Chapitre 19

# Introduction aux espaces vectoriels

**Résumé**

*Ce chapitre est très important et tombe régulièrement au concours. Il est abstrait, mais pas difficile. Il sera enrichi dans un prochain chapitre, et approfondi l'année prochaine.*
*Il doit être maitrisé dans son ensemble.*

## Plan du cours



> *« Les mathématiques sont le vecteur de l'humanité. »*

Cédric Chapeaucou

## Objectifs

*La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.*

① Connaître la définition d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels :

- Savoir démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel □
- Savoir montrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs . . . . . . □

② Maitriser la notion de base :

- Savoir montrer qu'une famille est libre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . □
- Savoir montrer qu'une famille est génératrice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . □
- Savoir montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel . . . . . . . . . . . . . . . . . . □
- Connaître les bases canoniques des espaces usuels . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . □
- Savoir déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . □

# I. Espaces vectoriels

## 1. Généralités

**Définition 19.1.**

Soit $E$ un ensemble non vide.

- On dit que la loi $+$ est une **loi de composition interne** sur $E$ si $\forall\ (x,y)\in E^2, x+y\in E$.
- On dit que la loi $\cdot$ est une **loi de composition externe** sur $E$ si $\forall\ x\in E, \forall\ \lambda\in\mathbb{R}, \lambda\cdot x\in E$.

**Exemple 19.1**

L'exemple le plus classique est l'ensemble des matrices $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La loi d'addition de matrices est une loi de composition interne, et la multiplication par un réel est une loi de composition externe.

**Définition 19.2.**

Soit $E$ un ensemble non vide, muni d'une loi interne, noté $+$, et d'une loi externe, noté $\cdot$. On dit que $E$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$ si les lois vérifient les propriétés suivantes :

Loi $+$
- (commutativité de $+$) : $\forall\ (x,y)\in E^2, x+y=y+x$.
- (associativité de $+$) : $\forall\ (x,y,z)\in E^3, (x+y)+z=x+(y+z)$
- (neutre pour $+$) : il existe un élément, noté $0_E$, tel que $\forall\ x\in E, x+0_E=0_E+x=x$.
- (symétrique pour $+$) : pour tout $x\in E$, il existe un élément $y\in E$, tel que $x+y=y+x=0_E$. Cet élément est appelé *symétrique* de $x$.

Loi $\cdot$
- (neutre pour $\cdot$) $\forall\ x\in E, 1.x=x$
- (distributivité de $\cdot$) $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}, \forall\ (x,y)\in E^2, \lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$
- (distributivité de $\cdot$) $\forall\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall\ x\in E, (\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$
- $\forall\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall\ x\in E, \lambda.(\mu.x)=(\lambda\times\mu).x$.

**Remarque**

Si $E$ est un espace vectoriel, les éléments de $E$ sont alors appelés les **vecteurs**, et les réels sont appelés les **scalaires**. L'élément $0_E$ est appelé vecteur nul.

Au lieu de dire « espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ » ou « $\mathbb{R}$-espace vectoriel », on dira plus simplement « espace vectoriel ».

**Remarque**

Les quatre premières propriétés font de $(E,+)$ ce qu'on appelle un **groupe abélien** ou groupe commutatif.

**Remarque**

Le symbole $\cdot$ de la loi de composition externe est très souvent omis. On notera plus souvent $2x$ plutôt que $2\cdot x$.

De même, on écrira $x-y$ plutôt que $x+(-y)$.

**Propriété 19.1.**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le vecteur nul $0_E$ est unique.

Quand la notation n'est pas ambigüe, on notera $0$ plutôt que $0_E$.

**Démonstration**

Soient $0_E$ et $0'_E$ deux éléments neutres. Alors

- Puisque $0_E$ est neutre, $0_E + 0'_E = 0'_E$ ;
- puisque $0'_E$ est neutre, $0_E + 0'_E = 0_E$.

On en déduit $0'_E = 0_E$.

**Propriété 19.2.**

Soit $E$ un espace vectoriel, et $x \in E$. Le symétrique de $x$ pour l'addition est unique, et est noté $-x$.

**Démonstration**

En effet, soient $y$ et $z$ deux symétriques de $x$. Alors

$$y + (x + z) = y + 0_E = y \quad \text{et} \quad (y + x) + z = 0_E + z = z.$$

Par associativité, $y = z$.

## 2. Règles de calculs

On se place ici dans un espace vectoriel $E$.

**Proposition 19.3.**

Pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y, z) \in E^3$, on a

- $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ et $0 \cdot x = 0_E$.
- Si $x + y = x + z$ alors $y = z$.
- $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$ et $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$. Ainsi,

$$(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -\lambda \cdot x.$$

**Démonstration**

- On utilise la distributivité :

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$

Ainsi, le vecteur $\lambda \cdot 0_E$ est un vecteur nul. Par unicité de celui-ci : $\lambda \cdot 0_E = 0_E$. De la même manière

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

et donc $0 \cdot x = 0_E$.

- On ré-écrit astucieusement :

$$(x + y) + (-x) = (x + (-x)) + y = y \quad \text{et} \quad (x + z) + (-x) = (x + (-x)) + z = z$$

Puisque $x + y = x + z$, on en déduit que $(x + y) + (-x) = (x + z) + (-x)$ et donc $y = z$.

- Toujours les mêmes astuces d'écriture :

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x - y + y) = \lambda \cdot (x - y) + \lambda \cdot y$$

et donc $\lambda \cdot (x - y) = (\lambda \cdot x) - (\lambda \cdot y)$. De même

$$\lambda \cdot x = (\lambda - \mu + \mu) \cdot x = (\lambda - \mu) \cdot x + \mu \cdot x$$

et ainsi $(\lambda-\mu)\cdot x=\lambda\cdot x-\mu\cdot x$. En utilisant alors les deux relations précédentes

$$(-\lambda)\cdot x=(0-\lambda)\cdot x=0\cdot x-\lambda\cdot x=-\lambda\cdot x$$

et

$$\lambda\cdot(-x)=\lambda\cdot(0_E-x)=\lambda\cdot 0_E-\lambda\cdot x=-\lambda\cdot x.$$

**Théorème 19.4.**

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, et $x\in E$. Alors

$$\lambda.x=0_E\Leftrightarrow x=0_E\quad\text{ou}\quad\lambda=0$$

**Démonstration**

Le sens $\Leftarrow$ a été montré précédemment. Pour le sens direct, supposons $\lambda\cdot x=0_E$ et $\lambda\neq 0$. Alors

$$x=1\cdot x=\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)\cdot x=\frac{1}{\lambda}\cdot(\lambda\cdot x)=\frac{1}{\lambda}\cdot 0_E=0_E.$$

## 3. Exemples fondamentaux

### a. Ensembles $\mathbb{R}^n$

Pour $n\geqslant 1$, on munit $\mathbb{R}^n$ des deux opérations suivantes :

- Si $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, on note
$$x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n).$$
- Si $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on note
$$\lambda\cdot u=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n).$$

**Proposition 19.5.**

$\mathbb{R}^n$, muni des deux lois précédentes, forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont le vecteur nul est $(0,\dots,0)$.

**Démonstration**

Les propriétés de la loi + découle des propriétés sur $\mathbb{R}$. L'élément neutre est $(0,\cdot,0)$ et tout vecteur $x=(x_1,\dots,x_n)$ admet pour opposé $-x=(-x_1,\dots,-x_n)$. Il nous faut démontrer les propriétés liant + et $\cdot$. Montrons-en une, les autres se démontrant de la même manière. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned}\lambda\cdot(x+y)&=\lambda\cdot(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\\&=(\lambda(x_1+y_1),\dots,\lambda(x_n+y_n))\\&=(\lambda x_1+\lambda y_1,\dots,\lambda x_n+\lambda y_n)\\&=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)+(\lambda y_1,\dots,\lambda y_n)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y\end{aligned}$$

### b. Ensemble de matrices

**Proposition 19.6. Matrices colonnes**

Les ensembles $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour $n\geqslant 1$, munis de l'addition de matrices, et de la multiplication par un réel, sont des espaces vectoriels.

**Démonstration**

En effet, si $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ alors

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ \vdots \\ b_n + a_n \end{pmatrix} = B + A$$

$$(A+B)+C = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ \vdots \\ (a_n + b_n) + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ \vdots \\ a_n + (b_n + c_n) \end{pmatrix} = A + (B + C)$$

$$A + 0_{n,1} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ \vdots \\ a_n + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + a_1 \\ \vdots \\ 0 + a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A$$

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} a_1 + (-a_1) \\ \vdots \\ a_n + (-a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{n,1}$$

$$1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1.a_1 \\ \vdots \\ 1.a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A$$

$$\lambda \cdot (A+B) = \lambda. \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a_1 + b_1) \\ \vdots \\ \lambda(a_n + b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n + \lambda b_n \end{pmatrix} = \lambda. \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda. \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot A + \lambda \cdot$$

$$(\lambda + \mu) \cdot A = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) a_1 \\ \vdots \\ (\lambda + \mu) a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n + \mu a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot A) = \lambda. \begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \vdots \\ \mu a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mu a_1 \\ \vdots \\ \lambda \mu a_n \end{pmatrix} = (\lambda \times \mu) \cdot A$$

On peut, de manière plus générale, montrer que :

**Proposition 19.7.** $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'ensemble des matrices $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ forme un espace-vectoriel, dont le vecteur nul est la matrice nulle.

### c. Ensemble de fonctions

Enfin, on dispose des résultats suivants :

**Proposition 19.8.**

- Pour tout entier $n$, $\mathbb{R}_n[X]$, et $\mathbb{R}[X]$ forment des espaces vectoriels, de vecteur nul le polynôme nul.
- L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel, de vecteur nul la suite constante nulle.
- Si $I$ est un intervalle, l'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur $I$ forme un espace vectoriel, de vecteur nul la fonction nulle sur $I$.

On peut même avoir des ensembles plus généraux :

**Proposition 19.9.**

Soient $A$ un ensemble quelconque, et $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour tout $(f, g) \in \mathcal{F}(A, E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $f + g \in \mathcal{F}(A, E)$ et $\lambda \cdot f \in \mathcal{F}(A, E)$ par

$$\forall x \in A, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Alors $\mathcal{F}(A, E)$, muni de ces deux lois, forme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

## 4. Combinaison linéaire

Soit $E$ un espace vectoriel.

**Définition 19.3.**

On appelle **famille finie de vecteurs** de $E$ une $n$-liste $(e_1, \dots, e_n)$ d'éléments de $E$.

**Exemple 19.2**

Si $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, alors $(A, B)$ désigne une famille de deux vecteurs de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

**Définition 19.4.**

Soient $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de $p$ vecteurs de $E$. Soit $x$ un vecteur de $E$. On dit que $x$ est une **combinaison linéaire** de la famille $(e_1, \dots, e_p)$ s'il existe des réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$$

Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont alors les **coefficients** de la combinaison linéaire.

**Remarque**

Il n'y a pas forcément unicité de la combinaison linéaire.

⚠ **Attention**

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on peut faire des combinaisons linéaires, mais pas forcément de produit entre vecteurs.

**Exemple 19.3**

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors, $2.A - 3.B = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $A$ et $B$.

Dans $\mathbb{R}[X]$, $P = 2X^4 + X^3 + 2X^2 - 1$ est combinaison linéaire des vecteurs $X^4 + X^2$ et $X^3 - 1$.

***Méthode***

Pour montrer qu'un vecteur $x$ est combinaison linéaire d'une famille $(e_1, \dots, e_p)$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et on résout un système pour déterminer (ou non) les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

 

**Exercice 19.4**
Notons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $X$ est combinaison linéaire de $A$ et $B$.

**Solution**
On écrit $X = \lambda A + \mu B$. On a alors

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 3\mu \\ 2\lambda + \mu \end{pmatrix}$$

On résout alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \lambda & - & 3\mu & = & -5 \\ 2\lambda & + & \mu & = & 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} \lambda & - & 3\mu & = & -5 \\ & & 7\mu & = & 14 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} \lambda & = & 1 \\ \mu & = & 2 \end{array} \right.$$

Ainsi, $X = A + 2B$.

## II. Sous-espace vectoriel

### 1. Définition

**Définition 19.5.**

Soit $E$ un espace vectoriel. Soit $F$ un sous ensemble de $E$ non vide. On dit que $F$ est un **sous-espace vectoriel** de $E$ si les restrictions des lois $+$ et $\cdot$ à $F$ font de $F$ un espace vectoriel.

**Exemple 19.5**
Si $E$ est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et $E$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.

**Propriété 19.10.**

Soit $F$ un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $E$. Alors $0_E \in F$ et $F$ est un espace vectoriel.

**Démonstration**
Par définition, $F$ est un espace vectoriel. Par propriété, si $x \in F$ (puisque $F$ est non vide), alors $0.x \in F$ c'est-à-dire $0_E \in F$.

**Remarque**
On prendra soin, lorsqu'on manipule des sous-espaces vectoriels, de noter les vecteurs de $E$ de manière cohérente. Par exemple :

- Si $E = \mathbb{R}^2$, on écrira $(x, y)$, $(x', y')$, $(x_1, y_1)$, ....
- Si $E = \mathbb{R}[X]$, on notera $P, Q, R, P_1, \dots$ et on évitera la notation $P', Q'$ pour ne pas confondre avec la dérivée.
- De même pour des espaces de fonctions, on notera $f, g, h, \dots$ et on évitera $f', g' \dots$
- Si $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on notera $u, v$ ou bien $(u_n), (v_n) \dots$
- Enfin, si $E = \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on notera $A, B, M, N, \dots$.

**Proposition 19.11.**

Soit $F$ un sous ensemble d'un espace vectoriel $E$. Alors, $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si

- $F \neq \varnothing$
- $\forall\ (x,y) \in F^2, x+y \in F$ ($F$ est stable par addition)
- $\forall\ x \in F, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.x \in F$ ($F$ est stable par multiplication par un scalaire)

**Remarque**

- La première propriété se vérifie en général en montrant que le neutre $0_E$ est dans $F$.
- Les deux dernières propriétés peuvent être regroupées en une seule :

$$\forall\ (x,y) \in F^2, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.x+y \in F$$

***Méthode***

On utilise la proposition précédente pour démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

**Exercice 19.6**

Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

**Solution**

En effet,

- $0_{2,1} \in F$ : il suffit de prendre $t=0$.
- Si $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda.A + B = \begin{pmatrix} \lambda a + b \\ 0 \end{pmatrix} \in F$$

en prenant $t = \lambda a + b$.

**Exercice 19.7**

Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad 2x+3y=0\}$, $G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\quad u_0 = 0\}$, $H = \{P \in \mathbb{R}[X],\quad P(1) = P(-1)\}$ et $I$ l'ensemble des applications croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $F$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$, $G$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $H$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$, mais que $I$ n'est pas un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

**Solution**

- $F$ contient $(0,0)$ puisque $2\times 0 + 3\times 0 = 0$. Soient $(x,y)$ et $(x',y')$ deux éléments de $F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda(x,y)+(x',y') = (\lambda x + x', \lambda y + y')$ vérifie :

$$2(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y') = \lambda(\underbrace{2x+3y}_{=0}) + (\underbrace{2x'+3y'}_{=0}) = 0$$

Ainsi, $\lambda(x,y)+(x',y') \in F$.
- La suite nulle est dans $G$. Soient $u, v$ deux suites de $G$ et $\lambda$ un réel. Alors $\lambda u + v = (\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et

$$(\lambda u + v)_0 = \lambda u_0 + v_0 = 0.$$

Ainsi, $\lambda u + v \in G$.
- Le polynôme nul vérifie $P(1) = P(-1)$ donc est dans $H$. Soient $P, Q$ deux polynômes de $H$, et $\lambda$ un réel. On constate alors que :
$$(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda P(-1) + Q(-1) = (\lambda P + Q)(-1)$$
et donc $\lambda P + Q \in H$.
- La fonction nulle est dans $I$ mais $I$ n'est pas stable : si $f \in I$, $-f$ est décroissante donc n'est pas dans $I$.

**Théorème 19.12.**

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire homogène de $n$ équations à $n$ inconnues. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

**Démonstration**

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice associée au système $\mathcal{S}$. Alors l'ensemble des solutions $F$ du système $(\mathcal{S})$ s'écrit également
$$F = \left\{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MX = 0_{n,1}\right\}$$
avec $0_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $F \subset \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $0_{n,1} \in F$. En effet, $M.0_{n,1} = 0_{n,1}$ par définition de la matrice nulle.
- Soient $X$ et $Y$ dans $F$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$M.(\lambda X + Y) = \lambda M.X + M.Y = 0_{n,1} + 0_{n,1} = 0_{n,1}$$
puisque $MX = MY = 0_{n,1}$. Donc $\lambda X + Y \in F$.

$F$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

☞ *Exercices 1, 2, 3 et 4*

**Proposition 19.13. Inclusions**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Si $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$, et si $F$ est un sous-espace vectoriel de $G$, alors $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
- Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, tels que $F \subset G$, alors $F$ est un sous-espace vectoriel de $G$.

## 2. Sous-espaces vectoriels usuels

Les espaces suivants sont des sous-espaces vectoriels à connaître, et si besoin, à savoir démontrer.
- $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- L'ensemble des suites réelles convergente est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors les ensembles des fonctions continues $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, dérivables $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- Les ensembles des matrices diagonales d'ordre $n$, triangulaires supérieures (resp. inférieures), symétriques et antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

**Attention**

$GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, puisqu'il ne contient pas la matrice nulle.

## 3. Intersection de sous-espace vectoriel

Une propriété importante : l'intersection de sous-espaces vectoriels reste un sous-espace vectoriel.

**Proposition 19.14.**

Soit $E$ un espace vectoriel.
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$. Alors $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Démonstration**

Tout d'abord, puisque $0_E \in F_i$ pour tout $i \in I$, on a $0_E \in F$. Ainsi, $F \neq \varnothing$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in F^2$. Alors, pour tout $i \in I$, $x \in F_i$ et $y \in F_i$. $F_i$ étant un sous-espace vectoriel de $E$, on en déduit que $\lambda x + y \in F_i$.
Ceci étant vrai pour tout $i \in I$, cela signifie que $\lambda x + y \in F$.

**Attention**

L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas (en général) un sous-espace vectoriel.

## 4. Sous-espaces engendrés

On se donne un espace vectoriel $E$.

**Définition 19.6.**

Soient $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de $E$. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $(e_1, \dots, e_p)$, et on note $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, l'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires de $(e_1, \dots, e_p)$ :

$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}.$$

Ainsi,

$$x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \Leftrightarrow \exists\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$$

Par convention, si $p = 0$, $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0\}$.

**Exemple 19.8**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$\mathrm{Vect}(A) = \{\lambda.A,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathrm{Vect}(A)$ est appelée **droite vectorielle**.

### Remarque

Si un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P = a_0 + \ldots + a_n X^n$ avec $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi, $P \in \text{Vect}(1, X, \ldots, X^n)$. On a donc

$$\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \ldots, X^n).$$

### Théorème 19.15.

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de $E$. Alors $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est un sous-espace vectoriel de $E$, contenant les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$.

### Propriété 19.16.

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de $E$. Alors

- $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille $(e_1, \ldots, e_p)$. Ainsi, si $F$ est un sous-espace vectoriel contenant $e_1, \ldots, e_p$, nécessairement, $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \subset F$.
- $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de $E$ contenant les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$.
- Si $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1})$ et si $e_{p+1}$ est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$, alors $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
- Si $(a_1, \ldots, a_p)$ sont des réels tous non nuls, et si $F = \text{Vect}(a_1 e_1, \ldots, a_p e_p)$, alors $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $F = \text{Vect}\left(e_1 + \sum\limits_{i=2}^{p} a_i e_i, e_2, \ldots, e_p\right)$.

### Démonstration

Par définition, $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est un sous-espace vectoriel, contenant la famille $(e_1, \ldots, e_p)$. Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ contenant $(e_1, \ldots, e_p)$, alors il contient toute combinaison linéaire des $(e_1, \ldots, e_n)$, et donc $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \subset F$.

Remarquons alors que, puisque tout sous-espace vectoriel de $E$ contenant $(e_1, \ldots, e_p)$ contient $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, alors

$$\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \subset \bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v.} \\ (e_i) \in F}} F.$$

Comme $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est un s.e.v. contenant les $(e_i)$,

$$\bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v.} \\ (e_i) \in F}} F \subset \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p).$$

D'où l'égalité.

Les deux derniers résultats viennent de la définition de $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

### Exemple 19.9

- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alors $\text{Vect}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.
- Soient $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Alors $\text{Vect}(A, B, C) = \text{Vect}(A, B)$ puisque $C = A + B$.
- Soit $F$ un sous-espace vectoriel contenant les vecteurs $A$ et $B$ précédents. Alors, nécessairement, $\text{Vect}(A, B) \subset F$.

**Remarque**

Les propriétés précédentes permettent de simplifier l'écriture des sous-espaces vectoriels engendrés :

- On peut enlever un vecteur nul de la famille.
- On peut enlever un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.
- On peut ajouter/soustraire un vecteur à un autre vecteur pour simplifier l'écriture.

**Exemple 19.10**

Soit $F = \text{Vect}(X + X^2 + X^3, 1, X, X^2 + 1, X^3)$. On remarque que,

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}(X + X^2 + X^3 + 1, 1, X, X^2 + 1 - 1, X^3) \\ &= \text{Vect}(X + X^3 + (X^2 + 1), 1, X, X^2, X^3) \\ &= \text{Vect}(1, X, X^2, X^3) = \mathbb{R}_3[X] \end{aligned}$$

☞ *Exercices 5 et 6*

## III. Familles libres, génératrices, bases d'un espace vectoriel

### 1. Définition

**Définition 19.7.**

Soit $E$ un espace vectoriel. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de $E$.
On dit que $\mathcal{B}$ est une **base** de $E$ si, pour tout vecteur $x$ de $E$, il existe une *unique* $n$-liste $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ de réels tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

Les réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont appelés les **coordonnées** de $x$ dans la base $\mathcal{B}$

**Exemple 19.11**

Si $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$, alors tout élément de $F$ s'écrit de manière unique sous la forme $t.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, la famille composée du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de $F$.

***Méthode***

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une base d'un espace vectoriel $E$, on prend $x \in E$ et on résout $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = x$. S'il existe une unique solution, alors $(e_1, \dots, e_p)$ est bien une base de $E$.

**Exemple 19.12**

Montrer que $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

**Solution**

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On cherche $a$ et $b$ tels que

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On résout le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & x \\ 2a & + & 3b & = & y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & x \\ & & b & = & y-2x \end{array}\right.$$

Le système est de Cramer, donc il possède une unique solution.

**Bilan** : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est bien une base de de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

**Exercice 19.13**

Montrer que la famille $(1, X-1, (X-1)^2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

**Solution**

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $a, b$ et $c$ trois réels tels que $P(X) = aX^2 + bX + c$. On cherche alors trois réels $x, y, z$ tels que

$$aX^2+bX+c = x\times 1+y\times(X-1)+z\times(X-1)^2 \Longleftrightarrow aX^2+bX+c = zX^2+(y-2z)X+x-y+z.$$

On doit donc résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{r} z = a \\ y-2z = b \\ x-y+\ \ z = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x-y+\ \ z = c \\ y-2z = b \\ z = a \end{array}\right.$$

qui est de Cramer. Il possède donc une unique solution, et $(1, X-1, (X-1)^2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

☞ *Exercices 9 et 10*

## 2. Famille libre, famille génératrice

Dans la définition d'une base, il y a deux éléments importants : l'existence d'une combinaison linéaire, et l'unicité de celle-ci. Cela nous amène à définir deux concepts :

**Définition 19.8.**

Soit $E$ un espace vectoriel. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de $E$.

- On dit que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est **libre** si

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

  Si elle n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.
- On dit que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est **génératrice** si $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = E$.

**Remarque**

Lorsqu'une famille est libre, cela implique que s'il y a une combinaison linéaire de ses éléments, celle-ci est forcément unique.

En effet, supposons que l'on puisse écrire

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i e_i$$

Alors, en soustrayant les deux expressions de $x$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0$$

Par définition de la liberté, cela implique que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, c'est-à-dire $\lambda_i = \mu_i$ : il y a bien unicité de la décomposition.

***Méthode***

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, on écrit $\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_p e_p = 0_E$ et on résout le système. S'il admet comme seule solution $(0, \dots, 0)$ alors elle est libre, sinon elle est liée.

**Exemple 19.14**

Montrer que la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est libre.

**Solution**

On cherche $a$ et $b$ deux réels tels que

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a + 2b \\ a + b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors $a = 0$ puis $b = 0$. Ainsi, la famille est libre.

**Remarque (Cas d'une famille de deux vecteurs)**

Lorsqu'une famille est composée de deux vecteurs $(u, v)$, celle-ci est liée si et seulement si il existe $(\alpha, \beta)$ tels que $\alpha u + \beta v = 0$, c'est-à-dire si un des vecteurs s'exprime comme un multiple de l'autre. Ainsi, si on voit rapidement que ce n'est pas le cas, on peut conclure : on signalera que les vecteurs ne sont pas **colinéaires**.

Par exemple, dans l'exercice 19.14, les deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires (par exemple, en regardant le 0 en 3$^{\text{e}}$ position). Ainsi, la famille est libre.

**Remarque (Cas des polynômes)**

Dans un cas particulier, on pourra rapidement signaler qu'une famille de polynôme est libre : si elle est échelonnée en degré.

**Définition 19.9.**

On dit qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}[X]$ est **échelonnée en degré** si elle est constituée de polynômes de degrés deux à deux distincts.

**Exemple 19.15**
Les familles $(1, X-1, (X-1)^2)$ et $(X, X^3, X^5)$ sont échelonnées en degré.

Alors :

**Théorème 19.17. Liberté d'une famille échelonnée en degré**

Toute famille de polynômes **non nul** échelonnée en degré est libre.

**Démonstration**

Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré, dans laquelle on suppose qu'on a ordonné les polynômes en ordre croissant de degré.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des réels tels que $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0$, et supposons que l'un des $\lambda_i$ au moins est non nul. On note alors

$$i_0 = \max\{i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \neq 0\}.$$

Mais alors

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{i_0} P_{i_0} = 0$$

ce qui est absurde puisque $\lambda_{i_0} \neq 0$ et $P_{i_0} \neq 0$. Ainsi, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ et la famille est libre.

☞ *Exercices 7 et 8*

***Méthode***

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice, on écrit $\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_p e_p = x$ avec $x \in E$ et on résout le système. S'il admet **au moins** une solution alors elle est génératrice, sinon elle ne l'est pas et on exhibe alors un contre-exemple.

**Remarque**

- Une famille libre est une famille dans laquelle aucun vecteur ne peut être exprimé comme combinaison linéaire des autres vecteurs. En effet, si c'est le cas, il existe un entier $i$ et des réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots \lambda_p)$ tels que
$$e_i = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{i-1} e_{i-1} + \lambda_{i+1} e_{i+1} + \dots + \lambda_p e_p$$
et donc la famille est liée.
Ainsi, tout vecteur est « utile » dans la famille.
- Une famille génératrice est une famille qui permet de récupérer, par combinaison linéaire, tout vecteur de E ; en revanche, plusieurs combinaisons linéaires peuvent mener au même vecteur : il n'y a pas forcément unicité de la décomposition.

***Méthode***

Pour déterminer une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel $F$, on se donne un vecteur $x$ de $F$ et on cherche des vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ de $F$ **qui ne dépendent pas de** $x$, et des réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

On conclut alors que $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de $F$.

### Exemple 19.16

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$.. Déterminer une famille génératrice de $F$.

### Solution

On constate que

$$\begin{aligned} F &= \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = -y - z\} \\ &= \{(-y - z, y, z),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

**Attention** : on ne peut pas écrire $F = \mathrm{Vect}((y - z, y, z))$ puisque cela dépend des coordonnées $(x, y, z)$ du vecteur ! Il faut trouver des vecteurs qui n'en dépendent pas. On continue donc :

$$F = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

Ainsi, $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ ne dépendent pas des coordonnées du vecteur ; on peut écrire

$$F = \mathrm{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)).$$

### Théorème 19.18. Lien entre famille libre, génératrice et base

Soit $E$ un espace vectoriel. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de $E$. $(e_1, \dots, e_p)$ est une base si et seulement si elle est libre et génératrice.

### Démonstration

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base, elle est génératrice par définition. De plus, elle est libre, puisque le vecteur nul n'admet qu'une unique représentation $(0, \dots, 0)$.

Réciproquement, si $(e_1, \dots, e_p)$ est libre et génératrice de $E$, tout vecteur de $E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des $(e_1, \dots, e_p)$, et nous avons vu que la liberté implique que cette combinaison est unique : $(e_1, \dots, e_p)$ est donc une base de $E$.

### Remarque

Si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors par définition, $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $F$. Si de plus elle est libre, c'est une base de $F$.

## 3. Bases canoniques usuelles

### Définition 19.10.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $e_1 = (1, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ des éléments de $\mathbb{R}^n$. Alors la famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ forme une **base**, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X, \dots, X^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{R}[X]$.
- Soient $n$ et $p$ deux entiers non nuls. Alors la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est matrices élémentaires forme une base de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée base canonique de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

### Remarque

Il n'y a pas unicité de la base. Par exemple, dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment également une base.

**Exemple 19.17**

Le polynôme $P = -X^2 + 4X - 2$ s'écrit également $P = 1 + 2(X-1) - (X-1)^2$. Ainsi :

- Dans la base canonique $(1, X, X^2)$ les coordonnées de $P$ sont $(-2, 4, -1)$ ;
- Dans la base $(1, X-1, (X-1)^2)$, ses coordonnées sont $(1, 2-1)$.

**Définition 19.11.**

Nous verrons plus tard que, lorsqu'une base existe, toute base d'un espace vectoriel possède le même nombre d'éléments : ainsi, dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, les bases possèdent 2 vecteurs. On appelle ce nombre la **dimension** de l'espace vectoriel, et on le notera $\dim(E)$.

**Exemple 19.18**

$\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 2, et plus généralement $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension $n \times p$.
$\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, et $\mathbb{R}^n$ est de dimension $n$.

***Méthode***

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, on détermine d'abord une base, et on conclut. Pour cela, on essaie de l'expliciter comme un espace vectoriel engendré par une certaine famille de vecteurs. On vérifie ensuite si celle-ci est libre.

**Exemple 19.19**

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ x + y = 0 \right\}$. Déterminer la dimension de $F$.

**Solution**

Remarquons qu'on peut écrire

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ y = -x \right\}$$

soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

Ainsi,

$$F = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

et donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $F$ :

$$F = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

et $\dim(F) = 1$.

☞ *Exercice 11*

# Exercices 19

## Exercices

### Sous-espaces vectoriels

●○○ **Exercice 1** Sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ (20 min.)

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou de $\mathbb{R}^n$, pour un certain $n$ :

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 2x + 3y = 0 \right\}$
3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x^2 + y = 0 \right\}$
4. $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
5. $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x + y = 0 \text{ et } x - y - 2z = 0 \right\}$
6. $F_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 0,\ x - y + z = 0\}$.
7. $F_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ 2x + z = 0,\ x - y - 2z = 0,\ y + 2z = 0 \right\}$
8. $F_8 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ a+2b \\ a-b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

●○○ **Exercice 2** Des sous-espaces et des matrices (10 min.)

On se donne $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On note

$$E = \left\{ M \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad AM = 0 \right\} \text{ et } F = \{ M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), \quad AM = MA \}$$

Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et que $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

●○○ **Exercice 3** Polynômes (15 min.)

Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces-vectoriels :

1. L'ensemble des polynômes de degré $n$, avec $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $A \in \mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $A \mid P$.
3. L'ensemble des polynômes ayant 0 comme racine.
4. L'ensemble des polynômes ayant 0 comme racine double.
5. L'ensemble des polynômes $P$ vérifiant $P(1) = P(-1)$.

●○○ **Exercice 4** Espaces de suites et fonctions (25 min.)

Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces-vectoriels :

1. L'ensemble des suites réelles bornées.
2. L'ensemble des suites réelles croissantes.
3. L'ensemble des suites arithmétiques.
4. L'ensemble des suites géométriques.
5. L'ensemble $E_{a,b}$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de paramètres $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
6. L'ensemble des suites convergentes.
7. L'ensemble des suites convergentes de limite 1.
8. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent.

9. L'ensemble des fonctions $T$-périodiques (où $T$ est fixé).
10. L'ensemble des bijections de $[a,\, b]$ dans $\mathbb{R}$.
11. L'ensemble des fonctions continues sur $[a,\, b]$, d'intégrale nulle sur $[a,\, b]$.

### ●○○ Exercice 5 Combinaisons linéaires (10 min.)

On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ sont des combinaisons linéaires de $e_1$ et $e_2$. Déterminer $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

### ●○○ Exercice 6 Egalité de sous-espaces vectoriels (10 min.)

On note $u = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(w, x)$.

***Méthode***

Pour montrer une égalité d'espace avec des sous-espaces vectoriels, on procède par double inclusion : si $E \subset F$ et $F \subset E$ alors $E = F$.
Enfin, rappelons que si $(e_1, \cdots e_n) \in F^n$, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) \subset F$, qui va nous servir ici.

## Familles libres, génératrices, bases

### ●○○ Exercice 7 Libéréééééé, ... (10 min.)

La famille $(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est-elle libre, où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

### ●○○ Exercice 8 Liberté chérie (20 min.)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées. Si elles sont liées, donner une relation de dépendance.

1. $(2, 2, 1), (1, 3, 1), (-2, 1, 3)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto \mathrm{e}^x, \ldots, x \mapsto \mathrm{e}^{nx})$.
4. Les suites $(u, v, w)$ définies par
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 1,\ v_n = 2^n,\ w_n = 3^n.$$
5. $((X-1)(X-2), (X-1)(X-3), (X-2)(X-3))$.

### ●○○ Exercice 9 Une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (10 min.)

On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

●○○ **Exercice 10 Retour à la base** (20 min.)

Déterminer si les familles suivantes forment des bases des espaces vectoriels indiqués.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

●○○ **Exercice 11 Systèmes de générateurs** (20 min.)

Pour chacun des espaces suivants, déterminer un système de générateurs, et en déduire que ce sont des sous-espaces vectoriels.

- $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad x - y + 2z = 0 \right\}$.
- $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad x + y + 2z = 0,\ 2x - y - z = 0 \right\}$.
- $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad x + t = 0,\ x + y - z = 0 \right\}$.

●○○ **Exercice 12 Des générateurs** (20 min.)

Pour chacun des espaces suivants, montrer que ce sont des espaces vectoriels et déterminer une famille génératrice.

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y = 0\}$.
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$.
3. $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x + \ \ y + 2z = 0 \\ -x + 3y + \ \ z = 0 \end{cases} \right\}$.
4. $\{(2y + z, y - 2x, z + x),\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.
5. $\{\ P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = 0\}$.
6. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall\, n \geqslant 3, u_n = 0\}$.

●●○ **Exercice 13 Matrices symétriques, matrices antisymétriques** (15 min.)

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer une base de l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles d'ordre $n$, et une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices antisyémtriques réelles d'ordre $n$.

●○○ **Exercice 14 Des bases** (20 min.)

Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $\mathrm{Vect}((2, 1, 3), (-2, 2, -1), (6, -3, 5))$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + 3z = 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = P'(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ $(n \geqslant 2)$.
4. $\{\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(-1) = P(1)\}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ $(n \geqslant 2)$.

## Pour aller plus loin

●●○ **Exercice 15 De la division euclidienne** (15 min.)

Soient $a$ et $b$ deux réels distincts. On note $P_1 = 1$, $P_2 = (X - a)$ et $P_3 = (X - a)(X - b)$.

1. Démontrer que $(P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de $P$ dans la base $(P_1, P_2, P_3)$, en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

## ●●○ Exercice 16 Un ensemble trigonométrique (20 min.)

Soit $F$ l'ensemble

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(2x) + b\cos(x) + c\}\,.$$

1. Montrer que $F$ est un espace-vectoriel, dont on déterminera une base.
2. La famille $(x \longmapsto \cos^2(x),\ x \longmapsto \cos(x),\ x \longmapsto 1)$ est-elle une base de $F$?
3. Montrer que la famille $(\cos^2, \sin^2, \cos)$ est une base de $F$.
4. Déterminer les coordonnées de $f : x \longmapsto 1 + \cos(x) + \cos^2(x)$ dans les bases précédentes.

## ●●○ Exercice 17 Un ensemble de matrice (20 min.)

On note

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$, la plus simple possible, de $E$.
3. Démontrer que $E \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) = \varnothing$.
4. Soit $M \in E$.
   a) Calculer $M^2$ et $M^3$. Montrer que $M^3 \in E$.
   b) Déterminer les coordonnées de $M^3$ dans la base $\mathcal{B}$, en fonction des coordonnées de $M$.
   c) En déduire un polynôme annulateur de $M$.
   d) Soit $n$ un entier. Exprimer $M^n$ en fonction de $n$, $M$, $M^2$ et des coordonnées de $M$ dans la base $\mathcal{B}$.

 

# Corrigés

## Corrigés des exercices

### Exercice 1

- $F_1$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

**Première méthode** : on constate que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F_1$. Ainsi, $F_1$ ne peut pas être un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

**Deuxième méthode** : on remarque que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_1$ et pourtant $2x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin F_1$.

- $F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. En effet, $F_2$ est non vide, puisque la matrice nulle y est. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux éléments de $F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \end{pmatrix}$$

et

$$2(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y') = \lambda(\underbrace{2x + 3y}_{=0 \text{ car } u \in F_2}) + (\underbrace{2x' + 3y'}_{=0 \text{ car } v \in F_2}) = 0$$

Donc $\lambda u + v \in F_2$.

- $F_3$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. En effet, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in F_3$ (car $1^2 - 1 = 0$), et pourtant $2x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \notin F_3$ car $2^2 - 2 = 2 \neq 0$.

- $F_4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En effet, $F_4$ est non vide puisque le vecteur nul y est. De plus, soient $u = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ 2x' \\ x' \end{pmatrix}$ deux éléments de $F_4$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ 2(\lambda x + x') \\ \lambda x + x' \end{pmatrix}$$

donc $\lambda u + v \in F_4$.

- $F_5$ est non vide, puisque le vecteur nul y est ($0+0 = 0$ et $0-0-2\times 0 = 0$). Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $F_5$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix}$$

qui vérifie

$$(\lambda x + x') + (\lambda y + y') = \lambda(\underbrace{x + y}_{=0 \text{ car } u \in F_5}) + \underbrace{x' + y'}_{=0 \text{ car } v \in F_5} = 0$$

$$\text{et } (\lambda x+x')-(\lambda y+y')-2(\lambda z+z') = \lambda(\underbrace{x-y-2z}_{=0 \text{ car } u\in F_5}) + (\underbrace{x'-y'-2z'}_{=0 \text{ car } v\in F_5}) = 0$$

donc $\lambda u + v \in F_5$ : $F_5$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- $F_6$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$. On constate que $(0,0,0) \in F_6$ : en effet, $0+0+0=0$ et $0-0+0=0$. Donc $F_6$ n'est pas vide.

Soient alors $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$ deux vecteurs de $F_6$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut écrire

$$\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$$

On constate alors que :

$$(\lambda x+x')+(\lambda y+y')+(\lambda z+z') = \lambda(\underbrace{x+y+z}_{=0 \text{ car } u\in F_6}) + (\underbrace{x'+y'+z'}_{=0 \text{ car } v\in F_6}) = 0$$
$$(\lambda x+x')-(\lambda y+y')+(\lambda z+z') = \lambda(\underbrace{x-y+z}_{=0 \text{ car } u\in F_6}) + (\underbrace{x'-y'+z'}_{=0 \text{ car } v\in F_6}) = 0$$

Ainsi, $\lambda u + v \in F_6$.

On peut conclure que $F_7$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- $F_6$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On constate que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F_7$ : en effet, $2\times 0 + 0 = 0$, $0-0-2\times 0 = 0$ et $0 + 2\times 0 = 0$. Donc $F_7$ n'est pas vide.

Soient alors $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $F_7$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut écrire

$$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix}$$

On constate alors que :

$$2(\lambda x+x')+(\lambda z+z') = \lambda(\underbrace{2x+z}_{=0 \text{ car } u\in F_7}) + (\underbrace{2x'+z'}_{=0 \text{ car } v\in F_7}) = 0$$
$$(\lambda x+x')-(\lambda y+y')-2(\lambda z+z') = \lambda(\underbrace{x-y-2z}_{=0 \text{ car } u\in F_7}) + (\underbrace{x'-y'-2z'}_{=0 \text{ car } v\in F_7}) = 0$$
$$(\lambda y+y')+2(\lambda z+z') = \lambda(\underbrace{y+2z}_{=0 \text{ car } u\in F_7}) + (\underbrace{y'+2z'}_{=0 \text{ car } v\in F_7}) = 0$$

Ainsi, $\lambda u + v \in F_7$.

On peut conclure que $F_7$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- $F_8$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On constate que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F_8$ : en effet, en prenant $a=b=0$, on obtient le vecteur nul. Donc $F_8$ n'est pas vide.

Soient alors $u = \begin{pmatrix} a+b \\ a+2b \\ a-b \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} a'+b' \\ a'+2b' \\ a'-b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $F_8$ (avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}^4$), et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut écrire

$$\begin{aligned} \lambda u + v &= \lambda \begin{pmatrix} a+b \\ a+2b \\ a-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+b' \\ a'+2b' \\ a'-b' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda b + a' + b' \\ \lambda a + 2\lambda b + a' + 2b' \\ \lambda a - \lambda b + a' - b' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda a + a') + (\lambda b + b') \\ (\lambda a + a') + 2(\lambda b + b') \\ (\lambda a + a') - (\lambda b + b') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut donc écrire $\lambda u+v = \begin{pmatrix} a''+b'' \\ a''+2b'' \\ a''-b'' \end{pmatrix}$ avec $a'' = \lambda a+a'$ et $b'' = \lambda b+b'$ : ainsi, $\lambda u+v \in F_8$.
On peut conclure que $F_8$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

## Exercice 2

Tout d'abord, $E$ et $F$ sont non vide, puisque la matrice $0_{3,1}$ vérifie $A0_{3,1} = 0_{3,1}$ et la matrice nulle $0_3$ vérifie $0_3A = A0_3 = 0_3$. Il est à montrer que ces deux ensembles sont stables par combinaisons linéaires.

- Soient $M, N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on constate que

$$A(\lambda M+N) = \lambda \underbrace{AM}_{=0} + \underbrace{AN}_{=0} = 0$$

ainsi, $\lambda M + N \in E$ et $E$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- De même, soient $M, N \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$(\lambda M+N)A = \lambda \underbrace{MA}_{=AM} + \underbrace{NA}_{=AN} = \lambda AM + AN = A(\lambda M+N)$$

donc $\lambda M + N \in F$ et $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

## Exercice 3

1. Ce n'est pas un espace vectoriel, puisque le polynôme nul n'y est pas.
2. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Le polynôme nul y est, et si $P, Q$ sont divisibles par $A$, ils s'écrivent $P = AR$ et $Q = AS$ pour $R$ et $S$ deux polynômes. Alors

$$\lambda P + Q = \lambda AR + AS = A(\lambda R + S)$$

et $A$ divise $\lambda P + Q$.
3. Il suffit d'utiliser le cas précédent avec $A = X$.
4. Ce n'est pas un espace vectoriel : $X^2$ et $-X^2$ sont des polynômes ayant 0 comme racine double, mais leur somme est nulle donc 0 n'est pas racine double.
5. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Le polynôme nul vérifie $P(1) = P(-1)$ et si $P, Q$ vérifient la propriété, alors

$$(\lambda P+Q)(-1) = \lambda P(-1) + Q(-1) = \lambda P(1) + Q(1) = (\lambda P+Q)(1).$$

## Exercice 4

1. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ : la suite nulle est dedans, et si deux suites $u$ et $v$ sont bornées, $\lambda u + v$ l'est aussi pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Ce n'est pas un espace vectoriel : si $u$ est croissante non constante, $-u$ ne l'est pas, donc il n'y a pas stabilité par multiplication par un scalaire.
3. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite nulle est arithmétique (de raison 0). Si $u$ est arithmétique de raison $a$, $v$ est arithmétique de raison $b$ alors

$$\forall n,\ (\lambda u+v)_{n+1} = \lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \lambda(u_n + a) + v_n + b = (\lambda u+v)_n + \lambda a + b$$

est arithmétique de raison $\lambda a + b$.
4. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Prenons $u$ et $v$ les suites

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 \quad \text{et} \quad v_n = 2^n.$$

Ces suites sont géométriques (de raison respective 1 et 2). Et pourtant $u + v$ n'est pas géométrique :

$$\frac{(u+v)_1}{(u+v)_0} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{(u+v)_2}{(u+v)_1} = \frac{5}{3} \neq 3.$$

5. Par le même raisonnement que le 3, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
6. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ : la suite nulle converge, et si deux suites $u$ et $v$ convergent, alors $\lambda u + v$ convergent par opération sur les limites.
7. Ce n'est pas un espace-vectoriel : la suite nulle n'y est pas.
8. Ce n'est pas un espace-vectoriel. Si $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^2 - 1$, ces deux fonctions s'annulent et pourtant $f - g : x \mapsto 1$ ne s'annule pas.
9. C'est un sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La suite nulle est $T$ périodique, et si $f, g$ sont $T$ périodiques, alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (\lambda f + g)(x+T) = \lambda f(x+T) + g(x+T) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x).$$

10. Ce n'est pas un espace vectoriel : la fonction nulle n'y est pas.
11. C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur $[a,\, b]$. La fonction nulle y est, et si $f$ et $g$ y sont, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t) = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

## Exercice 5

Cherchons $x$ et $y$ deux réels tels que $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$. Ainsi

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

Après résolution, on obtient $x = 1$ et $y = 2$. Ainsi, $u = e_1 + 2e_2$ est bien combinaison linéaire de $e_1$ et $e_2$.

De la même manière, on obtient $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = e_1 - 2e_2$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = 3e_1 - 2e_2$ qui sont donc bien des combinaisons linéaires de $e_1$ et $e_2$.

Enfin, par définition, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \{xe_1 + ye_2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \\ 2x-y \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

## Exercice 6

Montrons que $u$ et $v$ sont dans $\mathrm{Vect}(w, x)$. Dans ce cas, par propriété, $\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathrm{Vect}(w, x)$.

Remarquons (ou démontrons selon la méthode de l'exercice précédent) que $u = 5w - x$ donc $u \in \mathrm{Vect}(w, x)$. De même, $v = 4w - x$ donc $v \in \mathrm{Vect}(w, x)$. Par définition de l'espace vectoriel engendré, on en déduit donc $\boxed{\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathrm{Vect}(w, x)}$.

De même, $w = u - v$ donc $w \in \mathrm{Vect}(u, v)$, et $x = 4u - 5v$ donc $x \in \mathrm{Vect}(u, v)$. Par définition de l'espace vectoriel engendré, on en déduit donc que $\boxed{\mathrm{Vect}(w, x) \subset \mathrm{Vect}(u, v)}$.

Par double inclusion, $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(w, )$.

## Exercice 7

Soient $x, y, z$ trois réels vérifiant $xe_1 + ye_2 + ze_3 = 0$. Alors

$$\begin{pmatrix} x+2y \\ x+y-z \\ -x+3y+5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On résout donc le système

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

soit

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & & & = & 0 & \\ & - & y & - & z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & 5y & + & 5z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

Remarquons enfin que les deux dernières lignes sont les mêmes. Donc le système est dégénéré et admet donc une infinité de solution. Ainsi,

$$\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est liée}}$$

## Exercice 8

On applique naïvement la méthode.

1. Soient $a, b$ et $c$ trois réels tels que $a(2,2,1) + b(1,3,1) + c(-2,1,3) = (0,0,0)$. On peut alors écrire

$$(2a + b - 2c, 2a + 3b + c = 0, a + b + 3c) = (0,0,0)$$

On résout le système :

$$\left\{\begin{aligned} 2a + \ \ b - 2c &= 0 \\ 2a + 3b + \ \ c &= 0 \\ a + \ \ b + 3c &= 0 \end{aligned}\right. \sim \left\{\begin{aligned} 2a + \ \ b - 2c &= 0 \\ -2b - 3c &= 0 \\ 8c &= 0 \end{aligned}\right.$$

Le système est de Cramer : le système homogène admet donc une unique solution : $(0,0,0)$. Ainsi, la seule solution est $a = b = c = 0$ : la famille est donc libre.

2. On fait de même : soient $a, b$ et $c$ trois réels tels que

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ce qu'on écrit

$$\begin{pmatrix}a + 3c\\b - c\\3a + 2b + 7c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

On résout alors le système :

$$\left\{\begin{aligned} a \qquad + 3c &= 0 \\ b - \ \ c &= 0 \\ 3a + 2b + 7c &= 0 \end{aligned}\right. \sim \left\{\begin{aligned} a \qquad + 3c &= 0 \\ b - \ \ c &= 0 \\ 2b - 2c &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{aligned} a \qquad + 3c \qquad &= 0 \\ b - \ \ c \qquad &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Le système est dégénéré, donc la famille ne sera pas libre. Il faut cependant exhiber une combinaison linéaire, c'est-à-dire une soluton du système. Par exemple, en prenant $c = 1$, on obtient $b = 1$ puis $a = -3$. Ainsi :

$$-3\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

La famille est donc liée.

3. Soient $\lambda_0, \dots \lambda_n$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \dots \lambda_n \mathrm{e}^{nx} = 0.$$
Supposons par l'absurde qu'il existe un des $\lambda_i$ non nul. Notons $i_0$ l'indice le plus grand tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Alors
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \dots + \lambda_{i_0} \mathrm{e}^{i_0 x} = 0$$
et puisque $\lambda_{i_0} \neq 0$, par passage à la limite quand $x$ tend vers $+\infty$, on obtient une limite infinie (ou égale à $\lambda_0$ si $i_0 = 0$) qui est donc non nulle : c'est absurde.
La famille est donc libre.
4. Soient $a, b$ et $c$ trois réels tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_n + bv_n + cw_n = 0 \implies a + b2^n + c3^n = 0.$$
En prenant respectivement $n = 0, 1$ et $2$, on obtient le système
$$\begin{cases} a + \ \ b + \ \ c = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \\ a + 4b + 9c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + \ \ b + \ \ c = 0 \\ \qquad b + 2c = 0 \\ \quad 3b + 8c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + \ \ c = 0 \\ \qquad b + 2c = 0 \\ \qquad\quad 2c = 0 \end{cases}.$$
le système est de Cramer et homogène et admet donc comme unique solution $(0, 0, 0)$ : la famille est libre.
5. Soient $a, b$ et $c$ trois réels tels que $a(X-1)(X-2) + b(X-1)(X-3) + c(X-2)(X-3) = 0$. En évaluant en $1, 2$ et $3$, on obtient
$$\begin{cases} \qquad\quad 2c = 0 \\ \quad -b \qquad = 0 \\ 2a \qquad\quad = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$
La famille est donc libre.

## Exercice 9

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe une unique combinaison linéaire telle que $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$. On cherche donc à résoudre
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix}$$
d'inconnue $\lambda_1, \lambda_2$ et $\lambda_3$. On résout donc le système
$$(S) \begin{cases} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & x \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & y \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & z \end{cases}$$
Ainsi
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & x & \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & z & \end{cases}$$
et donc
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & x & \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & y - x & \\ & & & & \lambda_3 & = & z - y + x & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$
Le système triangulaire possède trois pivots non nuls : il est donc de Cramer, et le système $(S)$ admet donc une unique solution. Ainsi, $u$ s'écrit bien de manière unique sous la forme d'une combinaison linéaire de $e_1, e_2$ et $e_3$ :

$$\boxed{(e_1, e_2, e_2) \text{ forme bien une base de } \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

## Exercice 10

1. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On cherche $\lambda$ et $\mu$ tels que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} \mu + \lambda = a \\ 2\lambda - 2\mu = b \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ -4\mu = b - 2a \end{cases}$$

Le système est de Cramer et admet donc une unique solution. Par définition, la famille $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est donc une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

2. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On cherche $x, y$ et $z$ tels que

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On résout le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = a \\ x + y + 2z = b \\ 5x + 4y + 3z = c \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 2z = b \\ -y - 7z = a - 3b \\ -y - 7z = c - 5b \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y + 2z = b \\ -y - 7z = a - 3b \\ 0 = c - 2b - a \end{cases}$$

Ainsi, si $c - 2b - a \neq 0$, le système n'a pas de solution. Ainsi, par exemple (en prenant $a = 1, b = 0$ et $c = 2$) la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de la famille. Ainsi, la famille $\left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ ne peut pas être une base (elle n'est pas génératrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$).

## Exercice 11

***Méthode***

Pour déterminer un système de générateurs, on ré-écrit les sous-espaces de manière à pouvoir les écrire comme un espace vectoriel engendré.

On écrit :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad x - y + 2z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad x = y - 2z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

La famille $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice de $F_1$. On peut même dire qu'elle est libre (car composée de deux vecteurs non colinéaires) donc est une base de $F_1$. Pour $F_2$, on obtient de même :

$$\begin{aligned}
F_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - \ \ z = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad \begin{cases} x + \ \ y + 2z = 0 \\ \quad -3y - 5z = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} z \\ y = -\frac{5}{3} z \end{cases}, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} z \\ -\frac{5}{3} z \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une famille génératrice (et étant composée d'un seul vecteur non nul, c'est même une base). On peut également prendre comme générateur $\left( \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

Enfin :

$$\begin{aligned}F_3 &= \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad x+t=0,\ x+y-z=0\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad x=-t,\ y=z+t\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix} -t & z+t \\ z & t\end{pmatrix}, \quad (z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}\\ &= \left\{t\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad (z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}\\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $F_3$. Elle est même une base car la famille est composée de deux vecteurs non colinéaires.

## Exercice 12

On va écrire chacun des ensembles comme un sous-espace vectoriel engendré, ce qui justifiera que c'est un espace vectoriel, et on aura une famille génératrice.

1. Rapidement :

$$\begin{aligned}E_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x-y=0\} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x=y\}\\ &= \{(x,x),\ x\in\mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{Vect}((1,1))\end{aligned}$$

Ainsi, $E_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, de famille génératrice $(1,1)$.

2. De même :

$$\begin{aligned}\{E_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y-z=0\} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z=x+y\}\\ &= \{(x,y,x+y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \{x(1,0,1)+y(0,1,1),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}((1,0,1),(0,1,1))\end{aligned}$$

$E_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, de famille génératrice $((1,0,1),(0,1,1))$.

3. En résolvant :

$$\begin{aligned}E_3 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x+\ \ y+2z=0\\ -x+3y+\ \ z=0\end{cases}\right\} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x=-\frac{5}{4}z\\ y=-\frac{3}{4}z\end{cases}, z\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \{\left(-\frac{5}{4}z,-\frac{3}{4}z,z\right),\ z\in\mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{Vect}\left(\left(-\frac{5}{4},-\frac{3}{4},1\right)\right) = \operatorname{Vect}\left((-5,-3,4)\right)\end{aligned}$$

Donc $E_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, de famille génératrice $(-5,-3,4)$.

4. On a :

$$\begin{aligned}E_4 = \{(2y+z,y-2x,z+x),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\} &= \{x(0,-2,1)+y(2,1,0)+z(1,0,1),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}\\ &= \operatorname{Vect}\left((0,-2,1),(2,1,0),(1,0,1)\right).\end{aligned}$$

$E_4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, de famille génératrice $((0,-2,1),(2,1,0),(1,0,1))$.

5. $P\in E_5=\{P\in\mathbb{R}_3[X],\ P(1)=0\}$ si et seulement s'il existe $a,b,c,d$ des réels tels que $P(X)=aX^3+bX^2+cX+d$ avec $P(1)=0=a+b+c+d$. Ainsi :

$$\begin{aligned}E_5 &= \{aX^3+bX^2+cX+d,\ a+b+c+d=0\}\\ &= \{aX^3+bX^2+cX+(-a-b-c),\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}\\ &= \{a(X^3-1)+b(X^2-1)+c(X-1),\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}.\end{aligned}$$

Ainsi, $E_5$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, de famille génératrice $(X^3-1, X^2-1, X-1)$.
**Autre méthode** : $P(1)=0$ si et seulement si $P$ est factorisable par $X-1$. Ainsi $P \in E_5$ si et seulement s'il existe $a,b,c$ tels que $P(X)=(X-1)(aX^2+bX+c)$. Donc

$$\begin{aligned} E_5 &= \{(X-1)(aX^2+bX+c),\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\} \\ &= \{aX^2(X-1)+bX(X-1)+c(X-1),\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}(X^2(X-1), X(X-1), X-1) \end{aligned}$$

On obtient une autre famille génératrice : $(X^2(X-1), X(X-1), X-1)$.
6. Une suite $u$ est élément de $E_6 = \{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall\, n \geqslant 3,\ u_n = 0\}$ si et seuleemnt si $u$ vérifie :

$$u_0 = a \in \mathbb{R}, u_1 = b \in \mathbb{R}, u_2 = c \in \mathbb{R}, \forall\, n \geqslant q3, u_n = 0$$

soit

$$u = a(1,0,0,\ldots) + b(0,1,0,\ldots) + c(0,0,1,0,\ldots)$$

En notant $e_1, e_2, e_3$ les suites définies respectivement par $e_1 = (1,0,\ldots)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots)$ et $e_3 = (0,0,1,0,\ldots)$, on peut écrire

$$u = ae_1 + be_2 + ce_3.$$

Ainsi,

$$E_6 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$$

et $E_6$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de famille génératrice $(e_1, e_2, e_3)$.

## Exercice 13

Une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A$ s'écrit (en notant $(E_{i,j})$ les matrices élémentaires)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ &= a_{1,1}E_{1,1} + a_{1,2}(E_{1,2}+E_{2,1}) + \ldots + a_{1,n}(E_{1,n}+E_{n,1}) + \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}E_{i,i} + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ i\neq j}} a_{i,j}\left(E_{i,j}+E_{j,i}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\left(E_{i,i}, E_{i,j}+E_{j,i}\right)$ est une famille génératrice, qui est libre : en effet, si une combinaison linéaire de ses matrices est nulle, on obtient rapidement tous les coefficients nulles.
Par le même raisonnement, $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ -a_{1,3} & -a_{2,3} & 0 & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1,n} & -a_{2,n} & -a_{3,n} & \ldots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ i\neq j}} a_{i,j}\left(E_{i,j}-E_{j,i}\right) \end{aligned}$$

La famille $(E_{i,j}-E_{j,i})$ est donc une famille génératrice, qui est également libre (même raisonnement).

 

## Exercice 14

Pour chacun des exemples, on détermine d'abord une famille génératrice, et on démontre qu'elle est libre (ou pas).

1. Par définition, la famille $((2,1,3),(-2,2,-1),(6,-3,5))$ est génératrice de

$$E_1 = \mathrm{Vect}((2,1,3),(-2,2,-1),(6,-3,5)).$$

Voyons si elle est libre. Soient $a,b,c$ trois réels tels que

$$a(2,1,3)+b(-2,2,-1)+c(6,-3,5)=(0,0,0).$$

On résout alors :

$$\begin{cases} 2a-2b+6c=0\\ a+2b-3c=0\\ 3a-\phantom{2}b+5c=0\end{cases} \iff \begin{cases} a+2b-\phantom{1}3c=0\\ -6b+12c=0\\ -7b+14c=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+2b-3c=0\\ -\phantom{2}b+2c=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=-c\\ b=\phantom{-}2c\end{cases}, c\in\mathbb{R}$$

Ainsi, la famille est liée : par exemple, pour $c=1$,

$$-(2,1,3)+2(-2,2,-1)+(6,-3,5)=(0,0,0)$$

$(6,-3,5)$ peut s'exprimer en fonction des deux autres. On a alors

$$E_1=\mathrm{Vect}((2,1,3),(-2,2,-1),(6,-3,5))=\mathrm{Vect}((2,1,3),(-2,2,-1))$$

et cette dernière est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires.
Une base de $E_1$ est donc $((2,1,3),(-2,2,-1))$

2. De même

$$\begin{aligned} E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+2y+3z=0\} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x=-2y-3z\}\\ &=\{(-2y-3z,y,z),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\}\\ &=\mathrm{Vect}(-2,1,0),(-3,0,1)).\end{aligned}$$

La famille $((-2,1,0),(-3,0,1))$ est libre (car les vecteurs ne sont pas colinéaires) et forme donc une base de $E_2$.

3. $P\in E_3=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ P(1)=P'(1)=0\}$ si et seulement si $P$ s'écrit $(X-1)^2Q(X)$ avec $Q\in\mathbb{R}_{n-2}[X]$, c'est-à-dire si et seulement si

$$P=(X-1)^2(a_{n-2}X^{n-2}+a_{n-3}X^{n-3}+\dots+a_0)=a_{n-2}X^{n-2}(X-1)^2+a_{n-3}X^{n-3}(X-1)^2+\dots+a_0(X-1)^2.$$

Ainsi,

$$E_3=\mathrm{Vect}(X^{n-2}(X-1)^2,X^{n-3}(X-1)^2,\dots(X-1)^2).$$

La famille $(X^{n-2}(X-1)^2,X^{n-3}(X-1)^2,\dots(X-1)^2)$ est libre car constituée de polynômes échelonnées en degré,et forme donc une base de $E_3$.

4. $P\in E_4=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ P(1)=P(-1)\}$ si et seulement si $P=\sum\limits_{k=0}^n a_kX^k$ avec

$$a_n+\dots+a_0=(-1)^na_n+(-1)^{n-1}a_{n-1}+\dots+a_0 \iff a_1=-\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 2k+1\leqslant n}} a_{2k+1}$$

Ainsi, $P=\sum\limits_{k=0}^n a_kX^k\in E_4$ si et seulement si

$$P=\sum_{k=2}^n a_kX^k - X\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 2k+1\leqslant n}} a_{2k+1}+a_0$$

Ainsi,

$$E_4 = \mathrm{Vect}(1, X^2, X^3 - X, X^4, X^5 - X, \ldots)$$

et cette famille est libre car échelonnée en degré ; elle forme donc une base de $E_4$.

## Corrigés des exercices approfondis

### Exercice 15

1. Remarquons tout d'abord que $(P_1, P_2, P_3)$ est échelonnée en degré : elle forme donc une famille libre. Montrons qu'elle est génératrice.
Soit $P = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}_2[X]$. On cherche $u, v$ et $w$ tel que

$$P(X) = u1 + v(X - a) + w(X - a)(X - b).$$

En développant et identifiant les coefficents :

$$\begin{cases} u - av + \quad abw = \gamma \\ \qquad v - (a+b)w = \beta \\ \qquad\qquad w = \alpha \end{cases}$$

Le système est de Cramer et admet donc une solution : la famille $(P_1, P_2, P_3)$ est génératrice.
**Bilan** : la famille $(P_1, P_2, P_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On cherche $u, v, w$ des réels tels que

$$P(X) = u1 + v(X - a) + w(X - a)(X - b).$$

En évaluant respectivement en $a$ et $b$ :

$$u = P(a) \quad \text{et} \quad u + v(b - a) = P(b) \iff u = P(a) \quad \text{et} \quad v = \frac{P(b) - P(a)}{b - a}.$$

Enfin, $w$ est le coefficient dominant de $P$.
**Bilan** : si $P = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, alors

$$P = \alpha(X - a)(X - b) + \frac{P(b) - P(a)}{b - a}(X - a) + P(a).$$

### Exercice 16

1. On peut écrire $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ en notant

$$f_1 : x \longmapsto 1, \quad f_2 = \cos \quad \text{et} \quad f_3 : x \longmapsto \cos(2x).$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrons que la famille est libre. Soient $a, b, c$ tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$. En évaluant en $0$, $\frac{\pi}{2}$ et $\pi$, on obtient

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a \qquad - c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

La famille est libre et est donc une base de $F$.
2. Montrons que $\cos^2$ s'exprime comme combinaison linéaire de $f_1, f_2, f_3$ :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2} = \frac{1}{2} f_3 + \frac{1}{2} f_1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(\cos^2, f_2, f_1) &= \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}f_3 + \frac{1}{2}f_1, f_2, f_1\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}f_3, f_2, f_1\right) = \mathrm{Vect}(f_3, f_2, f_1) = F\end{aligned}$$

$(f_1, f_2, \cos^2)$ est donc génératrice. Remarquons que la famille est libre (même raisonnement qu'en 1) et est donc une base de $F$.

3. On montre déjà que $(\cos^2, \sin^2, \cos)$ est libre : si $u\cos^2 + v\sin^2 + w\cos = 0$, en évaluant en $0$, $\frac{\pi}{2}$ et $\pi$ :

$$\begin{cases} u \quad\;\; + w = 0 \\ \quad\; v \quad\;\; = 0 \\ u \quad\;\; - w = 0 \end{cases} \iff u = v = w = 0$$

Par le même raisonnement qu'en 2, $\sin^2 = 1 - \cos^2$ donc :

$$\mathrm{Vect}(\cos^2, \sin^2, \cos) = \mathrm{Vect}(\cos^2, 1 - \cos^2, \cos) = \mathrm{Vect}(\cos^2, 1, \cos) = F.$$

4. On utilise les relations trigonométriques pour déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}_1 = (1, \cos, x \longmapsto \cos(2x))$, $\mathcal{B}_2 = (1, \cos, \cos^2)$ et $\mathcal{B}_3 = (\cos^2, \sin^2, \cos)$ : Pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned}1 + \cos(x) + \cos^2(x) &= 1 + \cos(x) + \frac{\cos(2x) + 1}{2} = \frac{3}{2} + \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\\ &= \cos^2(x) + \sin^2(x) + \cos(x) + \cos^2(x) = \sin^2(x) + \cos(x) + 2\cos^2(x)\end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées de $1 + \cos + \cos^2$ sont $\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ dans $\mathcal{B}_1$, $(1, 1, 1)$ dans $\mathcal{B}_2$ et $(2, 1, 1)$ dans $\mathcal{B}_3$.

## Exercice 17

1. Remarquons que

$$E = \left\{ a\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

et donc

$$E = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi, $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

**Autre méthode** : à la main. La matrice nulle est dans $E$ (en prenant $a = b = c = 0$).

Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & -c' & b' \\ c' & 0 & -a' \\ -b' & a' & 0 \end{pmatrix}$ deux matrices de $E$ et $\lambda$ un réel.

Alors :

$$\lambda M + N = \begin{pmatrix} 0 & -(\lambda c + c') & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & 0 & -(\lambda a + a') \\ -(\lambda b + b') & \lambda a + a' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c'' & b'' \\ c'' & 0 & -a'' \\ -b'' & a'' & 0 \end{pmatrix} \in E$$

en posant $a'' = \lambda a + a', b'' = \lambda b + b', c'' = \lambda c + c'$.

2. D'après ce qui précède, la famille $\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E$. Montrons qu'elle est libre. Soient $a, b, c$ trois réels tels que

$$a\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui rapidement donne $a = b = c = 0$ : ainsi, la famille est libre et la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E$.

3. Soit $A \in E \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. On écrit $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Remarquons que, en notant $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, si $X \neq 0$, l'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ admet d'autres solutions que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ : la matrice $A$ ne peut pas être inversible.

4. a) Notons $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Après calculs :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -c^2 - b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2 - a^2 & bc \\ ac & cb & -b^2 - a^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & c^3 + cb^2 + a^2c & -b^3 - bc^2 - a^2b \\ -c^3 - ca^2 - b^2c & 0 & ab^2 + ac^2 + a^3 \\ c^2b + b^3 + ba^2 & -ac^2 - ab^2 - a^3 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate alors que $M^3 \in E$.

b) D'après le calcul précédent,

$$\begin{aligned} M^3 &= -(c^3 + cb^2 + a^2c) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (b^3 + bc^2 + a^2b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (ab^2 + ac^2 + a^3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -c(a^2 + b^2 + c^2) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - b(a^2 + b^2 + c^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - a(a^2 + b^2 + c^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -(a^2 + b^2 + c^2) \left( c \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= -(a^2 + b^2 + c^2) M \end{aligned}$$

c) Le polynôme $X^3 + (a^2 + b^2 + c^2)X$ est donc annulateur de $M$.

d) D'après ce qui précède, $M^3 = -(a^2 + b^2 + c^2)M$ ce qui, par récurrence rapide, donne :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ M^{2n+1} = (-1)^n (a^2 + b^2 + c^2)^n M \quad \text{et} \quad M^{2n} = (-1)^n (a^2 + b^2 + c^2)^n M^2.}$$