Chapitre 20

Applications linéaires

Résumé

Ce chapitre est très important et tombe régulièrement au concours. Il est abstrait, mais pas difficile. Il sera approfondi l'année prochaine.
Il doit être maitrisé dans son ensemble.

Plan du cours

> *« Durant des années le temps paraît linéaire, malgré les écueils, les soubresauts, les détours. Jusqu'au jour où une chute plus profonde fait voler en éclats les moindres repères. »*

Laurence Tardieu (1972 –). *Le Jugement de Léa*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir montrer qu'une application est linéaire . . . . □

② Savoir déterminer le noyau d'une application linéaire . . . . □

③ Savoir déterminer l'image d'une application linéaire . . . . □

④ Savoir démontrer qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective . . . . □

⑤ Connaître la définition et les propriétés d'un projecteur . . . . □

I. Applications linéaires

1. Définition

Définition 20.1.

Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $f : E \to F$ telle que

- $\forall \ (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall \ x \in E, \forall \ \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Exemple 20.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f : (x, y) \longmapsto (x - y, x + y).$$

Alors f est une application linéaire.

Solution

Soient $a = (x, y)$ et $b = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(x + x', y + y') \\ &= ((x + x') - (y + y'), (x + x') + (y + y')) \\ &= (x - y + x' - y', x + y + x' + y') \\ &= (x - y, x + y) + (x' - y', x' + y') = f(a) + f(b) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(\lambda a) &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= (\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda y) \\ &= \lambda(x - y, x + y) = \lambda f(a). \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire.

Notation

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 20.2.

- Si $F = E$, et si $f : E \to E$ est une application linéaire, on dit que f est un **endomorphisme**.
- Si $F = \mathbb{R}$, et si $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, on dit que f est une **forme linéaire**. L'ensemble des formes linéaires sur E est appelé le **dual** de E, et est noté $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

2. Propriétés

Propriété 20.1.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $f(0_E) = 0_F$.

Démonstration

Si f est linéaire, alors pour tous x et y dans E, $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Prenons $x = y = 0_E$. Alors $f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$ et donc $f(0_E) = 0_F$.

Proposition 20.2.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application.
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est linéaire de E dans F.
2. Pour tous $n \in \setminus\{0,1\}$, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$
3. Pour tous $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Démonstration

Nous allons montrer que $1 \implies 2 \implies 3 \implies 1$ ce qui garantira l'équivalence.

- L'implication $1 \Rightarrow 2$ se montre par récurrence sans difficultés.
- Supposons que le point 2 est vrai. En prenant $n = 2, x_1 = x, x_2 = y, \lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = 1$, on obtient le point 3. Ainsi $2 \Rightarrow 3$.
- Supposons que le point 3 est vrai. On montre les deux propriétés en deux temps :
  - Si $(x, y) \in E^2$, on applique la propriété 3 en prenant $\lambda = 1$; on obtient $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
  - Si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, en appliquant l'hypothèse avec $y = 0_E$, on obtient $f(\lambda) = \lambda f(x)$.

  Et donc f est linéaire. Ainsi $3 \Rightarrow 1$.

Méthode

Pour montrer qu'une application f est une application linéaire, on prendra x et y dans E, $\lambda \in \mathbb{R}$, et on montre que $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Exercice 20.2

Soit $f : \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par
$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$
Montrer que f est une application linéaire.

Solution

En effet, si $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$f(\lambda A + B) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + b_1 \\ \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a_2 + b_2 \\ 0 \\ \lambda a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda f(A) + f(B) = \lambda \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_2 + b_2 \\ 0 \\ \lambda a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

Donc $f(\lambda A + B) = \lambda f(A) + f(B)$: f est une application linéaire.

☞ *Exercice 1.*

3. Exemples classiques

On dispose d'applications linéaires classiques :

- L'application $\mathrm{id}_E : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ est un endomorphisme appelé **identité de** E.
- L'application $0_{E,F} : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$ est une application linéaire, appelée **application nulle** de E dans F.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $f_\alpha : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \alpha x \end{array} \right.$ est un endomorphisme, appelée **homothétie sur E de rapport α**.
- L'application transposée, définie par $A \longmapsto A^\top = {}^tA$, vue dans le chapitre 17, est une application linéaire de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, et est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20.3

Démontrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{array} \right.$ est un endomorphisme, et $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a,\, b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0([a,\, b])$.

Solution

Remarquons tout d'abord que, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors P' est de degré $n-1$ au maximum, et donc XP' est de degré n au maximum : $XP' \in \mathbb{R}_n[X]$. De même, si $f \in \mathcal{C}^0([a,\, b])$, $\Phi(f) \in \mathbb{R}$.

Montrons que les deux applications sont linéaires. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= X\left(\lambda P + Q\right)' \\ &= X\left(\lambda P' + Q'\right) \text{ par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda XP' + XQ' = \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}^0([a,\, b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda f + g) &= \int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \lambda f(t) + g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda\Phi(f) + \Phi(g). \end{aligned}$$

Φ est donc linéaire de $\mathcal{C}^0([a,\, b])$ dans $\mathbb{R}$: c'est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0([a,\, b])$.

II. Operations sur les applications linéaires

1. Linéarité

Proposition 20.3.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et f et g deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E,F)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors $\lambda f + g$ est également une application linéaire.

Démonstration

Soient x et y deux éléments de E, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}(\lambda f+g)(\alpha x+y) &= \lambda f(\alpha x+y)+g(\alpha x+y)\\ &= \lambda\left(\alpha f(x)+f(y)\right)+\alpha g(x)+g(y) \qquad \text{car } f \text{ et } g \text{ sont linéaires}\\ &= \alpha\left(\lambda f(x)+g(x)\right)+\lambda f(y)+g(y)\\ &= \alpha(\lambda f+g)(x)+(\lambda f+g)(y).\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda f + g$ est linéaire.

Conséquence 20.4.

Si E et F sont deux espaces vectoriels, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$. Il en est de même pour $\mathcal{L}(E)$ et E^*.

Démonstration

La stabilité par somme et multiplication par un réel a été faite à la proposition précédente. Enfin, la fonction nulle est une application linéaire, donc $\mathcal{L}(E,F)$ est non vide.

2. Restriction d'une application linéaire

Définition 20.3.

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient G un sous-espace vectoriel de E, et H un sous-espace vectoriel de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $f(G) \subset H$.
On appelle **restriction de** f aux sous-espaces vectoriels G et H l'application

$$f|_G^H : \left|\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & f(x)\end{array}\right. .$$

Il s'agit d'une application linéaire de G dans H.

Considérer la restriction de f à G revient à ne regarder que les images des vecteurs de G par f. Le fait que $f(G) \subset H$ permet de restreindre l'intervalle d'arrivée à H au lieu de F.

Démonstration

L'application $f|_G^H$ est bien définie puisque, pour tout $x \in G$, $f|_G^H(x) = f(x) \in H$ par hypothèse. Si $(x,y,\lambda) \in G^2 \times \mathbb{K}$, alors $\lambda x + y \in G$ (puisque G est un s.e.v de E). Comme f est linéaire, on a

$$f|_G^H(\lambda x+y) = f(\lambda x+y) = \lambda f(x)+f(y) = \lambda f|_G^H(x)+f|_G^H(y).$$

Ainsi $f|_G^H$ est linéaire de G dans H.

3. Composition

Proposition 20.5.

Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

Démonstration

Soient $x,y \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant respectivement la linéarité de f puis de g :

$$g \circ f(\lambda x + y) = g(f(\lambda x + y)) = g(\lambda f(x) + f(y)) = \lambda g(f(x)) + g(f(y)) = \lambda g \circ f(x) + g \circ f(y)$$

Rappelons les propriétés de la composition :

Propriété 20.6.

Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Soient $(f, f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E,F)^3$ et $(g, g_1, g_2) \in \mathcal{L}(F,G)^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

- $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$,
- $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$,
- la composition n'est pas commutative : en général, $g \circ f \neq f \circ g$ (qui n'a parfois pas de sens),
- la composition est associative : si $h \in \mathcal{L}(H,I)$ (avec I un espace vectoriel, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, noté en général $h \circ g \circ f$. Cette application est également linéaire.

Une dernière propriété utile quand les applications sont linéaires :

Proposition 20.7.

Soient $(f) \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(g) \in \mathcal{L}(F,G)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda g \circ f = (\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f) = g \circ (f \circ (\lambda \mathrm{id}_E)) = (g \circ f) \circ (\lambda \mathrm{id}_E)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in E, \quad \lambda g(f(x)) = (\lambda g)(f(x)) = g(\lambda f(x)) = g(f(\lambda x)).$$

4. Polynôme d'endomorphisme

a. Puissances d'un endomorphisme

Définissons la notion de puissance d'endomorphisme :

Définition 20.4.

Soit E un espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dispose $f^0 = \mathrm{id}_E$, $f^1 = f$ et, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,

$$f^p = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

Attention

Il ne faut pas confondre $f^p(x) = (f \circ \ldots \circ f)(x)$, et $(f(x))^p = (f(x)) \times (f(x)) \times \ldots \times f(x)$, qui n'a pas de sens en général dans un espace vectoriel.

La puissance d'un endomorphisme vérifie les propriétés usuelles :

Propriété 20.8.

Soient E un endomorphisme, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Alors

$$f^p \circ f^q = f^{p+q} = f^q \circ f^p.$$

Si $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f (c'est-à-dire $f \circ g = g \circ f$), alors $(g \circ f)^n = g^n \circ f^n$.

Attention

La dernière propriété n'est valable que si f et g commutent.

On dispose enfin de la formule du binôme de Newton :

Proposition 20.9. Formule du binôme de Newton

Soient E un espace vectoriel, et $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ **tels que** f **et** g **commutent**. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g^k.$$

Démonstration

La preuve a déjà été faite dans le cas des matrices, le raisonnement est le même ici.

Savoir Faire

Exercice 20.4

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+z, y+z, z)$. On note $g = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Montrer que $g^2 = 0_{\mathbb{R}^3}$, puis déterminer f^n pour tout entier n.

Solution

Il faut tout d'abord montrer que f est un endomorphisme. On démontre rapidement que f est linéaire : soient $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda u + v) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\
&= (\lambda x + x' + \lambda z + z', \lambda y + y' + \lambda z + z', \lambda z + z') \\
&= (\lambda(x+z) + (x'+z'), \lambda(y+z) + (y'+z'), \lambda z + z') \\
&= \lambda(x+z, y+z, z) + (x'+z', y'+z', z') = \lambda f(u) + f(v)
\end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$: c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$g(x,y,z) = f(x,y,z) - (x,y,z) = (z,z,0).$$

Remarquons alors que

$$g^2(x,y,z) = g(z,z,0) = (0,0,0).$$

Ainsi, pour tout $k \geqslant 2$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $g^k(x,y,z) = (0,0,0)$.
Appliquons alors la formule du binôme de Newton. On constate que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} + g$ et g et

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ commutent (car $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ commute avec tout endomorphisme). Pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} f^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^k \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} g^0 + \binom{n}{1} g^1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} g^k}_{=0_{\mathbb{R}^3}} \\ &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} + ng \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f^n(x,y,z) = (x,y,z) + n(z,z,0) = (x+nz, y+nz, z).$$

On remarquera que ce résultat est valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

b. Polynômes d'endomorphisme

On peut désormais définir la notion de polynômes d'endomorphisme :

Définition 20.5.

Soit E un espace vectoriel. On appelle **polynôme d'endomorphisme** tout endomorphisme de E s'écrivant sous la forme $P(f)$, où P est un polynôme, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, alors

$$P(f) = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 f + \dots + a_n f^n = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

On dit alors que $P(f)$ est un polynôme en f.

Exemple 20.5

Si $P = X^2 - 1$, alors $P(f) = f^2 - \mathrm{id}_E$.

Les polynômes d'endomorphisme vérifient les mêmes propriétés que les polynômes de matrices :

Proposition 20.10.

Soit E un espace vectoriel. Soient P et Q deux polynômes, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$(\alpha P + Q)(f) = \alpha P(f) + Q(f) \quad \text{et} \quad (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f).$$

Si f et g sont deux endomorphismes de E qui **commutent**, alors tout polynôme en f commute avec tout polynôme en g.

Démonstration

Il suffit de calculer. La démonstration est laissée en exercice.

c. Polynôme annulateur

On dispose de la même définition que pour les matrices :

Définition 20.6.

Soient E un espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de f si $P(f)$ est l'endomorphisme nul 0_E.

Exemple 20.6
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x,-y)$. On remarque que
$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f^2(x,y) = (x,y).$$
Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(f^2 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})(x,y) = (0,0)$: le polynôme $X^2 - 1$ est donc annulateur de f.

Connaissant un polynôme annulateur, on peut en déduire l'expression de f^n pour tout entier n, en utilisant la division euclidienne, comme nous l'avions fait sur les matrices.

5. Projecteur

On va régulièrement rencontrer un certain type d'endomorphisme, très important : les projecteurs.

Définition 20.7.
Soient E un espace vectoriel, et $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un **projecteur** si et seulement si $p \circ p = p$.

Méthode
Pour montrer qu'une application p est un projecteur, on démontre
- que p est un endomorphisme,
- puis que $p \circ p = p$.

Exemple 20.7
Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x,0)$ est un projecteur sur $\mathbb{R}^2$.

Solution
Tout d'abord, montrons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Soient $u = (x,y)$ et $v = (x',y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (\lambda x + x', 0) = \lambda(x,0) + (x',0) = \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$
Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. On constate alors que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f \circ f(x,y) = f(f(x,y)) = f(x,0) = (x,0) = f(x,y).$$
Ainsi, $f \circ f = f$: f est bien un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20.8
Montrer que $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $p(x,y,z) = (2x+3y-z, -x-2y+z, -x-3y+2z)$ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

Solution

On montre rapidement que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Enfin, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} p \circ p(x, y, z) &= p(p(x, y, z)) \\ &= p(2x + 3y - z, -x - 2y + z, -x - 3y + 2z) \\ &= (2x + 3y - z, -x - 2y + z, -x - 3y + 2z) \end{aligned}$$

Ainsi, $p \circ p = p$ et p est un projecteur.

Remarque

Puisque $p \circ p = p$, on en déduit que $p^2 - p = 0_E$, c'est-à-dire que $X^2 - X$ est annulateur de p.

III. Noyau, image

1. Noyau d'une application linéaire

Définition 20.8.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau** de f, et on note $\mathrm{Ker} f$, le sous-ensemble de E défini par

$$\mathrm{Ker} f = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}$$

Théorème 20.11.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Puisque $f(0_E) = 0_F$, on a déjà $0_E \in \mathrm{Ker} f$. Ensuite, si x et y sont deux vecteurs de $\mathrm{Ker} f$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \underbrace{=}_{x \text{ et } y \text{ dans } \ker f} \lambda 0_F + 0_F = 0_F$$

donc $\lambda x + y \in \mathrm{Ker} f$: $\mathrm{Ker} f$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

Méthode

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on résout l'équation $f(x) = 0_F$ d'inconnue x. On se ramène en général à un système.

Exercice 20.9

Déterminer le noyau de l'application linéaire de l'exercice 20.2.

Solution

Si $f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f$ si et seulement si

$$f(X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_2 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_2 & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow X = 0_E$$

Donc, $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.

Théorème 20.12.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.

Démonstration

Supposons f injective. Soit x tel que $f(x) = 0_F$ alors $f(x) = f(0_E)$. Par injectivité de f, $x = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. Soient x et x' tels que $f(x) = f(x')$. Par linéarité de f, $f(x - x') = 0_F$. Puisque $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$, alors $x - x' = 0_E$ c'est-à-dire $x = x'$: f est injective.

2. Image d'une application linéaire

a. Image d'un sous-espace vectoriel

Proposition 20.13. Image d'un s.e.v par une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et E' un sous-espace vectoriel de E. Alors $f(E') = \{f(x),\, x \in E'\}$, l'image de E' par f, est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration

Puisque E' est un s.e.v. de E, $0_E \in E'$. Ainsi, $f(0_E) \in f(E')$, c'est-à-dire $0_F \in f(E')$.
Soient u et v deux éléments de $f(E')$, et λ un réel.

- Puisque $u \in f(E')$, il existe $x \in E'$ tel que $u = f(x)$.
- De même, il existe $y \in E'$ tel que $v = f(y)$.

Mais alors, par linéarité de f :

$$\lambda u + v = \lambda f(x) + f(y) = f(\lambda x + y)$$

et puisque E' est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda x + y \in E'$, et finalement $\lambda u + v \in f(E')$.

On dispose d'un résultat plus intéressant si E' est un sous-espace vectoriel engendré par une famille :

Proposition 20.14.

…

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de E. Alors
$$f(\,\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1),\dots,f(e_n))\,.$$

Démonstration

Soit $y \in f(\mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n))$. Il existe $x \in \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)$ tel que $y = f(x)$. Par définition, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Ainsi, par linéarité,
$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) \in \mathrm{Vect}\,(f(e_1),\dots,f(e_n))$$
Ainsi $f(\mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)) \subset \mathrm{Vect}\,(f(e_1),\dots,f(e_n))$.
Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Vect}\,(f(e_1),\dots,f(e_n))$. II existe alors $(\mu_1,\dots,\mu_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i f(e_i)$ et donc, puisque f est linéaire, on a
$$y = f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i\right).$$
Or $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i \in \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)$ donc $y \in f(\mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n))$.
Par conséquent $\mathrm{Vect}\,(f(e_1),\dots,f(e_n)) \subset f(\mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n))$. D'où l'égalité.

b. Image d'une application linéaire

Définition 20.9. Image d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **image** de f, et on note $\mathrm{Im}\, f$, le sous-ensemble de F défini par
$$\mathrm{Im}\, f = \{y \in F,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)\} = f(E)$$

Théorème 20.15.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F. Si $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_n)$ est une famille génératrice de E, alors
$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1),\cdots,f(e_n))$$

Démonstration

Puisque $0_F = f(0_E)$, on a $0_F \in \mathrm{Im}\, f$. Soient a et b deux éléments de $\mathrm{Im}\, f$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque a et b sont dans $\mathrm{Im}\, f$, il existe x et y dans E tels que
$$a = f(x) \quad \text{et} \quad b = f(y)$$
Mais alors
$$\lambda a + b = \lambda f(x) + f(y) \underbrace{=}_{\text{linéarité de } f} f(\lambda x + y)$$
Donc $\lambda a + b$ s'écrit $f(z)$ pour un certain $z \in E$: $\lambda a + b \in \mathrm{Im}\, f$. $\mathrm{Im}\, f$ est donc bien un sous-espace vectoriel de F.
Le deuxième point découle de la proposition 20.14

Méthode

Pour déterminer $\operatorname{Im} f$, si on dispose d'une famille génératrice, on utilise le point précédent. Sinon, on résout $f(x) = y$ d'inconnue x et on détermine à quelles conditions l'équation admet au moins une solution.

Exercice 20.10

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2x - y + 3z, x - 2y, -x - 2y - 4z)$. Déterminer $\operatorname{Im} f$.

Solution

On démontre rapidement que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Déterminons $\operatorname{Im} f$.

Première méthode : $(a,b,c) \in \operatorname{Im} f$ si et seulement s'il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x,y,z) = (a,b,c)$. Alors

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 3z = a \\ x - 2y = b \\ -x - 2y - 4z = c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} 2x - y + 3z = a & L_1 \\ -3y - 3z = 2b - a & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ -5y - 5z = 2c + a & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x - y + 3z = a & \\ -3y - 3z = 2b - a & \\ 0 = 8a - 10b + 6c & L_3 \leftarrow 3L_3 - 5L_2 \end{array}\right.$$

Ce système admet au moins une solution si la dernière condition est vérifiée.
Ainsi, $(a,b,c) \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si $8a - 10b + 6c = 0$, c'est-à-dire $c = -\frac{4}{3}a + \frac{5}{3}b$.
Finalement,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ 8a - 10b + 6c = 0\} \\ &= \left\{\left(a, b, -\frac{4}{3}a + \frac{5}{3}b\right),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\left(1, 0, -\frac{4}{3}\right), \left(0, 1, \frac{5}{3}\right)\right) = \operatorname{Vect}\left((3,0,-4), (0,3,5)\right) \end{aligned}$$

Deuxième méthode : $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\left(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left((2,1,-1), (-1,-2,-2), (3,0,-4)\right) \end{aligned}$$

La famille est liée, puisque $2(2,1,-1) + (-1,-2,-2) = (3,0,-4)$. Ainsi,

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left((2,1,-1), (-1,-2,-2)\right)$$

Théorème 20.16.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration

Par définition, f est surjective si et seulement si $f(E) = F$. Or, par définition, $f(E) = \operatorname{Im} f$. Donc f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Théorème 20.17.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f est bijective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, f = F$.

Méthode

Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est bijective, on montrera que $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$ et que $\mathrm{Im}\, f = F$.

Exercice 20.11

Soit $f : \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

est bijective.

Solution

f est bien linéaire (c'est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminons noyau et image.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f$. Alors

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0$$

ainsi, $\mathrm{Ker} f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ et f est injective.

- Première méthode : on utilise la base canonique de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1$$

La famille $(2e_1, e_2)$ est libre (car les vecteurs ne sont pas colinéaires) donc forme une base de $\mathrm{Im}\, f$:

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(2e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

Ainsi, f est surjective.

Deuxième méthode : soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(f)$. Il existe donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \quad 2y = a \\ x \quad = b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = b \\ y = \frac{a}{2} \end{cases}.$$

Ainsi, tout élément de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ admet au moins un antécédent (et en réalité, ce qu'on vient de faire montre qu'il y en a exactement un). L'application linéaire f est donc surjective.

Bilan : f est bien bijective.

Définition 20.10.

Soient E et F deux espaces vectoriels.

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, on dit que f est un **isomorphisme** de E sur F.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijective, on dit que f est un **automorphisme**.
- On note $\text{Isom}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F, et $\text{Aut}(E)$ ou $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Théorème 20.18.

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \text{Isom}(E,F)$. Alors f^{-1} est également une application linéaire et $f^{-1} \in \text{Isom}(F,E)$.

Démonstration

Soient x, y deux éléments de F et λ un réel. Puisque f est bijective, il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = x$ et un unique $b \in E$ tel que $f(b) = y$. Donc $f(\lambda a+b) = \lambda f(a)+f(b) = \lambda x+y$ donc, par unicité de bijectivité de f, $\lambda a + b = f^{-1}(\lambda f(a) + f(b))$, c'est-à-dire

$$\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}(\lambda x + y)$$

f^{-1} est bien linéaire.

Remarque

À partir d'un polynôme annulateur, on peut déterminer rapidement l'application réciproque si elle est bijective.
Par exemple, si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 - 2f + \text{id}_E = 0_E$, alors

$$f \circ (f - 2\text{id}_E) = -\text{id}_E \iff f \circ (-f + 2\text{id}_E) = \text{id}_E.$$

Ainsi, f est bijective et $f^{-1} = -f + 2\text{id}_E$.

On définit alors la notion d'espaces vectoriels isomorphes :

Définition 20.11.

On dit que deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de E sur F.

☞ *Exercices 4, 5, 6,* **??** *et 7.*

3. Cas des projecteurs

Dans le cas des projecteurs, on dispose de propriétés importantes :

Proposition 20.19.

Soient E un espace vectoriel, et p un projecteur de E. Alors

- $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}\, p = \{0_E\}$,
- $\text{id}_E - p$ est également un projecteur de E,
- $\text{Im}\,(p) = \text{Ker}(\text{id}_E - p)$ et $\text{Ker}(p) = \text{Im}\,(\text{id}_E - p)$.

Démonstration

- Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}\,(p)$. Alors, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$, et alors $p(x) =$

$p^2(y) = p(y)$ car p est un projecteur. Or, $p(x) = 0_E$ puisque x est dans le noyau de p, donc $p(y) = 0_E$, c'est-à-dire $x = 0_E$.

- En calculant :

$$(\mathrm{id}_E - p) \circ (\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{id}_E^2 - \mathrm{id}_E \circ p - p \circ \mathrm{id}_E + p^2 = \mathrm{id}_E - p - p + p = \mathrm{id}_E - p.$$

- Montrons le premier cas. Le deuxième s'en déduit en appliquant le premier au projecteur $\mathrm{id}_E - p$.
  - Soit $x \in \mathrm{Im}\,(p)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Mais alors

  $$(\mathrm{id}_E - p)(x) = \mathrm{id}_E(x) - p(x) = x - p^2(y) = x - p(y) = x - x = 0_E.$$

  Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$.
  - Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$. Alors $(\mathrm{id}_E - p)(x) = x - p(x) = 0_E$, c'est-à-dire $x = p(x)$: $x \in \mathrm{Im}\,(p)$.

  Par double inclusion, $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$.

IV. Applications linéaires et bases

On dispose de résultats importants liant application linéaire et base, dont un résultat important : une application est uniquement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ.

Lemme 20.20.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de E.

- Si la famille est génératrice et si f est surjective, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F.
- Si la famille est libre et si f est injective, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F.
- Si la famille une base et si f est un isomorphisme de E dans F, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F.

Démonstration

- Supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice et que f est surjective. Le résultat sur l'image de f garantit que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}\,(f)$, et $\mathrm{Im}\,(f) = F$ par surjectivité.
- Supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E et que f est injective.

  Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = 0$. Comme f est linéaire, on a $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$.

  Puisque f est injective, on a $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$. Enfin, puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$: ainsi $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F.
- Le dernier point est une implication des deux premiers points.

On peut alors en déduire le résultat fondamental, sur lequel nous reviendrons plus tard :

Théorème 20.21. Caractérisation par l'image d'une base

Soit E un espace vectoriel, admettant une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soient F un espace vectoriel, et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une **unique** application linéaire f de E dans F telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ...

$f(e_i) = v_i$:

$$f: \left| \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \end{array} \right. .$$

Ainsi, une application linéaire de E dans F est entièrement définie par la donnée des images des vecteurs d'une base de E.

Démonstration

Démontrons l'existence. On introduit, comme proposé dans le théorème, l'application

$$f: \left| \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \end{array} \right. .$$

Il s'agit d'une application de E dans F puisque F est un espace vectoriel. Montrons qu'elle est linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$. On a $\lambda x + y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i) e_i \in E$ donc

$$f(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i) v_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = \lambda f(x) + f(y)$$

f est donc linéaire.

Enfin, si $i \in [\![1, n]\!]$, alors on peut écrire

$$e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_{i-1} + 1 \cdot e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \dots + 0 \cdot e_n$$

et donc

$$f(e_i) = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n = v_i$$

L'application f existe donc bien.

Montrons l'unicité. Supposons qu'il existe deux applications linéaires f et g de E dans F telles que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = v_i = g(e_i)$.

Soit $x \in E$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a donc, par linéarité de f et de g,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i) = g(x)$$

Ainsi f et g coïncident sur E. D'où l'unicité.

On dispose d'un résultat complémentaire suivant de la famille $(v_i, \dots, v_n)$

Proposition 20.22.

On reprend les notations du théorème précédent.

- f est injective si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre de F.
- f est surjective si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille génératrice de F.
- f est un isomorphisme si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de F.

Démonstration

- Si f est injective, alors le lemme précédent entraîne que $(v_1, \dots, v_n) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.

  Réciproquement, supposons la famille $(v_1, \dots, v_n)$ libre et montrons que f est injective.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \text{Ker}(f)$. On a alors $0 = f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$.
Comme $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, on en déduit que $x_1 = \dots = x_n = 0$. Ainsi $x = 0$ et finalement $\text{Ker}(f) = \{0\}$: f est injective.

- Si f est surjective, alors le lemme précédent entraîne que $(v_1, \dots, v_n) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice.
  Réciproquement, supposons $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice et montrons que f est surjective.
  Soit $y \in F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ II existe alors $y_1, \dots, y_n$ tel que $y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$. On a donc, par linéarité, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) \in \text{Im}(f)$. Ainsi, $F = \text{Im}(f)$ et f est surjective.
- Le troisième point découle immédiatement des deux points précédents.

On en déduit enfin un théorème important :

Conséquence 20.23.

Soient E et F deux espaces vectoriels, tels que E admette une base.

Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F qui coïncident sur cette base, alors elles sont égales.

Exercices 20

Exercices

Applications linéaires

●○○ **Exercice 1 Linéarité** (20 min.)

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, le démontrer rigoureusement.

- $f_1 : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $f_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$
- $f_2 : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $f_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$
- $f_3 : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par $f_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$
- $f_4 : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f_4\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

●○○ **Exercice 2 Applications linéaire II** (20 min.)

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, le démontrer rigoureusement.

1. $f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (xy, y, 2z) \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & 2023x - 2023y + 2023z + 2023t \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array} \right.$
4. $f_4 : \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array} \right.$
5. $f_5 : \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array} \right.$
6. $f_6 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (0, x+y, x-z, y) \end{array} \right.$
7. $f_7 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (1, x+y+z+t) \end{array} \right.$
8. $f_8 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & b \\ -b & a+b & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$
9. $f_9 : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$

●○○ **Exercice 3 Endomorphisme infini** (10 min.)

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1. $f \longmapsto f'' - 2f' + f$
2. $f \longmapsto \mathrm{e}^f$
3. $f \longmapsto \cos \times f$

Noyaux, images

●○○ **Exercice 4 Un endomorphisme** (15 min.)

Soit f un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, dont les images des vecteurs de la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner $f(X)$ pour toute matrice X de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les antécédents de $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer une base du noyau, et de l'image de f.

●○○ **Exercice 5 Application linéaire I** (20 min.)

Soit $f : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x+y-3z \\ 3x+2y-4z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau, et l'image de f.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. En anticipant sur un chapitre ultérieur, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

●○○ **Exercice 6 Application linéaire II** (20 min.)

Soit $f : \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ y-z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau, et l'image de f.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. En anticipant sur un chapitre ultérieur, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

●●○ **Exercice 7 Application linéaire III** (15 min.)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = AM - MA$. Montrer que f est une application linéaire, et déterminer image et noyau.

●○○ **Exercice 8 Des endomorphismes** (15 min.)

1. Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$ est un endomorphisme. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. Est-ce que f est un automorphisme ?
2. Montrer que $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array} \right.$ est un endomorphisme. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}\,(g)$. Est-ce que g est un automorphisme ?

●●○ **Exercice 9 Résultats sur la composée** (15 min.)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g\circ f)$ et $\mathrm{Im}\,(g\circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$.

2. Montre que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}\,(f) = f(\mathrm{Ker}(g \circ f))$.
3. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
4. Supposons que f et g commutent, c'est-à-dire $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}\,(g)$ sont stables par f :

$$f(\mathrm{Ker}(g)) \subset \mathrm{Ker}(g) \quad \text{et} \quad f(\mathrm{Im}\,(g)) \subset \mathrm{Im}\,(g).$$

●●○ **Exercice 10 Sur les projecteurs** (15 min.)

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E tel que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,(p \circ q) = \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)$.
3. a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$. Justifier que $q(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $x - q(x) \in \mathrm{Ker}(q)$.
   b) En déduire que $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \{y + z,\ (y, z) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Ker}(q)\}$.

●●○ **Exercice 11 Un automorphisme de polynômes** (15 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $d : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$.

1. Montrer que d est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer son noyau et son image.
2. Calculer $\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d\right) \circ \left(\sum\limits_{k=0}^{n} d^k\right)$.
3. En déduire que $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Déterminer l'antécédent de $\dfrac{X^n}{n!}$ par $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d$.

●●○ **Exercice 12 Un automorphisme et des projecteurs** (20 min.)

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (-x - 2y - 2z, 4x + 5y + 4z, -x - y)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. a) Vérifier que $f^2 = 3f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$
   b) En déduire que f est un automorphisme et expliciter f^{-1}.
3. On pose $p = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ et $q = 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f$.
   a) Exprimer f en fonction de p et q.
   b) Montrer que p et q sont des projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.
   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$.

Pour aller plus loin

●●○ **Exercice 13 Dérivées et primitives sont sur un bateau** (20 min.)

On considère les applications

$$D : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right. \quad \text{et} \quad P : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \left(x \longmapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que D et P sont des endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Expliciter $D \circ P$ et $P \circ D$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(D), \mathrm{Ker}(P), \mathrm{Ker}(D \circ P)$ et $\mathrm{Ker}(P \circ D)$.
4. a) Montrer que $\mathrm{Im}\,(P) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$.
   b) Déterminer $\mathrm{Im}\,(D), \mathrm{Im}\,(D \circ P)$ et $\mathrm{Im}\,(P \circ D)$.
5. D et P sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 14 Un endomorphisme étrange (25 min.)

Pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on définit l'application

$$T(f) : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t & \text{si} \quad x > 0 \\ f(0) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

et l'application

$$T : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & T(f) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que $T(f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
2. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
3. Montrer que T est injective.
4. Soit $g \in \mathrm{Im}(T)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $xg'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. Est-ce que T est surjective ?
5. Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.

Exercice 15 Liaison implique homothétie (10 min.)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Montrer que f est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$.

> **Remarque**
> La condition que, pour un $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée signifie qu'il existe un réel λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. L'objectif de l'exercice est de montrer que λ_x ne dépend, en réalité, pas de x.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

- f_1 est une application linéaire. En effet, soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f_1(\lambda u + v) = f_1\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) \\ (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \end{pmatrix}$$

ainsi,

$$f_1(\lambda u + v) = \begin{pmatrix} \lambda(2x_1 + x_2) + (2y_1 + y_2) \\ \lambda(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ y_2 - y_3 \end{pmatrix} = \lambda f_1(u) + f_1(v)$$

- f_2 n'est pas linéaire. En effet,

$$f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $2f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, et pourtant

$$f_2\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 2f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

- f_3 est linéaire, et est un endomorphisme. Tout d'abord, elle va de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même. Soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f_3(\lambda u + v) = f_3\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) \\ (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \\ (\lambda x_3 + y_3) - (\lambda x_1 + y_1) \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$f_3(\lambda u + v) = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \\ \lambda(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3) \\ \lambda(x_3 - x_1) + (y_3 - y_1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_3 - y_2 \\ y_1 - y_3 \end{pmatrix} = \lambda f_3(u) + f_3(v)$$

$$\boxed{f_3 \text{ est bien un endomorphisme de } \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

- f_4 est également linéaire, et est une forme linéaire, car elle est à valeur dans $\mathbb{R}$. Soient

$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f_4(\lambda u + v) = f_4\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right)$$

donc

$f_4(\lambda u+v) = (\lambda x_1+y_1)+2(\lambda x_2+y_2)+3(\lambda x_3+y_3) = \lambda(x_1+2x_2+3x_3)+(y_1+2y_2+3y_3) = \lambda f_4(u)+f_4(v)$

Donc f_4 est linéaire et est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 2

1. f_1 ne l'est pas. Par exemple, $f_1(1,0,0) = (0,0,0)$ et $f_1(0,1,0) = (0,1,0)$ et pourtant $f_1(1,1,0) = (1,1,0) \neq (0,0,0) + (0,1,0)$.
2. f_2 est linéaire. Soient $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $v = (x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f_2(\lambda u + v) &= f_2(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t') \\ &= 2023(\lambda x + x') - 2023(\lambda y + y') + 2023(\lambda z + z') + 2022(\lambda t + t') \\ &= \lambda(2023x - 2023y + 2023z + 2023t) + (2023x' - 2023y' + 2023z' + 2023t') = \lambda f_2(u) + f_2(v). \end{aligned}$$

3. f_3 est linéaire. Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f_3(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X-1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X-1) - \lambda Q(X-1) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X-1)) + Q(X+1) - Q(X-1) = \lambda f_3(P) + f_3(Q). \end{aligned}$$

4. f_4 est linéaire. En effet, d'après le cours sur les matrices, si $(A,B) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f_4(\lambda A + B) = (\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top = \lambda f_4(A) + f_4(B).$$

5. f_5 n'est pas linéaire. Prenons $A = I_n$ et $\lambda = 2$. Alors

$$f_5(\lambda A) = (2I_n)^2 = 4I_n \neq 2I_n = \lambda f_5(A).$$

6. f_6 est linéaire. Soient $u = (x,y,z)$, $v = (x',y',z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f_6(\lambda u + v) &= f_6(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (0, \lambda x + x' + \lambda y + y', \lambda x + x' - (\lambda z + z'), \lambda y + y') \\ &= (0, \lambda(x+y) + x' + y', \lambda(x-z) + x' - z', \lambda y + y') \\ &= \lambda(0, x+y, x-z, y) + (0, x' + y'x' - z', y') = \lambda f_6(u) + f_6(v). \end{aligned}$$

7. f_7 n'est pas linéaire. En effet, $f_7(0,0,0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$.
8. f_8 est linéaire. Soient $u = (a,b)$, $v = (a',b')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f_8(\lambda u + v) &= f_8(\lambda a + a', \lambda b + b') \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ -(\lambda a + a') & 0 & \lambda b + b' \\ -(\lambda b + b') & \lambda a + a' + \lambda b + b' & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & b \\ -b & a+b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ -a' & 0 & b' \\ -b' & a'+b' & 0 \end{pmatrix} = \lambda f_8(u) + f_8(v). \end{aligned}$$

9. Enfin, f_9 est linéaire. En effet, soient $(f,g) \in (\mathcal{C}^0([0,\,1],\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} f_9(\lambda f + g) &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}(\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}(\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f_9(f) + f_9(g). \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Soit $\varphi : f \longmapsto f'' - 2f' + f$. Soient (f, g) deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)'' - 2(\lambda f + g)' + (\lambda f + g)\\ &= \lambda f'' + g'' - 2\lambda f - 2g + \lambda f + g\\ &= \lambda(f'' - 2f' + f) + (g'' - 2g' + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g).\end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire, et est donc un endomorphisme.

2. Soit $\varphi : f \longmapsto \mathrm{e}^f$. Prenons $f = g = \mathrm{id}$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad & \varphi(f+g)(x) = \mathrm{e}^{(f+g)(x)} = \mathrm{e}^{2x}\\ \text{et} \quad & (\varphi(f) + \varphi(g))(x) = \mathrm{e}^{f(x)} + \mathrm{e}^{g(x)} = 2\mathrm{e}^x \neq \varphi(f+g)(x).\end{aligned}$$

φ n'est donc pas linéaire.

3. Notons $\varphi : f \longmapsto \cos \times f$. Soient (f, g) deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + g) &= \cos \times (\lambda f + g)\\ &= \lambda \cos \times f + \cos \times g = \lambda\varphi(f) + \varphi(g).\end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire, et est donc un endomorphisme.

Exercice 4

1. On nous donne par définition les images des vecteurs de la base canonique. Donc

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y - 7z \\ -x + 2y + 4z \\ 2x - y + z \end{pmatrix}$$

2. On cherche x, y et z tels que

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y - 7z \\ -x + 2y + 4z \\ 2x - y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Après résolution du système par la méthode du pivot de Gauss, on obtient une infinité de solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 - 2z \\ 2 - 3z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$$

L'application f n'est donc pas injective puisqu'un élément admet une infinité d'antécédents.
De même, on cherche x, y et z tels que

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y - 7z \\ -x + 2y + 4z \\ 2x - y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Après résolution du système par la méthode du pivot de Gauss, on n'obtient aucune solution : la fonction f n'est donc pas surjective, puisque la matrice $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'est pas atteinte par f.

3. On a, en résolvant le système,

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ -3z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$. De plus, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique, on a

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } f(e_3) = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si on cherche x, y, z trois réels tels que $xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient une infinité de solutions. La famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est donc liée. En revanche, $(f(e_1), f(e_2))$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

et $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 5

1. Montrons que f est linéaire. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f(\lambda X + Y) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

donc

$$f(\lambda X+Y) = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \\ 2(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) - 3(\lambda x_3 + y_3) \\ 3(\lambda x_1 + y_1) + 2(\lambda x_2 + y_2) - 4(\lambda x_3 + y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2 - x_3) + (y_1 + y_2 - y_3) \\ \lambda(2x_1 + x_2 - 3x_3) + (2y_1 + y_2 - 3y_3) \\ \lambda(3x_1 + 2x_2 - 4x_3) + (3y_1 + 2y_2 - 4y_3) \end{pmatrix}$$

et donc $f(\lambda X+Y) = \lambda f(X)+f(Y)$: f est bien une application linéaire, qui va de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même, donc est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément du noyau. Alors on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x + y - 3z \\ 3x + 2y - 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après résolution par la méthode du pivot de Gauss, on obtient

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On cherche à savoir si la famille est libre. On cherche donc x, y, z tels que $xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Après résolution (qui revient à étudier le noyau de f), on constate qu'il y a une infinité de solutions. La famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est donc liée. En revanche, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

3. f n'est pas injective, car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul. f n'est pas surjective non plus, car son rang vaut 2 (puisque on a trouvé une base précédemment) alors que l'espace d'arrivé est de dimension 3. Elle n'est donc pas bijective.
4. D'après les résultat de la question 2, on a

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = 1 \text{ et } \operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = 2$$

ainsi

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f) = 3 = \dim(\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

qu'on appelle formule du rang.

Exercice 6

1. Montrons que f est linéaire. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et λ un réel. Alors

$$f(\lambda X + Y) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

donc

$$f(\lambda X+Y) = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \\ (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2 - x_3) + (y_1 + y_2 - y_3) \\ \lambda(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3) \end{pmatrix}$$

et donc $f(\lambda X + Y) = \lambda f(X) + f(Y)$: f est bien linéaire.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément du noyau. Alors on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} x + y - z \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après résolution par la méthode du pivot de Gauss, on obtient

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On cherche à savoir si la famille est libre. On cherche donc x, y, z tels que $xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Après résolution (qui revient à étudier le noyau de f), on constate qu'il y a une infinité de solutions. La famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est donc liée. En revanche, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

3. f n'est pas injective, car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul. f est surjective en revanche. En effet, son rang vaut 2 (puisque on a trouvé une base précédemment) et l'espace d'arrivée est de dimension 2 puisqu'il s'agit de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Elle n'est cependant pas bijective.
4. D'après les résultat de la question 2, on a
$$\dim(\operatorname{Ker} f) = 1 \text{ et } \operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = 2$$
ainsi
$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f) = 3 = \dim(\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$
qu'on appelle formule du rang.

Exercice 7

L'application f va bien de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, d'après les propriétés sur les produits de matrices.
Soient $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un réel. Alors
$$f(\lambda A+B) = (\lambda A+B)M-M(\lambda A+B) = \lambda AM+BM-\lambda MA-MB = \lambda(AM-MA)+(BM-MB) = \lambda f(A)+f(B)$$
f est donc une application linéaire, et est donc un endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$ Ker f. Alors
$$f(A) = AM - MA = \begin{pmatrix} a & 2a+3b \\ c & 2c+3d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On obtient alors
$$\begin{pmatrix} -2c & 2a+2b-2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On a alors $c = 0$ et $d = a + b$. Ainsi,
$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
soit
$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (donc forme une base de Ker f) car les vecteurs ne sont pas colinéaires.
Pour l'image, on note $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette famille forme une base de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. On calcule donc l'image par f de cette base. Après calcul, on obtient
$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On constate que la famille est liée puisque $f(E_{1,1}) = f(E_{1,2}) = -f(E_{2,1})$. On peut donc enlever deux de ces vecteurs. La famille $(f(E_{1,1}), f(E_{2,1}))$ est libre (car les vecteurs sont non colinéaires) et forme donc une base de Im f :
$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(E_{1,1}, f(E_{2,1}))$$

Exercice 8

1. Si u et v sont deux suites, et $\lambda \in \mathbb{R}$, remarquons que

$$f(\lambda u + v) = \left((\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - (\lambda u_n + v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ainsi, f est bien un endomorphisme.
Soit $u \in \operatorname{Ker} f$. Par définition, $f(u) = 0$ où 0 désigne la suite nulle, c'est-à-dire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = 0 \iff u_n = u_0.$$

Ainsi, la suite u est constante. Réciproquement, si la suite u est constante, $f(u) = 0$. On peut donc conclure que

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{\text{suites constantes}\}}$$

Pour l'image, soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite quelconque. On cherche $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $f(u) = v$, c'est-à-dire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = v_n.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, en sommant les égalités précédentes, on obtient

$$\sum_{n=0}^{N} u_{n+1} - u_n = \sum_{n=0}^{N} v_n \iff u_{N+1} - u_0 = \sum_{n=0}^{N} v_n$$

Posons alors $u_0 = 0$ (par exemple), et pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, $u_N = \sum\limits_{n=0}^{N-1} v_n$. Alors la suite u ainsi définie vérifie

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad u_{N+1} - u_N = v_N$$

et pour $N = 0$, $u_1 - u_0 = v_0$ par construction. Ainsi, $f(u) = v$.
Bilan : toute suite v admet un antécédent par f : $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et f est surjective.
2. Rapidement, si P et Q sont deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a bien

$$g(\lambda P + Q) = X(\lambda P + Q) = \lambda XP + XQ = \lambda g(P) + g(Q).$$

Ainsi, g est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
Soit $P \in \operatorname{Ker}(g)$. Alors $g(P) = 0$, le polynôme nul, c'est-à-dire $XP = 0$. Or, si P est non nul, $\deg(XP) = \deg(X) + \deg(P) \geqslant 1$ et donc XP ne peut être nul. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(g) = \{0\}}$$

et g est injective.
D'après ce qui précède, $Q = XP$ est de degré supérieur ou égal à 1 si $P \neq 0$, et $Q(0) = 0$. Donc

$$\operatorname{Im}(g) \subset \{Q \in \mathbb{R}[X], \quad Q(0) = 0\}.$$

Réciproquement, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $Q(0) = 0$. Si $Q = 0$, il suffit de prendre $P = 0$ et dans ce cas $g(0) = Q$. Si $Q \neq 0$, puisque 0 est racine de Q, on peut le factoriser : il existe un polynôme R tel que $Q = XR$. Mais alors, $Q = g(R)$, et finalement $\{Q \in \mathbb{R}[X], \quad Q(0) = 0\} \subset \operatorname{Im}(g)$. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Im}(g) = \{Q \in \mathbb{R}[X], \quad Q(0) = 0\}.}$$

Exercice 9

1. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$. Mais alors $g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$ et donc $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
De même, si $y \in \operatorname{Im}(g \circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$, c'est-à-dire $y = g(f(x))$, ou encore $y = g(z)$ avec $z = f(x) \in E$. Donc $y \in \operatorname{Im}(g)$ et donc $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$.
2. Procédons par double inclusion.
Si $x \in \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$, et $g(x) = 0$. Mais alors $g \circ f(y) = 0$, c'est-à-dire $y \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Puisque $x = f(y)$, on en déduit donc que $x \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$.
Réciproquement, soit $x \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$. Il existe alors $y \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ tel que $x = f(y)$. On peut déjà dire que $x \in \operatorname{Im}(f)$. Mais de plus, $g(x) = g(f(y)) = 0$ car $y \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Donc $f(y) \in \operatorname{Ker}(g)$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker}(g)$. Finalement, $x \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$.

3. Procédons par double implication.
Si $g \circ f = 0$, alors $\text{Ker}(g \circ f) = E$ (car l'application nulle a tout l'espace dans son noyau). Or, d'après la question précédente, $f(\text{Ker}(g \circ f)) \subset \text{Ker}(g)$. Or, $\text{Ker}(g \circ f) = E$, donc $f(E) \subset \text{Ker}(g)$, c'est-à-dire $\text{Im}\,(f) \subset \text{Ker}(g)$.
Réciproquement, si $\text{Im}\,(f) \subset \text{Ker}(g)$, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \text{Im}\,(f) \subset \text{Ker}(g)$, c'est-à-dire $g(f(x)) = 0$: ainsi, $g \circ f = 0$.
4. On suppose que f et g commutent.
Soit $x \in \text{Ker}(g)$. Alors $g(x) = 0$, et donc $f(g(x)) = 0$. Puisque f et g commutent, $f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ et finalement $g(f(x)) = 0$, ce qui signifie que $f(x) \in \text{Ker}(g)$. Ainsi, si $x \in \text{Ker}(g)$, $f(x) \in \text{Ker}(g)$:

$$f(\text{Ker}(g)) \subset \text{Ker}(g).$$

Soit $y \in \text{Im}\,(g)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Alors $f(y) = f(g(x)) = g(f(x)) \in \text{Im}\,(g)$. Ainsi, si $y \in \text{Im}\,(g)$, $f(y) \in \text{Im}\,(g)$:

$$f(\text{Im}\,(g)) \subset \text{Im}\,(g).$$

Exercice 10

1. $p \circ q$ est un endomorphisme de E comme composée de deux endomorphismes. De plus :

$$\begin{aligned}(p \circ q)^2 = (p \circ q) \circ (p \circ q) &= p \circ \underbrace{q \circ p}_{=p \circ q} \circ q \\ &= p \circ p \circ q \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q \text{ car } p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs}\end{aligned}$$

Ainsi, $p \circ q$ est un projecteur.
2. Procédons par double inclusion.
Soit $x \in \text{Im}\,(p \circ q)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = p \circ q(y) = p(q(y)) \in \text{Im}\,(p)$. Or, p et q commutent, donc $x = p(q(y)) = q(p(y)) \in \text{Im}\,(q)$. Finalement, $x \in \text{Im}\,(p) \cap \text{Im}\,(q)$.
Réciproquement, soit $x \in \text{Im}\,(p) \cap \text{Im}\,(q)$. En particulier, $x \in \text{Im}\,(q)$, donc il existe $y \in E$ tel que $x = q(y)$. Puisque $x \in \text{Im}\,(p)$, il existe également un $z \in E$ tel que $x = p(z)$. Donc $p(x) = p^2(z) = p(z) = x$ car p est un projecteur. Donc :

$$x = q(y) \implies x = p(x) = p(q(y)) = p \circ q(y)$$

et finalement $x \in \text{Im}\,(p \circ q)$.
3. a) Soit $x \in \text{Ker}(p \circ q)$. Par définition, $p \circ q(x) = 0$, c'est-à-dire $p(q(x)) = 0$, et donc $q(x) \in \text{Ker}(p)$. Enfin, en utilisant le fait que q est un projecteur :

$$q(x - q(x)) = q(x) - q(q(x)) = q(x) - q^2(x) = q(x) - q(x) = 0$$

et donc $x - q(x) \in \text{Ker}(q)$.
b) Démontrons ce résultat par double inclusion.
Si $x \in \{y + z,\ (y, z) \in \text{Ker}(p) \times \text{Ker}(q)\}$, il existe $y \in \text{Ker}(p)$ et $z \in \text{Ker}(q)$ tel que $x = y + z$. Mais alors :

$$\begin{aligned}p \circ q(x) &= \underbrace{p \circ q}_{=q \circ p}(y) + p \circ \underbrace{q(z)}_{=0} \\ &= q \circ \underbrace{p(y)}_{=0} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $x \in \text{Ker}(p \circ q)$.
Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(p \circ q)$ et utilisons la question précédente : on peut écrire

$$x = \underbrace{q(x)}_{\in \text{Ker}(p)} + \underbrace{(x - q(x))}_{\in \text{Ker}(q)}$$

et donc $x \in \{y + z,\ (y, z) \in \text{Ker}(p) \times \text{Ker}(q)\}$.
On a ainsi bien démontré que

$$\boxed{\text{Ker}(p \circ q) = \{y + z,\ (y, z) \in \text{Ker}(p) \times \text{Ker}(q)\}}$$

Exercice 11

1. La dérivation étant linéaire, d est bien linéaire. De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$: d est un endomorphisme.
D'après ce qui précède, $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Si $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, en notant P une primitive de Q, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P' = Q$, c'est-à-dire $d(P) = Q$. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(d) = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

Enfin, si $P \in \mathrm{Ker}(d)$, alors $P' = 0$, c'est-à-dire P est un polynôme constant. Réciproquement, tout polynôme constant est dans le noyau :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(d) = \mathbb{R}_0[X].}$$

2. On développe naïvement :

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d\right) \circ \left(\sum_{k=0}^{n} d^k\right) &= \sum_{k=0}^{n} d^k - \sum_{k=0}^{n} d^{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n} d^k - d^{k+1} = d^0 - d^{n+1} \text{ par télescopage}\\ &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d^{n+1}.\end{aligned}$$

Or, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $d^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$, c'est-à-dire que d^{n+1} est l'application nulle. Finalement

$$\boxed{\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d\right) \circ \left(\sum_{k=0}^{n} d^k\right) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}}.$$

3. Par somme, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Par commutativité et d'après le résultat précédent :

$$\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d\right) \circ \left(\sum_{k=0}^{n} d^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} d^k\right) \circ \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d\right) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

Donc $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d$ est bijective, d'application réciproque $\sum_{k=0}^{n} d^k$: c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. On utilise ce qui précède. Notons $g = \sum_{k=0}^{n} d^k$. Soit P l'antécédent de $\frac{X^n}{n!}$ par $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d$ (qui existe et est unique car l'application est bijective). Alors

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d)(P) = \frac{X^n}{n!} \iff g \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - d)(P) = g\left(\frac{X^n}{n¡}\right) \iff P = g\left(\frac{X^n}{n!}\right).$$

Ainsi, l'antécédent de $\frac{X^n}{n!}$ est

$$P = \sum_{k=0}^{n} d^k\left(\frac{X^n}{n!}\right)$$

Or, rapidement :

$$d^k\left(\frac{X^n}{n!}\right) = \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}$$

et finalement, par changement d'indice :

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.}$$

Exercice 12

1. On montre rapidement que f est un endomorphisme.
2. a) Calculons f^2 : soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f\circ f(x,y,z) &= f(-x-2y-2z, 4x+5y+4z, -x-y)\\ &= (-(-x-2y-2z)-2(4x+5y+4z)-2(-x-y),\\ &\quad 4(-x-2y-2z)+5(4x+5y+4z)+4(-x-y),\\ &\quad -(-x-2y-2z)-(4x+5y+4z))\\ &= (-5x-6y-6z, 12x+13y+12z, -3x-3y-2z)\\ &= (-3x-6y-2z, 12x+15y+12z, -3x-3y)+-2(x,y,z) = 3f(x,y,z)-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(x,y,z). \end{aligned}$$

Ainsi, $f\circ f = 3f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.
b) Remarquons que la relation précédente s'écrit également

$$f\circ f - 3f = -2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \iff f\circ\left(-\frac{1}{2}(f-3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\right) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}.$$

f est donc bijective, et est donc un automorphisme, d'application réciproque $g = -\frac{1}{2}(f-3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. a) En résolvant rapidement, on obtient $f = 2p+q$.
b) On montre, en utilisant la question 2)a), que $p\circ p = p$ et $q\circ q = q$:

$$\begin{aligned} p\circ p &= (f-\mathrm{id})\circ(f-\mathrm{id}) = f\circ f - f\circ\mathrm{id} - \mathrm{id}\circ f + \mathrm{id}\circ\mathrm{id}\\ &= f^2 - 2f + \mathrm{id} == (3f-2\mathrm{id}) - 2f + \mathrm{id} = f - \mathrm{id} = p.\\ q\circ q &= (2\mathrm{id}-f)\circ(2\mathrm{id}-f) = 4\mathrm{id}\circ\mathrm{id} - 2\mathrm{id}\circ f - 2f\circ\mathrm{id} + f\circ f\\ &= 4\mathrm{id} - 4f + f^2 = 4\mathrm{id} - 4f + (3f-2\mathrm{id}) = 2\mathrm{id} - f = q. \end{aligned}$$

Ainsi, p et q sont des projecteurs. De plus :

$$\begin{aligned} p\circ q &= (f-\mathrm{id})\circ(2\mathrm{id}-f)\\ &= 2f - f^2 - 2\mathrm{id} + f = 3f - 2\mathrm{id} - f^2 = 0\\ q\circ p &= (2\mathrm{id}-f)\circ(f-\mathrm{id})\\ &= 2f - 2\mathrm{id} - f^2 + f = 3f - 2\mathrm{id} - f^2 = 0. \end{aligned}$$

item On a démontré que $f = 2p+q$. p et q commutent ; on peut donc appliquer la formule de Leibniz : pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f^n = (2p+q)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2p)^k\circ q^{n-k}\\ &= q^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}2^k\underbrace{p^k\circ q^{n-k}}_{=0 \text{ car } p\circ q=0} + 2^n p^n\\ &= q^n + 2^n p^n. \end{aligned}$$

Puisque p et q sont des projecteurs, $p^2 = p$ et $q^2 = p$ et donc $p^n = p$ et $q^n = q$ pour $n\geqslant 1$. Ainsi,

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad f^n = 2^n p + q$$

ce résultat étant valable pour $n=0$, puisque $p+q = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Finalement

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\quad f^n = 2^n p + q.}$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 13

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors f' est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ et toute primitive également. Donc D et P sont bien à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Par ailleurs, par linéarité de la dérivée et de l'intégrale, si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} D(\lambda f+g) &= (\lambda f+g)' = \lambda f' + g' = \lambda D(f) + D(g) \\ P(\lambda f+g) &= x \longmapsto \int_0^x (\lambda f+g)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x \longmapsto \int_0^x \lambda f(t) + g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x \longmapsto \lambda \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda P(f) + P(g). \end{aligned}$$

Ains, D et P sont linéaires et sont donc des endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. D'après le théorème fondamental de l'intégration, $D \circ P(f) = f$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ainsi, $\boxed{D \circ P = \mathrm{id}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} P \circ D(f) &= P(f') \\ &= x \longmapsto \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x \longmapsto f(x) - f(0). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad P \circ D(f) = f - f(0).}$$

3. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} D(f) = 0 &\iff f' = 0 \iff f \text{ est constante sur } \mathbb{R} \\ P(f) = 0 &\iff x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies \forall x, f(x) = 0 \text{ en dérivant} \\ D \circ P(f) = 0 &\iff f = 0 \\ P \circ D(f) = 0 &\iff f - f(0) = 0 \iff f \text{ est constante sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\ker(P) = \ker(D \circ P) = \{0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}}$. De plus, $\boxed{\ker(D) = \ker(P \circ D) = \{\text{fonctions constantes}\}}$.

4. a) Soit $f \in \mathrm{Im}\,(P)$. Alors, il existe g telle que $P(g) = f$, c'est-à-dire

$$\forall x, \quad \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

En particulier $f(0) = \int_0^0 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Nécessairement, $f(0) = 0$.

Réciproquement, si $f(0) = 0$, notons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0) = f(x)$$

et donc $f \in \mathrm{Im}\,(P)$.

Bilan : $\mathrm{Im}\,(P)$ est composées des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $f(0) = 0$.

b) Puisque $D \circ P = \mathrm{id}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, $\mathrm{Im}\,(D \circ P) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En notant F une primitive de f (qui existe nécessairement car f est continue) : $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $D(F) = f$: $\mathrm{Im}\,(D) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Enfin, puisque $P \circ D(f) = f - f(0)$,

$$\mathrm{Im}\,(P \circ D) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad f(0) = 0.\}$$

5. On résume : D est surjective mais pas injective. P quant à elle n'est pas surjective mais est injective. Elles ne sont donc pas bijectives.

Exercice 14

1. D'après le théorème fondamental de l'intégration, pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}^+$, $T(f)$ est continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons F une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ (qui existe car f est continue). F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et

$$T(f) = x \longmapsto \frac{F(x) - F(0)}{x}.$$

Remarquons que F étant dérivable en 0, $T(f)$ admet une limite en 0 et

$$T(f)(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} F'(0) = f(0) = T(f)(0).$$

Ainsi, $T(f)$ est également continue en 0.
Bilan : pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}^+$, $T(f)$ est bien continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Le côté *endo* est donc assuré d'après la question précédente. Montrons que T est linéaire. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\forall\, x > 0, \quad T(\lambda f + g)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\left(\lambda \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \lambda\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)\end{aligned}$$

et pour $x = 0$,

$$T(\lambda f + g)(0) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda T(f)(0) + T(g)(0).$$

Ainsi, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $T(\lambda f + g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x)$: T est linéaire.
3. Soit $f \in \ker(T)$. Tout d'abord, $T(f)(0) = 0$ et donc $f(0) = 0$. Pour tout $x > 0$

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

En dérivant (possible d'après le théorème fondamental de l'intégration), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 0$.
Ainsi, $f = 0$ et $\boxed{\ker(T) = \{0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})}\}}$: T est bien injective.
4. Soit $g \in \operatorname{Im}(T)$. Il existe donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $T(f) = g$. Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = g(x) \implies \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

D'après le théorème fondamental de l'intégration, $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par produit, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, en multipliant par x, pour tout $x > 0$

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xg(x).$$

Dérivons :

$$\forall\, x > 0, f(x) = g(x) + xg'(x)$$

soit

$$xg'(x) = f(x) - g(x).$$

Or, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$ par continuité de f et puisque $g = T(f)$, $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} T(f)(0) = f(0)$ par continuité de $T(f)$. Par somme

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} xg'(x) = 0.}$$

Remarquons que T n'est pas surjective : une fonction continue mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ n'est pas dans l'image de T d'après ce qui précède (exemple : $x \longmapsto |x-1|$).
5. On vient de voir que si $g \in \operatorname{Im}(T)$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $xg'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Réciproquement, soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant $xg'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Montrons que $g \in \operatorname{Im}(T)$. Notons $f : x \longmapsto g(x) + xg'(x)$ si $x > 0$, et $f(0) = g(0)$ (en utilisant l'étude de la question précédente).
f est par somme et produit continue sur $\mathbb{R}_+^*$ mais par hypothèse $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} g(0)$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Mais alors

$$\begin{aligned} \forall\, x > 0, \quad T(f)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x (g(t) + tg'(t))\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\left[tg(t)\right]_0^x = g(x) \end{aligned}$$

et si $x = 0$, $T(f)(0) = f(0) = g(0)$.
Ainsi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad T(f)(x) = g$$

et finalement $g \in \operatorname{Im}(T)$.
Bilan : on a donc

$$\boxed{\operatorname{Im}(T) = \{g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}), \quad g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}), \quad xg(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0\}.}$$

Exercice 15

Supposons que la famille $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$. Pour tout $x \in E$ non nul, cela équivaut à l'existence d'un réel λ_x (dépendant de x !) tel que $f(x) = \lambda_x x$. Ce λ_x est unique.
Fixons un élément $x \in E$ non nul, et soit $y \in E$ non nul également. Deux possibilités :

- ou bien la famille (x, y) est liée. Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = \mu x$ (car x est non nul). Mais alors

$$f(y) = f(\mu x) = \lambda_{\mu x}\mu x \quad \text{et} \quad f(y) = \mu f(x) = \mu\lambda_x x = \lambda_x \mu x.$$

Puisque x est non nul, et μ également, on en déduit que $\lambda_{\mu x} = \lambda_x$ et donc $\lambda_y = \lambda_x$.

- ou bien la famille (x, y) est libre. Mais alors

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y \quad \text{et} \quad f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

soit encore

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0.$$

Par liberté de la famille, on en déduit que

$$\lambda_{x+y} = \lambda_x \quad \text{et} \quad \lambda_{x+y} = \lambda_y$$

et finalement $\lambda_x = \lambda_y$.

Ainsi, dans tous les cas, $\lambda_y = \lambda_x$. Si on note $\lambda = \lambda_x$, on a démontré que

$$\forall\, x \in E, \quad x \neq 0, \quad f(x) = \lambda x.$$

Remarquons, enfin, que ce résultat est valable pour $x = 0$ puisque $f(0) = 0$. Finalement

$$\boxed{f \text{ est bien une homothétie.}}$$