22

Chapitre

Formules de Taylor

Résumé

Nous revenons sur les dérivées multiples, on s'intéressant à l'espace des fonctions plusieurs fois dérivables. Nous introduisons ensuite deux résultats importants sur les fonctions dérivables : la formule de Taylor avec reste intégral, et l'inégalité de Taylor-Lagrange, qui nous servira régulièrement, ainsi que dans le chapitre suivant.

Plan du cours

> *« Je vous emploie pour votre force et vos capacités physiques. On ne vous demande pas de penser ; il y a des gens payés pour cela. »*

Frederick Taylor (1856–1015). *Collaboration in the cloud*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les dérivées successives :

- Connaître la structure d'espace vectoriel des fonctions D^n, $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$ . . . . □
- Connaître les dérivées successives des fonctions usuelles . . . . □
- Connaître la formule de Leibniz . . . . □

② La formule de Taylor avec reste intégral . . . . □

③ L'inégalité de Taylor-Lagrange . . . . □

④ Savoir appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'étude de limites . . . . □

⑤ Concernant l'étude des extrema :

- Connaître la définition de point critique . . . . □
- Savoir utiliser la condition suffisante d'existence d'extrema dans le cas $\mathcal{C}^2$ . . . . □

Dans l'ensemble de ce chapitre, I désignera un intervalle non vide, et non réduit à un point.

I. Dérivées successives

On va tout d'abord revenir sur la notion de dérivée successive, et ajouter diverses propriétés sur celle-ci.

1. Définition

Définition 22.1. Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

Si f' est également dérivable sur I, on dit que I est deux fois dérivable et on appelle **dérivée seconde** de f, notée f'' ou $f^{(2)}$, la dérivée de f'.

Par récurrence, si n est un entier supérieur ou égal à 2, on dit que f est n fois dérivable sur I si :

- f est $n-1$ fois dérivable sur I,
- et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I.

La dérivée $(f^{(n-1)})'$ est appelée **dérivée d'ordre** n (ou dérivée n-ième) et est notée $f^{(n)}$.

Par convention, on note $f^{(1)} = f'$ et $f^{(0)} = f$.

Notation

On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n(I,\mathbb{R})$, ou plus simplement $D^n(I)$, l'ensemble des fonctions n fois dérivable sur I.

Lorsqu'une fonction est dérivable, on peut s'intéresser à la continuité de sa dérivée.

Définition 22.2.

Soit n un entier. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si et seulement si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$, ou plus simplement $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

D'après le théorème d'analyse classique, toute fonction dérivable sur I est continue sur I. On obtient alors les inclusions

$$\mathcal{C}^n(I) \subset D^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset D^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I).$$

Enfin, on dispose d'un ensemble important : les fonctions qui sont dérivables une infinité de fois :

Définition 22.3.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si, pour tout entier n, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Ainsi, f est infiniment dérivable sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$, ou plus simplement $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Remarque

Par définition, et toujours en utilisant le théorème d'analyse classique :

$$\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D^n(I).$$

2. Exemples classiques

Dans cette partie, on revoit les fonctions usuelles. Leurs dérivées successives doivent être retrouvées rapidement.

Théorème 22.1. cos **et** sin

Les fonctions cosinus et sinus sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \cos^{(n)} = \begin{cases} \cos & \text{si} \quad n \equiv 0[4] \\ -\sin & \text{si} \quad n \equiv 1[4] \\ -\cos & \text{si} \quad n \equiv 2[4] \\ \sin & \text{si} \quad n \equiv 3[4] \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin^{(n)} = \begin{cases} \sin & \text{si} \quad n \equiv 0[4] \\ \cos & \text{si} \quad n \equiv 1[4] \\ -\sin & \text{si} \quad n \equiv 2[4] \\ -\cos & \text{si} \quad n \equiv 3[4] \end{cases}$$

Démonstration

Cela se fait par récurrence, en posant P la proposition P_n : « cos est de classe $\mathcal{C}^{4n+3}$ et

$$\cos^{(4n)} = \cos, \quad \cos^{(4n+1)} = -\sin, \quad \cos^{(4n+2)} = -\cos \quad \text{et} \quad \cos^{(4n+3)} = \sin\,. \text{ »}$$

et de même pour sin.

Théorème 22.2. Monôme

Pour tout entier n, notons $f_n : x \mapsto x^n$. Alors f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout entier k, on a :

$$f_n^{(k)} : x \mapsto \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} & \text{si} \quad k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} A_n^k x^{n-k} & \text{si} \quad k < n \\ n! & \text{si} \quad n = k \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}.$$

Démonstration

Fixons n et raisonnons par récurrence sur k : on note P_k la proposition « f_n est k fois dérivable et sa dérivée est donnée par la proposition ».

- $k = 0$, $f_n^{(0)} = f_n = x \mapsto x^n$ et la propriété est bien vérifiée.
- Supposons la proposition vraie pour un certain entier k. Ainsi, f_k est k fois dérivable.
  - si $k \geqslant n$, alors $f_n^{(k)}$ est constante ou nulle, donc est dérivable et sa dérivée est nulle.
  - si $k < n$, alors
  $$f_n^{(k)} : x \mapsto n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$$
  et est donc dérivable (polynôme), de dérivée
  $$\left(f_n^{(k)}\right)' = x \mapsto n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)x^{n-k-1}.$$

  Dans les deux cas, la propriété est héréditaire.

Le principe de récurrence nous permet alors de conclure.

Théorème 22.3. Exponentielle et logarithme

exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \exp^{(n)} = \exp \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln^{(n)} = x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Démonstration

Par récurrence à nouveau. Pour exp c'est rapide, puisque $\exp' = \exp$. Soit P la proposition définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par « ln est k fois dérivable et sa dérivée est $x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ ».

- Pour $n = 1$, ln est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x} = \frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1}$. Ainsi, P_1 est vraie.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. Ainsi, ln est n fois dérivable et sa dérivée est
$$x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$
Mais alors, par quotient, cette fonction est elle-même dérivable, donc ln est $n+1$ fois dérivable, et en dérivant :
$$\ln^{(n+1)} = x \mapsto (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{-n}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$
Ainsi, P_{n+1} est vérifiée.

Le principe de récurrence nous permet alors de conclure.

⚠ Attention

Il existe des fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ en un point. On peut s'intéresser par exemple à

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

En prenant des primitives successives de cette fonction, on a donc des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

3. Opérations sur les dérivées

a. Addition, multiplication

On dispose d'un résultat fondamental :

Proposition 22.4. Structure d'espace vectoriel

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Si f et g sont deux fonctions de $D^n(I, \mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g \in D^n(I, \mathbb{R})$ et on a

$$(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}.$$

Pour tout entier n, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ainsi que $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ sont également des espaces vectoriels.

Démonstration

Cela se fait par récurrence, laissée au lecteur.

D'après le résultat sur les monômes vu plus haut, on peut rappeler le résultat sur les polynômes :

Proposition 22.5.

Si P est un polynôme de degré n, alors P est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k > n$, $P^{(k)}$ est le polynôme nul.

Démonstration

En effet, un polynôme est une combinaison linéaire de monômes. Puisque $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, P est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et le résultat découle de ce qui précède.

Pour le produit de deux fonctions, le résultat est plus compliqué :

♡ **Théorème 22.6. Formule de Leibniz**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient f et g deux fonctions de $D^n(I,\ \mathbb{R})$. Alors fg est également de classe D^n et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration

Démontrons le par récurrence sur n. Soit P la proposition définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par « Pour toutes fonctions f et g de $D^n(I,\mathbb{R})$, fg est de classe D^n et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

- pour $n = 1$, si f et g sont de classe D^1, alors fg est dérivable et
$$(fg)' = f'g + fg' = \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)} + \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)}.$$
P_1 est donc vérifiée.
- Supposons la proposition P_n vérifiée. Soient f et g deux fonctions de classe D^{n+1}. Elles sont donc au moins de classe D^n. Par hypothèse de récurrence, fg est de classe D^n et
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$
Constatons alors que $(fg)^{(n)}$ est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables (puisque f et g sont $n+1$ fois dérivables). On dérive :
$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n+1-(k+1))} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \text{ en posant } i = k+1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right) f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \binom{n}{n} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} \text{ par la formule de Pascal}$$
$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)}$$

Ainsi, P_{n+1} est vérifiée, et le principe de récurrence nous garantit qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Par produit de fonctions continues, on en déduit également le résultat suivant

Proposition 22.7.

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$. Alors fg est également de classe $\mathcal{C}^n$.

Exercice 22.1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et déterminer, pour tout entier n, $f^{(n)}$.

Solution

f est le produit des fonctions carrées et exponentielle, fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Notons $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Alors, pour tout $n \geqslant 3$, $u^{(n)} = 0$.

- On a $f' : x \mapsto (x^2 + 2x)\mathrm{e}^x$ et $f^{(2)} : x \mapsto (x^2 + 4x + 2)\mathrm{e}^x$.
- Pour tout $n \geqslant 3$, par la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)}_{=0} \\ &= \binom{n}{0} x^2 \mathrm{e}^x + \binom{n}{1} 2x\mathrm{e}^x + \binom{n}{2} 2\mathrm{e}^x \\ &= \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right) \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Remarquons que cette formule est valable pour $n = 0, 1$ et 2.

Ainsi

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)} : x \mapsto \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right) \mathrm{e}^x.}$$

Une dernière proposition pour le quotient :

Proposition 22.8. Quotient

Soient f et g deux fonctions de classe D^n (respectivement $\mathcal{C}^n$, respectivement $\mathcal{C}^\infty$) sur I telles que g ne s'annule pas sur I. Alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe D^n (resp. $\mathcal{C}^n$, resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

b. Composition

Les espaces $D^n(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ sont stables par composition :

Proposition 22.9. Composition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in D^n(I,\mathbb{R})$ et $g \in D^n(J,\mathbb{R})$, alors $g \circ f \in D^n(I,\mathbb{R})$.
- Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^n(J,\mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.

Démonstration

Prouvons le cas de D^n, les autres se montrant de la même manière. Soit P la proposition définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par P_n : « pour toutes fonctions $f \in D^n(I,\mathbb{R})$ et $g \in D^n(J,\mathbb{R})$, $g \circ f$ est de classe D^n sur I.

- Pour $n = 1$, le résultat vu dans le chapitre sur la dérivabilité garantit que $g \circ f$ est dérivable, de dérivée $f' \times g' \circ f$.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Soient f et g deux fonctions de classe D^{n+1} respectivement sur I et J. Alors, entre autre, f et g sont de classe D^1. Ainsi, $g \circ f$ est dérivable, et sa dérivée est
$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$
Or, f', g' et f sont de classe D^n (puisque f et g sont D^{n+1}). Par hypothèse de récurrence, $g' \circ f$ est de classe D^n, et par produit, $f' \times g' \circ f$ l'est également. Donc $g \circ f$ est de classe D^{n+1} et la proposition est héréditaire.

Par le principe de récurrence, on en déduit le résultat.

4. Fonctions usuelles

Toutes les fontions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition :

Proposition 22.10.

Les fonctions polynôme, exp, ln, sin, cos, tan, arctan et les fractions rationnelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

Démonstration

On a vu précédemment le cas des fonctions polynômes, exp, ln, sin et cos. $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ et les fractions rationnelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Enfin, arctan est dérivable et $\arctan' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Sa dérivée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (fraction rationnelle) sur $\mathbb{R}$, donc arctan également.

☞ *Exercices 1, 2, 3 et 4.*

II. Formules de Taylor

Nous allons, dans cette partie, exprimer les fonctions, quand cela est possible, en fonction de ses dérivées.

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel. Par convention, si $a > b$, l'intervalle $[a, b]$ désigne l'intervalle $[b, a]$.

1. Formule de Taylor avec reste intégral

La formule de Taylor avec reste intégral donne une formule exacte de f en fonction de la valeur de ses dérivées en un point.

Théorème 22.11. Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors

$$\forall\,(a,b)\in I^2,\quad f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette formule est appelée **formule de taylor avec reste intégral d'ordre** n.

Démonstration

On va le démontrer par récurrence sur n. Soit P la proposition définie, pour tout entier n, par P_n : « pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, et tout $(a,b)\in I^2$, on a

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.\text{ »}$$

- Pour $n=0$, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, l'intégrale a un sens (car $t\mapsto\frac{(b-t)^n}{n!}f'(t)$ est continue sur I) et on a

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{f(a)}{0!}(b-a)^0+\int_a^b\frac{(b-t)^0}{0!}f'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=f(a)+\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t=f(a)+\left[f(t)\right]_a^b=f(b)$$

  La proposition est donc vraie pour $n=0$.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n. Soient f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ et $(a,b)\in I^2$. Par hypothèse de récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et donc

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Procédons à une intégration par parties dans l'intégrale. On pose $u=f^{(n+1)}$ et v' : $t\mapsto\frac{(b-t)^n}{n!}$, soit $v:t\mapsto\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ (car f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$) sur $[a,\,b]$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}f(b)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\left[f^{(n+1)}(t)\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b-\int_a^b\frac{-(b-t)^{n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\left(0-f^{(n+1)}(a)\frac{-(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right)-\int_a^b\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

  Ainsi P_{n+1} est vérifiée, et d'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout entier n.

Remarque

Si f est un polynôme de degré p, pour $n>p$, $f^{(n)}=0$. L'intégrale est alors nulle, et on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes.

Cette remarque admet une réciproque :

Proposition 22.12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}$ est la fonction nulle. Alors f est une fonction polynomiale, de degré au plus $n-1$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer la formule de Taylor. $f^{(n)}$ étant nulle, la formule de Taylor d'ordre $n-1$, appliquée entre 0 et $x \in \mathbb{R}$ donne alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Donc $f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Souvent, le terme intégral n'est pas utile, et on peut se contenter de le majorer : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème 22.13. Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors

$$\forall\, (a,b) \in I^2, \quad \left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,\,b]} \left| f^{(n+1)} \right|.$$

Démonstration

Tout d'abord, remarquons que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $f^{(n+1)}$ est continue sur I, et est donc bornée et atteint ses bornes. Le max a donc un sens. Notons, pour simplifier $M = \max\limits_{[a,\,b]} |f^{(n+1)}|$ (en rappelant que $[a,\, b] = [b,\, a]$ si $a > b$).

- Si $a \leqslant b$, on part de la formule de Taylor avec reste intégral et on applique l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| &= \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = M\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^b = M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

- Si $a > b$, le principe est le même en échangeant les bornes en passant à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| &= \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \int_b^a \left|\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\right|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant M\int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = M\left[\frac{(t-b)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_b^a = M\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Dans tous les cas

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3. Applications

Les formules précédentes permettent de déterminer des résultats sur des limites de sommes que nous étudierons prochainement. Montrons-en un :

Proposition 22.14. Série exponentielle

Pour tout réel x, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

Remarque

On notera prochainement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$. Remarquons que le résultat permet de montrer l'existence de l'exponentielle.

Démonstration

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ (puisqu'elle est $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et $x\in\mathbb{R}$:

$$\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k\right| \leqslant \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{[0,\,x]}\left|\exp^{(n+1)}\right|$$

Or, pour tout entier k, $\exp^{(k)}=\exp$. De plus, par croissance de la fonction exp,

$$\max_{[0,\,x]}\left|\exp^{(n+1)}\right| = \left\{\begin{array}{lll}\mathrm{e}^x & \text{si} & x\geqslant 0\\ 1 & \text{si} & x<0\end{array}\right. = \max(1,\mathrm{e}^x)$$

et ne dépend pas de n.

Ainsi :

$$\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\max(1,\mathrm{e}^x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Ce qui montre, d'après le théorème d'encadrement, que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^x.$$

III. Applications à l'étude d'extrema locaux

Dans cette section, on se fixe un intervalle I non vide, et non réduit à un point.

1. Point critique

Rappelons la définition d'extremum local, vue précédemment.

Définition 22.4. Extremum local

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f admet un **maximum** (respectivement un **minimum**) **local** en x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha]$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).

On dit que f admet un **extremum local** en x_0 si f admet un maximum ou un minimum local en x_0.

On a vu dans le chapitre sur la dérivabilité une condition nécessaire d'existence d'extremum quand la fonction est dérivable.

Définition 22.5. Point critique

Soient f une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$. On dit que x_0 est un **point critique** de f sur I si $f'(x_0) = 0$.

On a alors vu :

Proposition 22.15.

Soit f une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$ un point qui n'est pas à la frontière de I. Si f admet un extremum local en x_0, alors x_0 est un point critique de f.

⚠ **Attention**

Nous avons déjà vu que la réciproque est fausse, par exemple en s'intéressant à la fonction cube.

De même, si x_0 est un point de la frontière, le résultat n'est pas vabale. Par exemple, si $f : x \mapsto x$ sur $[1,\, 2]$, alors 2 est un extremum local de f, et pourtant $f'(2) \neq 0$.

2. Condition suffisante d'existence d'extrema

On va pouvoir énoncer une condition suffisante dans le cas où la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème 22.16. Condition suffisante dans le cas $\mathcal{C}^2$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et x_0 un élément de I qui n'est pas à la frontière de I.

Si x_0 est un point critique de f alors :

- Si $f''(x_0) > 0$, f admet un minimum local en x_0.
- Si $f''(x_0) < 0$, f admet un maximum local en x_0.

⚠ **Attention**

Si $f''(x_0) = 0$, on ne peut pas conclure.

Démonstration

On va démontrer le cas $f''(x_0) > 0$, l'autre cas se traitant de la même manière.
f étant de classe $\mathcal{C}^2$, on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, entre x_0 et $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + x \underbrace{f'(x_0)}_{=0} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^1}{1!} f^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Puisque $f''(x_0) > 0$, il existe un voisinage de x_0, de la forme $I \cap [x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha]$ tel que,

$$\forall\, x \in I \cap [x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha], \quad f''(x) \geqslant 0.$$

Mais alors, soit $x \in I \cap [x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha]$.

- Si $x \geqslant x_0$, $(x-t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [x_0,\, x]$, et par positivité de l'intégrale
$$\int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$
- Si $x \leqslant x_0$, $(x-t) \leqslant 0$ pour tout $t \in [x_0,\, x]$, et par positivité de l'intégrale (attention : les bornes sont dans le mauvais sens)
$$\int_{x_0}^{x} (x_0-t) f''(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Dans tous les cas, on en déduit :

$$\forall\, x \in I \cap [x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha], \quad f(x) - f(x_0) \geqslant 0 \implies f(x) \geqslant f(x_0).$$

Ainsi, f admet un minimum local en x_0.

Exercice 22.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto x^2 + 4x - 6\ln(|x|)$. Étudier les extrema locaux de f.

Solution

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. On détermine tout d'abord ses points critiques. Remarquons que sur $\mathbb{R}^*$, f se dérive en

$$f' : x \mapsto 2x + 4 - \frac{6}{x} = \frac{2x^2 + 4x - 6}{x}$$

Les racines de $2x^2 + 4x - 6$ sont 1 et -3. Il y a donc deux points critiques.
Calculons f'' :

$$f'' : x \mapsto 2 + \frac{6}{x^2}$$

et

$$f''(1) > 0 \quad \text{et} \quad f''(-3) > 0.$$

Ainsi, f admet deux minima locaux, atteints en $x = 1$ et $x = -3$, et valant

$$f(1) = 5 \quad \text{et} \quad f(-3) = -3 - 6\ln(3).$$

☞ *Exercices 5, 6, 7, 8 et 9.*

IV. Dérivée d'une fonction définie par une intégrale

Une application très classique des théorèmes précédents est la démonstration de continuité et de dérivation d'une fonction définie par une intégrale. Aucun théorème sur ces dérivations n'étant au programme, vous serez systématiquement accompagné : on utilisera l'inégalité de Taylor Lagrange plusieurs fois, afin de conclure.

Exercice 22.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^1 \sin(xt^2)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que, pour tous $t \in [0, 1]$, et tous réels x et y,

$$|\sin(yt^2) - \sin(xt^2)| \leqslant |y - x|.$$

   b) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. a) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, et tous réels x et y, on a

$$\left|\sin(yt^2) - \sin(xt^2) - (y - x)t^2\cos(xt^2)\right| \leqslant \frac{1}{2}|y - x|^2.$$

   b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \int_0^1 t^2\cos(xt^2)\,\mathrm{d}t.$$

Solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $t \longmapsto \sin(xt^2)$ est une fonction continue sur $[0, 1]$, comme composée de deux fonctions continues. L'intégrale $f(x)$ a donc un sens.
   Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a) On fixe $t \in [0, 1]$. La fonction $g_t : x \mapsto \sin(xt^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange, à l'ordre 0 appliquée entre x et y donne

$$|g_t(y) - g_t(x)| \leqslant |y - x| \times \max_{[x,\,y]} |g_t'|.$$

   Or $g_t' : x \mapsto t^2\cos(xt^2)$ et pour tout $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$|g_t'(x)| \leqslant t^2|\cos(xt^2)| \leqslant 1.$$

   Finalement, pour tous réels x et y :

$$|\sin(yt^2) - \sin(xt^2)| \leqslant |y - x|.$$

   b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout réel y, on a :

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &= \left|\int_0^1 (\sin(yt^2) - \sin(xt^2))\mathrm{d}t\right| \text{ par linéarité}\\
&\leqslant \int_0^1 |\sin(yt^2) - \sin(xt^2)|\,\mathrm{d}t \text{ par inégalité triangulaire}\\
&\leqslant \int_0^1 |y - x|\,\mathrm{d}t \text{ d'après le résultat précédent et croissance de l'intégrale}\\
&\leqslant |y - x|
\end{aligned}$$

Lorsque y tend vers x, $|y-x| \xrightarrow[y\to x]{} 0$. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{y\to x} |f(y)-f(x)| = 0 \implies \lim_{y\to x} f(y) = f(x).$$

Ainsi, f est continue en x. Ceci étant vrai pour tout réel x, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. a) Soit t fixé dans $[0,\,1]$. L'écriture nous donne envie d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et y à la fonction g_t à l'ordre 1. Elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc nous pouvons le faire :

$$|g_t(y) - (g_t(x) + g_t'(x)(y-x))| \leqslant \frac{|y-x|^2}{2!} \max_{[x,\,y]} |g_t^{(2)}|$$

soit

$$|\sin(yt^2) - (\sin(xt^2) + t^2\cos(xt^2)(y-x))| \leqslant \frac{|y-x|^2}{2!} \max_{[x,\,y]} |g_t^{(2)}|$$

Or, pour tout $t \in [0,\,1]$ et pour tout réel x, $g_t^{(2)}(x) = -t^4\sin(xt^2)$ et donc

$$\left|g_t^{(2)}(x)\right| \leqslant t^4|\sin(xt^2)| \leqslant t^4 \leqslant 1.$$

Finalement,

$$|\sin(yt^2) - \sin(xt^2) - t^2\cos(xt^2)(y-x)| \leqslant \frac{|y-x|^2}{2}$$

b) On se fixe $x\in\mathbb{R}$ et on calcule le taux d'accroissement. Pour tout $y\neq x$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(y)-f(x)}{y-x} &= \int_0^1 \frac{\sin(yt^2)-\sin(xt^2)}{y-x}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\sin(yt^2)-\sin(xt^2)-(y-x)t^2\cos(xt^2)+(y-x)t^2\cos(xt^2)}{y-x}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\sin(yt^2)-\sin(xt^2)-(y-x)t^2\cos(xt^2)}{y-x}\mathrm{d}t + \int_0^1 t^2\cos(xt^2)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \int_0^1 t^2\cos(xt^2)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 \frac{\sin(yt^2)-\sin(xt^2)-(y-x)t^2\cos(xt^2)}{y-x}\mathrm{d}t\right|.$$

D'après le point précédent, et par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \frac{\sin(yt^2)-\sin(xt^2)-(y-x)t^2\cos(xt^2)}{y-x}\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{\sin(yt^2)-\sin(xt^2)-(y-x)t^2\cos(xt^2)}{y-x}\right|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{|y-x|^2}{2|y-x|}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}|y-x| \xrightarrow[y\to x]{} 0
\end{aligned}$$

Par encadrement,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \xrightarrow[y\to x]{} \int_0^1 t^2\cos(xt^2)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, f est dérivable en x, et puisque cela est vrai pour tout réel x, on peut conclure que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f'(x) = \int_0^1 t^2\cos(xt^2)\mathrm{d}t.}$$

Remarque

On aurait pu appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange simplement à la fonction sin, mais entre xt^2 et yt^2. Le résultat sera identique.

☞ *Exercices 10 et 11.*

Exercices

22

Exercices

Dérivées successives

●○○ **Exercice 1 Calculs de dérivées** (15 min.)

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur des intervalles à préciser, et déterminer leurs dérivées successives.

- $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$.
- $g : x \mapsto \ln(1+x)$.
- $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

●○○ **Exercice 2 Dérivée n-ième et application** (10 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $x \longmapsto (x-a)^n(x-b)^n$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

●○○ **Exercice 3 Sur la somme harmonique** (20 min.)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : x \mapsto x^n, \quad g_n : x \mapsto x^n \ln(x) \quad \text{et} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Justifier que g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour tout entier n, exprimer g'_{n+1} en fonction de g_n et de f_n.
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g_n^{(n)}(x) = n!\left(\ln(x) + H_n\right).$$
4. En calculant $g_n^{(n)}$ d'une autre manière, montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_n.$$

●○○ **Exercice 4 Une dérivée trigonométrique** (15 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$. Montrer que, pour tout entier n,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n \mathrm{e}^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

Applications

●●○ **Exercice 5 Recherche de fonctions** (20 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les fonctions n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$.

●○○ **Exercice 6 Calcul d'une limite** (15 min.)

En appliquant une formule de Taylor à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

●○○ **Exercice 7 Une inégalité** (10 min.)

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}.$$

●○○ **Exercice 8 Une autre inégalité** (10 min.)

Montrer que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

●○○ **Exercice 9 Extrema locaux** (15 min.)

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto x^5 - 15x^3 + 12$.
- $g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$.

●●○ **Exercice 10 Limite d'intégrale** (20 min.)

Montrer que, pour tout réel x

$$|\sin(x) - x| \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

En déduire la valeur de

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

●●○ **Exercice 11 Dérivée d'intégrale – le *come back*** (25 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_1^2 \frac{\cos(xt)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que, pour tous $t \in [1, 2]$, et tous réels x et y,
$$\left|\frac{\cos(xt)}{t} - \frac{\cos(yt)}{t}\right| \leqslant |y - x|$$
   b) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. a) Montrer que, pour tout $t \in [1, 2]$, et tous réels x et y, on a
$$\left|\frac{\cos(yt)}{t} - \frac{\cos(xt)}{t} + (y-x)\sin(xt)\right| \leqslant |y-x|^2.$$
   b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = -\int_1^2 \sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$

Pour aller plus loin

●●● Exercice 12 Un exercice théorique (25 min.)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, telle que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.
On note

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|.$$

L'objectif de l'exercice est de démontrer que f' est également bornée sur $\mathbb{R}$ et de trouver une inégalité entre les sup de f, f' et f''.

1. Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, et tout $h > 0$

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{2} \quad \text{et} \quad |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{2}.$$

2. Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

3. En déduire que f' est bornée, et en notant $M_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$, que

$$M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}.$$

●●● Exercice 13 Une fonctions sous contrainte (30 min.)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel $a > 0$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!}{a^n} \quad \text{et} \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

1. Montrer que f est nulle sur $]-a,\, a[$, puis que $\left]-\frac{a}{2},\, \frac{3a}{2}\right[$.
2. Montrer que f est la fonction nulle.

●●○ Exercice 14 Sur le développement de $\tan$ (25 min.)

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$a_n = \frac{\tan^{(n)}(x)}{n!}.$$

Montrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

> ***Méthode***
> On extrapole une formule pour la dérivée n-ième, puis on la démontre rigoureusement par récurrence.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ comme composée de la fonction ln et d'une fonction affine strictement positive sur le domaine.
h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une exponentielle et d'une fonction affine.
Après calcul des premières dérivées, il semblerait que :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad & f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \\
\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in\,]-1, +\infty[, \quad & g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} = f^{(n-1)}(x) \\
\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad & h^{(n)}(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

Exercice 2

Notons f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto (x-a)^n \quad \text{et} \quad g : x \mapsto (x-b)^n.$$

Les fonctions f et g étant des fonctions polynomiales, elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$:

$$f^{(k)} : x \mapsto n(n-1)\dots(n-k+1)(x-a)^{n-k} \quad \text{et} \quad g^{(k)} : x \mapsto n(n-1)\dots(n-k+1)(x-b)^{n-k}.$$

La formule de Leibniz nous garantit alors que, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n(n-1)\dots(n-k+1)(x-a)^{n-k} \times n(n-1)\dots(n-(n-k)+1)(x-b)^{n-(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{k!} (x-a)^{n-k}(x-b)^k \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 (x-a)^{n-k}(x-b)^k
\end{aligned}$$

On prend alors $a = b = 0$. Cela donne

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 x^{n-k} x^k$$

$$= n!x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Or, dans ce cas, $f : x \mapsto x^{2n}$ de dérivée n-ième

$$f^{(n)} : x \mapsto 2n(2n-1)\dots(2n-n+1)x^n = \frac{(2n!)}{n!}x^n.$$

L'égalité donne alors, pour tout réel x

$$n!x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}x^n$$

soit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}.}$$

Exercice 3

1. g_n est le produit de deux fonctions, la fonction $x \mapsto x^n$ et la fonction ln, toute deux de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, g_n est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On calcule la dérivée du produit. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} g'_{n+1}(x) &= (n+1)x^n \ln(x) + x^{n+1}\frac{1}{x} \\ &= (n+1)g_n(x) + f_n(x). \end{aligned}$$

3. On note P la proposition définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par P_n : « $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_n^{(n)}(x) = n!\,(\ln(x) + H_n)$ ».
• Pour $n = 1$, le calcul de la question précédente nous donne

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g_1'(x) = (0+1)g_0(x) + f_0(x) = \ln(x) + 1 = 1!(\ln(x) + H_1).$$

Ainsi, P_1 est vérifiée.
• Supposons la proposition P_n vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que, par définition et d'après la question 1 :

$$g_{n+1}^{(n+1)} = \left(g'_{n+1}\right)^{(n)} = \left((n+1)g_n + f_n\right)^{(n)}.$$

Par linéarité de la dérivée, et l'hypothèse de récurrence, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} g_{n+1}^{(n+1)}(x) &= (n+1)g_n^{(n)}(x) + f_n^{(n)}(x) \text{ par linéarité} \\ &= (n+1)n!\,(\ln(x) + H_n) + n! \text{ par H.R. et dérivée } n\text{-ième de } x \longmapsto x^n \\ &= (n+1)!\,(\ln(x) + H_n) + \frac{(n+1)!}{n+1} \\ &= (n+1)!\left(\ln(x) + H_n + \frac{1}{n+1}\right) = (n+1)!\,(\ln(x) + H_{n+1}) \end{aligned}$$

et ainsi, P_{n+1} est également vérifiée.
D'après le principe de récurrence, on en déduit que la proposition P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. La somme nous donne envie d'appliquer la formule de Leibniz, en remarquant que $g_n = f_n \times \ln$. Les deux fonctions étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut appliquer la formule de Leibniz à l'ordre n, en

faisant attention à la dérivée d'ordre 0 de ln. Pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned}(f_n \times \ln)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) f_n^{(n-k)}(x) \\ &= \binom{n}{0} \ln(x) \times n! + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} n(n-1)\dots(n-(n-k)+1)x^k \\ &= n!\ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{n!}{k!} \\ &= n!\ln(x) + n!\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad n!\ln(x) + n!\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = n!\,(\ln(x) + H_n)$$

soit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_n.}$$

Exercice 4

Remarquons tout d'abord que, par produit de deux fonctions exp et sin de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On va le démontrer par récurrence et on note P la proposition définie, pour tout entier n, par P_n :

$$\text{« } \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \sqrt{2^n}\mathrm{e}^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \text{ ».}$$

- Pour $n = 0$, on constate que, pour tout réel x :

$$\sqrt{2^0}\mathrm{e}^x \sin\left(x + \frac{0\pi}{4}\right) = \mathrm{e}^x \sin(x) = f(x).$$

P_0 est donc vérifiée.

- Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé. On a alors, par hypothèse de récurrence :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \sqrt{2^n}\mathrm{e}^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

Dérivons alors :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) &= \sqrt{2^n}\left(\mathrm{e}^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + \mathrm{e}^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2^n}\mathrm{e}^x\left(\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\right)\end{aligned}$$

Calculons alors la formule proposée à l'ordre $n+1$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2^{n+1}}\mathrm{e}^x \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{4}\right) &= \sqrt{2^{n+1}}\mathrm{e}^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2^{n+1}}\mathrm{e}^x\left(\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2^{n+1}}\mathrm{e}^x\left(\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2^n}\mathrm{e}^x\left(\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\right)\end{aligned}$$

On obtient alors le même résultat : on peut conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = \sqrt{2^{n+1}}\mathrm{e}^x \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{4}\right)$$

et la proposition P_{n+1} est donc vérifiée.
Le principe de récurrence nous garantit alors que la proposition P_n est vraie pour tout entier n. Ainsi

$$\boxed{\forall n, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \sqrt{2^n}\mathrm{e}^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).}$$

Exercice 5

Soit f une telle fonction. Remarquons qu'en multipliant par exp (qui est strictement positive), la relation s'écrit

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \exp = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \exp^{(n-k)}.$$

Ainsi, la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$ est équivalente, d'après la formule de Leibniz, à $(f\exp)^{(n)} = 0$. C'est-à-dire, en utilisant un résultat du cours, que $f\exp$ est un polynôme de degré au plus $n-1$. Finalement, f s'écrit

$$x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{-x} \text{ avec } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

Réciproquement, si f est de cette forme, $f\exp \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc $(f\exp)^{(n)} = 0$, soit la relation de l'énoncé.

Bilan : les fonctions f n-fois dérivables vérifiant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$ sont les éléments de l'ensemble

$$F = \{x \mapsto P\mathrm{e}^{-x}, \quad P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}.$$

> **Remarque**
> On peut montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 6

On suit l'indication naïvement. On constate tout d'abord que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ par composée. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre 0 et $x \in \mathbb{R}^+$, à l'ordre n :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \right| \leqslant \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[0,\,x]} \left|f^{(n+1)}\right|$$

On constate que, pour $k = 0$, $f^{(k)}(0) = \ln(1) = 0$ et pour tout $k \geqslant 1$:

$$f^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \text{ soit } f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

On remarque alors que, pour $x \in \mathbb{R}^+$:

$$1 + x \geqslant 1 \implies \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \leqslant 1 \implies \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant n!.$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange devient

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k\right|\leqslant\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}n!$$
$$\text{soit}\quad\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right|\leqslant\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Prenons alors $x=1$. On obtient

$$\left|f(1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

On en déduit que la somme converge vers $f(1)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln(2).}$$

Exercice 7

Les termes font penser au début d'une formule de Taylor. On note $f : x\mapsto\sqrt{1+x}$. Déterminons, pour $x\in\mathbb{R}^+$, la formule de Taylor à l'ordre 2 et à l'ordre 3 de f, entre 0 et x. Constatons tout d'abord que f est de class $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. De plus

$$f' : x\mapsto\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2},\quad f'' : x\mapsto\frac{-1}{4}(1+x)^{-3/2},\quad f^{(3)} : x\mapsto\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}\quad\text{et}\quad f^{(4)} : x\mapsto-\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2}.$$

Ainsi,

$$f(0)=1,\quad f'(0)=\frac{1}{2},\quad f''(0)=-\frac{1}{4},\quad f^{(3)}(0)=\frac{3}{8}.$$

Les formules de Taylor s'écrivent alors, pour $x\geqslant 0$:

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2!}f^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t\\&=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\int_0^x\frac{3}{16}(x-t)^2(1+t)^{-5/2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Puisque, sur $[0,x]$, $\frac{3}{16}(x-t)^2(1+t)^{-5/2}\geqslant 0$, et que les bornes sont dans le bon sens, la positivité de l'intégrale nous garantie que

$$\int_0^x\frac{3}{16}(x-t)^2(1+t)^{-5/2}\,\mathrm{d}t\geqslant 0\implies f(x)\geqslant 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}.$$

Par le même raisonnement :

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)\int_0^x\frac{(x-t)^3}{3!}f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t\\&=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\int_0^x-\frac{5}{32}(x-t)^t(1+t)^{-7/2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et cette intégrale, cette fois-ci, est négative sur $[0,x]$. Ainsi

$$f(x)\leqslant 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}.$$

Exercice 8

On procède comme l'exercice précédent, en s'intéressant à la fonction sin, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On fixe $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et on écrit les formules de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 et 5 entre 0 et x.

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(0) + x\sin'(0) + \frac{x^2}{2}\sin^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}\sin^{(3)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}\sin^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}\sin(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Constatons alors que, si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \geqslant 0$ et $(x-t)^3 \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale (car $0 \leqslant x$) :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}\sin(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et finalement

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}.$$

À l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(0) + x\sin'(0) + \frac{x^2}{2}\sin^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}\sin^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}\sin^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!}\sin^{(5)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^5}{5!}\sin^{(6)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \int_0^x \frac{(x-t)^5}{5!}(-\sin(t))\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Constatons alors que, si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $-\sin(t) \leqslant 0$ et $(x-t)^5 \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale (car $0 \leqslant x$) :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^5}{5!}(-\sin(t))\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

et finalement

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 9

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Déterminons les points critiques de f.

$$f'(x) = 0 \iff 5x^4 - 45x^2 = 0 \iff 5x^2(x^2-9) = 0 \iff x \in \{0, -3, 3\}.$$

Il y a donc 3 points critiques. Calculons alors f'' :

$$f'' : x \mapsto 20x^3 - 90x$$

Remarquons que

$$f''(-3) = -270 < 0 \quad \text{et} \quad f''(3) = 270 > 0.$$

Il y a donc un maximum local atteint en $x = -3$ et un minimum global atteint en $x = 3$. Enfin,

$$f''(0) = 0.$$

On ne peut donc pas conclure avec la méthode du cours. Remarquons alors que

$$f(x) - f(0) = x^5 - 15x^3 = x^3(x^2 - 15).$$

Si $x \in [0, 1]$, $f(x) - f(0) \leqslant 0$ et si $x \in [-1, 0]$, $f(x) - f(0) \geqslant 0$: ainsi, f n'admet pas d'extremum local en 0.

g est, quant à elle, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminons ses points critiques :

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\iff \frac{\frac{(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2}}{\frac{x}{1+x^2}} = 0 \\ &\iff \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} = 0 \\ &\iff 1-x^2 = 0 \\ &\iff x = 1 \in \mathbb{R}_+^* \text{ ou } x = -1 \notin \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

Le seul point critique sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc 1. Calculons la dérivée seconde de g :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g^{(2)}(x) &= \frac{-2x(x+x^3)-(1-x^2)(1+3x^2)}{x^2(1+x^2)^2} \\ &= \frac{-2x^2-2x^4-(1+3x^2-x^2-3x^4)}{x^2(1+x^2)^2} \\ &= \frac{x^4-4x^2-1}{x^2(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

On constate alors que $g^{(2)}(1) = \frac{-4}{4} = -1 < 0$. Ainsi, g admet un maximum local en 1 et $g(1) = -\ln(2)$.

En réalité, c'est un maximum global puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$(x-1)^2 \geqslant 0 \implies 1+x^2 \geqslant 2x \implies \frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2x}.$$

Ainsi, en multipliant par $x > 0$ et par croissance de la fonction ln,

$$\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2} \implies g(x) \leqslant -\ln(2) = g(1).$$

par croissance de la fonction ln.

Exercice 10

L'inégalité en valeur absolue nous donne envie d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sin entre 0 et x, à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} |\sin(x) - (\sin(0) + x\sin'(0))| &\leqslant \frac{|x|^2}{2!} \max_{[0,\,x]} |\sin^{(2)}| \\ \text{soit} \qquad |\sin(x) - x| &\leqslant \frac{x^2}{2} \text{ puisque } |\sin^{(2)}| = |-\sin| \leqslant 1 \end{aligned}$$

On va déterminer la limite de l'intégrale par encadrement. Puisqu'il faut en déduire le résultat avec ce qui précède, on réécrit l'intégrale : pour $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t &= \int_x^{2x} \frac{\sin(t)-t+t}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{2x} \frac{\sin(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t + \int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{2x} \frac{\sin(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t + [\ln(|t|)]_x^{2x} \\ &= \int_x^{2x} \frac{\sin(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t + (\ln(2|x|) - \ln(|x|)) \end{aligned}$$

$$= \int_x^{2x} \frac{\sin(t) - t}{t^2} \mathrm{d}t + \ln(2)$$

Remarquons que pour tout $x \neq 0$:

$$|\sin(x) - x| \leqslant \frac{x^2}{2} \implies \left|\frac{\sin(x) - x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

D'après l'inégalité de la moyenne :

$$\left|\int_x^{2x} \frac{\sin(t) - t}{t^2} \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2}|2x - x| = \frac{|x|}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} \mathrm{d}t = \ln(2).}$$

Exercice 11

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Remarquons que la fonction $t \longmapsto \frac{\cos(xt)}{t}$ est bien définie et est continue sur $[1, 2]$. $f(x)$ existe donc bien.
Bilan : f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [1, 2]$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $g_t : u \longmapsto \frac{\cos(ut)}{t}$ (t étant fixé) entre x et y à l'ordre 0, la fonction g_t étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$|g_t(y) - g_t(x)| \leqslant \max_{[x,y]} |g_t'(u)||y - x|$$

Remarquons que, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$g_t'(u) = -\sin(ut)$$

Mais alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|g_t'(u)| \leqslant 1$ L'inégalité s'écrit alors

$$\left|\frac{\cos(yt)}{t} - \frac{\cos(xt)}{t}\right| \leqslant |y - x|$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que f est continue en x. Remarquons que, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_1^2 \frac{\cos(xt)}{t} \, \mathrm{d}t - \int_1^2 \frac{\cos(yt)}{t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_1^2 \left(\frac{\cos(xt)}{t} - \frac{\cos(yt)}{t}\right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, et en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant \int_1^2 \left|\frac{\cos(xt)}{t} - \frac{\cos(yt)}{t}\right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_1^2 |y - x| \, \mathrm{d}t = |y - x| \int_1^2 1 \, \mathrm{d}t = |y - x|. \end{aligned}$$

Remarquons finalement que $|y - x| \xrightarrow[y \to x]{} 0$. Par encadrement, $|f(x) - f(y)| \xrightarrow[y \to x]{} 0$ et donc $f(y) \xrightarrow[y \to x]{} f(x)$.
Bilan : f est continue en x. Ceci étant valable pour tout réel x, f est continue sur $\mathbb{R}$.
c)

> **Remarque**
> Le terme en $|y-x|^2$ doit immédiatement faire penser à l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Pour $t \in [1,\,2]$, la fonction g_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Soient alors x et y deux réels. L'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée à g_t entre x et y à l'ordre 1 donne

$$|g_t(y) - (g_t(x) + (y-x)g_t'(x))| \leqslant \frac{|y-x|^2}{2!} \max_{[x,y]} |g^{(2)}(u)|$$

Remarquons que $g_t^{(2)} : u \longmapsto -t\cos(ut)$ et, puisque $t \in [1,\,2]$,

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad |g_t^{(2)}(u)| \leqslant 2.$$

L'inégalité précédente devient

$$\left|\frac{\cos(yt)}{t} - \frac{\cos(xt)}{t} + (y-x)\sin(xt)\right| \leqslant |y-x|^2.$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons le taux d'accroissement de f en x. Pour tout $y \neq x$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(y)-f(x)}{y-x} &= \frac{\int_1^2 \frac{\cos(yt)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^2 \frac{\cos(xt)}{t}\,\mathrm{d}t}{y-x} \\
&= \frac{1}{y-x}\int_1^2 \left(\frac{\cos(yt)}{t} - \frac{\cos(xt)}{t} + (y-x)\sin(xt) - (y-x)\sin(xt)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{y-x}\int_1^2 \left(\frac{\cos(yt)}{t} - \frac{\cos(xt)}{t} + (y-x)\sin(xt)\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{y-x}\int_1^2 (y-x)\sin(xt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{y-x}\int_1^2 \left(\frac{\cos(yt)}{t} - \frac{\cos(xt)}{t} + (y-x)\sin(xt)\right)\mathrm{d}t - \int_1^2 \sin(xt)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{y-x}\int_1^2 \left(\frac{\cos(yt)}{t} - \frac{\cos(xt)}{t} + (y-x)\sin(xt)\right)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{1}{|y-x|}\int_1^2 \left|\frac{\cos(yt)}{t} - \frac{\cos(xt)}{t} + (y-x)\sin(xt)\right|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{|y-x|}\int_1^2 |y-x|^2\,\mathrm{d}t = |y-x| \xrightarrow[y\to x]{} 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{y-x}\int_1^2 \left(\frac{\cos(yt)}{t} - \frac{\cos(xt)}{t} + (y-x)\sin(xt)\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[y\to x]{} 0$$

et par somme de limite, on en déduit que

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \xrightarrow[y\to x]{} -\int_1^2 \sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$

Bilan : ceci étant vrai pour tout réel x, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\int_1^2 \sin(xt)\,\mathrm{d}t.}$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 12

1. f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre x et $x+h$ donne, en utilisant la définition de M_2 :

$$|f(x+h) - (f(x) + hf'(x)| \leqslant \frac{|x+h-x|^2}{2!} \max_{[x,x+h]} |f''(x)| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2.$$

Ainsi,

$$\boxed{|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{2}.}$$

De même, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre x et $x-h$ donne, en utilisant la définition de M_2 :

$$|f(x-h) - (f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{|x-h-x|^2}{2!} \max_{[x-h,x]} |f''(x)| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2$$

Ainsi,

$$\boxed{|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{2}.}$$

2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Remarquons que

$$f(x-h) - f(x) + hf'(x) - (f(x+h) - f(x) - hf'(x)) = f(x-h) - f(x+h) + 2hf'(x).$$

Ainsi, par inégalité triangulaire, les inégalités précédentes et définition de M_0 :

$$\begin{aligned}
|2hf'(x)| &= |f(x-h) - f(x) + hf'(x) - (f(x+h) - f(x) - hf'(x)) - f(x-h) + f(x+h)| \\
&\leqslant |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| + |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| + |f(x+h) - f(x-h)| \\
&\leqslant \frac{M_2 h^2}{2} + \frac{M_2 h^2}{2} + |f(x+h)| + |f(x-h)| \leqslant M_2 h^2 + 2M_0
\end{aligned}$$

En divisant par $2h > 0$:

$$\boxed{|f'(x)| \leqslant \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h}.}$$

3. Fixons par exemple $h = 1$. Le résultat précédent indique que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{M_2}{2} + M_0.$$

Le réel $\frac{M_2}{2} + M_0$ étant indépendant de x, on en déduit que $\underline{f' \text{ est bornée.}}$

Pour trouver la « meilleure borne », étudions la fonction $g : h \longmapsto \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est

$$g' : h \longmapsto \frac{M_2}{2} - \frac{M_0}{h^2} = \frac{h^2 M_2 - 2M_0}{h^2}.$$

Le trinôme du numérateur s'annule en $-\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$ et en $\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$. De plus,

$$g\left(\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}\right) = \frac{M_2\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}}{2} + \frac{M_0}{\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}} = \sqrt{\frac{M_0 M_2}{2}} + \sqrt{\frac{M_2 M_0}{2}} = \sqrt{2M_0 M_2}$$

Le tableau, sur $\mathbb{R}_+^*$, de g' donne alors

h	0		$\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$		$+\infty$
$g'(h)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
variation de g	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2M_0M_2}$	$\nearrow$	$+\infty$

L'inégalité
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant g(h)$$
étant vraie pour tout réel $h > 0$, elle l'est, d'après le tableau précédent, pour $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$, ce qui donne
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}.$$
Ceci étant valable pour tout réel x, par passage à la borne supérieure :
$$\boxed{M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}.}$$

Exercice 13

1. Soit $x \in \,]-a,\, a[$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n fixé, entre 0 et x :
$$\left| f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \right) \right| \leqslant \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0x]} |f^{(n+1)}(u)|$$
Par hypothèse, les dérivées successives en 0 sont nulles, et
$$\sup_{[0,x]} |f^{(n+1)}(u)| \leqslant \frac{(n+1)!}{a^{n+1}}.$$
Ainsi, l'inégalité s'écrit
$$|f(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(n+1)!}{a^{n+1}} = \left|\frac{x}{a}\right|^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ car } -1 < \frac{x}{a} < 1$$
Ainsi, $|f(x)| = 0$ et donc $f(x) = 0$.
$$\boxed{\forall\, x \in \,]-a,\, a[, \quad f(x) = 0.}$$
f est donc nulle sur $]-a,\, a[$, et donc toutes ses dérivées également. Entre autre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}\left(\frac{a}{2}\right) = 0$.
Soit alors $x \in \,]-\frac{a}{2},\, \frac{3a}{2}[$. Utilisons la même méthode ensuite, mais en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, à l'ordre n, entre x et $\frac{a}{2}$:
$$\left| f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left(\frac{a}{2}\right)}{k!} \left(x - \frac{a}{2}\right)^k \right) \right| \leqslant \frac{\left|x - \frac{a}{2}\right|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[x,\, \frac{a}{2}]} |f^{(n+1)}(u)|$$
$$\text{soit } |f(x)| \leqslant \frac{\left|x - \frac{a}{2}\right|^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(n+1)!}{a^n} = \left|\frac{x - \frac{a}{2}}{a}\right|^{n+1}$$
Or, puisque $x \in \,]-\frac{a}{2},\, \frac{3a}{2}[$,
$$-a < x - \frac{a}{2} < a$$

et donc
$$\left|\frac{x-\frac{a}{2}}{a}\right|^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Finalement,
$$\boxed{\forall\, x \in \left]-\frac{a}{2},\, \frac{3a}{2}\right[, \quad f(x) = 0.}$$

2. On peut réitérer le processus. Soit P la proposition définie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par P_p : « Pour tout $x \in \left]-a+p\frac{a}{2},\, a+p\frac{a}{2}\right[$, $f(x) = 0$ ».
Montrons par récurrence sur p que la proposition P_p est vraie pour tout p.

- Le cas $p = 0$ a été fait dans la question précédente.
- Supposons la proposition P_p vraie pour un certain entier p fixé. Ainsi, f est nulle sur $\left]-a+p\frac{a}{2},\, a+p\frac{a}{2}\right[$,

et donc ses dérivées également. En particulier, puisque $-a+p\frac{a}{2} < (p+1)\frac{a}{2} < a+\frac{a}{2}$,
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}\left((p+1)\frac{a}{2}\right) = 0.$$

Soit alors $x \in \left]-a+(p+1)\frac{a}{2},\, a+(p+1)\frac{a}{2}\right[$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre x et $(p+1)\frac{a}{2}$:
$$\left|f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left((p+1)\frac{a}{2}\right)}{k!}\left(x-(p+1)\frac{a}{2}\right)^k\right)\right| \leqslant \frac{\left|x-(p+1)\frac{a}{2}\right|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[x,\,(p+1)\frac{a}{2}]} |f^{(n+1)}(u)|$$
$$\text{soit } |f(x)| \leqslant \frac{\left|x-(p+1)\frac{a}{2}\right|^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(n+1)!}{a^n} = \left|\frac{x-(p+1)\frac{a}{2}}{a}\right|^{n+1}$$

Or, puisque $x \in \left]-a+(p+1)\frac{a}{2},\, a+(p+1)\frac{a}{2}\right[$, $-a < x-(p+1)\frac{a}{2} < a$ et donc
$$\left|\frac{x-(p+1)\frac{a}{2}}{a}\right|^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, $|f(x)| = 0$. Finalement
$$\forall\, x \in \left]-a+(p+1)\frac{a}{2},\, a+(p+1)\frac{a}{2}\right[, \quad f(x) = 0$$

et P_{p+1} est donc vérifiée.
D'après le principe de récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, P_p est vérifiée. Et puisque
$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \left]-a+p\frac{a}{2},\, a+p\frac{a}{2}\right[= \left]-a,\, +\infty\right[$$

on en déduit que
$$\forall\, x > -a, \quad f(x) = 0.$$

Une récurrence identique, sur $\left]-a-p\frac{a}{2},\, a-p\frac{a}{2}\right[$ permet de montrer également que f est nulle sur $\left]-\infty,\, a\right[$.
Bilan : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0$.

Exercice 14

On se fixe un réel $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.
Remarquons tout d'abord que, $\tan' = 1 + \tan^2 = 1 + \tan \times \tan$. La fonction tangente étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition, dérivons cette relation n-fois, avec $n \geqslant 1$. D'après la

formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}\tan^{(n+1)} = (\tan')^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}}{k!} \times \frac{\tan^{(n-k)}}{(n-k)!}.\end{aligned}$$

Évaluons alors en x :

$$\begin{aligned}\tan^{(n+1)}(x) &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(x)}{k!} \times \frac{\tan^{(n-k)}(x)}{(n-k)!} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.\end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}(n+1)a_{n+1} &= (n+1)\frac{\tan^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \\ &= \frac{\tan^{(n+1)}(x)}{n!}\end{aligned}$$

et en utilisant l'égalité précédente

$$(n+1)a_{n+1} = \frac{1}{n!}\left(n! \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.}$$

Remarque

Il s'agit d'une méthode pour déterminer, de proche en proche, les coefficients du développement de tan dans la formule de Taylor.