Exercice 23.13

Déterminer un équivalent simple en 0 de

$$f : x \mapsto \tan(x) - x\cos(x)$$

Solution

On utilise un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de chacune des fonctions :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3) \qquad x\cos(x) = x - \frac{x^3}{2} + o_0(x^3)$$

et donc

$$\tan(x) - x\cos(x) = \frac{5}{6}x^3 + o_0(x^3).$$

Ainsi,

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{5}{6}x^3$$

Exercice 23.14

Déterminer un équivalent de la suite $1 + n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Solution

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Posons $u = \frac{1}{n}$. Remarquons alors que

$$\begin{aligned} 1 + n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) &= 1 + \frac{\ln(1-u)}{u} \\ &= 1 + \frac{-u - \frac{u^2}{2} + o_0\left(u^2\right)}{u} \\ &= 1 - 1 - \frac{u}{2} + o_0\left(u\right) = -\frac{u}{2} + o_0\left(u\right) \underset{0}{\sim} -\frac{u}{2}. \end{aligned}$$

Par substitution,

$$1 + n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

3. Position relative de courbe

Méthode

Supposons que f admette un $\mathrm{DL}_1(x_0)$. Alors on obtient l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 en prenant la partie régulière du développement limité. En appliquant le résultat précédent, et sous réserve qu'un DL d'ordre suffisant existe, on peut écrire

$$f(x) - (a+bx) \sim_{x_0} a_p(x-x_0)^p$$

Alors le signe de $a_p(x-x_0)^p$ permet de donner la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de x_0 : s'il est positif, la courbe est au dessus de sa tangente ; sinon elle est au-dessous.

Attention

Le résultat n'est vrai que localement autour de x_0.

Exemple 23.15

Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. Montrer que f est dérivable en 0, et étudier la position relative de la courbe de f et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Solution

Utilisons le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de x_0 :

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_0(x^4) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o_0(x^2)$$

D'une part, puisque f admet (par troncature) un $\mathrm{DL}_1(0)$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{3}$, mais de plus, $f(x) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x\right) = -\frac{1}{4}x^2 + o_0(x^2) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{4}x^2$.

Puisque $-\frac{1}{4}x^2 < 0$ au voisinage de 0, on en déduit que la tangente à la courbe de f au voisinage de 0 est localement toujours au-dessus de la courbe de f.

4. Asymptote

Définition 23.3.

On dit qu'une fonction f admet un **développement asymptotique** à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ si on peut écrire

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1}{t} + \dots + \frac{a_n}{t^n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

Méthode

Pour obtenir un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ de $f(x)$, on posera le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, et on cherche un développement limité en 0 de $f\left(\frac{1}{t}\right)$. On revient alors à la variable de départ, en remplaçant t par $\frac{1}{x}$.

Exercice 23.16

Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 2 de

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}$$

Solution

Notons $u = \frac{1}{x}$. On a alors $f(u) = u\sqrt{1+u}$. Faisons un développement limité au voisinage de 0 :

$$f(x) = f\left(\frac{1}{u}\right) = u\left(1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o_0(u^2)\right) = u + \frac{1}{2}u^2 + u_0(u^2)$$

On obtient alors le développement asymptotique

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Proposition 23.14.

Soit f une fonction, telle que $\frac{f(x)}{x}$ admet un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ à l'ordre n :

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

soit encore

$$f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^{n-1}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

Soit $p \geqslant 2$ l'indice du premier coefficient a_p non nul. Alors $y = a_0 x + a_1$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$, et le signe de $\frac{a_p}{x^{p-1}}$ donne la position de la courbe et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 23.17

Déterminer l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et la position relative avec la courbe de la fonction

$$f : x \mapsto x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

Solution

En procédant comme précédemment, posons $u = \frac{1}{x}$. $f(u) = \frac{1}{u}\sqrt{1+u}$ et faisons un développement limité à l'ordre 2 de $u \mapsto \sqrt{1+u}$:

$$f(u) = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o_0(u^2)\right) = \frac{1}{u} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}u + o_0(u)$$

Soit, en revenant à x :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, la courbe de f admet la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ comme asymptote oblique, et puisque $-\frac{1}{8x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe de f est localement en dessous de son asymptote.

Exercices 23

Exercices

Développements limités

●○○ **Exercice 1 Un début** (5 min.)

À partir du développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, déterminer un développement limité à l'ordre 4 de

$$x \mapsto \sqrt{1+x^2} \qquad x \mapsto \sqrt{1-x^2} \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

●○○ **Exercice 2 Des développements limités simples** (15 min.)

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$ à l'ordre 3 en 0,
2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0,
3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0,
4. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0,
5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0,
6. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0.

●○○ **Exercice 3 Des développements limités un peu moins simples** (15 min.)

Déterminer les développements limités suivant :

1. $x \mapsto \frac{1}{3+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
2. $x \mapsto \sin(2x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
3. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
4. exp au voisinage de 1 à l'ordre 4.
5. $x \mapsto \exp(1+\sin(x))$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

●○○ **Exercice 4 Des DL mais pas en 0** (15 min.)

Déterminer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 2,
2. $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 2,
3. e^x à l'ordre 3 en 1,
4. $\cos(x)$ à l'ordre 3 en $\dfrac{\pi}{3}$,
5. $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2.

Limites et équivalents

●○○ **Exercice 5 Le retour des limites** (15 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\sin(x)}}{x^3}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^x$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

●○○ Exercice 6 D'autres limites (15 min.)

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ en 0,
2. $\dfrac{1+\ln(1+x)-\mathrm{e}^x}{1-\cos x}$ en 0,
3. $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ en 0 (avec $a,b\in\mathbb{R}_+^*$),
4. $\dfrac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ en 0,
5. $\dfrac{\exp(\sin x)-\exp(\tan x)}{\sin x-\tan x}$ en 0,
6. $\dfrac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1}$ en 0^+.

●○○ Exercice 7 Limite or not limite ? (10 min.)

Déterminer $a\in\mathbb{R}$ tel que la fonction $x\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{ax}-2}{x^2}$ admette une limite finie en 0. Déterminer cette limite le cas échéant.

●○○ Exercice 8 Des équivalents de fonctions (15 min.)

Déterminer des équivalents en 0 des fonctions suivantes :

1. $x\longmapsto \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$,
2. $x\longmapsto \mathrm{e}^{x^2}-\cos(x)$,
3. $x\longmapsto x+\arctan(x)-2\sin(x)$,
4. $x\longmapsto \dfrac{1}{x}\left(\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}-2\right)$,
5. $x\longmapsto \dfrac{1}{x\ln(1+x)}-\dfrac{1}{\sin\left(x^2\right)}$.

●●○ Exercice 9 Des équivalents de suites (20 min.)

Déterminer des équivalents des suites suivantes :

1. $4\sqrt{n(1+4n)}-8n-1$,
2. $3n-2n\cos\left(n^{-3/2}\right)-\sqrt[3]{3+n^3}$,
3. $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$,
4. $\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$,
5. $-2+(2n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Étude locale de fonctions

●○○ Exercice 10 Etude locale d'une fonction (15 min.)

Soit $f : x\mapsto \frac{\sqrt{\cos(x)}-1}{x(1+x^2)}$.

1. A partir du développement limité de $x\mapsto\sqrt{1-x}$, déterminer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\sqrt{\cos(x)}-1$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f.
3. Démontrer que f est continue et dérivable en 0, et donner $f(0)$ et $f'(0)$.
4. Déterminer la position relative de la courbe de f et de sa tangente au point d'abscisse 0.

●○○ Exercice 11 Une nouvelle étude locale (10 min.)

Soit $f : x\mapsto \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$.

1. Donner un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.
2. En déduire un prolongement par continuité, la dérivabilité et la position relative de la courbe de f et de sa tangente au point d'abscisse 0.

●●○ **Exercice 12 Des asymptotes obliques** (20 min.)

Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation. On précisera également la position de la courbe par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

1. $x \longmapsto (2x-1)\mathrm{e}^{-3/x}$,
2. $x \longmapsto \sqrt[3]{8x^3+7x^2-3x+1}$,
3. $x \longmapsto \sqrt{x^4+2x+5} - x^2\mathrm{e}^{1/x}$,
4. $x \longmapsto (x^2+2)\ln\left(1-\dfrac{3}{x}\right)$,
5. $x \longmapsto \dfrac{x^5\left(1-\mathrm{e}^{-1/x}\right)}{(1+x)^3}$.

Suites implicites

●●● **Exercice 13 Une première suite implicite** (20 min.)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ que l'on notera x_n.
2. Déterminer un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = \dfrac{\pi}{2} + n\pi - x_n$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, y_n = \arctan\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$.
   b) En déduire un équivalent simple de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   c) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} a_n + b_n + o\left(b_n\right)$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des suites que l'on précisera.

●●● **Exercice 14 Une autre suite implicite** (20 min.)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$tel que $x_n + \sqrt[3]{x_n} = n$.
2. Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x_n - n$. Montrer que $y_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}$.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $z_n = y_n + \sqrt[3]{n}$. Déterminer un équivalent de z_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) En déduire un développement asymptotique à trois termes de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

●●● **Exercice 15 Une dernière suite implicite** (25 min.)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ que l'on notera x_n.
2. Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $\ln\left(x_n\right) \underset{+\infty}{=} o\left(x_n\right)$ et déterminer un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $y_n = x_n - n + \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Montrer que $x_n \underset{+\infty}{=} n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.

Pour aller plus loin

●○○ **Exercice 16 Sur le développement limité de tan** (20 min.)

L'objectif de cet exercice est de déterminer un développement limité de tangente suivant plusieurs méthodes.

1. Pourquoi tan admet-elle un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout n ?
2. En utilisant la formule de Taylor-Young, déterminer un développement limité à l'ordre 2 de tangente.
3. Méthode par unicité.
   a) Expliquer pourquoi $\tan'$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 (pour tout entier n).
   b) On note $\tan'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o_0(x^4)$. Déterminer en fonction des a_i le développement limité de tan au voisinage de 0.
   c) En utilisant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, en déduire une relation sur les a_i, puis déterminer ceux-ci.
4. Méthode par polynôme.
   Soit (P_n) la suite de polynôme définie par $P_0(X) = X$ et pour tout entier n, $P_{n+1}(X) = (1 + X^2)P_n'(X)$.
   a) Déterminer P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5.
   b) Montrer par récurrence sur , n que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a
   $$\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$$
   c) En déduire $\tan^{(n)}(0)$ pour tout $n \in [\![1;5]\!]$, puis un développement limité de tan à l'ordre 6 au voisinage de 0.

●●● Exercice 17 Du dénombrement (15 min.)

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 10 de

$$u : x \mapsto \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}.$$

En déduire le nombre de triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant $a + 2b + 5c = 10$.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

En utilisant le développement limité du cours en 0 :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

on en déduit, par composée :

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$
$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Mais alors, en utilisant le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)} \\
&= 1 - \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^2 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2

On utilise les développements limités usuels à l'ordre demandé, et on utilise les propriétés (somme, troncature, ...).

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x}-\mathrm{e}^x &= 1+x+x^2+x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= \boxed{\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)}\\
\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} &= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}x^3+\frac{1}{4!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}x^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)\\
&\quad +1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}x^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}x^3+\frac{1}{4!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}x^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)\\
&= \boxed{2-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{64}x^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)}\\
\sin(x)\cos(2x) &= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)\\
&= x-2x^3+\frac{2}{3}x^5-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}x^5+\frac{x^5}{120}+\mathrm{o}\left(x^6\right)\\
&= \boxed{x-\frac{13}{6}x^3+\frac{121}{20}x^5+\mathrm{o}\left(x^6\right)}\\
\cos(x)\ln(1+x) &= \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\\
&= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\\
&= \boxed{x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}\left(x^4\right)}\\
(x^3+1)\sqrt{1-x} &= (x^3+1)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= 1-\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\\
&= \boxed{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{15}{16}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)}\\
(\ln(1+x))^2 &= \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\\
&= x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{3}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\\
&= \boxed{x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)}
\end{aligned}
$$

Exercice 3

On se ramène aux DL usuels par somme, composée, produit, ...

1. On factorise et on utilise le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3+x} &= \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}}\\ &= \frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{3}\right)^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= \frac{1}{3}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{27}-\frac{x^3}{81}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= (2x)-\frac{(2x)^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\\ &= 2x-\frac{4x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\end{aligned}$$

3. Puisque $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)$, on a alors :

$$\begin{aligned}(\ln(1+x))^2 &= \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^2\\ &= x^2-x^3+2\frac{x^4}{3}+\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\\ &= x^2-x^3+\frac{11x^4}{12}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\end{aligned}$$

4. Attention, ici on est au voisinage de 1. Pour utiliser le développement limité en 0, il faut se ramener à 0. On pose $x=1+h$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^{1+h}\\ &= \mathrm{e}\mathrm{e}^h\\ &= \mathrm{e}\left(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\frac{h^4}{24}+o_0(h^4)\right)\\ &= \mathrm{e}+\mathrm{e}(x-1)+\mathrm{e}\frac{(x-1)^2}{2}+\mathrm{e}\frac{(x-1)^3}{6}+\mathrm{e}\frac{(x-1)^4}{24}+o_1((x-1)^4)\end{aligned}$$

5. On développe tout d'abord $1+\sin(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 4, puis on compose les développements limités :

$$1+\sin(x)=1+x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)$$

et donc

$$\begin{aligned}\exp(1+\sin(x)) &= \exp\left(1+x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\\ &= \exp(1)\exp\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(1+\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^2}{2}+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^3}{6}+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^4}{24}\right.\\ &= \mathrm{e}\left(1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\\ &= \mathrm{e}+\mathrm{e}x+\mathrm{e}\frac{x^2}{2}-\mathrm{e}\frac{x^4}{8}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\end{aligned}$$

Exercice 4

Deux méthode : un changement de variables pour se ramener à un $\mathrm{DL}_n(0)$, ou bien la formule de Taylor-Young. C'est ce que l'on fait ici pour des fonctions usuelles : ici, toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage des points considérés. On applique alors la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n + \mathrm{o}_a\left((x-a)^n\right).$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{\frac{2}{8}}{2!}(x-2)^2 + \frac{\frac{-6}{16}}{3!}(x-2)^3 + \mathrm{o}_2\left((x-2)^3\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \mathrm{o}_2\left((x-2)^3\right).\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(2) + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + \mathrm{o}_2\left((x-2)^3\right), \\ \mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^1(x-1) + \frac{\mathrm{e}^1}{2}(x-1)^2 + \frac{\mathrm{e}^1}{6}(x-1)^3 + \mathrm{o}_1\left((x-1)^3\right) \\ &= \mathrm{e}^1\left(1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3\right) + \mathrm{o}_1\left((x-1)^3\right), \\ \cos(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{6}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \mathrm{o}_{\frac{\pi}{3}}\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \mathrm{o}_{\frac{\pi}{3}}\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right) \\ \sqrt{x} &= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) + \frac{-\frac{1}{8\sqrt{2}}}{2}(x-2)^2 + \frac{\frac{3}{32\sqrt{2}}}{6}(x-2)^3 + \mathrm{o}_2\left((x-2)^3\right) \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) - \frac{1}{16\sqrt{2}}(x-2)^2 + \frac{1}{64\sqrt{2}}(x-2)^3 + \mathrm{o}_2\left((x-2)^3\right)\end{aligned}$$

Exercice 5

> ***Méthode***
> On utilise les développements limités à des ordres bien choisis pour déterminer les limites.

1. On effectue un développement limité à l'ordre 3 (car il y a x^3 au dénominateur) :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\sin(x)} &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \left(1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^3}{6}\right) + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \left(1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\sin(x)}}{x^3} = \frac{1}{6} + \mathrm{o}(1) \longrightarrow \frac{1}{6}$$

2. Rappelons que

$$\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

Puisque la limite est en $+\infty$, posons $u = \frac{1}{x}$ pour se ramener à 0. On cherche alors

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)}{u}}$$

On veut alors un développement limité de $\ln\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)$ à l'ordre 1. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(u)}{u} &= \frac{u - \frac{u^3}{6} + \mathrm{o}\left(u^3\right)}{u}\\ &= 1 - \frac{u^2}{6} + \mathrm{o}\left(u^2\right)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin(u)}{u}\right) &= \ln\left(1 - \frac{u^2}{6} + \mathrm{o}\left(u^2\right)\right)\\ &= -\frac{u^2}{6} + \mathrm{o}\left(u^2\right)\end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{\ln\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)}{u} = -\frac{u}{6} + \mathrm{o}\left(u\right) \longrightarrow 0$$

Par composée

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = 1}$$

3. De même :

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x^2}}$$

On cherche donc un développement limité à l'ordre 2 de $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$. Or, dans la question précédente, on a obtenu :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$

et donc

$$\frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x^2} = -\frac{1}{6} + \mathrm{o}\left(1\right) \longrightarrow -\frac{1}{6}$$

Par composée :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}}$$

Exercice 6

Pour chacune des limites, on effectue un développement limité pour en déduire le résultat.

$$\begin{aligned}\frac{\sin x - x}{x^3} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}\left(x^3\right) - x}{x^3}\\ &= -\frac{1}{6} + \mathrm{o}\left(1\right) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{6},\\ \frac{1+\ln(1+x) - \mathrm{e}^x}{1-\cos x} &= \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{-x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)}{\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)} = \frac{-1 + \mathrm{o}\left(1\right)}{\frac{1}{2} + \mathrm{o}\left(1\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} -2,$$

Pour la troisième, on écrit $\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}$. Faisons un développement limité du terme de l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) &= \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a)} + \mathrm{e}^{x\ln(b)}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1 + x\ln(a) + \mathrm{o}\left(x\right) + 1 + x\ln(b) + \mathrm{o}\left(x\right)}{2}\right) \quad \text{car } x\ln(a) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \text{ et } x\ln(b) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\
&= \frac{1}{x}\ln\left(1 + x\frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} + \mathrm{o}\left(x\right)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(x\frac{\ln(ab)}{2} + \mathrm{o}\left(x\right)\right) = \ln(\sqrt{ab}) + \mathrm{o}\left(1\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln(\sqrt{ab}).
\end{aligned}$$

Par composition,

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{e}^{\ln(\sqrt{ab})} = \sqrt{ab}.$$

Ensuite, on reprend les développements limités :

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} &= \frac{2x}{\ln(1+x) - \ln(1-x)} \\
&= \frac{2x}{x + \mathrm{o}\left(x\right) - \left(-x + \mathrm{o}\left(x\right)\right)} \\
&= \frac{2x}{2x + \mathrm{o}\left(x\right)} = \frac{2}{2 + \mathrm{o}\left(1\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1, \\
\frac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x} &= \frac{\mathrm{e}^{x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)} - \mathrm{e}^{x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)}}{x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)} \\
&= \frac{1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 - \left(1 + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \right.\right.}{-\frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)} \\
&= \frac{-\frac{x^3}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)}{-\frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)} = \frac{-\frac{1}{2} + \mathrm{o}\left(1\right)}{-\frac{1}{2} + \mathrm{o}\left(1\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.
\end{aligned}$$

Pour le dernier, procédons à des développements limités du numérateur et dénominateur pour obtenir un équivalent :

$$\begin{aligned}
x^{x^x}\ln(x) &= \mathrm{e}^{x^2\ln(x)}\ln(x) \\
&= \left(1 + x^2\ln(x) + \mathrm{o}\left(x^2\ln(x)\right)\right)\ln(x) \underset{0^+}{\sim} \ln(x) \\
x^x - 1 &= \mathrm{e}^{x\ln(x)} - 1 \\
&= 1 + x\ln(x) + \mathrm{o}\left(x\ln(x)\right) - 1 \underset{0^+}{\sim} x\ln(x).
\end{aligned}$$

Par quotient,

$$\frac{x^{x^x}\ln(x)}{x^x - 1} \underset{0^+}{\sim} \frac{\ln(x)}{x\ln(x)} = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.$$

Exercice 7

Soit $a \in \mathbb{R}$. Effectuons un développement limité en 0 à l'ordre 2 des exponentielles :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{ax} - 2}{x^2} &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 + (ax) + \frac{(ax)^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right) - 2}{x^2} \\ &= \frac{(a+1)x + \frac{a^2+1}{2}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)}{x^2} \\ &= \frac{a+1}{x} + \frac{a^2+1}{2} + \mathrm{o}\left(1\right).\end{aligned}$$

Si $a + 1 \neq 0$, c'est-à-dire si $a \neq -1$, alors $\frac{a+1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \pm\infty$. Par somme, $x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{ax}-2}{x^2}$ admet une limite infinie.

Si $a = -1$, le développement s'écrit alors

$$\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{ax} - 2}{x^2} = 1 + \mathrm{o}\left(1\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

et dans ce cas, la limite vaut 2.

Exercice 8

On effectue un développement limité afin d'obtenir un équivalent, en rappelant que si $f(x) = g(x) + \mathrm{o}\left(g(x)\right)$ alors $f(x) \sim g(x)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}_0\left(x^3\right)\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}_0\left(x^3\right)\right) - 2x \\ &= \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}. \\ \mathrm{e}^{x^2} - \cos(x) &= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}_0\left(x^4\right)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}_0\left(x^4\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{o}_0\left(x^2\right) \underset{0}{\sim} \frac{3}{2}x^2. \\ x + \arctan(x) - 2\sin(x) &= x + \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathrm{o}_0\left(x^5\right)\right) - 2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}_0\left(x^5\right)\right) \\ &= \frac{11}{60}x^5 + \mathrm{o}_0\left(x^5\right) \sim \frac{11}{60}x^5. \\ \frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{1+x^2} + \sqrt[3]{1-x^2} - 2\right) &= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + \mathrm{o}_0\left(x^4\right) + 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + \mathrm{o}_0\left(x^4\right) - 2\right) \\ &= -\frac{2}{9}x^3 + \mathrm{o}_0\left(x^3\right) \sim -\frac{2}{9}x^3. \\ \frac{1}{x\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin(x^2)} &= \frac{\sin(x^2) - x\ln(1+x)}{x\ln(1+x)\sin(x^2)} \\ &= \frac{x^2 - \frac{x^6}{6} + \mathrm{o}_0\left(x^6\right) - x\left(x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}_0\left(x^2\right)\right)}{x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}_0\left(x^3\right)\right)\left(x^2 + \mathrm{o}_0\left(x^3\right)\right)} \\ &= \frac{\frac{x^3}{2} + \mathrm{o}_0\left(x^3\right)}{x^4 + \mathrm{o}_0\left(x^4\right)} \sim \frac{1}{2x}.\end{aligned}$$

Pour le dernier, on pouvait multiplier les équivalents en 0 pour le dénominateur :

$$x\ln(1+x)\sin(x^2) \underset{0}{\sim} x \times x \times x^2 = x^4.$$

Exercice 9

Dans chacun des cas, on utilise les développements limités pour trouver un développement asymptotique et en déduire un équivalent. Pour $n>0$:

$$\begin{aligned}
4\sqrt{n(1+4n)}-8n-1 &= 4\sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{4n}\right)}-8n-1\\
&= 8n\sqrt{1+\frac{1}{4n}}-8n-1\\
&= 8n\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{4n}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{4n}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-8n-1\\
&= 8n+1-\frac{1}{16n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)-8n-1=-\frac{1}{16n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\boxed{\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{16n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3n-2n\cos\left(n^{-3/2}\right)-\sqrt[3]{3+n^3} &= 3n-2n\left(1-\frac{\left(n^{-3/2}\right)^2}{2}+\frac{\left(n^{-3/2}\right)^4}{4!}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)-\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{3}{n^3}\right)}\\
&= 3n-2n+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{12n^5}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^5}\right)-n\left(1+\frac{1}{3}\frac{3}{n^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\left(\frac{3}{n^3}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)\\
&= \frac{11}{12n^5}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^5}\right)\boxed{\underset{+\infty}{\sim}\frac{11}{12n^5}.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &= \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\\
&= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\quad\text{car }\cos(n\pi)=(-1)^n\\
&= (-1)^n\left(\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\boxed{\underset{+\infty}{\sim}\frac{(-1)^n\pi}{2n}.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \mathrm{e}-\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \mathrm{e}-\exp\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \mathrm{e}-\exp\left(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \mathrm{e}-\mathrm{e}\times\exp\left(-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \mathrm{e}-\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{\mathrm{e}}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\boxed{\underset{+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}}{2n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2+(2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= -2+(2n+1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= -2+2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{2}{3n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{6n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\boxed{\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{6n^2}}
\end{aligned}$$

Exercice 10

1. Puisque

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

et que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$, par composée :

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)} &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^3 - \frac{5}{128}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{32} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\end{aligned}$$

et

$$\sqrt{\cos(x)} - 1 = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

2. Alors, puisque

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

on a

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{-\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + \mathrm{o}\left(x^4\right)}{x(1+x^2)} \\ &= \frac{-\frac{x}{4} - \frac{x^3}{96} + \mathrm{o}\left(x^3\right)}{1+x^2} \\ &= \left(-\frac{x}{4} - \frac{x^3}{96} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\left(1 - x^2 + x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\ &= -\frac{x}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{96} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= -\frac{x}{4} + \frac{23}{96}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

3. Puisque f admet un développement limité à l'ordre 3, donc au moins à l'ordre 1, on en déduit que f est continue et dérivable en 0, et que $f(0) = 0$ et $f'(0) = -\frac{1}{4}$.

4. D'après le développement limité, on a

$$f(x) - \left(-\frac{x}{4}\right) = \frac{23}{96}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Puisque $x^3 > 0$ si $x > 0$ et $x^3 < 0$ si $x < 0$, on en déduit qu'au voisinage de 0, la courbe de f est au-dessous de sa tangente avant 0 et au dessus après.

Exercice 11

1. Puisqu'on veut un développement limité à l'ordre 3 de f, il nous faut un développement limité à l'ordre 4 de $\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right)$, et donc un développement limité à l'ordre 5 de $\mathrm{e}^x - 1$.

$$\mathrm{e}^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

donc

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

et

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right) &= \ln\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\\
&= \frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)^3\\
&\quad -\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)\\
&= \frac{x}{2}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)x^2+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)x^3+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{72}-\frac{1}{48}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}\right)x^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)\\
&= \frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}-\frac{x^4}{2880}+\mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

on a alors

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{24}-\frac{x^3}{2880}+\mathrm{o}\left(x^4\right)$$

2. Le résultat précédent nous permet de dire, puisque f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=\frac{1}{2}$, que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=\frac{1}{24}$. Enfin, le terme $-\frac{x^3}{2880}$ permet de donner la position relative de f au voisinage de 0 : localement, la courbe de f est au-dessus de sa tangente avant 0, et en-dessous après 0.

Exercice 12

Pour chacune des fonctions, on effectue un développement asymptotique de la fonction à un ordre suffisant pour obtenir l'équation de l'asymptote, ainsi que la position relative de la courbe. On pose, pour chacune des fonctions, $u=\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
(2x-1)\mathrm{e}^{-3/x} &= \left(\frac{2}{u}-1\right)\mathrm{e}^{-3u}\\
&= \left(\frac{2}{u}-1\right)\left(1-3u+\frac{(-3u)^2}{2}+\mathrm{o}_0\left(u^2\right)\right)\\
&= -7+\frac{2}{u}+12u+\mathrm{o}_0\left(u\right)\\
&= -7+2x+\frac{12}{x}+\mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, la droite d'équation $y=2x-7$ est asymptote à la courbe de la fonction au voisinage de $+\infty$, et puisque $\frac{12}{x}>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la courbe est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{8x^3+7x^2-3x+1} &= \frac{\sqrt[3]{8+7u-3u^2+u^3}}{\sqrt[3]{u^3}}\\
&= \frac{1}{u}\left(8\left(1+\frac{7}{8}u-\frac{3}{8}u^2+\frac{1}{8}u^3\right)\right)^{1/3}\\
&= \frac{2}{u}\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{7}{8}u-\frac{3}{8}u^2+\frac{1}{8}u^3\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{7}{8}u-\frac{3}{8}u^2+\frac{1}{8}u^3\right)^2+\mathrm{o}_0\left(u^2\right)\right)\\
&= \frac{2}{u}\left(1+\frac{7}{24}u-\frac{121}{576}u^2+\mathrm{o}_0\left(u^2\right)\right)\\
&= \frac{7}{12}+\frac{2}{u}-\frac{121}{288}u+\mathrm{o}_0\left(u\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{7}{12} + 2x - \frac{121}{288}\frac{1}{x} + \mathrm{o}_0\left(\frac{1}{x}\right)$$

La droite d'équation $y = 2x + \frac{7}{12}$ est asymptote oblique à la courbe de la fonction au voisiange de $+\infty$, et puisque $-\frac{121}{188x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^4+2x+5} - x^2\mathrm{e}^{1/x} &= \sqrt{\frac{1+2u^3+5u^4}{u^4}} - \frac{1}{u^2}\mathrm{e}^u \\
&= \frac{1}{u^2}\left(\sqrt{1+2u^3+5u^4} - \mathrm{e}^u\right) \\
&= \frac{1}{u^2}\left(1 + \frac{1}{2}(2u^3+5u^4) + \mathrm{o}_0\left(u^3\right) - \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \mathrm{o}_0\left(u^3\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{u^2}\left(-u - \frac{u^2}{2} + \frac{5}{6}u^3 + \mathrm{o}_0\left(u^3\right)\right) \\
&= -x - \frac{1}{2} + \frac{5}{6x} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

La droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de la fonction au voisinage de $+\infty$, et puisque $\frac{5}{6x} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la courbe est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned}
(x^2+2)\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right) &= \frac{1+2u^2}{u^2}\ln(1-3u) \\
&= \frac{1+2u^2}{u^2}\left(-3u - \frac{(3u)^2}{2} - \frac{(3u)^3}{3} + \mathrm{o}_0\left(u^3\right)\right) \\
&= \frac{1}{u^2}\left(-3u - \frac{9u^2}{2} - 9u^3 - 6u^3 + \mathrm{o}_0\left(u^3\right)\right) \\
&= -3x - \frac{9}{2} - \frac{15}{x} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

La droite d'équation $y = -3x - \frac{9}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de la fonction au voisinage de $+\infty$, et puisque $-\frac{15}{x} < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la courbe est au-dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^5\left(1 - \mathrm{e}^{-1/x}\right)}{(1+x^3)} &= \frac{1}{u^5}\frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{\frac{(1+u)^3}{u^3}} \\
&= \frac{1}{u^2}(1-\mathrm{e}^{-u})(1+u)^{-3} \\
&= \frac{1}{u^2}\left(1 - \left(1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \mathrm{o}_0\left(u^3\right)\right)\right)\left(1 - 3u + \frac{-3\times(-4)}{2}u^2 + \frac{-3\times(-4)\times(-5)}{6}u^3 + \mathrm{o}_0\left(\right.\right. \\
&= \frac{1}{u^2}\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \mathrm{o}_0(u)\right)\left(1 - 3u + 6u^2 - 10u^3 + \mathrm{o}_0\left(u^3\right)\right) \\
&= \frac{1}{u^2}\left(u - \frac{7}{2}u^2 + \frac{14}{3}u^3 + \mathrm{o}_0\left(u^3\right)\right) \\
&= -\frac{7}{2} + x + \frac{23}{3x} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

La droite d'équation $y = x - \frac{7}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de la fonction au voisinage de $+\infty$, et puisque $\frac{23}{3x} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la courbe est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 13

1. Sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction $f : x \longmapsto \tan(x) - x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par somme de deux fonctions $\mathcal{C}^1$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$ et $\tan^2$ est strictement positive sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ sauf en $n\pi$ où elle s'annule. La fonction f est donc strictement croissante sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, elle y est continue. Le théorème de la bijection nous garantit que f établit une bijection de $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ dans

$$\left] \lim_{x \to np - \frac{\pi}{2}} f(x), \lim_{x \to np + \frac{\pi}{2}}, f(x) \right[=]-\infty, +\infty[.$$

Puisque $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, que l'on note x_n.

Remarquons, puisque cela va nous servira plus tard, que $f(n\pi) = \tan(n\pi) - n\pi = -n\pi < 0$ pour $n \neq 0$. Ainsi, par stricte croissance de f, on peut même en déduire que $x_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ pour $n \geqslant 1$.

2. Par définition de la suite (x_n), on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x_n \leqslant n\pi + \frac{\pi}{2}$$

soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \pi - \frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant \pi + \frac{\pi}{2n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$, par encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n} = \pi$$

c'est-à-dire $\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi}$.

3. a) Tout d'abord, remarquons que, pour tout $n \geqslant 1$, nous avons vu que $x_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi :

$$n\pi \leqslant x_n \leqslant n\pi + \frac{\pi}{2} \implies 0 \leqslant y_n < \frac{\pi}{2}.$$

Calculons alors $\tan(y_n)$ qui a donc un sens :

$$\begin{aligned}
\tan(y_n) &= \tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - x_n\right) \\
&= \tan\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) \text{ car tan est } \pi\text{-périodique} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)} \\
&= \frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)} \\
&= \frac{1}{\tan(x_n)} = \frac{1}{x_n} \text{ puisque } \tan(x_n) = x_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\tan(y_n) = \frac{1}{x_n}$. En appliquant la fonction arctan, définie sur $\mathbb{R}$, et puisque $y_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on peut en déduire que $y_n = \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$

b) Puisque $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$, et que $n\pi \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, alors $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Par quotient, $\frac{1}{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Par équivalent classique,

$$y_n = \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x_n}$$

D'après ce qui précède, $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ et donc

$$y_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}.$$

ce qu'on peut également écrire

$$y_n = \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\right).$$

Rappel
En effet, $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$ si et seulement si $x_n = y_n + \mathrm{o}_{+\infty}(y_n)$.

c) D'après ce qui précède, $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - y_n$. On peut finalement écrire le développement asymptotique :

$$\boxed{x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n\pi}\right).}$$

Exercice 14

1. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f : x \longmapsto x + \sqrt[3]{x}$. On cherche à montrer l'existence d'un unique réel solution de l'équation $f(x) = n$.
Notons que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de deux fonctions strictement croissantes (on peut aussi dériver si besoin). Le théorème de la bijection nous garantit que f établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans

$$\left[\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty}, f(x)\right[= [0, +\infty[.$$

Pour tout entier n, $n \in \mathbb{R}^+$ donc l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, que l'on note n.
2. **Première méthode** : remarquons tout d'abord que la suite (x_n) est croissante. En effet, pour tout entier n,

$$f(x_n) = n < n + 1 = f(x_{n+1})$$

et par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que $x_n \leqslant x_{n+1}$.
Elle admet donc une limite, finie ou infinie. Si elle est finie, on la note ℓ, par continuité de f, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. Or, $f(x_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. C'est absurde : (x_n) tend vers $+\infty$.
Deuxième méthode : on écrit, puisque f est une bijection sur $\mathbb{R}^+$, $x_n = f^{-1}(n)$. Or $f \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc $f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et par composée, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
On peut alors conclure :

$$\begin{aligned} x_n + \sqrt[3]{x_n} = n &\iff x_n\left(1 + \frac{\sqrt[3]{x_n}}{x_n}\right) = n \\ &\iff \frac{x_n}{n}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{x_n^{2/3}}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$, soit encore

$$\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} n.}$$

3. a) D'après la définition de (x_n), on peut écrire $y_n = x_n - n = (n - \sqrt[3]{x_n}) - n = -\sqrt[3]{x_n}$, puisque $x_n + \sqrt[3]{x_n} = n$.
Or, $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$ donc par exponentiation, $\sqrt[3]{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}$, et finalement

$$y_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}.$$

b) Réécrivons z_n :

$$\begin{aligned} z_n &= y_n + \sqrt[3]{n} \\ &= -\sqrt[3]{x_n} + \sqrt[3]{n} \\ &= \sqrt[3]{n}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{x_n}{n}}\right) \end{aligned}$$

Or, $\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc, par équivalence classique

$$\sqrt[3]{\frac{x_n}{n}} - 1 = \left(\frac{x_n}{n}\right)^{1/3} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3}\left(\frac{x_n}{n} - 1\right) = \frac{1}{3}\frac{y_n}{n}$$

et finalement

$$z_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}\frac{1}{3}\frac{y_n}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}\frac{1}{3}\frac{-\sqrt[3]{n}}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3\sqrt[3]{n}}$$

c) Remarquons alors que :

$$\begin{aligned} x_n &= n + y_n = n + \left(z_n - \sqrt[3]{n}\right) \\ &= n - \sqrt[3]{n} + z_n. \end{aligned}$$

Or, d'après l'équivalent précédent, $z_n = \frac{1}{3\sqrt[3]{n}} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{n}}\right)$. Finalement,

$$\boxed{x_n = n - \sqrt[3]{n} + \frac{1}{3\sqrt[3]{n}} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.\right)}$$

Exercice 15

1. Notons $f : x \longmapsto x + \ln(x)$. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et y est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout réel $x > 0$, $f' : x \longmapsto 1 + \frac{1}{x} > 0$. Ainsi, f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

le théorème de la bijection assure que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique solution x_n à l'équation $f(x) = n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que, puisque $n < n+1$, on a $f(x_n) < f(x_{n+1})$ par définition. Par stricte croissance de f, on en déduit que $x_n < x_{n+1}$. Ainsi (x_n) est strictement croissante.
Le théorème de la limite monotone garantit que (x_n) converge ou tend vers $+\infty$. Supposons par l'absurde que (x_n) converge vers un réel ℓ. Mais alors, par continuité de f, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)\mathbb{R}$.
Or, $f(x_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$: c'est absurde.
Bilan : (x_n) est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

3. Par croissance comparée, $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Par caractérisation séquentielle de la limite, puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\ln(x_n) = \mathrm{o}\left(x_n\right)$.
Par définition de (x_n), $\ln(x_n) + x_n = n$. Puisque $\ln(x_n) = \mathrm{o}\left(x_n\right)$, $\ln(x_n) + x_n \underset{+\infty}{\sim} x_n$ et finalement

$$\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} n.}$$

4. Par définition, $\ln(x_n) + x_n = n$ soit $x_n = n - \ln(x_n)$. Ainsi,

$$y_n = n - \ln(x_n) - n + \ln(n) = \ln\left(\frac{n}{x_n}\right).$$

Or $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$, donc $\frac{n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Par continuité de la fonction ln, on en déduit que

$$\boxed{y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1) = 0.}$$

5. Le résultat précédent garantit que $y_n = \mathrm{o}(1)$, c'est-à-dire $x_n = n - \ln(n) + \mathrm{o}(1)$. Remarquons alors que

$$\begin{aligned}\ln(x_n) &= \ln\left(n - \ln(n) + \mathrm{o}(1)\right)\\ &= \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad \text{par un DL à l'ordre 1 de ln}\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $x_n = n - \ln(x_n)$, on en déduit le développement asymptotique

$$\boxed{x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).}$$

Remarque
En réitérant le processus de la question 5, on peut continuer à obtenir des termes dans le développement asymptotique.

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 16

1. tan étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, elle admet des $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout n.
2. $\tan(0) = 0$, $\tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$ et $\tan^{(2)}(0) = 2\tan'(0)\tan(0) = 0$. Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{\tan^{(2)}(0)}{2}x^2 + o_0\left(x^2\right)\\ &= x + o_0\left(x^2\right).\end{aligned}$$

3. a) $\tan'$ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc admet des développements limités à tout ordre en 0.
b) On intègre :

$$\tan(x) = \tan(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + a_3\frac{x^4}{4} + a_4\frac{x^5}{5} + o_0(x^5).$$

c) En utilisant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, on va obtenir des relations entre les a_i. Commençons par donner un développement limité à l'ordre 5 de $\tan^2$:

$$\begin{aligned}1 + \tan(x) \times \tan(x) &= 1 + \left(a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + a_3\frac{x^4}{4} + a_4\frac{x^5}{5} + o_0(x^5)\right) \times \left(a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + a_3\frac{x^4}{4} + a_4\frac{x^5}{5} + \right.\\ &= 1 + a_0^2x^2 + (a_0a_1)\,x^3 + \left(\frac{2}{3}a_0a_2 + \frac{a_1^2}{4}\right)x^4 + \left(\frac{a_0a_4}{2} + \frac{a_1a_2}{3}\right)x^5 + o_0(x^5)\end{aligned}$$

Puisque $1 + \tan^2 = \tan'$, par unicité du développement limité :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o_0(x^4) = 1 + a_0^2x^2 + (a_0a_1)\,x^3 + \left(\frac{2}{3}a_0a_2 + \frac{a_1^2}{4}\right)x^4 + \left(\frac{a_0a_4}{2} + \frac{a_1a_2}{3}\right)x^5 + o_0(x$$

donne le système

$$\begin{cases} a_0 = & 1 \\ a_1 = & 0 \\ a_2 = & a_0^2 \\ a_3 = & a_0a_1 \\ a_4 = & \frac{2}{3}a_0a_2 + \frac{a_1^2}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

et on obtient le développement limité de tangente :

$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o_0(x^5)}.$$

4. a) Par calcul successif :

$$\begin{aligned} &P_0 = X \\ &P_1 = 1 + X^2 \\ &P_2 = (1+X^2)2X = 2X^3 + 2X \\ &P_3 = (1+X^2)(2+6X^2) = 6X^4 + 8X^2 + 2 \\ &P_4 = (1+X^2)(24X^3 + 16X) = 24X^5 + 40X^3 + 16X \\ &P_5 = (1+X^2)(120X^4 + 120X^2 + 16) = 120X^6 + 240X^4 + 136X^2 + 16 \end{aligned}$$

b) Montrons le résultat par récurrence.

- Pour $n = 0$, on constate que $P_0(\tan) = \tan$ donc le résultat est vrai.
- Supposons la proposition vraie pour un certain entier n fixé. On dérive l'hypothèse de récurrence (ce qui est légitime, les polynômes comme tan sont dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$). Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned} \tan^{(n+1)}(x) &= \tan'(x) \times P_n'(\tan(x)) \\ &= (1 + \tan^2(x))P_n'(\tan(x)) = P_{n+1}(\tan(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire et le principe de récurrence nous garantit que le résultat est valable pour tout entier n.

c) On utilise les calculs précédents : puisque $\tan(0) = 0$, alors

$\tan^{(1)}(0) = P_1(0) = 1$, $\tan^{(2)}(0) = P_2(0) = 0$, $\tan^{(3)}(0) = P_3(0) = 2$, $\tan^{(4)}(0) = P_4(0) = 0$, $\tan^{(5)}(0) = P_5(0) = 1$

tan étant impaire, $\tan^{(6)}(0) = 0$. La formule de Taylor-Young donne alors :

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{\tan^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{\tan^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{\tan^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{\tan^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{\tan^{(6)}(0)}{6!}x^6 + o_0(x^6) \\ &= x + \frac{2}{6}x^3 + \frac{16}{120}x^5 + o_0(x^6) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o_0(x^6). \end{aligned}$$

Exercice 17

On constate que u est le produit de trois fonctions dont on connait le développement limité à l'ordre 10. On les multiplie en tronquant à l'ordre 10.

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(\sum_{k=0}^{10} x^k + o\left(x^{10}\right)\right)\left(\sum_{k=0}^{5} x^{2k} + o\left(x^{10}\right)\right)\left(\sum_{k=0}^{2} x^{5k} + o\left(x^{10}\right)\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{10} x^k + o\left(x^{10}\right)\right)\left(1 + x^5 + x^{10} + x^2 + x^{10} + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + o\left(x^{10}\right)\right) \\ &= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 7x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + o\left(x^{10}\right) \end{aligned}$$

Mais on peut calculer ce produit autrement et plus intelligemment :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \left(\sum_{a=0}^{10} x^a\right)\left(\sum_{b=0}^{5} x^{2b}\right)\left(\sum_{c=0}^{2} x^{5c}\right) + \mathrm{o}\left(x^{10}\right) \\
&= \sum_{a=0}^{10}\sum_{b=0}^{5}\sum_{x=0}^{2} x^{a+2b+5c} + \mathrm{o}\left(x^{10}\right) && \text{par Fubini} \\
&= \sum_{k=0}^{10} \operatorname{card}\left(\{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3,\quad a+2b+5c=k\}\right) x^k + \mathrm{o}\left(x^{10}\right) && \text{en dénombrant}
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{card}\left(\{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3,\quad a+2b+5c=10\}\right) = 10.}$$