

21

Chapitre

Analyse asymptotique

Résumé

CE chapitre est une base utilisée dans de nombreuses situations : calcul de limites, et plus tard, pour des développements limités et des comportements de fonctions. Il est à connaître rapidement.

Plan du cours

Chapitre 21. Analyse asymptotique

I. Négligeabilité	3
II. Equivalence	7
Exercices	15
Corrigés	21

« Ce qu'on fait de sa seule vie n'est jamais négligeable. Mais rien ne la gâche aussi sûrement que trop d'efforts pour la sauver. »

Jean d'Ormesson (1925–). *L'amour est un plaisir*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant la négligeabilité de suites et de fonctions :

- connaître la définition ☐
- connaître les différentes propriétés usuelles ☐
- connaître les négligeabilités usuelles ☐

② Concernant l'équivalence de suites et de fonctions :

- connaître la définition ☐
- connaître les différentes propriétés usuelles ☐
- connaître le résultat $f(x) - f(0) \underset{0}{\sim} f'(0)x$ si f est dérivable ☐
- connaître les équivalences usuelles ☐

I. Négligeabilité

Dans toute cette partie, x_0 désignera ou bien un nombre réel, ou bien $+\infty$, ou bien $-\infty$. Rappelons tout d'abord la notion de voisinage :

Définition 21.1.

On appelle **voisinage** de x_0 :

- un intervalle de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, ou un intervalle contenant x_0 dont x_0 n'est pas une borne.
- $]A, +\infty[$ ou $[A, +\infty[$, avec A réel, si $x_0 = +\infty$.
- $] -\infty, A[$ ou $] -\infty, A]$, avec A réel, si $x_0 = -\infty$.

1. Définition

Définition 21.2. Cas des fonctions

Soient f et g définies au voisinage de x_0 , avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0 . Alors, on dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de x_0 , et on note $f = o_{x_0}(g)$, si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$f = o_{x_0}(g)$ peut se noter également $f(x) = o_{x_0}(g(x))$ ou encore $f(x) = o_{x_0}(g(x))$ et se lit « f est un petit o de g au voisinage de x_0 ».

Exemple 21.1

Par exemple, $x = o_{+\infty}(x^2)$ puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exercice 21.2

Montrer que $\sin(x) = o_0(\sqrt{x})$

Solution

En effet, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} &= \frac{\sin(x)\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} \frac{\sin(x)}{x} \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, par produit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

et donc $\sin(x) = o_0(\sqrt{x})$.

Rappelons la définition déjà vue pour les suites :

Définition 21.3. Cas des suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) , et on note $u_n = o_{+\infty}(v_n)$, voire $u_n = o(v_n)$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Proposition 21.1.

$f = o(1)$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

$f - \ell = o(1)$ si et seulement si $f \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$.

Démonstration

En effet, la fonction constante égale à 1 ne s'annule pas au voisinage de x_0 et on a $f = o_{x_0}(1)$ par définition si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Pour le deuxième point, $f - \ell = o(1)$ et donc $f - \ell \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ soit $f \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$.

**RÉFÉRENCE HISTORIQUE**

Les différentes méthodes de comparaisons que nous allons voir ont été introduites par Paul du Bois-Reymond en 1872. Ils ont été développés et des notations ont été introduites, par Godfrey Harold Hardy qui notait $f(x) \ll g(x)$ puis par Edmund Landau qui utilisait $f = o(g)$.

2. Négligeabilités usuelles

On dispose d'un ensemble de négligeabilités à connaître.

Théorème 21.2. Négligeabilités usuelles – fonctions

Soient α et β deux réels strictement positifs. On a

- Si $\alpha < \beta$, on a

$$x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta) \quad \text{et} \quad x^\beta = o_0(x^\alpha)$$

- Si $\alpha < \beta$,

$$(\ln(x))^\alpha = o_{+\infty}((\ln(x))^\beta) \quad \text{et} \quad |\ln(x)|^\alpha = o_{0^+}(|\ln(x)|^\beta).$$

- Si $0 < p < q$, alors $p^x = o_{+\infty}(q^x)$.

Démonstration

On prend $\alpha < \beta$ et $0 < p < q$.

$$\begin{aligned} \frac{x^\alpha}{x^\beta} &= \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \frac{\ln(x)^\alpha}{\ln(x)^\beta} &= \frac{1}{\ln(x)^{\beta-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \frac{p^x}{q^x} &= e^{x(\ln(p)-\ln(q))} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^\beta}{x^\alpha} &= x^{\beta-\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ \frac{|\ln(x)|^\alpha}{|\ln(x)|^\beta} &= \frac{1}{|\ln(x)|^{\beta-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \end{aligned}$$

Théorème 21.3. Croissances comparées – fonctions

Soient α et β deux réels strictement positifs.

- Si $q > 1$, on a

$$x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(q^x)$$

et en particulier $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^x)$.

- Si $q > 1$ alors

$$|x|^\alpha \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{q^x}\right).$$

- On a

$$(\ln(x))^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta) \quad \text{et} \quad |\ln(x)|^\alpha \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

- Si $0 < q < 1$, alors

$$q^x \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

Démonstration

Cela découle des croissances comparées. Par exemple

$$\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc $(\ln(x))^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$.

On rappelle les négligeabilités vues dans le cas des suites :

Théorème 21.4. Négligeabilités usuelles – cas des suites

Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $q \in \mathbb{R}$.

- On a $(\ln(n))^\beta \underset{+\infty}{=} o(n^\alpha)$.
- Si $q > 1$, alors $n^\alpha \underset{+\infty}{=} o(q^n)$.
- Si $0 < q < 1$, alors $q^n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.
- Si $q > 1$, alors $q^n \underset{+\infty}{=} o(n!)$.
- On a $n! \underset{+\infty}{=} o(n^n)$.

3. Propriétés**Propriété 21.5. Transitivité et linéarité**

Soient f, g et h des fonctions définies au voisinage de x_0 :

- TRANSITIVITÉ : si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et $g \underset{x_0}{=} o(h)$, alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.
- LINÉARITÉ : si $f \underset{x_0}{=} o(h)$ et $g \underset{x_0}{=} o(h)$, alors pour tous réels a et b , on a $af + bg \underset{x_0}{=} o(h)$

Démonstration

Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et $g \underset{x_0}{=} o(h)$ alors g et h ne s'annulent pas au voisinage de x_0 , et on peut écrire

$$\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \times \frac{g}{h}$$

et ainsi $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$ par produit des limites.

De même, si $f = o_{x_0}(h)$ et $g = o_{x_0}(h)$ alors h ne s'annule pas au voisinage de x_0 et on a

$$\frac{af + bg}{h} = a \frac{f}{h} + b \frac{g}{h}$$

Par somme et produit des limites, on en déduit donc que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(af + bg)(x)}{h(x)} = 0$.

Propriété 21.6. Produits

Soient f, g, h et φ des fonctions définies au voisinage de x_0 .

- Si $f = o_{x_0}(g)$ et $h = o_{x_0}(\varphi)$, alors $f \times h = o_{x_0}(g \times \varphi)$.
- Si $f = o_{x_0}(g)$, alors $f \times \varphi = o_{x_0}(g \times \varphi)$.

Démonstration

Toujours de la même manière :

$$\begin{aligned} \frac{f \times h(x)}{g \times \varphi(x)} &= \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{h(x)}{\varphi(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ \frac{f \times \varphi(x)}{g \times \varphi(x)} &= \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0. \end{aligned}$$

Remarque

On peut également diviser des équivalents, si les fonctions sont bien définies. Le plus classique : si $f(x) = o_0(x^n)$, alors pour tout $p \leq n$, $\frac{f(x)}{x^p} = o_0(x^{n-p})$. En effet

$$\frac{\frac{f(x)}{x^p}}{x^{n-p}} = \frac{f(x)}{x^n} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

⚠ Attention

On a vu que si f et g sont des petits o de h , alors $f + g$ également. En revanche, dans le cas général, on ne peut pas ajouter les petits o : si $f = o(h)$ et $g = o(\varphi)$ alors $f + g$ n'est pas égal à $o(h + \varphi)$.

L'idée est que c'est le plus « gros » des petits o qui l'emporte. Par exemple, si

$$f(x) \underset{0}{=} x - x^2 + x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{0}{=} 1 - x^2 + o(x^4)$$

alors

$$f(x) + g(x) = x - x^2 + x^3 + o(x^3) + 1 - x^2 + o(x^4) = 1 + x - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$$

puisque $x^4 \underset{0}{=} o(x^3)$: c'est x^3 le « plus gros ».

Exercice 21.3

Soient f et g deux fonctions telles que

$$f(x) \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{+\infty}{=} x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Déterminer une expression de $f + g$ au voisinage de $+\infty$.

Solution

On ajoute :

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &\underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

car $\frac{1}{x^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Propriété 21.7. Substitution

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 telles que $f \underset{x_0}{=} o(g)$. Soit φ une fonction définie sur intervalle J de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans I . Soit t_0 un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de J . Si $\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} x_0$, alors $f(\varphi(t)) \underset{t_0}{=} o(g(\varphi(t)))$.

Démonstration

Si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad \text{et} \quad \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} x_0$$

alors par composée des limites

$$\frac{f(\varphi(t))}{g(\varphi(t))} \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0.$$

Propriété 21.8. Cas des suites

Les propriétés valables pour la négligeabilité des fonctions sont valables pour les suites. Ainsi :

- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors pour tous réels $(a, b) \in \mathbb{R}$, $au_n + bw_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(x_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n x_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ alors pour toute suite w , $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
- Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_0$ alors $f(u_n) \underset{x_0}{=} o(g(u_n))$.

Pour la somme, le résultat est identique : si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(x_n)$, on n'a pas forcément $u_n + w_n = o(v_n + x_n)$. À nouveau, c'est le plus « fort » qui l'emporte.

II. Equivalence**1. Définitions****Définition 21.4. Équivalence de fonctions**

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 . On dit que f est **équivalente** à g en x_0 si, au voisinage de x_0 , on a

$$f - g \underset{x_0}{=} o(g)$$

ce qu'on note $f \underset{x_0}{\sim} g$. Ainsi, puisque g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , on a

$$f \underset{x_0}{\sim} g \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Remarque

Il y a bien équivalence entre les deux définitions. En effet, puisque g ne s'annule pas au voisinage de x_0

$$f - g = o(g) \Leftrightarrow \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1.$$

Exemple 21.4

On a les équivalents suivants :

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \quad \text{et} \quad x^2 - x^3 \underset{+\infty}{\sim} -x^3.$$

En effet

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2 - x^3}{-x^3} = -\frac{1}{x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Rappelons la définition déjà vue pour les suites :

Définition 21.5. Équivalence de suites

Soient u et v deux suites telles que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que u et v sont équivalentes, et on note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou plus simplement $u_n \sim v_n$ si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. De manière équivalente, u et v sont équivalentes si $u_n - v_n = o(v_n)$.

Proposition 21.9.

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et ℓ un réel **non nul**. Alors $f \underset{x_0}{\sim} \ell$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$.

De manière identique, $u_n \sim \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Démonstration

En effet, puisque $\ell \neq 0$,

$$f \underset{x_0}{\sim} \ell \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\ell} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell.$$

**Attention**

On n'écrira jamais $f(x) \sim 0$, ce qui n'a aucun sens.

2. Propriétés**Propriété 21.10. Relation d'équivalence**

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 , et ne s'annulant pas au voisinage de x_0 .

L'équivalence de fonctions est une relation d'équivalence :

- RÉFLEXIVITÉ : $f \underset{x_0}{\sim} f$.
- TRANSITIVITÉ : si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$.
- SYMÉTRIE : si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $g \underset{x_0}{\sim} f$.

Démonstration

Par calcul rapide :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{f(x)} &= 1 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \\ \frac{f(x)}{h(x)} &= \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \text{ par produit} \\ \frac{g(x)}{f(x)} &= \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \text{ par quotient.}\end{aligned}$$

Propriété 21.11. Limites

Soient f et g deux fonctions telles que $f \sim_{x_0} g$. Si f admet une limite ℓ (finie, ou infinie) en x_0 , alors g admet également ℓ comme limite en x_0 .

Démonstration

En effet,

$$g(x) = \frac{g(x)}{f(x)} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \times \ell.$$

Propriété 21.12. Equivalent et petit o

Soient f, g et h trois fonctions définies et ne s'annulant pas au voisinage de x_0 . Alors

- Si $f \sim_{x_0} g$ et $g = o_{x_0}(h)$, alors $f = o_{x_0}(h)$.
- Si $f = o_{x_0}(g)$ et $g \sim_{x_0} h$ alors $f = o_{x_0}(h)$.

Démonstration

Les deux résultats reposent sur l'écriture

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Par produit, dans les deux cas, ces limites sont nulles.

Propriété 21.13. Compatibilité avec produit, quotient et puissances

Soient f, g, h et φ des fonctions définies et ne s'annulant pas au voisinage de x_0 . On suppose que $f \sim_{x_0} g$. Alors

- PRODUIT : $f \times \varphi \sim_{x_0} g \times \varphi$.
- INVERSE : $\frac{1}{f} \sim_{x_0} \frac{1}{g}$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda f \sim_{x_0} \lambda g$.
- PRODUIT : si $h \sim_{x_0} \varphi$, alors $f \times h \sim_{x_0} g \times \varphi$.
- EXPONENTIATION : si $\alpha \in \mathbb{R}$ est tel que f^α et g^α sont bien définies au voisinage de x_0 , on a $f^\alpha \sim_{x_0} g^\alpha$.

**Attention**

Pour la puissance, α ne doit pas dépendre de x et doit être une constante. Par exemple,

$1 + x \underset{0}{\sim} 1$ et pourtant $(1 + x)^{\frac{1}{x}} \underset{0}{\not\sim} 1$ puisque

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^1 = e \text{ par composée et taux d'accroissement.}$$

Enfin, l'équivalence n'est pas compatible avec l'addition. En effet, $1 + x \underset{0}{\sim} 1$, $x - 1 \underset{0}{\sim} -1$ mais pourtant $2x \underset{x_0}{\sim} 0$ (qui n'a aucun sens).

Démonstration

Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{f \times \varphi}{g \times \varphi} &= \frac{f}{g} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \\ \frac{\frac{f}{\frac{1}{g}}}{\frac{1}{g}} &= \frac{f}{g} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \\ \frac{\lambda f}{\lambda g} &= \frac{f}{g} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \\ \frac{f \times h}{g \times \varphi} &= \frac{f}{g} \frac{h}{\varphi} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \text{ par produit} \\ \frac{f^\alpha}{g^\alpha} &= \left(\frac{f}{g} \right)^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \text{ par composée.} \end{aligned}$$

Propriété 21.14. Substitution

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 telles que $f \underset{x_0}{\sim} g$. Soit φ une fonction définie sur intervalle J de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans I . Soit t_0 un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de J . Si $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} x_0$, alors $f(\varphi(t)) \underset{t_0}{\sim} g(\varphi(t))$.

Démonstration

Remarquons que, par hypothèse,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \quad \text{et} \quad \varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} x_0.$$

Par composée,

$$\frac{f(\varphi(t))}{g(\varphi(t))} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 1.$$



Attention

On ne peut pas composer à gauche. Dans ce cas, il faut étudier le quotient en détail.

Par exemple, si f et g sont strictement positives sur I , si $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g$ et si g admet une limite en x_0 différente de 1, alors $\ln(f) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ln(g)$. En effet

$$\frac{\ln(f)}{\ln(g)} = \frac{\ln\left(g \times \frac{f}{g}\right)}{\ln(g)} = \frac{\ln(g) + \ln\left(\frac{f}{g}\right)}{\ln(g)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{f}{g}\right)}{\ln(g)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1.$$

C'est cependant à redémontrer à chaque utilisation.

L'ensemble des propriétés vues précédemment sont valables pour les suites :

Propriété 21.15. Cas des suites

On considère des suites u, v, w, x ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

- $u_n \sim u_n$. Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$. Enfin, si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et si v admet une limite finie, alors u admet la même limite.
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$. De même, si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n \sim v_n, w_n \sim x_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que (u_n^α) et (v_n^α) aient un sens, alors

$$u_n w_n \sim v_n w_n, \quad \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}, \quad u_n w_n \sim v_n x_n \quad \text{et} \quad u_n^\alpha \sim v_n^\alpha.$$

- Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$ alors $f(u_n) \underset{x_0}{\sim} g(u_n)$.

3. Équivalences usuelles

On commence par des équivalences importantes :

Théorème 21.16. Polynômes et puissances

Soient α et β deux réels tels que $0 \leq \alpha < \beta$. Alors

$$(x^\alpha + x^\beta) \underset{+\infty}{\sim} x^\beta \quad \text{et} \quad (x^\alpha + x^\beta) \underset{0}{\sim} x^\alpha.$$

De plus, si α et β sont des entiers, alors

$$(x^\alpha + x^\beta) \underset{-\infty}{\sim} x^\beta$$

Ainsi, si $p < q$ et si $(a_p, \dots, a_q)$ sont des réels tels que $a_p \neq 0$ et $a_q \neq 0$, alors

$$\sum_{k=p}^q a_k x^k \underset{+\infty}{\sim} a_q x^q, \quad \sum_{k=p}^q a_k x^k \underset{0}{\sim} a_p x^p, \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^q \frac{a_k}{x^k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_p}{x^p}.$$

Démonstration

En effet, puisque $\alpha - \beta < 0$ et $\beta - \alpha > 0$:

$$\frac{x^\alpha + x^\beta}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 + 1 = 1$$

et

$$\frac{x^\alpha + x^\beta}{x^\alpha} = 1 + x^{\beta-\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 + 0 = 1$$

Le reste s'en déduit des propriétés précédentes.

Avant d'obtenir d'autres équivalents importants, montrons un lemme :

Lemme 21.17. Équivalent d'ordre 1

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0, qu'on suppose dérivable sur ce voisinage. On suppose que $f'(0) \neq 0$. Alors

$$f(x) - f(0) \underset{0}{\sim} f'(0)x.$$

Démonstration

En effet, $x \mapsto f'(0)x$ ne s'annule pas sur un voisinage de 0 (sauf en 0) et

$$\frac{f(x) - f(0)}{f'(0)x} = \frac{1}{f'(0)} \frac{f(x) - f(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f'(0)} f'(0) = 1$$

puisque f est dérivable en 0.

**Théorème 21.18. Equivalences usuelles**

On dispose des équivalents suivants :

- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$,
- $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$,
- Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$,
- $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$,
- $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$,
- $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$,
- $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

Démonstration

Les six premiers découlent du lemme précédent. Pour la dernière, on utilise la trigonométrie :

$$\begin{aligned} \cos(x) - 1 &= \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \\ &= -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Puisque $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, par substitution, $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$. Par exponentiation,

$$\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \underset{0}{\sim} \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

et finalement

$$\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -2\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{2}.$$

En appliquant les résultats précédents, et la substitution, on en déduit les équivalents suivants sur les fonctions et les suites :

**Théorème 21.19.**

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 telle que $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$. Soit u une suite de limite 0. Alors :

- $\ln(1+f(x)) \underset{x_0}{\sim} f(x)$ et $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
- $e^{f(x)} - 1 \underset{x_0}{\sim} f(x)$ et $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+f(x))^\alpha - 1 \underset{x_0}{\sim} \alpha f(x)$ et $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.
- $\sin(f(x)) \underset{x_0}{\sim} f(x)$ et $\sin(u_n) \sim u_n$.
- $\tan(f(x)) \underset{x_0}{\sim} f(x)$ et $\tan(u_n) \sim u_n$.
- $\arctan(f(x)) \underset{x_0}{\sim} f(x)$ et $\arctan(u_n) \sim u_n$.
- $\cos(f(x)) - 1 \underset{x_0}{\sim} -\frac{(f(x))^2}{2}$ et $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$.

Enfin, on dispose de deux résultats, concernant $\ln$ et $n!$:

**Corollaire 21.20.**

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$. Soit u une suite de limite 1. Alors

$$\ln(f(x)) \underset{x_0}{\sim} f(x) - 1 \quad \text{et} \quad \ln(u_n) \sim u_n - 1.$$

Démonstration

En effet, $f(x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$. D'après ce qui précède :

$$\ln(f(x)) = \ln(1 + (f(x) - 1)) \underset{x_0}{\sim} f(x) - 1.$$

Proposition 21.21. Formule de Stirling

On a

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

4. Exemples**Exercice 21.5**

Déterminer un équivalent de $\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Solution

Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

mais on ne peut pas composer à gauche par $\sin$. On le traite donc dans l'autre sens.

On note $u_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$. Par composée, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par substitution, on a alors

$$\sin(u_n) \sim u_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right).$$

Enfin, on a vu que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Par transitivité

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{n}.$$

Exercice 21.6

Déterminer un équivalent en 0 de $\sin^4(\sqrt{x})$.

Solution

Puisque $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, par composée

$$\sin(\sqrt{x}) \underset{0}{\sim} \sqrt{x}.$$

Par exponentiation

$$\sin^4(\sqrt{x}) \underset{0}{\sim} (\sqrt{x})^4 = x^2.$$

Exercice 21.7

Déterminer un équivalent de $\cos^4(x) - 1$ en 0.

Solution

Le seul équivalent qu'on a repose sur $\cos(x) - 1$. On essaie de s'y ramener :

$$\begin{aligned}\cos^4(x) - 1 &= (1 + \underbrace{\cos(x) - 1}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0})^4 - 1 \\ &\underset{0}{\sim} 4(\cos(x) - 1) \text{ car } (1 + u)^4 - 1 \underset{0}{\sim} 4u \\ &\underset{0}{\sim} 4\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -2x^2.\end{aligned}$$

Exercice 21.8

Déterminer un équivalent simple de $\frac{x^x - 1}{x}$ en 0^+ .

Solution

Pour $x > 0$:

$$\frac{x^x - 1}{x} = \frac{e^{x \ln(x)} - 1}{x}$$

Par substitution, puisque $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$,

$$e^{x \ln(x)} - 1 \underset{0}{\sim} x \ln(x)$$

puis, par quotient

$$\frac{e^{x \ln(x)} - 1}{x} \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

Exercices

21

Exercices

Négligeabilités

●○○ Exercice 1 Ordre de négligeabilité – fonctions (10 min.)

Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en $+\infty$:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \exp(x), \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = 2, \quad f_5(x) = \ln(x), \quad f_6(x) = \sqrt{x} \ln x, \quad f_7(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$$

●○○ Exercice 2 Ordre de négligeabilité – suites (10 min.)

Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité.

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}, \quad c_n = \frac{\ln n}{n}, \quad d_n = \frac{e^n}{n^3}, \quad e_n = n, \quad f_n = 1, \quad g_n = \sqrt{ne^n}.$$

Equivalence

●○○ Exercice 3 Equivalences avec la définition – suite (10 min.)

Ces équivalences sont-elles vraies ?

- | | |
|--|---|
| 1. $n \underset{+\infty}{\sim} n+1$ | 4. $\exp(n) \underset{+\infty}{\sim} \exp(n+10^{-6})$ |
| 2. $n^2 \underset{+\infty}{\sim} n^2+n$ | 5. $\exp(n) \underset{+\infty}{\sim} \exp(2n)$ |
| 3. $\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(10^6 n)$ | 6. $\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n+1)$ |

●○○ Exercice 4 À la recherche des équivalents perdus (15 min.)

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ | 3. $w_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2}$ |
| 2. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ | 4. $z_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ |

●○○ Exercice 5 Le retour des équivalents perdus (15 min.)

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $x+1+\ln x$ en 0 et en $+\infty$ | 4. $\frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0 |
| 2. $\cos(\sin x)$ en 0 | 5. $\ln(\sin x)$ en 0 |
| 3. $e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$ | 6. $\ln(\cos x)$ en 0 |

●○○ Exercice 6 Des limites « simples » (10 min.)

1. Démontrer que

$$\ln(1+x) + x^2 \underset{0}{\sim} x \quad \text{et} \quad x^2 + x^3 \underset{0}{\sim} x^2.$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) + x^2}{x^2 + x^3}.$

2. Démontrer que $\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x$ et $\tan(3x) \underset{0}{\sim} 3x$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}.$

●●○ Exercice 7 Encore des limites, toujours des limites (20 min.)

Déterminer les limites suivantes en utilisant des équivalents :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + 2x)}{x^2 - x^4}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} x(3+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\tan(6x)}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left(\frac{1}{x^2} \right) - \exp \left(\frac{1}{(x+1)^2} \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arctan x}{x \tan x}$

●●○ Exercice 8 Je n'en peux plus des limites (de suites) (20 min.)

Déterminer les limites suivantes

1. $n! \sin \left(\frac{1}{n^n} \right)$

4. $n^2 \ln \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)$

7. $\frac{1 - \left(\frac{1}{n^3} \right)^{1/n}}{1 - \left(\frac{1}{n^2} \right)^{1/n}}$

2. $3^n \ln(1 - e^{-n}),$

5. $n^2 \left(\sqrt[n]{1+n} - \sqrt[n]{n} \right),$

3. $n \arctan \left(\sqrt{\sin \left(\frac{1}{n^2} \right)} \right),$

6. $\left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{n^2},$

●●○ Exercice 9 Too much. (20 min.)

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x},$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \ln(\tan(x)),$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} e^{-1/\sqrt{x}},$

7. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right),$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^2(x)}{\tan(x)(1 - \cos(x))},$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x+1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{3x+1}}{7x+4} \right),$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \left(\frac{5x^2}{7x^3 + 3x^2 + 1} \right),$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} \right),$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2) (e^{\cos(1/x)} - e),$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \right)^{x \ln(x)}.$

●○○ Exercice 10 Limites d'une somme (10 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ on a

$$0 \leq \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}.$$

Déterminer alors, un équivalent de $\sum_{k=0}^n k!$ en $+\infty$.

●●○ Exercice 11 Equivalent et limites (25 min.)

Déterminer un équivalent et la limite des suites suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $\pi n - 4 \ln(n),$ | 7. $\frac{1}{n} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$ |
| 2. $\sqrt{n^2 + 3n} - n,$ | 8. $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{3^k},$ |
| 3. $\frac{n^{100!} - 10n! + 100^n}{10n + \sin(n) + \sqrt{n} \ln(n) + n^{100} e^{-n}},$ | 9. $n - \sqrt[4]{n^4 \cos\left(\frac{1}{n}\right)},$ |
| 4. $\ln(\cos(\tan(3e^{-n}))),$ | 10. $\frac{\ln(n)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)}{n}.$ |
| 5. $\frac{4 - 3n^2}{\sqrt[3]{8n^5 - n^2 + 6}},$ | |
| 6. $\sin\left(\sqrt{\frac{2n^2 - 2n + 1}{3n^3 + 4n + 5}}\right),$ | |

●●○ Exercice 12 Equivalents, encore, toujours (25 min.)

Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes.

- | | |
|---|---|
| 1. $x \mapsto x \sqrt[5]{\ln(1+x)}$ en $0^+.$ | 6. $\ln(3-x) - \ln(\sqrt{5}-x)$ en $-\infty$ |
| 2. $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)$ en $+\infty.$ | 7. $x \mapsto 1 - 2x^4 + 9x^3 \cos(x) + 7x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$ |
| 3. $x \mapsto \arctan(\ln(x))$ en $1.$ | 8. $x \mapsto \sqrt{6+x} - 3$ en $3,$ |
| 4. $x \mapsto (x^4 - 3x^2 + 7)e^{1/x}$ en $+\infty$ | 9. $x \mapsto \frac{x^2 + \ln(x)}{5 + xe^{-x}}$ en 0^+ puis en $+\infty,$ |
| 5. $x \mapsto \sqrt[3]{x} - 1$ en 1 | 10. $x \mapsto \ln(2 \sin(x))$ en $\frac{\pi}{6}.$ |

Pour aller plus loin

●○○ Exercice 13 Equivalent avec Riemann (5 min.)

En utilisant les sommes de Riemann, déterminer un équivalent des sommes suivantes :

$$\bullet u_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha \text{ avec } \alpha > 0. \quad \bullet v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}. \quad \bullet w_n = \sum_{k=1}^n k \cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right).$$

●●○ Exercice 14 Avec Stirling (20 min.)

À l'aide de la formule de Stirling, démontrer les équivalents suivantes :

$$\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \quad \ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} n \ln(n), \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$$

●●● Exercice 15 Oral ESCP (20 min.)

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \leq x$.

Déterminer alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\ln(k)}{n^2}\right).$$

●●● Exercice 16 Mais ai-je le droit ? (20 min.)

Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \sqrt{ab}.$$

●●○ Exercice 17 Comparons sans Stirling ! (20 min.)

L'objectif de ce problème est de démontrer que, pour tout $a > 0$, on a

$$e^{an} = o(n!)$$

sans utiliser la formule de Stirling.

On fixe $a > 0$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{an}$ et $v_n = n!$.

1. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

2. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$u_n \leq C \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_n.$$

3. Conclure que $e^{an} = o(n!)$.

Exercices bilans

●●○ Exercice 18 Formule de Stirling (35 min.)

On pourra utiliser, dans cet exercice, un résultat prouvé dans l'exercice sur les intégrales de Wallis du chapitre 15 :

$$\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!}, \quad u_n = \ln(x_n) \quad \text{et} \quad v_n = \ln(x_n) + \frac{1}{12(n-1)}.$$

1. a) Vérifier par le calcul que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) dx = \frac{1}{6}$$

et que

$$\int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) \frac{1}{x^2} dx = -2 + (2n+1)(\ln(n+1) - \ln(n)).$$

- b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \leq \frac{1}{12n^2}.$$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}.$$

3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite.

4. En déduire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

5. Montrer enfin, en utilisant le résultat rappelé, que $C = \sqrt{2\pi}$.

Sujets de concours

●●○ Sujet 1 Ecricone 2015 voie S (50 min.)

1. On note pour tout $x \in I =]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.

Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.

c) En déduire les variations de u sur I .

d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.

Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$,

$$v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos(x))^2}.$$

e) En déduire les variations de v sur I .

f) Montrer que :

$$\forall x \in I, g(x) < x < f(x).$$

2. a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

b) Déduire de la question 1.f un encadrement de π .

3. On pose pour tout entier naturel n ,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

a) Justifier que pour tout réel θ ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$$

et en déduire que pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (*) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (**)$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.

d) Compléter la fonction PYTHON suivant afin qu'elle retourne, à l'aide des relations (*) et (**) et de la question 3.b, une approximation de π à ϵ près, ainsi que le nombre k d'itérations qui ont été nécessaires.

</> Code Python

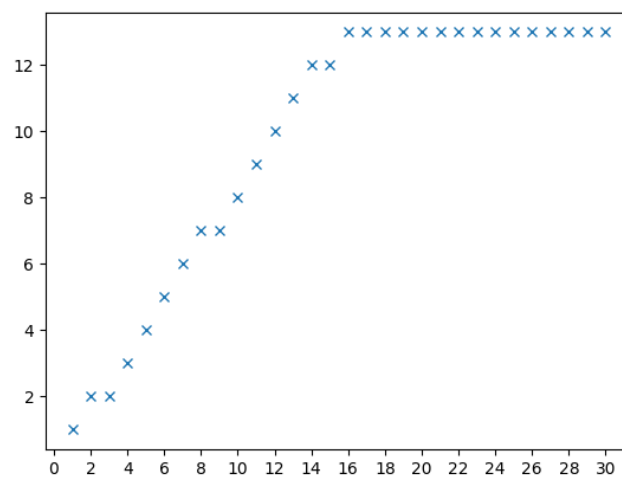
```

from numpy import sqrt

def h(e):
    k = 0
    a = sqrt(3) / 2
    b = 1 / 2
    while .....:
        a = .....
        b = .....
        k = .....
    x =
    return (x, k)

```

- e) On souhaite étudier l'évolution du nombre d'itérations nécessaires en fonction de la précision souhaitée. Écrire une fonction PYTHON qui prend comme paramètre d'entrée un entier p et qui retourne une liste de taille p qui contient les nombres d'itérations nécessaires pour les précisions 10^{-k} pour $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.
- f) On utilise la fonction précédente avec $p = 30$ et on représente graphiquement les valeurs obtenues. On obtient le graphe suivant :



Commenter ce graphe.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

On utilise les négligeabilités usuelles. On obtient :

$$\begin{array}{llll} f_3 = o(f_4) & f_4 = o(f_5) & f_5 = o(f_6) & f_6 = o(f_1) \\ f_1 = o(f_7) & f_7 = o(f_2). & & \end{array}$$

Exercice 2

En utilisant les négligéabilités usuelles :

$$\begin{array}{lll} b_n = o(a_n) & a_n = o(c_n) & c_n = o(f_n) \\ f_n = o(e_n) & e_n = o(d_n) & d_n = o(g_n) \end{array}$$

Exercice 3

On constate que les suites ne s'annulent pas au voisinage de $+\infty$. Il suffit donc de déterminer les limites du quotient, dans chacun des cas.

$$1. \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \text{ Ainsi } n \sim n+1.$$

$$2. \frac{n^2}{n^2+n} = \frac{1}{\frac{1}{n}+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \text{ Ainsi, } n^2 \sim n^2+1.$$

Remarquons que ces deux cas correspondent aux équivalences usuelles dans le cas d'un polynôme.

3. Par quotient

$$\frac{\ln(10^6 n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(10^6) + \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{10^6}{\ln(n)} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, $\ln(n) \sim \ln(10^6 n)$.

4. Par quotient toujours

$$\frac{\exp(n)}{\exp(n+10^{-6})} = e^{-10^{-6}} \neq 1.$$

Ainsi, $\exp(n) \not\sim \exp(n+10^{-6})$.

$$5. \text{ De même, } \frac{e^n}{e^{2n}} = e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \text{ Ainsi, } e^n \not\sim e^{2n}.$$

6. Enfin, par quotient toujours

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ains, $\ln(n) \sim \ln(n+1)$.

Exercice 4

On n'a pas le droit d'additionner ou soustraire des équivalents. Il faut donc modifier l'écriture pour conclure :

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{2}{n^2 - 1} \sim \frac{2}{n^2} \\
 v_n &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)} \\
 &\sim \frac{2}{\sqrt{n} \times 2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ car } \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \\
 w_n &= \frac{n^3 \left(1 - \sqrt{\frac{1+n^2}{n^6}} \right)}{n^2 \left(\frac{\ln n}{n^2} - 2 \right)} \\
 &= \frac{n^3 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^4}} \right)}{n^2 \left(\frac{\ln n}{n^2} - 2 \right)} \sim \frac{n^3}{-2n^2} = -\frac{n}{2} \\
 z_n &\sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ car } \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\
 &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ car } n \sim n+1 \text{ donc } \sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}
 \end{aligned}$$

Exercice 5

On factorise si besoin (par exemple, s'il y a des additions), et on utilise les équivalents usuels.

1.

$$\begin{aligned}
 x + 1 + \ln(x) &= x \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1} \sim x \\
 x + 1 + \ln(x) &= \ln(x) \underbrace{\left(\frac{x+1}{\ln(x)} + 1 \right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1} \sim \ln(x)
 \end{aligned}$$

2.

$$\cos(\sin(x)) \underset{0}{\sim} 1 \text{ car } \cos(\sin(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

3.

$$e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} \underbrace{(1 + e^{-2\sqrt{x}})}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1} \sim e^{\sqrt{x}}$$

4. Puisque $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, $\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$ par substitution, et $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$, on en déduit

$$\frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x} \underset{0}{\sim} \frac{x \times x^2}{x \times x} = x$$

5. On écrit $\ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x} \times x\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$. Puisque $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, on en déduit que

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

et finalement

$$\ln(\sin x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

6. Si $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ alors $\ln(u(x)) \underset{0}{\sim} u(x) - 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \ln(\cos x) &\underset{0}{\sim} \cos x - 1 \\ &\underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Exercice 6

1. On factorise :

$$\ln(1+x) + x^2 = x \underbrace{\left(\frac{\ln(1+x)}{x} + x\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1} \underset{0}{\sim} x$$

Enfin, d'après le cours, $x^2 + x^3 \underset{0}{\sim} x^2$. Par quotient :

$$\frac{\ln(1+x) + x^2}{x^2 + x^3} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) + x^2}{x^2 + x^3} = +\infty.}$$

2. Par substitution, puisque $2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $3x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a

$$\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x \quad \text{et} \quad \tan(3x) \underset{0}{\sim} 3x.$$

Par quotient

$$\frac{\sin(2x)}{\tan(3x)} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{3}.$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(3x)} = \frac{2}{3}.}$$

Exercice 7

On utilise les équivalents usuels et propriétés des équivalents pour déterminer la limite.

1. On a :

$$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}, \quad 1 + 2x \underset{0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad x^2 - x^4 \underset{0}{\sim} x^2.$$

Par quotient

$$\frac{(1 - \cos x)(1 + 2x)}{x^2 - x^4} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + 2x)}{x^2 - x^4} = \frac{1}{2}.$$

2. De même

$$3 + x \underset{0}{\sim} 3, \quad \sqrt{x+3} \underset{0}{\sim} \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \sin(\sqrt{x}) \underset{0}{\sim} \sqrt{x} \text{ car } \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi,

$$x(3+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})} \underset{0}{\sim} \frac{x3\sqrt{3}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = 3\sqrt{3}.$$

On peut donc conclure que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(3+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})} = 3\sqrt{3}.$$

3. Puisque $\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a

$$\ln(1 + \sin x) \underset{0}{\sim} \sin(x) \underset{0}{\sim} x.$$

De même, $\tan(6x) \underset{0}{\sim} 6x$. Par quotient,

$$\frac{\ln(1 + \sin x)}{\tan(6x)} \underset{0}{\sim} \frac{x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Ains,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\tan(6x)} = \frac{1}{6}.$$

4. On pose $u = \frac{\pi}{2} - x$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$. Alors

$$\frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \frac{\ln\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)}{u^2} = \frac{\ln(\cos^2 u)}{u^2}.$$

Puisque $\cos^2 u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$, on a

$$\ln(\cos^2 u) \underset{0}{\sim} \cos^2 u - 1 = (\cos u - 1)(\cos u + 1) \underset{0}{\sim} -\frac{u^2}{2} \times 2 = -u^2$$

et finalement

$$\frac{\ln(\cos^2 u)}{u^2} \underset{0}{\sim} \frac{-u^2}{u^2} = -1.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = -1.$$

5. Par substitution, puisque $\cos(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad 1 - \cos(2x) \underset{0}{\sim} \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2.$$

Par quotient,

$$\frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{2x^2} = -\frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x} = -\frac{1}{4}.$$

6. Puisque $\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on peut écrire

$$\ln\left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}.$$

Ainsi

$$\sqrt{4x+1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\sqrt{4x+1}\sqrt{x+1}}{x+2}.$$

Par exponentiation :

$$4x+1 \underset{+\infty}{\sim} 4x \text{ donc } \sqrt{4x+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{4x} \text{ et } x+1 \underset{+\infty}{\sim} x \text{ donc } \sqrt{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x}.$$

Finalement,

$$\sqrt{4x+1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\sqrt{4x}\sqrt{x}}{x} = -2.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \right) = -2.$$

7. Pas d'indétermination ! La limite vaut 0.

8. Lorsqu'on considère une fonction puissance avec une variable, on passe à l'exponentielle :

$$\left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = e^{\frac{\sin x}{x-\sin x} \ln \left(\frac{x}{\sin x} \right)}.$$

Puisque $\frac{x}{\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, on a

$$\ln \left(\frac{x}{\sin x} \right) \underset{0}{\sim} \frac{x}{\sin x} - 1 = \frac{x - \sin x}{\sin x}.$$

Par produit

$$\frac{\sin x}{x - \sin x} \ln \left(\frac{x}{\sin x} \right) \underset{0}{\sim} \frac{\sin x}{x - \sin x} \frac{x - \sin x}{\sin x} = 1.$$

Ainsi,

$$\frac{\sin x}{x - \sin x} \ln \left(\frac{x}{\sin x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

et par composée

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = e.$$

9. Sans difficulté, par produit

$$\frac{(1 - \cos x) \arctan x}{x \tan x} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2} x}{x \times x} = \frac{x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arctan x}{x \tan x} = 0.$$

Exercice 8

On utilise les équivalents et les limites usuelles pour conclure.

1. Puisque $\frac{1}{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$\sin \left(\frac{1}{n^n} \right) \sim \frac{1}{n^n}$$

puis, par produit et formule de Stirling :

$$n! \sin \left(\frac{1}{n^n} \right) \sim \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \frac{1}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

2. Puisque $e^{-n} \rightarrow 0$, on a

$$\ln(1 - e^{-n}) \sim -e^{-n}$$

puis par produit

$$3^n \ln(1 - e^{-n}) \sim -3^n e^{-n} = -\left(\frac{3}{e}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \text{ car } \frac{3}{e} > 1.$$

3. On pose $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque $\sqrt{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$n \arctan(\sqrt{u_n}) \sim n\sqrt{u_n}.$$

Puisque $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ puis, par exponentiation ($\alpha = \frac{1}{2}$), $\sqrt{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}$ et finalement

$$n \arctan\left(\sqrt{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) \underset{+\infty}{\sim} n \frac{1}{n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

4. Puisque $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on a l'équivalent

$$\ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} - 1 = \frac{-2}{n^2 + 1}.$$

Finalement,

$$n^2 \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right) \underset{+\infty}{\sim} n^2 \frac{-2}{n^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} -2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2.$$

5. Intuitivement, on met en facteur $\sqrt[n]{n}$:

$$\begin{aligned} n^2 \left(\sqrt[n]{1+n} - \sqrt[n]{n} \right) &= n^2 \sqrt[n]{n} \left(\left(\frac{1+n}{n} \right)^{1/n} - 1 \right) \\ &= n^2 \sqrt[n]{n} \left(e^{\frac{1}{n} \ln(1+\frac{1}{n})} - 1 \right) \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n} \ln(1+\frac{1}{n})} - 1 &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Finalement

$$n^2 \sqrt[n]{n} \left(\sqrt[n]{1+n} - \sqrt[n]{n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[n]{n} n^2 \frac{1}{n^2} = \sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n} \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

6. On écrit sous forme exponentielle :

$$\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}.$$

Puisque $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on en déduit l'équivalent

$$\begin{aligned} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) &\underset{+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

puis

$$n^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} n^2 \frac{-1}{2n^2} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}.$$

Par composée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

7. On utilise à nouveau la notation exponentielle, en constatant que $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissance comparée :

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)^{1/n} &= 1 - e^{\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n^3}\right)} \\ &= 1 - e^{-3 \frac{\ln n}{n}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} 3 \frac{\ln n}{n} \\ 1 - \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} &= 1 - e^{\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= 1 - e^{-2 \frac{\ln n}{n}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} 2 \frac{\ln n}{n} \end{aligned}$$

Par quotient

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)^{1/n}}{1 - \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3 \frac{\ln n}{n}}{2 \frac{\ln n}{n}} = \frac{3}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{3}{2}.$$

Exercice 9

On applique à chaque fois les équivalents usuels, ou on s'y ramène.

$$(1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}$$

Puisque $x \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x} \times x = 1 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$$

Par composée,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} &\underset{0}{\sim} \frac{2\sqrt{x}}{x} \\ \text{donc } \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} e^{-1/\sqrt{x}} &\underset{0}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}} e^{-1/\sqrt{x}} \end{aligned}$$

En posant $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{x}} e^{-1/\sqrt{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} 2u e^{-u} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0 \text{ par croissance comparée.}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} e^{-1/\sqrt{x}} = 0.}$$

Par équivalent (usuel et exponentiation) :

$$\frac{x \sin^2(x)}{\tan(x)(1 - \cos(x))} \underset{0}{\sim} \frac{x \times x^2}{x \times \frac{x^2}{2}} = 2$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^2(x)}{\tan(x)(1 - \cos(x))} = 2.}$$

Puisque

$$\frac{5x^2}{7x^3 + 3x^2 + 1} \underset{-\infty}{\sim} \frac{5x^2}{7x^3} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

on en déduit

$$\begin{aligned} x \sin \left(\frac{5x^2}{7x^3 + 3x^2 + 1} \right) &\underset{-\infty}{\sim} x \frac{5x^2}{7x^3 + 3x^2 + 1} \\ &\underset{-\infty}{\sim} \frac{5x^3}{7x^3} = \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \left(\frac{5x^2}{7x^3 + 3x^2 + 1} \right) = \frac{5}{7}.}$$

On factorise, pour le cinquième, par e puis on utilise les équivalents usuels, en constatant que $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\cos(1/x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

$$\begin{aligned} (1+x^2)(e^{\cos(1/x)} - e) &= (1+x^2)e(e^{\cos(1/x)-1} - 1) \\ &\underset{+\infty}{\sim} x^2 e(\cos(1/x) - 1) \\ &\underset{+\infty}{\sim} x^2 e \left(-\frac{1}{2x^2} \right) = -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)(e^{\cos(1/x)} - e) = -\frac{e}{2}.}$$

Pour la sixième, on réécrit pour faire apparaître des limites usuelles

$$\sin(x) \ln(\tan(x)) = \cos(x) \tan(x) \ln(\tan(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

par croissance comparée et composée (en posant $u = \tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$). Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \ln(\tan(x)) = 0.}$$

On pose $u = 1 - x$. Ainsi, $u \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0^+$. Alors :

$$\begin{aligned} \ln(1-x) \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) &= \ln(u) \cos \left(\frac{\pi(1-u)}{2} \right) \\ &= \ln(u) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi u}{2} \right) \\ &= \ln(u) \sin \left(\frac{\pi u}{2} \right) \\ &\underset{u \rightarrow 0}{\sim} \ln(u) \frac{\pi u}{2} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0 \text{ par croissance comparée.} \end{aligned}$$

Par composée,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) = 0.}$$

À nouveau, par équivalent usuel, et exponentiation :

$$\begin{aligned} \sqrt{5x+1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{3x+1}}{7x+4} \right) &\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{5x} \times \left(-\frac{\sqrt{3x+1}}{7x+4} \right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\sqrt{5x} \frac{\sqrt{3x}}{7x} = -\frac{\sqrt{15}}{7} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x+1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{3x+1}}{7x+4} \right) = -\frac{\sqrt{15}}{7}.}$$

On factorise, pour la neuvième, par $\sqrt[3]{x}$ qui semble être prépondérant :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}} - \sqrt[3]{x} &= \sqrt[3]{x} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}}{x}} - 1 \right) \\ &= \sqrt[3]{x} \left(\left(1 + \frac{\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}}{x} \right)^{1/3} - 1 \right)\end{aligned}$$

Par croissance comparée,

$$\frac{\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Par équivalent :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}} - \sqrt[3]{x} &\underset{+\infty}{\sim} \sqrt[3]{x} \frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}}{x} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{x^{2/3}}{3x} = \frac{1}{3x^{1/3}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}} - \sqrt[3]{x} = 0.}$$

Pour la dernière, on utilise l'écriture exponentielle :

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \right)^{x \ln x} = e^{x \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)}$$

Puisque $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, par équivalent :

$$\begin{aligned}x \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right) &\underset{+\infty}{\sim} x \ln(x) \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} - 1 \right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} x (\ln(1+x) - \ln(x)) \\ &\underset{+\infty}{\sim} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} x \frac{1}{x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.\end{aligned}$$

Par composée,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \right)^{x \ln x} = e.}$$

Exercice 10

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, on a

$$\frac{k!}{n!} = \frac{1}{n(n-1) \dots (n-k+1)}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $(n-2) \dots (n-k+1) \geq 1$ et donc $n(n-1) \dots (n-k+1) \geq n(n-1)$. Par application de la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}.$$

Mais alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k! &= n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{k!}{n!} \right) \\ &= n! \left(1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \right)\end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité précédente

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} &\leq \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} = 1$$

et finalement

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k! \underset{+\infty}{\sim} n!}$$

Exercice 11

On factorise autant que possible, et on utilise les équivalents usuels.

$$\begin{aligned}\pi n - 4 \ln(n) &= n \underbrace{\left(\pi - 4 \frac{\ln(n)}{n} \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi} \underset{+\infty}{\sim} \pi n \\ \sqrt{n^2 + 3} - n &= \frac{n^2 + 3 - n^2}{\sqrt{n^2 + 3} + n} = \frac{3}{n \underbrace{\left(\sqrt{\frac{3+n^2}{n^2}} + 1 \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2n} \\ \frac{n^{100!} - 10n! + 100^n}{10n + \sin(n) + \sqrt{n} \ln(n) + n^{100} e^{-n}} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{-10n!}{10n} = -\frac{1}{(n-1)!} \text{ en factorisant}\end{aligned}$$

Puisque $\cos(\tan(3e^{-n})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on a l'équivalent :

$$\begin{aligned}\ln(\cos(\tan(3e^{-n}))) &\underset{+\infty}{\sim} \cos(\tan(3e^{-n})) - 1 \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \tan^2(3e^{-n}) \text{ car } \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} (3e^{-n})^2 \text{ car } \tan(x) \underset{0}{\sim} x \text{ et par exponentiation} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{9}{2} e^{-2n}.\end{aligned}$$

En factorisant :

$$\frac{4 - 3n^2}{\sqrt[3]{8n^5 - n^2 + 7}} = \frac{n^2 \left(\frac{4}{n^2} - 3 \right)}{n^{5/3} \left(\sqrt[3]{\frac{8n^5 - n^2 + 7}{n^5}} \right)} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{3n^2}{2n^{5/3}} = -3n^{1/3}$$

Puisque $\sqrt{\frac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par composée, on a

$$\begin{aligned} \sin \left(\sqrt{\frac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}} \right) &\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n^2 \left(\frac{2n^2-2n+1}{n^2} \right)}{n^3 \left(\frac{3n^3+4n+5}{n^3} \right)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3n}} \end{aligned}$$

Ensuite, factorisons par $\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\frac{1}{n} + \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

On constate alors, par équivalence :

$$\sqrt{n} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi

$$\frac{1}{n} + \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Par somme d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{3^k} &= \frac{\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{2n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2 \times 3^{n-1}} \end{aligned}$$

De même, en factorisant par n^2 :

$$n - \sqrt{n^4 \cos \left(\frac{1}{n} \right)} = n^2 \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \sqrt{\cos \left(\frac{1}{n} \right)} \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1} \underset{+\infty}{\sim} -n^2$$

Enfin, en factorisant dans $\ln(n+1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)}{n} &= \frac{\ln(n)}{n+1} - \frac{\ln(n) + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n} \\ &= \frac{\ln(n)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n} \\ &= -\frac{\ln(n)}{n(n+1)} - \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n} \\ &= -\frac{\ln(n)}{n(n+1)} \left(1 + \frac{(n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\ln(n)} \right) \end{aligned}$$

Par équivalence :

$$\frac{(n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(n+1) \frac{1}{n}}{\ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(n)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2}.$$

Exercice 12

On utilise les équivalents usuels, la substitution et l'exponentiation.

1. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, donc

$$x \sqrt[5]{\ln(1+x)} \underset{0^+}{\sim} x x^{1/5} = x^{6/5}.$$

2. Puisque $\frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}$$

3. Puisque $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$,

$$\arctan(\ln(x)) \underset{1}{\sim} \ln(x).$$

4. En $+\infty$, $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $e^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Puisque $x^4 - 3x^2 + 7 \underset{+\infty}{\sim} x^4$, par produit

$$(x^4 - 3x^2 + 7) e^{1/x} \underset{+\infty}{\sim} x^4.$$

5. Puisque x tend vers 1, par équivalent usuel :

$$\sqrt[7]{x} - 1 = (1 + (x-1))^{1/7} - 1 \underset{1}{\sim} \frac{1}{7}(x-1)$$

6. On utilise les règles de $\ln$:

$$\ln(3-x) - \ln(\sqrt{5}-x) = \ln\left(\frac{3-x}{\sqrt{5}-x}\right).$$

Par équivalent usuel :

$$\frac{3-x}{\sqrt{5}-x} \underset{-\infty}{\sim} \frac{-x}{-x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1.$$

Par équivalent de $\ln$ en 1 :

$$\begin{aligned} \ln(3-x) - \ln(\sqrt{5}-x) &\underset{-\infty}{\sim} \frac{3-x}{\sqrt{5}-x} - 1 \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-x} \underset{-\infty}{\sim} \frac{\sqrt{5}-3}{x}. \end{aligned}$$

7. Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0. Ainsi

$$7x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 7x^5 \frac{1}{x} = 7x^4.$$

Mettons alors x^4 en facteur :

$$1 - 2x^4 + 9x^3 \cos(x) + 7x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^4 \left(\frac{1}{x^4} + 9 \frac{\cos(x)}{x} - 2 + 7x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

Remarquons que $\frac{1}{x^4} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. De même

$$\left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Enfin

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x \frac{1}{x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Par somme

$$\frac{1}{x^4} + 9 \frac{\cos(x)}{x} - 2 + 7x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -2 + 7 = 5$$

et finalement

$$1 - 2x^4 + 9x^3 \cos(x) + 7x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 5x^4.$$

8. On est en 3. Posons $x = 3 + h$, avec h qui tend vers 0. Alors

$$\begin{aligned} \sqrt{6+x} - 3 &= \sqrt{9+h} - 3 = 3 \left(\sqrt{1 + \frac{h}{9}} - 1 \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} 3 \left(\frac{1}{2} \frac{h}{9} \right) \\ &\underset{x \rightarrow 3}{\sim} \frac{x-3}{6}. \end{aligned}$$

9. En 0, $x^2 = o(\ln(x))$, donc

$$x^2 + \ln(x) \underset{0^+}{\sim} \ln(x).$$

Puisque $5 + xe^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 5$, on a finalement par quotient

$$\frac{x^2 + \ln(x)}{5 + xe^{-x}} \underset{0^+}{\sim} \frac{\ln(x)}{5}.$$

En $+\infty$, on a $\ln(x) = o(x^2)$, donc $x^2 + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2$. Par croissance comparée, $xe^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et finalement

$$\frac{x^2 + \ln(x)}{5 + xe^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{5}.$$

10. Remarquons que $\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}$ et donc $2 \sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} 1$. Ainsi, par équivalent de $\ln$ en 1 :

$$\begin{aligned} \ln(2 \sin(x)) &\underset{\frac{\pi}{6}}{\sim} 2 \sin(x) - 1 \\ &= 2 \left(\sin(x) - \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right). \end{aligned}$$

Rappelons que si $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$. Or

$$\sin'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0.$$

Ainsi,

$$\ln(2 \sin(x)) \underset{\frac{\pi}{6}}{\sim} 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \left(x - \frac{\pi}{6} \right).$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 13



Méthode

On va écrire les différentes sommes « comme une somme de Riemann », en faisant apparaître une fonction en $\frac{k}{n}$.

Pour la première suite :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^\alpha}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n k^\alpha = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \\ &= n^{\alpha+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \\ &= n^{\alpha+1} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha}_{=S_n} \end{aligned}$$

Remarquons que (S_n) désigne une somme de Riemann associée à la fonction $f : t \mapsto t^\alpha$, continue, sur $[0, 1]$. Ainsi

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Ainsi

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.}$$

De même,

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(n \left(1 + \frac{2k}{n}\right)\right)^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + 2\frac{k}{n}\right)^3} \\ &= \frac{1}{n^2} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + 2\frac{k}{n}\right)^3}}_{=T_n} \end{aligned}$$

(T_n) désigne une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+2x)^3}$, continue sur $[0, 1]$.

Ainsi

$$T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{(1+2x)^3} dx = \left[-\frac{1}{4(1+2x)^2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Ainsi,

$$\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^2}.}$$

Enfin

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=1}^n n \frac{k}{n} \cos \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \right) \\ &= n^2 \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cos \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \right)}_{=W_n} \end{aligned}$$

(W_n) désigne une somme de Riemann associée à la fonction $t \mapsto t \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right)$, continue sur $[0, 1]$.

Ainsi

$$W_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt = \left[\frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) \right]_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

Ainsi,

$$\boxed{w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} n^2.}$$

Exercice 14

On applique les équivalents usuelles, par produit, quotient. Tout d'abord, $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$. Par la formule de Stirling :

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi(2n)}}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^2} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n} \sqrt{4\pi n} (e^n)^2}{e^{2n} (n^n \sqrt{2\pi n})^2} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{4^n \cancel{n^{2n}} 2 \sqrt{\pi n} \cancel{e^{2n}}}{\cancel{e^{2n}} \cancel{n^{2n}} 2\pi n} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

Pour le deuxième, on utilise un résultat du cours : si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ alors $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. La démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} &= \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) + \ln(v_n)}{\ln(v_n)} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} + 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \ln(n!) &\underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} n \ln(n) - n \ln(e) + \ln(\sqrt{2\pi n}) \\ &\underset{+\infty}{\sim} n \ln(n) \underbrace{\left(1 - \frac{\ln(e)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\sqrt{2\pi n})}{n \ln(n)}\right)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1} \underset{+\infty}{\sim} n \ln(n) \end{aligned}$$

Pour la dernière, on va réécrire la formule de Stirling. Notons $x_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. La définition de l'équivalence donne :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} x_n \iff n! = x_n + o(x_n) \iff n! = x_n(1 + o(1))$$

Utilisons cette écriture :

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \ln(x_n(1 + o(1))) \\ &= \ln(x_n) + \ln(1 + o(1)) = \ln(x_n) + o(1) \text{ puisque } \ln(1 + u) = u + o(u) \text{ en } 0. \\ &= n \ln(n) - n + \ln(\sqrt{2\pi n}) + o(1) \end{aligned}$$

Mais alors :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n!} &= e^{\frac{1}{n} \ln(n!)} \\ &= e^{\frac{1}{n} (n \ln(n) - n + \ln(\sqrt{2\pi n}) + o(1))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\ln(n)-1+\frac{1}{2}\frac{\ln(2\pi n)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&= \frac{n}{e} e^{\frac{1}{2}\frac{\ln(2\pi n)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\frac{1}{2}\ln(2\pi n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par croissances comparées}$$

donc

$$e^{\frac{1}{2}\frac{\ln(2\pi n)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Finalement

$$\sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{e}.$$

Exercice 15

On fixe n et on note $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\ln(k)}{n^2}\right)$. Tous les termes étant strictement positifs, on peut s'intéresser à $v_n = \ln(u_n)$. Mais alors :

$$\begin{aligned}
v_n &= \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\ln(k)}{n^2}\right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\ln(k)}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat $0 \leq \ln(1+x) \leq x$ valable pour tout $x \geq 0$ (ce qui est le cas ici) on a alors

$$\begin{aligned}
0 \leq v_n &\leq \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{n^2} \\
&\leq \frac{\ln(n!)}{n^2}
\end{aligned}$$

Puisque $n! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et en utilisant Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \implies \ln(n!) \sim \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)$$

(on utilise le résultat vu en cours : si $u_n \sim v_n$ et u_n ne tend pas vers 1, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$).

Or

$$\begin{aligned}
\ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right) &= n \ln\left(\frac{n}{e}\right) + \ln(\sqrt{2\pi n}) \\
&= n \ln(n) - n \ln(e) + \ln(\sqrt{2\pi n}) \sim n \ln(n)
\end{aligned}$$

car, en divisant

$$\frac{n \ln(n) - n \ln(e) + \ln(\sqrt{2\pi n})}{n \ln(n)} = 1 - \frac{\ln(e)}{\ln(n)} + \frac{\frac{1}{2}\ln(2\pi n)}{n \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Finalement, par quotient

$$\frac{\ln(n!)}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n \ln(n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et puisque $v_n = \ln(u_n)$, on conclut :

$$\boxed{u_n = e^{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}.$$

Exercice 16

Fixons a et b deux réels strictement positifs, et $n \in \mathbb{N}^*$. Constatons que $\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n > 0$. On peut alors s'intéresser à

$$u_n = \ln \left(\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \left(\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \right) \\ &= \ln \left(\exp \left(n \ln \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right) \right) \right) \\ &= n \ln \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right) \\ &= n \ln \left(\frac{e^{\frac{1}{n} \ln(a)} + e^{\frac{1}{n} \ln(b)}}{2} \right) \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{n} \ln(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{n} \ln(b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on peut faire un développement asymptotique :

$$e^{\frac{1}{n} \ln(a)} = 1 + \frac{1}{n} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad e^{\frac{1}{n} \ln(b)} = 1 + \frac{1}{n} \ln(b) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &= n \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{n} \ln(a) + 1 + \frac{1}{n} \ln(b) + o\left(\frac{1}{n}\right)}{2} \right) \\ &= n \ln \left(1 + \frac{1}{2n} (\ln(a) + \ln(b)) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= n \left(\frac{1}{2n} (\ln(a) + \ln(b)) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \text{ en utilisant le DL de } \ln(1+u) \\ &= \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}. \end{aligned}$$

Par continuité de la fonction exponentielle :

$$e^{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}} = e^{\frac{1}{2} \ln(ab)} = \sqrt{ab}.$$

Bilan :

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{ab}.}$$

Exercice 17

1. Remarquons que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{a(n+1)}}{e^{an}} = e^a \quad \text{et} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

Puisque $\frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, il existe un rang n_0 à partir duquel $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 2e^a$ et finalement

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

2. Remarquons que le résultat précédent s'écrit, puisque les suites sont à termes strictement positifs :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \frac{u_n}{v_n}.$$

Montrons alors par récurrence que $P_n : \left\langle \frac{u_n}{v_n} \leq C \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \right\rangle$ pour $n \geq n_0$.

- Pour $n = n_0$, on constate que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} = 1$. Ainsi, en prenant $C = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$, on a bien $\frac{u_n}{v_n} \leq C \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$ pour $n = n_0$.
- Supposons la proposition P_n vérifiée pour un certain $n \geq n_0$. En utilisant la relation précédente :

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{1}{2} C \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \text{ par H.R.}$$

Ainsi,

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq C \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0}$$

et P_{n+1} est vérifiée.

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, P_n est vérifiée, et en multipliant par $v_n > 0$

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq C \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_n.}$$

3. On peut alors conclure : pour tout $n \geq n_0$

$$0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq C \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

Or, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$. Par encadrement, on peut conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{e^{an} = o(n!).}$$

Corrigés des exercices bilans

Exercice 18

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule en développant :

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x)dx &= \int_n^{n+1} ((n+1)x - x^2 - n(n+1) + nx)dx \\ &= \int_n^{n+1} (2n+1)x - x^2 - n(n+1)dx \\ &= \left[(2n+1)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - n(n+1)x \right]_n^{n+1} \\ &= (2n+1)\frac{(n+1)^2 - n^2}{2} - \frac{(n+1)^3 - n^3}{3} - n(n+1)(n+1-n) \\ &= \frac{12n^2 + 12n + 3 - (6n^2 + 6n + 2) - 6n^2 - 6n}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
 \int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) \frac{1}{x^2} dx &= \int_n^{n+1} \frac{2n+1}{x} - 1 - \frac{n(n+1)}{x^2} dx \\
 &= (2n+1) \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} - \int_n^{n+1} dx - n(n+1) \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2} \text{ par linéarité} \\
 &= (2n+1) [\ln(|x|)]_n^{n+1} - [1]_n^{n+1} - n(n+1) \left[-\frac{1}{x} \right]_n^{n+1} \\
 &= (2n+1)(\ln(n+1) - \ln(n)) - (n+1-n) - n(n+1) \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) \\
 &= (2n+1)(\ln(n+1) - \ln(n) - 1 - n(n+1) \frac{1}{n(n+1)}) \\
 &= -2 + (2n+1)(\ln(n+1) - \ln(n)).
 \end{aligned}$$

b) Remarquons qu'en ré-écrivant la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned}
 -2 + (2n+1)(\ln(n+1) - \ln(n)) &= -2 + (2n+1) \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \\
 &= -2 + (2n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\
 &= 2 \left(-1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Encadrons donc l'intégrale en question. Tout d'abord, pour tout $x \in [n, n+1]$, on a

$$x - n \geq 0 \quad \text{et} \quad (n+1) - x \geq 0 \implies (x-n)(n+1-x) \geq 0.$$

Par positivité de l'intégrale, on peut en déduire que

$$\int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) \frac{1}{x^2} dx \geq 0.$$

De même, pour $x \in [n, n+1]$, on a, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ et décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$n \leq x \leq n+1 \implies n^2 \leq x^2 \implies \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [n, n+1]$:

$$(x-n)(n+1-x) \frac{1}{x^2} \leq (x-n)(n+1-x) \frac{1}{n^2}.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 \int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) \frac{1}{x^2} dx &\leq \int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) \frac{1}{n^2} dx \\
 &= \frac{1}{n^2} \int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) dx = \frac{1}{6n^2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$0 \leq \int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{1}{6n^2}$$

soit, d'après le calcul vu précédemment :

$$0 \leq 2 \left(-1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \leq \frac{1}{6n^2}.$$

En divisant par 2 :

$$\boxed{0 \leq -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{12n^2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule « simplement » :

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!} \frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1)^n \cancel{(n+1)} n! \sqrt{n+1}}{n^n \cancel{(n+1)}! \sqrt{n}} e^{n-(n+1)} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} e^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} e^{-1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}. \end{aligned}$$

3. Montrons que les suites u et v sont adjacentes. Tout d'abord, elles sont bien définies car $x_n > 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(x_{n+1}) - \ln(x_n) = \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}\right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln(n)). \end{aligned}$$

Cette quantité, d'après la question 1.b., est positive. Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{12n} - u_n - \frac{1}{12(n-1)} \\ &= u_{n+1} - u_n - \frac{1}{12n(n-1)} \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln(n)) - \frac{1}{12n(n-1)}. \end{aligned}$$

Toujours d'après la question 1.b. :

$$-1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln(n)) - \frac{1}{12n(n-1)} \leq \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n(n-1)} < 0.$$

Ainsi, la suite (v_n) est décroissante.

Enfin,

$$v_n - u_n = \frac{1}{12(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Par théorème, elles convergent et vers la même limite.

4. Notons A la limite commune de u et v . Mais alors, par continuité de $\exp$ sur $\mathbb{R}$:

$$x_n = e^{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^A > 0.$$

En notant $C = e^A$, on en déduit que

$$x_n \underset{+\infty}{\sim} C \implies n! \underset{+\infty}{\sim} C \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n} = C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

5. On utilise l'équivalent démontré à l'instant et celui rappelé dans l'énoncé. On a, par substitution :

$$(2n)! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}.$$

et par exponentiation :

$$(n!)^2 \underset{+\infty}{\sim} C^2 n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}.$$

et donc, par produit :

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{C\sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{4^n C^2 n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{C\sqrt{2n} 2^{2n} n^{2n} e^{2n}}{4^n C^2 n n^{2n} e^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

donc, par transitivité

$$\frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{n}} \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \implies C \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$$

et donc, par limite : $C = \sqrt{2\pi}$. On a donc bien démontré que

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Corrigés des sujets de concours

Sujet 1

1. a) 1 est racine de P . Par division euclidienne, $P = (X - 1)(2X^2 - X - 1)$. Le trinôme $2X^2 - X - 1$ admet deux racines : 1 et $-\frac{1}{2}$. Finalement, par factorisation

$$2X^3 - 3X^2 + 1 = 2(X - 1)^2 \left(X + \frac{1}{2}\right) = (X - 1)^2(2X + 1).$$

b) f est dérivable sur I , comme somme de deux fonctions trigonométriques dérivable sur I . La fonction $x \mapsto -x$ étant dérivable, car polynomiale, la somme u est bien dérivable sur I .

Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{3} \left(2\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} \right) - 1 \\ &= \frac{1}{3} \frac{2\cos^3(x) + 1 - 3\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

c) D'après la factorisation vue en 1.a., remarquons que $P(x)$ est du signe de $X + \frac{1}{2}$. Or, pour tout $x \in I$, $\cos(x) \in [0, 1]$. Donc pour tout $x \in I$, $\cos(x) + \frac{1}{2} > 0$: ainsi $u'(x) \geq 0$ et ne s'annule qu'en 0 : la fonction u est strictement croissante sur I .

d) Procédons de la même manière. g est dérivable sur I comme somme et quotient de fonctions trigonométriques et constantes, dérivables sur I , dont le dénominateur ne s'annule pas (puisque

$\cos(x) \geq -1$, $2 + \cos(x) \geq 1 > 0$). Par somme, v est également dérivable et on a, pour tout réel $x \in I$:

$$\begin{aligned} v'(x) &= 1 - \frac{3\cos(x)(2 + \cos(x)) - 3\sin(x)(-\sin(x))}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{(2 + \cos(x))^2 - 6\cos(x) - 3\cos^2(x) - 3\sin^2(x)}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{4 + 4\cos(x) + \cos^2(x) - 6\cos(x) - 3\cos^2(x) - 3(1 - \cos^2(x))}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos^2(x) - 2\cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2} = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos(x))^2} \end{aligned}$$

en notant $P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

e) Remarquons que P est toujours strictement positif, sauf en 1, donc v' est strictement positive, sauf en 0 : v est strictement croissante sur I .

f) Utilisons ce qu'on a démontré précédemment. u est strictement croissante sur I , donc

$$\forall x \in I, \quad u(x) > \lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 0 \iff f(x) - x > 0.$$

De même, v est strictement croissante donc

$$\forall x \in I, \quad v(x) > \lim_{t \rightarrow 0} v(t) = 0 \iff x - g(x) > 0.$$

En réunissant ces deux résultats :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad g(x) < x < f(x).}$$

2. a) On utilise simplement l'énoncé et les formules d'addition :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}. \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{8 - 2\sqrt{12}}{4} = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

b) Appliquons l'inégalité 1.f. en $x = \frac{\pi}{12} \in I$.

$$\frac{3 \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{2 + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} < \frac{\pi}{12} < \frac{1}{3} \left(2 \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + 2 - \sqrt{3} \right)$$

soit

$$\boxed{36 \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8 + \sqrt{6} + \sqrt{2}} < \pi < 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{3}.}$$

Une remarque : cela donne l'encadrement

$$3,1415099936 < \pi < 3,1423491305$$

3. a) On part de la formule d'addition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos(\theta + \theta) = \cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = (1 - \sin^2(\theta)) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta).\end{aligned}$$

Remarquons alors que

$$\frac{\pi}{3 \times 2^n} = 2 \times \frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}b_n &= \cos\left(2 \times \frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right) \\ &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right) = 1 - 2a_{n+1}^2.\end{aligned}$$

Ainsi, $a_{n+1}^2 = \frac{1-b_n}{2}$ et puisque pour tout n , $0 < \frac{\pi}{3 \times 2^n} \leq \frac{\pi}{2}$, $a_{n+1} > 0$. Ainsi

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}}.$$

Par l'identité fondamentale de la trigonométrie :

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = 1 \implies b_{n+1}^2 = 1 - a_{n+1}^2 = 1 - \frac{1-b_n}{2} = \frac{1+b_n}{2}.$$

Or, puisque $0 < \frac{\pi}{3 \times 2^n} \leq \frac{\pi}{2}$, $b_{n+1} \geq 0$ et donc

$$b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique l'inégalité vue en 1.f, pour le réel $x = \frac{\pi}{3 \times 2^n} \in I$:

$$g\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) < \frac{\pi}{3 \times 2^n} < f\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

On calcule :

$$\begin{aligned}g\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) &= \frac{3 \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)} = \frac{3a_n}{2 + b_n} \\ f\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) &= \frac{1}{3} \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{3a_n}{2 + b_n} < \frac{\pi}{3 \times 2^n} < \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)$$

ou encore, en multipliant par 3×2^n :

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

c) Puisque $\frac{\pi}{3 \times 2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{3 \times 2^n} \quad \text{et} \quad b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par somme, $2 + b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$. Par équivalent :

$$2^n a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{3}.$$

Par produit de limites :

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 9 \times \frac{\pi}{3 \times 3} = \pi.$$

De même

$$2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right) = 2 \times 2^n a_n + \frac{2^n a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi.$$

d) On applique la relation précédente, et on calcule dans que la différence entre les bornes est supérieure à ϵ .

Code Python

```
from numpy import sqrt

def h(e):
    k = 0
    a = sqrt(3) / 2
    b = 1 / 2
    while ((2**k)*(2*a+a/b) - 9*(2**k)*a/(2+b))>e:
        a = sqrt((1-b)/2)
        b = sqrt((1+b)/2)
        k = k+1
    x = (2**k) * (2*a+a/b)
    return (x, k)
```

e) On applique simplement la fonction précédente :

Code Python

```
def evolution(p):
    res = [] # On initialise une liste vide
    for i in range(1,p+1):
        res.append(h(10**(-i))[1]) # Juste le nb d'itération
    return res
```

Avec les tableaux numpy :

Code Python

```
import numpy as np
def evolution(p):
    res = np.zeros(p) # On initialise tous les coeffs à 0
    for i in range(1,p+1):
        res[i-1] = h(10**(-i))[1] # Attention au décalage
    return res
```

f) On constate lorsqu'on a obtenu une précision de 10^{-16} , ce qui se fait en seulement 13 itérations, en réalité on a obtenu une bien meilleure précision.