Chapitre 18

Matrices

Résumé

On introduit la notion de matrices, qui nous servira plus tard dans l'année. On voit également le lien avec les systèmes linéaires. On étudiera enfin la méthode de Gauss-Jordan pour l'inversibilité d'une matrice.

Plan du cours

> *« Il y a des temps pour toutes choses ; et les temps sont les matrices de toutes choses. Ils ne suivent donc pas une seule voie, mais empruntent des milliers de chemins. »*

Paracelse (1493 – 1541)

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir calculer avec les matrices (sommes, produits, transposés) . . . . ☐

② Connaître définition et propriétés des matrices inversibles . . . . ☐

③ Savoir déterminer le rang d'une matrice . . . . ☐

④ Savoir faire le lien entre système et matrice associée . . . . ☐

⑤ Savoir déterminer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice :

- par récurrence, en conjecturant l'allure générale . . . . ☐
- par la formule du binôme de Newton . . . . ☐
- par diagonalisation, lorsque celle-ci est donnée . . . . ☐

I. Matrices

1. Définition

Définition 18.1.

Soient n et p deux entiers non nuls. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients réels un tableau rectangulaire de nombres réels comportant n lignes et p colonnes.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}}_{p\ \text{colonnes}} \quad \Big\} \, n \text{ lignes}$$

En général, lorsque A est une matrice à n lignes et p colonnes, le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne se note $a_{i,j}$. On écrit alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou } A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Notation

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels est noté $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Définition 18.2.

- On appelle **matrice ligne** $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.
- On appelle **matrice colonne** $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- On appelle **matrice nulle** de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $0_{n,p}$ (ou 0 quand il n'y a pas d'ambiguïté), la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls.
- Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, on note $E_{i,j} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice ayant tous ses coefficients nuls, sauf celui en ligne i, colonne j, qui vaut 1.

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & i & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

Les $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ sont appelées les **matrices élémentaires**.

2. L'algèbre des matrices

a. Addition de matrices

Définition 18.3.

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **somme** de la matrice A et de la matrice B la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $A+B$ définie par

$$A + B = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \text{ où } \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \ \forall\, j \in [\![1,p]\!],\ \ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Exemple 18.1

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b. Multiplication par un réel

Définition 18.4.

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un nombre réel. On appelle **produit** de la matrice A par le réel λ la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée λA, définie par

$$\lambda A = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \text{ où } \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \ \forall\, j \in [\![1,p]\!],\ \ c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Exemple 18.2

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c. Premières propriétés

Propriété 18.1.

Soient A, B et C trois éléments de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et λ, μ deux nombres réels.

- $A + B = B + A$ (commutativité de l'addition).
- $0 + A = A + 0 = A$ (0 est le neutre de l'addition)
- $A + (-A) = (-A) + A = A - A = 0$ ($-A$ est l'opposé de la matrice A.)
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$, $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$ et $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \lambda\mu A$ (distributivités)

Remarque

Les différentes propriétés précédentes font de l'ensemble $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, muni de l'addition et la multiplication par un réel, un **espace vectoriel**. Nous y reviendrons plus tard dans l'année.

Remarque

On peut manipuler, pour ces opérations, ainsi les matrices comme les nombres réels. Par exemple, l'équation $X + A = B$ d'inconnue la matrice X, admet comme unique solution $X = B - A$. De même, l'équation $2X = A$ d'inconnue la matrice X admet comme unique solution $X = \frac{1}{2}A$.

Les matrices élémentaires sont intéressantes : on peut écrire toute matrice en fonction de celles-ci.

Proposition 18.2.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors, on peut écrire A sous la forme

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}$$

On dira dans le chapitre suivant que $(E_{i,j})$ forme une *base* de l'espace vectoriel des matrices.

d. Produit matriciel

Définition 18.5.

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ une matrice $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ une matrice $\mathfrak{M}_{p,m}(\mathbb{R})$. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B la matrice de $\mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, notée $A \times B$ ou AB, définie par

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \text{ où } \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \forall\, j \in [\![1,m]\!],\ c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

Par exemple :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

⚠ **Attention**

- Pour multiplier deux matrices, il faut qu'elles soient compatibles : lorsque l'on calcule AB il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.
- La multiplication des matrices n'est pas **commutative** : en général, $AB \neq BA$. Par exemple
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
- Contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{R}$, on peut avoir $AB = 0$ sans pour autant que A et B soient nuls. Par exemple
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On dit que $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ n'est pas **intègre**.

Exemple 18.3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété 18.3.

Soient A, B, C trois matrices (que l'on considère compatibles pour les multiplications envisagées), et λ un réel.

- $A(BC) = (AB)C = ABC$ (associativité de la multiplication)
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$
- $(A+B)C = AC + BC$ et $C(A+B) = CA + CB$ (distributivités)

☞ *Exercice 1.*

e. Transposition

Définition 18.6.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **transposée** de la matrice A la matrice de $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, notée ${}^tA$ ou $A^\intercal$, définie par

$${}^tA = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \text{ où } \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \forall\, j \in [\![1,n]\!],\ c_{i,j} = a_{j,i}$$

Ainsi, la matrice ${}^tA$ est la matrice obtenue à partir de A par symétrie, en échangeant les lignes et les colonnes.

Exemple 18.4

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Propriété 18.4.

Soient A et B deux matrices (que l'on considère compatibles pour les multiplications envisagées) et λ un réel.

- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$.
- ${}^t({}^tA) = A$ et ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Démonstration

Notons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

et donc

$${}^t(A+B) = (a_{j,i} + b_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = {}^tA + {}^tB$$

et
$$^t(\lambda A) = (\lambda a_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \lambda\, ^tA.$$
Enfin, soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$. Notons $C = AB$, $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$, $D = {}^tB\,{}^tA$ et $D = (d_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. On a, par définition
$$\forall\, i \in [\![1,\, n]\!],\, \forall\, j \in [\![1,\, q]\!],\quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}.$$
et
$$\forall\, i \in [\![1,\, q]\!],\, \forall\, j \in [\![1,\, n]\!],\quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i}a_{j,k}.$$
On constate alors que
$$\forall\, i \in [\![1,\, q]\!],\, \forall\, j \in [\![1,\, n]\!],\quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i}a_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k}b_{k,j} = c_{j,i}$$
Ainsi,
$${}^tB\,{}^tA = {}^t(AB).$$

☞ *Exercice 2.*

II. Matrices carrées

1. Définitions

a. Matrices carrées

Définition 18.7.

Une **matrice carrée** d'ordre n est une matrice à n lignes et à n colonnes. On notera $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, plutôt que $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. De même, on notera 0_n la matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 18.5

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Définition 18.8.

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice carrée, on appelle **diagonale** de A les coefficients $(a_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Exemple 18.6

Dans l'exemple précédent, la diagonale est $(1, -3)$.

b. Matrices diagonales et triangulaires

Définition 18.9.

- Une **matrice diagonale** d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n où tous les coef- ···

ficients sont nuls sauf éventuellement ceux de la diagonale :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On écrira plus simplement $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pour désigner la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

- La **matrice identité** de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, notée I_n, est la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1).$$

- Une **matrice triangulaire supérieure** $(a_{i,j})$ est une matrice telle que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \forall\, j \in [\![1, n]\!], i > j \implies a_{i,j} = 0$$

Ainsi, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- Une **matrice triangulaire inférieure** $(a_{i,j})$ est une matrice telle que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \forall\, j \in [\![1, n]\!], i < j \implies a_{i,j} = 0$$

Ainsi, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & a_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Notation (Ensembles particuliers)

On note traditionnellement $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n (resp. triangulaires supérieures, triangulaire inférieure).

Remarque

La matrice identité I_n est le **neutre** de la multiplication : quelle que soit la matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a $AI_n = I_nA = A$.

c. Matrices symétriques

Définition 18.10.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ une matrice carrée.

…

- A est dite **symétrique** si
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$$
Ainsi, une matrice est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$.
- A est dite **antisymétrique** si ${}^tA = -A$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre n symétriques, et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre n antisymétiques.

Exemple 18.7

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique.

2. Puissances d'une matrice carrée

a. Définition de la puissance d'une matrice

Si A et B sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on peut alors calculer AB et BA (elles sont compatibles) et le produit est encore dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On peut alors définir la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice.

Définition 18.11.

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Soit k un entier. On définit A^k de la manière suivante :
- Si $k = 0$, $A^0 = I_n$.
- Si $k > 0$, $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Propriété 18.5.

Par définition, pour tout matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et pour tous entiers p et q, $A^p \times A^q = A^{p+q}$.

♡ **Remarque**

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n diagonales, alors le produit AB est facile à calculer ; en effet, si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1} \times b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \times b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ainsi, si A est une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$, alors pour tout entier p, on a

$$A^p = \begin{pmatrix} a_{1,1}^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^p \end{pmatrix}$$

b. Formule du binôme de Newton

Attention

Puisque la multiplication des matrices n'est pas commutative, on n'a pas $(AB)^k = A^kB^k$. En effet, $(AB)^k = (AB)(AB)\cdots(AB)$ et il faut que $AB = BA$ pour pouvoir obtenir A^kB^k.

Cela arrive cependant dans certains cas, ce qui permet de simplifier certains calculs :

Définition 18.12.

Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B **commutent** si $AB = BA$.

Exemple 18.8

La matrice I_n commute avec toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, $AI_n = I_nA = A$.

Théorème 18.6. Formule du binôme de Newton

Soient deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui <u>commutent</u>. Alors, pour tout entier n, on a

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^kB^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k$$

L'utilité principale de la formule du binôme des matrices est de pouvoir calculer la puissance de certaines matrices de manière « rapide ».

c. Méthodes de calculs

Méthode (Calcul de puissance avec la formule du binôme)

Pour calculer A^p, on peut parfois utiliser la formule du binôme de Newton, en décomposant A sous la forme $\lambda I_n + B$ avec B une matrice dont les puissances sont faciles à calculer.

Exemple 18.9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier n.

Solution

On constate que $A = I_3 + B$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^2 = 0$. Puisque I_3 et B commutent (*car I_3 commute avec toutes les matrices*), on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$A^n = (I_3+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \underbrace{\binom{n}{2} B^2 + \cdots + \binom{n}{n} B^n}_{=0}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$A^n = I_3 + nB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

résultat qui est également vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

☞ *Exercice 7.*

Méthode (Calcul de puissance par récurrence)

Pour calculer A^p, on peut également essayer de calculer les premières puissances, puis en déduire le résultat par récurrence sur p.

Exemple 18.10

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier n.

Solution

On constate que

$$A^0 = I_2 \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit alors P_n la proposition définie pour tout entier n par

$$P_n : A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que l'on démontre par récurrence sur n :

- Initialisation : puisque $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, P_0 est vraie.
- Hérédité : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n fixé. Montrons alors P_{n+1} :

$$A^{n+1} = A^n \times A \underbrace{=}_{\text{par H.R.}} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  La proposition P_{n+1} est donc vraie.

On a ainsi démontré par récurrence que

$$\forall\, n \geqslant 0,\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ *Exercices 5 et 6.*

3. Polynômes de matrice

A l'aide des résultats précédents, on peut effectuer des calculs polynomiaux avec les matrices :

Définition 18.13.

On appelle **polynôme de matrice** toute matrice carrée qui s'écrit sous la forme $P(A)$ avec P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$, et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, avec $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, alors

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p.$$

On dit que $P(A)$ est un **polynôme** en A.

Exemple 18.11

Si $P(X) = 2X^2 + 3X - 4$, alors $P(A) = 2A^2 + 3A - 4I_n$.
Si $P(X) = X^k$, alors $P(A) = A^k$ si $k \geqslant 1$, $P(A) = I_n$ si $k = 0$.

Propriété 18.7. Opérations sur les polynômes de matrices

Soient A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, P, Q deux polynômes à coefficients réels et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$,
- $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$,
- $(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$.

La dernière proposition indique que deux polynômes d'une même matrice A commutent.

Ce qui nous intéressera régulièrement, ce sont des polynômes qui annulent une matrice :

Définition 18.14. Polynôme annulateur

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme à coefficient réels. On dit que P est un **polynôme annulateur** de A si $P(A) = 0_n$.

Exemple 18.12

Le polynôme $P(X) = X^2 - X + 1$ est annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

En effet :

$$\begin{aligned} P(A) &= A^2 - A + I_2 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque

Nous verrons au second semestre que toute matrice admet au moins un polynôme annulateur non nul. Trouver un tel polynôme, en revanche, n'est pas forcément aisé.

On utilisera les polynômes de matrices dans de nombreuses situations : le calcul de puissances n-ièmes, par exemple, mais aussi la détermination de l'inverse d'une matrice, que nous introduisons dans la section suivante.

Exercice 18.13

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et P le polynôme $X^3 - X$.

1. Vérifier que P est un polynôme annulateur de A.
2. Factoriser P.

3. Soit $n \geqslant 3$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
4. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Solution

1. On constate après calcul que $P(A) = 0_3$: P est bien annulateur de A.
2. On peut factoriser par X. On a alors $P = X(X^2 - 1)$. Finalement,
$$\boxed{X^3 - X = X(X-1)(X+1).}$$
3. P étant de degré 3, le reste de la division euclidienne de X^n par P est au maximum de degré 2. Il existe donc un polynôme Q et trois réels a, b et c tels que
$$X^n = P(X)Q(X) + aX^2 + bX + c.$$
En utilisant les racines de la question précédente, et en évaluant, on obtient :
$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ a - b + c = (-1)^n \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1+(-1)^n}{2} \\ b = \frac{1-(-1)^n}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$
Ainsi, il existe un polynôme Q tel que
$$\boxed{X^n = P(X)Q(X) + \frac{1+(-1)^n}{2}X^2 + \frac{1-(-1)^n}{2}X.}$$
4. En utilisant le résultat précédent, et puisque $P(A) = 0$, on obtient
$$\boxed{\forall\, n \geqslant 3, \quad A^n = \frac{1+(-1)^n}{2}A^2 + \frac{1-(-1)^n}{2}A.}$$
On remarque que ce résultat est également valable pour $n = 1$ et $n = 2$. Finalement
$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}.}$$

☞ *Exercices 4 et 8*

III. Matrices inversibles

1. Définition

Définition 18.15.

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant
$$AB = BA = I_n$$
Dans ce cas, B est appelée **matrice inverse** de A, et est notée $B = A^{-1}$.

Notation

On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrée d'ordre n inversibles.

Exemple 18.14

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible. En effet,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = I_2$$

Remarque

La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$. En effet, $I_nI_n = I_nI_n = I_n$.

2. Propriétés

Propriété 18.8.

Soient A et B deux matrices carrées de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles, alors AB est également inversible, et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, et ainsi pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.
- Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

Démonstration

Pour le premier point, on a en effet $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ donc A^{-1} est inversible et son inverse est A.

Pour le second point, on a $AB(B^{-1}A^{-1}) = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ et $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$. Donc AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$.

Enfin, en utilisant les propriétés de la transposée :

$$\begin{aligned} {}^tA \times {}^t\left(A^{-1}\right) &= {}^t\left(A^{-1}A\right) = {}^tI_n = I_n, \\ \text{et } {}^t\left(A^{-1}\right) \times {}^tA &= {}^t\left(AA^{-1}\right) = {}^tI_n = I_n. \end{aligned}$$

Ainsi, ${}^tA$ est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

Pour démontrer qu'une matrice n'est pas inversible, on peut utiliser le théorème suivant :

Théorème 18.9.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle. S'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = 0_n$ alors A n'est pas inversible.

Démonstration

Faisons un raisonnement par l'absurde, et supposons que A soit inversible, d'inverse A^{-1}. Alors

$$AB = 0_n \Rightarrow A^{-1}(AB) = O_n \Rightarrow B = 0_n$$

ce qui est absurde, puisque B n'est pas nulle.

Remarque

Si A et B sont toutes les deux non nulles, telles que $AB = 0_n$ alors ni A ni B ne sont inversibles.

Pour démontrer qu'une matrice est inversible, on dispose d'un théorème un peu similaire au précédent, appelé critère du noyau (nous donnerons un sens à ce nom plus tard dans l'année).

Théorème 18.10. Critère du noyau

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. A est inversible si et seulement si

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = 0_{n,1} \implies X = 0_{n,1}.$$

Démonstration

Si A est inversible, et si $AX = 0_{n,1}$, par multiplication par A^{-1} à gauche, on en déduit $A^{-1}AX = A^{-1}0_{n,1}$, c'est-à-dire $X = 0_{n,1}$.
Si A n'est pas inversible, d'après le théorème précédent, il existe une matrice B non nulle telle que $AB = 0_n$. Puisque B n'est pas nulle, il existe $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $BY \neq 0_{n,1}$. Mais alors $ABY = 0$ c'est-à-dire $A(BY) = 0_{n,1}$. En notant $X = BY \neq 0_{n,1}$, on a donc X tel que $AX = 0_{n,1}$. Par contraposée, on en déduit que si pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\quad AX = 0_{n,1} \implies X = 0_{n,1}$, alors A est inversible.

3. Règles de calcul

Propriété 18.11.

Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et $C \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors

$$AC = B \Leftrightarrow A = BC^{-1} \qquad CA = B \Leftrightarrow A = C^{-1}B$$
$$AC = BC \Leftrightarrow A = B \qquad CA = CB \Leftrightarrow A = B$$

Attention

Cela n'est valable que si C est inversible ! Ce n'est pas forcément vrai si C n'est pas inversible.
Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AC = BC$ et pourtant $A \neq B$.

Pour démontrer qu'une matrice est inversible, il est suffisant de démontrer qu'elle est inversible d'un seul côté :

Théorème 18.12.

- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible, d'inverse B.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible, d'inverse B.

Ainsi, il n'est pas nécessaire de vérifier $AB = I_n$ ET $BA = I_n$. Seul un des sens est nécessaire.

Méthode

Pour montrer qu'une matrice A est inversible, on peut chercher une matrice B telle que $AB = I_n$. On pourra conclure que A est inversible, et que $A^{-1} = B$.

Exemple 18.15

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note également $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A(I_2 + B)$.

2. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Solution

1. On constate que

$$A(I_2+B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

2. D'après ce qui précède, A est inversible, et $A^{-1} = I_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☞ *Exercices 10, 11 et 12.*

4. Ensemble $GL_2(\mathbb{R})$

L'inverse d'une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est facile à obtenir :

Théorème 18.13.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad-bc \neq 0$. On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Le réel $ad-bc$ est appelé **déterminant** de la matrice A et est noté $\det(A)$.

Démonstration

Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On suppose que $A \neq 0$ et donc $B \neq 0$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$

- Si $ad-bc = 0$, alors $AB = 0_2$. Puisque $B \neq 0$, d'après un résultat précédent, A ne peut pas être inversible.
- Si $ad-bc \neq 0$, alors $A \times \left(\frac{1}{ad-bc}B\right) = I_2$. D'après un résultat précédent, A est donc inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple 18.16

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Solution

Son déterminant vaut $\det(A) = 1-2 = -1$. Il est non nul, donc A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Inverse et polynôme annulateur

Lorsqu'on dispose d'un polynôme annulateur, on peut en déduire, si elle est inversible, un inverse. Si $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme annulateur de la matrice A, avec $a_0 \neq 0$, et $p \geqslant 2$, alors :

$$\begin{aligned} a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p = 0 &\Leftrightarrow a_1 A + \dots + a_p A^p = -a_0 I_n \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{a_0} A \left(a_1 I_n + \dots + a_p A^{p-1}\right) = I_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $-\frac{1}{a_0}\left(a_1 I_n + \dots + a_p A^{p-1}\right)$ est l'inverse de la matrice A.

Exercice 18.17

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^2 - 9$. Montrer que P est un polynôme annulateur de A, puis déterminer l'inverse de A.

Solution

En calculant rapidement :

$$P(A) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 0_3(\mathbb{R})$$

Ainsi, P est bien annulateur de A. Mais alors :

$$A^2 - 9I_3 = 0_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \times \left(\frac{1}{9}A\right) = I_n.$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{9}A$.

IV. Systèmes linéaires et matrices

1. Ecriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 18.18

On s'intéresse au système

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ -x & - & 2y & + & z & = & -1 \end{array} \right.$$

Notons alors $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$(S) \Leftrightarrow AX = Y$$

La matrice A est appelée **matrice associée** au système (S). Résoudre le système (S), c'est donc trouver le vecteur colonne X.

Définition 18.16. Matrice associée à un système

Soit (S) un système $n \times p$ de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

On appelle **matrice associée** à (S) la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le système (S) s'écrit alors $AX = Y$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

2. Inverse d'une matrice et système

Théorème 18.14.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne. Le système $(S)\, AX = B$ admet une unique solution si, et seulement si, la matrice A est inversible.
Dans ce cas, $X = A^{-1}B$.

Remarque

Ainsi, pour résoudre un système (S), on peut introduire la matrice associée et résoudre une équation matricielle $AX = B$. Cela permet en général de simplifier les notations.

☞ *Exercice 16.*

Conséquence 18.15.

Une matrice triangulaire supérieure A est inversible si et seulement si tous les termes de la diagonale sont non nuls.

Démonstration

En effet, un système triangulaire est de Cramer si et seulement si tous ses pivots sont non nuls.

Méthode

Pour montrer qu'une matrice A est, ou n'est pas inversible, sans calculer son inverse, on résout matriciellement l'équation $AX = 0$ en appliquant la méthode du pivot de Gauss. Si on obtient une diagonale sans terme nul, la matrice sera inversible. On peut simplifier les écritures en écrivant $(A|0)$ pour ne pas s'encombrer des inconnues.

Exemple 18.19

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. Montrer que la matrice

$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Solution

On résout :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{ligne pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{ligne pivot} \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{array}$$

Puisqu'un des termes sur la diagonale est nul, la matrice A n'est pas inversible.
Pour B :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Les termes sur la diagonale étant non nuls, la matrice B est bien inversible.

Méthode

Pour déterminer l'inverse d'une matrice, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss, mais en simplifiant les écritures. On écrit $(M|I_n)$ et on cherche à remplacer, par des opérations sur les lignes, M par I_n. A la place du I_n de départ, on aura alors M^{-1}.

Exemple 18.20

Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution

On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, et son inverse est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ *Exercices 13, 14 et 15.*

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Cette méthode de détermination de l'inverse d'une matrice est appelée **réduction de Gauss-Jordan**, en hommage à *Carl Friedrich Gauss* et *Wilhelm Jordan*, mais était connue des Chinois au 1^{er} siècle de notre ère, sous le nom *Fang cheng* dans *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique.*

Définition 18.17.

On appelle **rang** d'une matrice A, et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang du système associée $AX = 0$, où X représente le vecteur colonne des inconnues, c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles après réduction de Gauss-Jordan.

Propriété 18.16.

On dispose des propriétés suivantes :

- $\mathrm{rg}(A) = 0$ si et seulement si la la matrice est nulle.
- $\mathrm{rg}(A) = 1$ si et seulement si toutes les colonnes de A sont colinéaires.
- Si la matrice A est carrée d'ordre n, $\mathrm{rg}(A) = n$ si et seulement si la matrice est inversible.

V. Matrices et python

Pour créer une matrice, on peut envisager d'utiliser une liste de liste :

```
T = [ [1,2,3], [2,1,3], [3,2,1] ]
```

Pour obtenir le 2e élément de la 3e ligne, on peut alors faire :

```
>>> T[2][1]
2
```

Malheureusement, il n'y a pas, en Python, d'opération simple et matricielle : somme, produit, inverse, ...

La librairie `numpy`, quant à elle, contient les fonctions de bases pour traiter les tableaux, les matrices et les opérations de type algèbre linéaire avec Python.

1. Fonctions de bases

Dans cette partie, nous donnons un listing des différentes fonctions que l'on peut utiliser et qui sont au programme.

Dans toute la suite, on supposera qu'on aura importé la libraire avec :

Code Python

```python
import numpy as np
```

a. Création et premières opérations

Une matrice se définit avec la fonction **np.array** :

Code Python

```python
T = np.array([ [1,2,3], [2,1,3], [3,2,1]])
```

Un tableau est de type **ndarray**.
Pour obtenir le 2e élément de la 3e ligne, on dispose de deux manières :

Console Python

```
>>> T[2][1]
np.int64(2)
>>> T[2,1]
np.int64(2)
```

Enfin, pour obtenir le nombre de ligne et de colonne, on utilise l'instruction **shape** :

Console Python

```
>>> np.shape(T)
(3, 3)
>>> np.shape(T)[0] # Représente le nombre de ligne
3
>>> np.shape(T)[1] # Représente le nombre de colonne
3
```

On peut, comme pour les listes, faire du *slicing*, c'est-à-dire ne récupérer que certains éléments :

Console Python

```
>>> T[0:2, 0:2]  # Prends les deux premières lignes
array([[1, 2],
       [2, 1]])
```

b. Somme, produit et composé

Le type **ndarray** est agréable à manipuler puisqu'on peut faire les opérations usuelles :

Console Python

```
>>> T = np.array([[1,2], [2,1]])
>>> S = np.array([[2,0], [-1,1]])
>>> S+T   # Addition simple de matrice
array([[3, 2],
       [1, 2]])
```

⚠ **Attention**
Le produit S∗T **ne donne pas** le produit matriciel $S \times T$, mais donne le produit terme à terme des coefficients :

Console Python

```
>>> T = np.array([[1,2], [2,1]])
>>> S = np.array([[2,0], [-1,1]])
>>> S*T
array([[ 2,  0],
       [-2,  1]])
```

Pour effectuer le produit matriciel usuel, il faut utiliser l'instruction **np.dot** :

Console Python
```
>>> T = np.array([[1,2], [2,1]])
>>> S = np.array([[2,0], [-1,1]])
>>> np.dot(S,T)
array([[ 2,  4],
       [ 1, -1]])
```

Depuis les dernières versions de PYTHON, on peut aussi écrire `S@T` :

Console Python
```
>>> T = np.array([[1,2], [2,1]])
>>> S = np.array([[2,0], [-1,1]])
>>> S@T
array([[ 2,  4],
       [ 1, -1]])
```

Enfin, on peut obtenir la transposée avec l'opérateur `T` :

Console Python
```
>>> S = np.array([[1,2], [3,1]])
>>> S.T
array([[1, 3],
       [2, 1]])
```

c. Matrices particulières

On peut obtenir trois matrices usuelles facilement : la matrice nulle, avec `np.zeros`, la matrice identité, avec `np.eye`, et la matrice dont tous les coefficients valent 1, avec `np.ones` :

Console Python
```
>>> np.zeros((2,3))  # Matrice O(n,p) : n lignes, p colonnes
array([[0., 0., 0.],
       [0., 0., 0.]])
>>> np.ones((2,3))   # 2 lignes, 3 colonnes
array([[1., 1., 1.],
       [1., 1., 1.]])
>>> np.eye(3,3)      # Matrice identité
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```

d. Autres opérations

Somme des coefficients : on peut ajouter tous les coefficients d'une matrice avec `np.sum`.

Console Python
```
>>> a = np.array([[1, 3, 3], [1, 4, 3], [1, 3, 4]])
>>> np.sum(a)
np.int64(23)
```

Avec un module particulier de `numpy`, `numpy.linalg`, on dispose d'autres opérations intéressantes :

Inverse d'une matrice : on peut déterminer l'inverse d'une matrice (éventuellement avec des valeurs approchées des coefficients) avec l'instruction `np.linalg.inv`.

Console Python
```
>>> a = np.array([[1, 3, 3], [1, 4, 3], [1, 3, 4]])
>>> np.linalg.inv(a)
array([[ 7., -3., -3.],
       [-1.,  1.,  0.],
       [-1.,  0.,  1.]])
```

Résolution d'un système : on peut également résoudre un système (si possible) avec l'instruction `np.linalg.solve`.

Si on s'intéresse au système $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$, on introduit les matrices A et B telles que $AX = B$ et on résout.

Console Python
```
>>> A = np.array([[3,1], [1,2]])
>>> B = np.array([9,8])
>>> X = np.linalg.solve(A,B)
>>> X
array([2., 3.])
```

Ainsi, l'unique solution est $(2, 3)$.

Exercices 18

Exercices

Calcul matriciel et polynômes

●○○ **Exercice 1 Produit matriciel** (10 min.)

Calculer les produits suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

●○○ **Exercice 2 Transposées** (10 min.)

Pour chacun des matrices suivantes, calculer sa transposé.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tXX$ et $X\,{}^tX$.

●●○ **Exercice 3 Matrices élémentaires** (5 min.)

Soit n un entier non nul. Soient i, j, k et ℓ quatre entiers de $[\![1, n]\!]$. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$, où $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ désigne les matrices élémentaires.

●○○ **Exercice 4 Polynômes de matrices** (10 min.)

Calculer $P(A)$ pour chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^2 - 2X + 3$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $P(X) = (X-1)(X+1)^2$.

Puissances

●○○ **Exercice 5 Puissances et récurrence** (20 min.)

Dans chacun des cas suivants, calculer A^n pour tout entier naturel n.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode

Pour déterminer A^n, on peut chercher une périodicité des puissances, c'est-à-dire un entier p tel que $A^p = A$ ou $A^p = I_n$.

●○○ Exercice 6 Puissances et nilpotence (15 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A peut s'écrire sous la forme $I_3 + J$ où J est une matrice à déterminer.
2. Calculer J^2 et J^3. En déduire l'expression pour tout entier n de A^n en fonction de I_3, J et n.

●●○ Exercice 7 Puissances et binôme de Newton (15 min.)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A sous la forme $\alpha I_3 + \beta J$, où α et β sont deux réels.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout entier n.

●●○ Exercice 8 Puissances, récurrence et division euclidienne (15 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Première méthode.
   a) Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
   b) Montrer qu'il existe deux suites (x_n) et (y_n) telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
   $$A^n = x_n A + y_n I_3.$$
   c) Montrer que (x_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   d) En déduire, pour tout entier n, une expression de x_n et y_n en fonction de n.
2. Deuxième méthode.
   a) Montrer que $P(X) = X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A.
   b) Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.
   c) En déduire une expression de A^n en fonction de A et I_3.

●○○ Exercice 9 Puissance par diagonalisation (15 min.)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Déterminer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, D^n.
4. Justifier que, $A = PDP^{-1}$ puis, pour tout entier n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire l'expression de A^n pour tout entier n.

Inversibilité

●○○ Exercice 10 Inversibilité et polynôme annulateur (10 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En déduire la valeur de $-A^3 + 2A^2 + 4A - 8I_3$.
3. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

●○○ Exercice 11 Inversibilité et polynôme annulateur II (10 min.)

Soit A la matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

●○○ Exercice 12 Inversibilité et polynôme annulateur III (15 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. En déduire que A n'est pas inversible.
3. Calculer $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$. En déduire que $I_3 - A$ est inversible, et déterminer son inverse.
4. De la même manière, montrer que $I_3 + A$ est inversible, et déterminer son inverse.

●○○ Exercice 13 Inversibilité par la méthode du Gauss (10 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que cette matrice est inversible et calculer son inverse.

●○○ Exercice 14 Gaussons encore (20 min.)

Déterminer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

●○○ Exercice 15 Inversibilité par calcul III (10 min.)

Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Systèmes et matrice

●○○ Exercice 16 Système et matrice (15 min.)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre le système linéaire :

$$(S)\ \begin{cases} \quad\ y + z = 1 \\ x \quad\ + z = 2 \\ x + y \quad\ = 3 \end{cases}$$

Suites et matrices

●●○ Exercice 17 Matrice, puissances et suites (20 min.)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que pour tout n, il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$. On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1} et u_n, et entre v_{n+1} et v_n.
3. On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$. Reconnaître les suites α et β. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, puis A^n pour tout n.

●●○ Exercice 18 Suite et matrice - I (30 min.)

On considère les deux suites réels (u_n) et (v_n) définie par u_0, v_0 et pour tout n,

$$u_{n+1} = 6u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + 4v_n$$

En introduisant une matrice A bien choisie vérifiant

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

démontrer successivement que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, puis $A = 5I_2 + J$ avec $J^2 = 0$. Déterminer alors A^n, puis l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

●●○ Exercice 19 Suite et matrice - II (20 min.)

On considère la suite u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et pour tout n,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Que vaut $D = P^{-1}AP$? En déduire D^n.
2. Montrer que pour tout n, $D^n = P^{-1}A^nP$. En déduire les coefficients de A^n.
3. Pour tout n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que pour tout n, $X_{n+1} = AX_n$. En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0.
   b) Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Pour aller plus loin

●○○ Exercice 20 Exercice ouvert (10 min.)

Trouver toutes les matrices M diagonales d'ordre 3 telles que

$$M^3 + 2M^2 - M - 2 = 0$$

●●○ **Exercice 21 Valeurs propres** (15 min.)

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel λ la matrice $A - \lambda I_2$ n'est elle pas inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices colonnes X telles que $AX = \lambda X$ lorsque λ prend les valeurs trouvées au 1.

Remarque : les λ trouvés s'appellent les valeurs propres de la matrice, et les vecteurs colonnes trouvés au 2 les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres.

●●○ **Exercice 22 Trace** (20 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A, et on note $\operatorname{Tr}(A)$ le somme de ses coefficients diagonaux :

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1. Soient A, B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel. Montrer que
$$\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B), \quad \operatorname{Tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{Tr}(A) \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{Tr}(A)$.
3. Existe-t-il deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?

●●● **Exercice 23 Oral ESCP** (15 min.)

Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible et qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^q = 0_n$ (on dit que la matrice B est *nilpotente*).

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $BY = \alpha Y$. Montrer que $Y = 0$.
2. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la matrice $M_\alpha = -\alpha I_n + A^{-1}BA$ est inversible.

●●○ **Exercice 24 Une matrice rectangulairement carrée** (20 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit M la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n}$ par

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,\, 2n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \leqslant n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Expliciter M dans le cas $n = 1$ et $n = 2$.
2. Calculer M^2, puis M^p pour tout entier $p \geqslant 1$.
3. M est-elle inversible ?
4. Dans le cas $n = 2$, déterminer les valeurs de λ pour lesquels la matrice $M - \lambda I_4$ n'est pas inversible.

Exercices bilans

●●○ **Exercice 25 Étude d'une matrice à paramètre** (30 min.)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de cette forme, c'est-à-dire

$$\mathcal{E} = \{A(t), \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

1. Donner $A(1)$, et montrer que $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.
2. Soient s et t deux réels. Déterminer le réel u tel que $A(s)A(t) = A(u)$. En déduire que $A(s)A(t) \in \mathcal{E}$ et que $A(s)$ et $A(t)$ commutent.
3. a) Montrer que Q n'est pas inversible.
   b) Montrer que si $t \neq \frac{1}{2}$, $A(t) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.
4. Déterminer l'ensemble des matrices S de $\mathcal{E}$ telles que $S^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right)$.
5. On pose $J = A(-1)$.
   a) Montrer qu'il existe une suite (t_n) telle que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad J^n = A(t_n).$$
   b) Déterminer une relation de récurrence entre t_{n+1} et t_n.
   c) En déduire l'expression de J^n.

●●○ Exercice 26 Matrices orthogonales (60 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. On dit qu'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si $M^{\mathsf{T}}M = MM^{\mathsf{T}} = I_n$. Autrement dit, M est orthogonale si et seulement si M et inversible et $M^{-1} = M^{\mathsf{T}}$.
On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie A : le cas particulier $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on se donne $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $a^2 + b^2 = a^2 + c^2 = d^2 + c^2 = d^2 + b^2 = 1$ et que $ac + bd = 0$.
2. Supposons que $a = 0$. Montrer que M est l'une des matrices suivantes :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Supposons que $a \neq 0$.
   a) Justifier qu'il existe $\theta \in [0,\, 2\pi[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.
   b) En déduire qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
4. Réciproquement, soit $\theta \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Vérifier que $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
5. Écrire une fonction Python, prenant en argument $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et qui renvoie la matrice ci-dessus.

Partie B : généralités sur les matrices orthogonales

1. a) Vérifier que, si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $A^{\mathsf{T}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on appelle norme de X le réel positif
$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$
   a) Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\|X\| = 0$ si et seulement si $X = 0$.

b) Justifier que[1], si $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\|X\|^2 = X^\top X$.

c) En déduire que si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\|AX\| = \|X\|$.

3. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

   a) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 1$.

   b) En déduire que, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$.

4. Notons $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, sur chaque ligne et chaque colonne de M se trouve un et un seul coefficient non nul, qui vaut 1 ou -1.

   a) Donner un exemple d'une matrice de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ qui n'est pas I_4.

   b) Soient $M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ et $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. Calculer $\left(MM^\top\right)_{i,j}$.

   c) En déduire que les matrices de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ sont les seules matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont entiers.
   On s'aidera de la question 3.

[1] En réalité, $X^\top X$ est une matrice à un seul coefficient, ce qu'on assimile à un réel.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

Après calcul, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -7 & 15 \\ -10 & 22 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Rapidement :

$$^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad ^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad ^tC = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad ^tD = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Enfin :

$$^tXX = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + \dots + x_n^2 \end{pmatrix}$$

$$X\,^tX = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \dots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Montrons-le de manière rigoureuse. Remarquons que, puisque $^tX \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $^tXX \in \mathfrak{M}1,1(\mathbb{R})$ par définition du produit matriciel. De plus :

$$\begin{aligned} \left(^tXX\right)_{1,1} &= \sum_{k=1}^{n} (^tX)_{1,k}(X)_{k,1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_k) \times (x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2. \end{aligned}$$

De même, $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $^tX \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, donc $X\,^tX \in \mathfrak{M}n, n(\mathbb{R})$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$\begin{aligned} \left(M\,^tM\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{1} (M)_{i,k}(^tM)_{k,j} \\ &= x_ix_j. \end{aligned}$$

Exercice 3

La plupart des coefficients sont nuls. On écrit $E_{i,j} = (a_{u,v})$, $E_{k,\ell} = (b_{u,v})$ et $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = (c_{u,v})$. . Alors, pour tout $(u,v) \in [\![1,\, n]\!]^2$:

$$\begin{aligned} c_{u,v} &= \sum_{w=1}^{n} a_{u,w} b_{w,v} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } k \text{ tel que } \quad u = i, w = j = k, v = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si} j = k \\ 0_n & \text{sinon} \end{cases} .$$

Exercice 4

Il suffit de calculer.

1.

$$\begin{aligned} P(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(A) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 5

On calcule les premières puissances de A et on constate que

$$A^2 = -I_2,\;\; A^3 = -A \text{ et } A^4 = I_2$$

Ainsi, $A^5 = A,\;\; A^6 = -I, \cdots$ donc on a une périodicité :

- Si $n = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$), alors
$$A^n = A^{4k} = (A^4)^k = I_2^k = I_2$$
- Si $n = 4k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), alors
$$A^n = A^{4k+1} = A^{4k}.A = I_2.A = A$$
- Si $n = 4k+2$ ($k \in \mathbb{N}$), alors
$$A^n = A^{4k+2} = A^{4k}.A^2 = I_2.A^2 = A^2 = -I_2$$
- Si $n = 4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$), alors
$$A^n = A^{4k+3} = A^{4k}.A^3 = I_2.A^3 = A^3 = -A$$

Pour B, on constate que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2B$$

Puis $B^3 = B^2.B = (2B).B = 2B^2 = 4B = 2^{3-1}B$, $B^4 = B^3.B = (4B).B = 4B^2 = 8B = 2^{4-1}B$.
On peut donc supposer que, pour tout $n \geqslant 1$, $B^n = 2^{n-1}B$, que l'on démontre par récurrence.
Soit P_n la proposition définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par "$B^n = 2^{n-1}B$".

- **Initialisation** : pour $n = 1$, $B^1 = B$ et $2^{1-1}B = 2^0B = B$. Donc P_1 est vraie.
- **Hérédité** : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$, et montrons P_{n+1}.

Par hypothèse de récurrence, $B^n = 2^{n-1}B$. Mais alors,

$$B^{n+1} = B^n.B \underbrace{=}_{\text{H.R.}} 2^{n-1}B.B = 2^{n-1}B^2 = 2^{n-1}.2B = 2^n.B = 2^{n+1-1}B$$

P_{n+1} est donc vraie.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall\ n \geqslant 1,\ B^n = 2^{n-1}B \text{ et } B^0 = I_3$$

Exercice 6

1. On constate que $A = I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On remarque que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0_3$. On va donc utiliser la formule du binôme de Newton, pour $n \geqslant 3$.

I_3 et J commutent, donc pour tout $n \geqslant 3$:

$$A^n = (I_3 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 + \underbrace{\binom{n}{3} J^3 + \cdots + \binom{n}{n} J^n}_{=0_3 \text{ car } J^3 = 0_3}$$

Ainsi,

$$\forall\ n \geqslant 3, \quad A^n = 1.I_3 + n.J + \frac{n(n-1)}{2} J^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que cette écrite est valide pour $n = 0, n = 1$ et également $n = 2$. Donc :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

1. On constate que $A = 3J - 2I$.
2. Calculons les puissances de J :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$$

Ainsi, par un raisonnement par récurrence, on peut montrer que pour tout n, $J^n = 3^{n-1}J$.
Puisque I_3 et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall\ n \geqslant 1,\ A^n = (3J-2I)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(3J)^k(-2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^kJ^k \times (-2)^{n-k}$$

Or $J^k = 3^{k-1}J$ pour $k \geqslant 1$ donc

$$\forall\ n \geqslant 1,\ A^n = (-2)^nI_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k3^{k-1}J\times(-2)^{n-k} = (-2)^nI_3 + J.\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{2k-1}(-2)^{n-k}$$

Pour calculer la somme, on va se ramener à la formule du binôme de Newton pour les réels :

$$\forall\ n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{2k-1}(-2)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{9^k}{3}(-2)^{n-k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}9^k(-2)^{n-k} = \frac{1}{3}\left((9-2)^n-(-2)^n\right) = \frac{1}{3}(7^n$$

Bilan : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $A^n = (-2)^nI_3 + \frac{7^n-(-2)^n}{3}J$, écriture également valable pour $n=0$.

Exercice 8

1. a) On a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \\ -4 & -4 & 9 \end{pmatrix} = 2A + 3I_3$.

b) On le démontre par récurrence : pour tout n, P_n:« il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A^n = x_nA + y_nI_3$ ».

- Pour $n = 0$, $A^0 = I_3 = 0A + 1I_3$. On pose alors $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$ et P_0 est vraie.
- Supposons que P_n est vraie pour un certain n fixé. Alors $A^n = x_nA + y_nI_3$. Mais alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = A(x_nA + y_nI_3) \\ &= x_nA^2 + y_nA = x_n(2A+3I_3) + y_nA = (2x_n+y_n)A + 3x_nI_3. \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie, en posant $x_{n+1} = 2x_n + y_n$ et $y_{n+1} = 3x_n$.

c) D'après ce qui précède, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + y_{n+1} = 2x_{n+1} + 3x_n.$$

Ainsi, (x_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, avec $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, puisque

$$A^1 = A = 1 \times A + 0 \times I_3.$$

d) Après étude, on obtient

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = -\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{4}3^n.$$

et puisque $y_{n+1} = 3x_n$, on en déduit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \frac{3}{4}(-1)^n + \frac{1}{4}3^n$$

et finalement

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \left(-\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{4}3^n\right)A + \left(\frac{3}{4}(-1)^n + \frac{1}{4}3^n\right)I_3.}$$

2. a) Après calcul, $P(A) = 0_3$. On peut aussi utiliser la question 1.a).

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. P étant de degré 2, le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ est de degré au plus 1. Il existe donc α et β, et un polynôme Q, tels que

$$X^n = P(X)Q(X) + aX + b.$$

-1 et 3 sont les racines de P. En évaluant l'expression en -1 et 3, on en déduit

$$(-1)^n = 0 + a(-1) + b \quad \text{et} \quad 3^n = 0 + a3 + b \iff a = \frac{3^n-(-1)^n}{4} \quad \text{et} \quad b = \frac{3(-1)^n+3^n}{4}.$$

c) Puisque P est un polynôme annulateur de A, on utilise l'écriture précédente : si $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme Q tel que

$$X^n = P(X)Q(X) + \frac{3^n - (-1)^n}{4}X + \frac{3(-1)^n + 3^n}{4}$$

soit, en évaluant en A, et puisque $P(A) = 0_3$:

$$A^n = 0_3 + \frac{3^n - (-1)^n}{4}X + \frac{3(-1)^n + 3^n}{4}I_3.$$

On retrouve le même résultat que précédemment.

Exercice 9

1. On a $\det(P) = 2$. P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Après calcul,

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. D étant diagonale, on peut écrire

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

4. Puisque $D = P^{-1}AP$, on en déduit $PD = AP$ puis $PDP^{-1} = A$.
On note Q_n la proposition définie par Q_n:« $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
- Pour $n = 0$, $D^0 = I_2$ et donc $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$. Q_0 est donc vraie.
- Supposons la propriété Q_n vraie pour un certain entier n fixé. Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (PD^nP^{-1}) \times (PDP^{-1}) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, Q_{n+1} est vraie.
Par principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. En utilisant les deux questions précédentes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \boxed{A^n} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ 3^n & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n + (-1)^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 3^n & (-1)^n + 3^n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Exercice 10

1. Après calculs, on obtient

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 12 & 4 & -6 \\ 16 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

2. En calculant, on obtient que $-A^3 + 2A^2 + 4A - 8I_3 = 0$.
3. D'après ce qui précède, on peut écrire que $-A^3 + 2A^2 + 4A = 8I_3$. On réécrit :

$$A \times (-A^2 + 2A + 4I_3) = 8I_3 \Longleftrightarrow A \times \left(-\frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}I_3\right) = I_3$$

Ainsi, A est inversible, et son inverse est

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exercice 11

Constatons que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} = 9A - 18I_3$$

Ainsi,

$$\frac{1}{-18}(A^2 - 9A) = A\left(\frac{1}{2}I_3 - \frac{1}{18}A\right) = I_3$$

Donc, A est inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}I_3 - \frac{1}{18}A$$

Exercice 12

1. On constate que $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0_3$.
2. Puisque $A^3 = 0_3$ on peut écrire $A.A^2 = 0_3$. Par théorème, A est un diviseur de 0 et ne peut donc pas être inversible.
3. On développe (I_3 et A commutent) :

$$(I_3 - A)(I_3 + A + A^2) = I_3 - A^3 = I_3$$

puisque $A^3 = 0_3$. Ainsi, en notant $B = I_3 + A + A^2$, on peut écrire $(I_3 - A)B = I_3$. Par théorème, $I_3 - A$ est donc inversible, et son inverse est $B = I_3 + A + A^2$.
4. Par tâtonnement, on trouve que

$$(I_3 + A)(I_3 - A + A^2) = I_3 + A^3 = I_3$$

Par théorème, $I_3 + A$ est également inversible, et son inverse est $I_3 - A + A^2$.

> **Remarque**
> Il existe des identités remarquables assez générales, qui sont celles qu'on utilise ici :
>
> $$\forall\ n \in \mathbb{N},\ a^n - b^n - (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k$$
>
> $$\forall\ n \in \mathbb{N},\ a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}\right) = (a+b)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^{2n-k}b^k$$

Exercice 13

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{ligne pivot} \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ \end{array}$$

On obtient une matrice triangulaire dont les pivots sont tous non nuls ; on en déduit que A est inversible. On continue la méthode pour obtenir la matrice inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 - 3L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On en déduit que A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 14

On utilise la méthode classique : on écrit $(A|I_3)$ et on applique les opérations du pivot de Gauss pour écrire $(I_3|B)$. Alors, $B = A^{-1}$.

$$(S) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{L.P.} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$(S) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{L.P.} \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{array}$$

Les pivots étant tous non nuls, la matrice est inversible. On applique alors les opérations de la méthode du pivot de Gauss pour remonter et obtenir I_3 à gauche :

$$(S) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{13} & \frac{7}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{13} & \frac{8}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{13} & \frac{7}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{array}\right)$$

Ainsi, A est inversible, et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{8}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{11}{13} & \frac{7}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{10}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -11 & 7 & 5 \\ 10 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice B, elle est déjà triangulaire supérieure avec des pivots tous non nuls, elle est donc inversible. On remonte avec la méthode du pivot de Gauss et on obtient

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15

On applique la méthode du pivot de Gauss jusqu'à obtenir les pivots. Remarquons ici qu'on ne demande pas de calculer l'inverse si elle est inversible Ainsi

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{L.P.} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{L.P.} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

Remarquons que $2-a-a^2$ s'annule si et seulement si $a = 1$ ou $a = -2$ et $a-1$ s'annule si $a = 1$.
Bilan : si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, les pivots sont non nuls et la matrice est donc inversible. Si $a = 1$ ou $a = -2$, la matrice n'est pas inversible.

Exercice 16

1. Deux méthodes : on applique la méthode du pivot de Gauss à la matrice A ; ou bien (et c'est plus simple ici), puisqu'on nous donne la matrice inverse, on vérifie qu'elle convient. Soit $C = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. On constate alors que

$$A \times C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, A est inversible, et son inverse est $A^{-1} = C$.

2. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On constate que le système (S) peut s'écrire de manière équivalente

$$(S) \quad AX = B$$

Puisque A est inversible, c'est équivalent à $X = A^{-1}B$. Ainsi, le système (S) admet une unique solution :

$$X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le triple $(2, 1, 0)$ est l'unique solution du système.

Exercice 17

1. On constate que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$. Ainsi

$$A^2 - A = 2I_3 \Leftrightarrow A(A - I_3) = 2I_3 \Leftrightarrow A \times \left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) = I_3$$

Donc, A est inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Montrons par récurrence sur n la proposition P_n définie pour tout entier n par P_n : "il existe u_n, v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$".
• Initialisation : pour $n = 0$, on constate que $A^0 = I_3 = 0A + 1I_3$. Ainsi, P_0 est vraie, avec $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.
• Hérédité : on suppose que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n. Montrons alors que P_{n+1} est vraie.
Ainsi, par hypothèse de récurrence, il existe u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$. Mais alors

$$A^{n+1} = A^n A = (u_n A + v_n I_3)A = u_n A^2 + v_n A = u_n(A + 2I_3) + v_n A = (u_n + v_n)A + 2u_n I_3$$

Ainsi, A^{n+1} s'écrit bien $u_{n+1}A + v_{n+1}I_3$, avec

$$u_{n+1} = u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n$$

P_{n+1} est donc vraie ;
D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout n : A^n s'écrit $u_n A + v_n I_3$ avec

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1,\ \forall\ n,\ u_{n+1} = u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n$$

3. Pour tout entier n, on constate que

$$\alpha_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 2(u_n + v_n) + 2u_n = 4u_n + 2v_n = 2\alpha_n$$
$$\beta_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = u_n + v_n - 2u_n = v_n - u_n = -\beta_n$$

Ainsi, α est une suite géométrique, de raison 2 et de premier terme $\alpha_0 = 1$, et β est une suite géométrique de raison (-1) et de premier terme $\beta_0 = -1$. Donc

$$\forall\ n,\ \alpha_n = 2^n \text{ et } \beta_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Mais alors, puisque

$$u_n = \frac{\alpha_n + \beta_n}{3} \text{ et } v_n = \frac{\alpha_n - 2\beta_n}{3}$$

on en déduit donc

$$\forall\ n,\ u_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} \text{ et } v_n = \frac{2^n - 2(-1)^{n+1}}{3}$$

et donc

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\quad A^n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}A + \frac{2^n - 2(-1)^{n+1}}{3}I_3}$$

Exercice 18

Constatons que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrons alors par récurrence sur n la proposition définie pour tout entier n par « $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a bien $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. P_0 est donc vraie.
- **Hérédité** : supposons que la proposition P_n soit vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. On a montré précédemment que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A.A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on a donc montré que pour tout n, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

Il nous reste donc à calculer A^n pour tout entier n pour pouvoir conclure. Or, on constate que $A = 5I_2 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ avec $J^2 = 0_2$. D'après la formule du binôme de Newton (puisque I_2 et J commutent), pour tout $n \geqslant 2$, on a donc

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (5I_2)^{n-k} J^k = \binom{n}{0} 5^n I_2 + \binom{n}{1} 5^{n-1} J + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (5I_2)^{n-k} J^k}_{=0_2}$$

Donc

$$A^n = 5^n I_2 + n5^{n-1} J = \begin{pmatrix} 5^n + n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & 5^n - n5^{n-1} \end{pmatrix}$$

égalité également vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Enfin, puisque pour tout entier n, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, on en déduit finalement que

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\quad u_n = (5^n + n5^{n-1})u_0 - n5^{n-1} v_0 \text{ et } v_n = n5^{n-1} u_0 + (5^n - n5^{n-1}) v_0}$$

Exercice 19

1. On applique la méthode du pivot de Gauss tel qu'habituellement :

$$(P|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Les termes diagonaux sont tous non nuls, donc la matrice P est inversible, et

$$(P|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Ainsi, $P^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Après calcul, on obtient alors

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D étant diagonale, on en déduit donc que

$$\forall\ n,\ D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

2. Montrons par récurrence sur n la proposition P_n définie pour tout entier n par P_n : "$D^n = P^{-1}A^nP$".
• Initialisation : pour $n=0$, on a $D^0 = I_3$ et $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3$. Donc P_0 est vraie.
• Hérédité : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie.
On constate que $D^{n+1} = D^nD \underbrace{=}_{\text{H.R.}} P^{-1}A^nPD$. Or $D = P^{-1}AP$. Donc

$$D^{n+1} = P^{-1}A^nP(P^{-1}AP) = P^{-1}A^n\underbrace{PP^{-1}}_{=I_3}AP = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^{n+1}P$$

P_{n+1} est donc vraie.
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout n, et donc $\forall\ n,\ D^n = P^{-1}A^nP$. Mais alors

$$\forall\ n,\ A^n = PD^nP^{-1}$$

On connait P, P^{-1} et D^n. On en déduit donc A^n :

$$\boxed{\forall\ n\in\mathbb{N},\quad A^n = \begin{pmatrix} \frac{-3+(-1)^n+2^{n+3}}{6} & \frac{3-3(-1)^n}{6} & \frac{6+2(-1)^n-2^{n+3}}{6} \\ \frac{-3-(-1)^n+2^{n+2}}{6} & \frac{3+3(-1)^n}{6} & \frac{6-2(-1)^n-2^{n+2}}{6} \\ \frac{-3+(-1)^n+2^{n+1}}{6} & \frac{3-3(-1)^n}{6} & \frac{6+2(-1)^n-2^{n+1}}{6} \end{pmatrix}}$$

3. a) Constatons que

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Mais alors, on peut montrer par récurrence sur n que

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$$

Soit Q_n la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$X_n = A^nX_0$".
• Initialisation : pour $n=0$, $A^0X_0 = I_3X_0 = X_0$. Donc la proposition Q_0 est vraie.
• Hérédité : supposons que la proposition Q_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
On vient de voir que $X_{n+1} = AX_n$. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^nX_0) = A^{n+1}X_0$$

La proposition Q_{n+1} est donc vraie.
D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est donc vraie pour tout n, et $\forall\ n,\ X_n = A^nX_0$.

b) Puisque $X_n = A^n X_0$, et qu'à la question 2., nous avons déterminé A^n, on peut en déduire ainsi que

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{-3+(-1)^n+2^{n+1}}{6}u_2 + \frac{3-3(-1)^n}{6}u_1 + \frac{6+2(-1)^n-2^{n+1}}{6}u_0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3-(-1)^n-2^{n+1}}{6} + \frac{3-3(-1)^n}{6} + 2\frac{6+2(-1)^n-2^{n+1}}{6} = 3-2^n}$$

Remarque

Cet exercice est très classique. Il utilise ce que l'on appelle la diagonalisation de la matrice A (en écrivant $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale) pour calculer les puissances n^{me} de la matrice A, et en déduire un résultat sur une suite. Les récurrences présentes dans cet exercice sont à savoir faire et refaire rapidement.

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 20

On cherche une matrice solution diagonale, qu'on écrit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Alors, M est solution si et seulement si

$$M^3+2M^2-M-2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^3+2a^2-a-2 & 0 & 0 \\ 0 & b^3+2b^2-b-2 & 0 \\ 0 & 0 & c^3+2c^2-c-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, M est solution si et seulement si a, b et c sont racines du polynôme $P(X) = X^3+2X^2-X-2$. Après étude, on trouve que les racines de P sont $1, -1$ et -2.
Bilan : M est solution si et seulement si M $(a, b, c) \in \{1; -1; -2\}^3$, ce qui fait un total de 27 matrices solutions.

Exercice 21

Notons $A_\lambda = A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

1. A_λ n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul. Or,

$$\det(A_\lambda) = (2-\lambda)^2 - 3^2 = (2-\lambda-3)(2-\lambda+3) = (-1-\lambda)(5-\lambda)$$

Ainsi A_λ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda = -1$ ou $\lambda = 5$.
2. Il nous reste donc à résoudre les systèmes $AX = -X$ et $AX = 5X$.

$$AX = -X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & -x \\ 3x & + & 2y & = & -y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 3x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & + & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient les mêmes lignes. Ainsi, on obtient comme solution

$$\mathcal{S}_{-1} = \left\{\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$AX = 5X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 5x \\ 3x & + & 2y & = & 5y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} -3x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & - & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient les mêmes lignes (au signe près). Ainsi, on a les solutions :

$$\mathcal{S}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 22

1. Les deux premiers résultats sont du calcul :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

et donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(A+B) &= \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B) \\ \operatorname{Tr}(\lambda A) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \operatorname{Tr}(A). \end{aligned}$$

Notons $C = AB = (c_{ij})$ et $D = BA = (d_{ij})$. On a, pour tout $(i,j) \in [\![1,\, n]\!]^2$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{et} \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \operatorname{Tr}(BA). \end{aligned}$$

2. On utilise ce qui précède :

$$\operatorname{Tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{Tr}((PA)P^{-1}) = \operatorname{Tr}(P^{-1}(PA)) = \operatorname{Tr}(I_n A) = \operatorname{Tr}(A).$$

3. Supposons que deux telles matrices existence. Alors

$$\operatorname{Tr}(AB - BA) = \operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(BA) = 0$$

et $\operatorname{Tr}(I_n) = n \neq 0$. C'est absurde. Ainsi, il n'existe pas deux matrices A et B vérifiant $AB - BA = I_n$.

Exercice 23

1. Montrons par récurrence descendante que P_p : « $B^p Y = 0_{n,1}$ » pour $p \in [\![0,\, q]\!]$.

- Pour $p = q$, par hypothèse $B^q = 0_n$ donc $B^q Y = 0_{n,1}$. Donc P_q est vraie.
- Supposons la proposition vraie pour $p \in [\![1,\, q]\!]$. Ainsi $B^p Y = 0_{n,1}$. Mais alors, puisque $BY = \alpha Y$, en multipliant par B^{p-1}, on a

$$B^{p-1} B Y = \alpha B^{p-1} Y \iff B^p Y = \alpha B^{p-1} Y.$$

Or, par hypothèse, $B^p Y = 0_{n,1}$ et $\alpha \neq 0$; on en déduit donc que $B^{p-1} Y = 0_{n,1}$: P_{p-1} est donc vraie.

Par principe de récurrence descendante, on en déduit que

$$\forall\, p \in [\![0,\, q]\!], \quad B^p Y = 0_{n,1}.$$

En particulier, pour $p = 0$, on en déduit que $B^0 Y = 0_{n,1}$, c'est-à-dire $Y = 0_{n,1}$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On va utiliser le critère du noyau. Soit $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M_\alpha Y = 0_{n,1}$.
On peut écrire alors
$$-\alpha Y + A^{-1}BAY = 0_{n,1}$$
soit encore, puisque A est inversible
$$-\alpha AY + BAY = 0_{n,1} \iff B(AY) = \alpha AY.$$
D'après la question précédente (puisque $\alpha \neq 0$), on a $AY = 0_{n,1}$ soit $Y = 0_{n,1}$, car A est inversible.
On a donc montré que M_α est bien inversible.

Exercice 24

1. Il faut comprendre l'énoncé. $m_{i,j}$ vaut 1 si le numéro de la ligne i est inférieur ou égale à n, et 0 sinon. Cela donne :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } n = 1 \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } n = 2.$$
2. Intuitivement, il semblerait que $M^2 = nM$. Montrons-le rigoureusement. Tout d'abord, puisque $M \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $M^2 \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
Soit $(i,j) \in [\![1,\, 2n]\!]^2$. Par définition du produit matriciel,
$$\begin{aligned}(M^2)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{2n} (M)_{i,k}(M)_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} m_{i,k}m_{k,j}.\end{aligned}$$
Traitons deux cas :
- Si $i \leqslant n$ alors :
$$\begin{aligned}(M^2)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{2n} \underbrace{m_{i,k}}_{=1 \text{ car } i\leqslant n} m_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{m_{k,j}}_{=1 \text{ car } k\leqslant n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{m_{k,j}}_{=0 \text{ car } k\leqslant n} = n\end{aligned}$$
- Si $i > n$ alors :
$$(M^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{2n} \underbrace{m_{i,k}}_{=0 \text{ car } i>n} m_{k,j} = 0$$

On en déduit donc bien que $M^2 = nM$. Mais alors, par récurrence rapide, on obtient
$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad M^p = n^{p-1}M.$$
3. M n'est pas inversible. Plusieurs méthodes :
- La méthode du pivot appliquée à M donne rapidement une matrice avec une ligne de 1 et que des lignes nulles : des pivots sont donc nuls, et la matrice n'est pas inversible.
- Critère du noyau. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On constate que $MX = 0$. Puisque $X \neq 0$, on en déduit que M n'est pas inversible.

4. On applique la méthode du pivot, qui va assez vite si on commence par échanger les deux premières lignes :

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-(1-\lambda)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice est inversible si et seulement si $1-(1-\lambda)^2 \neq 0$ et $-\lambda \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \notin \{0,2\}$.

Corrigés des exercices bilans

Exercice 25

1. Rapidement

$$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = A\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathcal{E}.$$

2. On calcule tout simplement :

$$\begin{aligned} A(s)A(t) &= \begin{pmatrix} 1-s & -s & 0 \\ -s & 1-s & 0 \\ -s & s & 1-2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-s)(1-t)+st & (1-s)(-t)-s(1-t) & 0 \\ -s(1-t)-t(1-s) & st+(1-s)(1-t) & 0 \\ -s(1-t)-st-t(1-2s) & st+s(1-t)+t(1-2s) & (1-2s)(1-2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-(s+t-2st) & -((s+t-2st) & 0 \\ -(s+t-2st) & 1-(s+t-2st) & 0 \\ -(s+t-2st) & s+t-2st & 1-2(s+t-2st) \end{pmatrix} = A(s+t-2st). \end{aligned}$$

Ainsi, $A(s)A(t) \in \mathcal{E}$. De plus, $A(t)A(s) = A(t+s-2ts) = A(s+t-2st) = A(s)A(t)$: les matrices commutent.

3. a) Q possède une colonne nulle. Ainsi $Q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par le critère du noyau, Q n'est pas inversible. *Bien sûr, une méthode du pivot fonctionne.*
b) Deux méthodes.

Méthode naïve : on applique la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -t & t & 1-2t \\ -t & 1-t & 0 \\ 1-t & -t & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -t & t & 1-2t \\ 0 & 1-2t & 2t-1 \\ 1 & -2t & 2t-1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2t & 2t-1 \\ 0 & 1-2t & 2t-1 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2t & 2t-1 \\ 0 & 1-2t & 2t-1 \\ 0 & -2t^2+t & 2t^2+1-3t \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2t & 2t-1 \\ 0 & 1-2t & 2t-1 \\ 0 & 0 & 1-2t \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice est inversible si et seulement si $1-2t \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $t \neq \frac{1}{2}$.
Méthode rapide : remarquons que $A(0) = I_3$. Soit $t \neq \frac{1}{2}$. On a alors

$$s + t - 2st = 0 \iff s(1-2t) = -t \iff s = \frac{-t}{1-2t}.$$

Remarquons que si $t \neq \frac{1}{2}$, s existe. La question 2 garantit alors que

$$A(t)A\left(-\frac{t}{1-2t}\right) = A(0) = I_3.$$

Par théorème, $A(t)$ est alors inversible. Le cas $t = \frac{1}{2}$ a été traité à la question précédente.
4. Soit $S \in \mathcal{E}$ tel que $S^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right)$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $S = A(t)$. Alors, d'après la question 2

$$A(t)^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right) \iff A(2t-2t^2) = A\left(-\frac{3}{2}\right).$$

Soit, par unicité des coefficients d'une matrice, $2t - 2t^2 = -\frac{3}{2}$. Les solutions sont $\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.
Ainsi, il existe deux matrices de $\mathcal{E}$ vérifiant $S^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right)$: $A\left(\frac{3}{2}\right)$ et $A\left(-\frac{1}{2}\right)$.
5. a) On utilise la question 2. Montrons par récurrence sur n la proposition P_n : il existe un réel t_n vérifiant $J^n = A(t_n)$.
- Pour $n = 0$, $J^0 = I_3 = A(0)$. Ainsi, en posant $t_0 = 0$, on a $J^0 = A(t_0)$.
- Supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n fixé. Ainsi, il existe un réel t_n tel que $J^n = A(t_n)$. Mais alors

$$J^{n+1} = J^nJ = A(t_n)A(-1) = A(t_n - 1 + 2t_n) = A(3t_n - 1).$$

Ainsi, en posant $t_{n+1} = 3t_n - 1$, $J^{n+1} = A(t_{n+1})$ et la proposition P_{n+1} est vérifiée.
D'après le principe de récurrence, il existe une suite (t_n) telle que pour tout n $J^n = A(t_n)$.
b) Le travail de la récurrence nous garantit que $t_0 = 0$ et que pour tout entier n, $t_{n+1} = 3t_n - 1$.
c) (t_n) est une suite arithmético-géométrique. En notant ℓ le réel vérifiant $\ell = 3\ell - 1$, c'est-à-dire $\ell = \frac{1}{2}$, la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = t_n - \frac{1}{2}$ est une suite géométrique, de premier terme $v_0 = t_0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ et de raison 3. Alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -\frac{1}{2}3^n \quad \text{et} \quad t_n = \frac{1-3^n}{2}.$$

Finalement,
$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad J^n = A\left(\frac{1-3^n}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} & 0 \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} & 0 \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{1-3^n}{2} & 3^n \end{pmatrix}.}$$

Exercice 26

Partie A : le cas particulier $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

1. Par définition, $MM^\top = I_2$, donc
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = I_2 \iff \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = I_2.$$
Par identification des coefficients, $a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$ et $ac+bd = 0$.
De même, $M^\top M = I_2$ soit
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = I_2$$
soit
$$a^2+c^2 = b^2 = d^2 = 1 \quad \text{et} \quad ab+cd = 0.$$
2. Si $a = 0$, alors $b^2 = c^2 = 1$ donne $b \in \{-1,1\}$ et $c \in \{-1,1\}$. De même, $d^2+b^2 = 1$ donne $d^2 = 0$ soit $d = 0$. Cela donne donc quatre possibilités :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On constate que ces quatre matrices sont orthogonales.
3. a) Si $a \neq 0$, l'équation $a^2+c^2 = 1$ nous impose $a^2 \leqslant 1$ et $c^2 \leqslant 1$ soit $a \in [-1,\, 1]$ et $c \in [-1,\, 1]$. Par surjectivité de cosinus, il existe $\theta \in [0,\, \pi]$ tel que $a = \cos(\theta)$. Puisque $a \neq 0$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, et on a $\sin(\theta) \geqslant 0$.
L'équation $a^2+b^2 = 1$ donne $\cos^2(\theta)+b^2 = 1 = \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)$, c'est-à-dire $b^2 = \sin^2(\theta)$.
Si $b \geqslant 0$, alors $b = \sin(\theta)$.
Si $b < 0$, alors $b = -\sin(\theta) = \sin(-\theta)$ et on constate que $a = \cos(\theta) = \cos(-\theta)$.
Dans tous les cas, $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$, avec (en utilisant la 2π-périodicité), $\theta \in [0,\, 2\pi[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right\}$.
b) Les relations $a^2+b^2 = 1$ et $c^2+d^2 = 1$ garantissent que
$$d^2 = \cos^2(\theta) \quad \text{et} \quad b^2 = \sin^2(\theta)$$
donc il existe $(\alpha, \beta) \in \{-1,1\}^2$ tels que
$$b = \alpha \sin(\theta) \quad \text{et} \quad d = \beta \cos(\theta).$$
Enfin, $ac+bd = 0$ nous donne
$$\cos(\theta)\sin(\theta) + \alpha\beta\cos(\theta)\sin(\theta) = (1+\alpha\beta)\cos(\theta)\sin(\theta)$$
ce qui impose $\alpha = -\beta$. Finalement,
$$\exists\, \varepsilon \in \{-1,1\}, \quad M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
4. On calcule :
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix}^\top &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\varepsilon\sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta)+\varepsilon^2\sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta)-\varepsilon^2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta)-\varepsilon^2(\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta)+\varepsilon^2\cos^2(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car } \varepsilon^2 = 1 \text{ et } \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1.
\end{aligned}$$

5. On applique naïvement ce qui précède :

Code Python

```python
import numpy as np

def ortho(theta, eps):
   M = np.array([ [np.cos(theta), -eps*np.sin(theta)],
      [np.sin(theta), eps*np.cos(theta)]])
   return M
```

ce qui donne par exemple

Console Python

```
>>> ortho(0, -1)
array([[ 1., -0.],
       [ 0., -1.]])
>>> ortho(np.pi/2, -1)
array([[ 0., -1.],
       [ 1., -0.]])
>>> ortho(np.pi, 1)
array([[-1.,  0.],
       [ 0., -1.]])
```

Partie B : généralités sur les matrices orthogonales

1. a) Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Par définition, $A \times A^\intercal = I_n$. Par définition, A est inversible et $A^{-1} = A^\intercal$. Enfin, en utilisant les propriétés de la transposée :

$$A^{-1}\left(A^{1}\right)^\intercal = A^{-1}\left(A^\intercal\right)^{-1} = \left(A^\intercal A\right)^{-1} = I_n^{-1} = I_n$$

le résultat étant valable dans l'autre sens, on a bien que $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Enfin,

$$A^\intercal\left(A^\intercal\right)^\intercal = A^\intercal A = I_n$$

et de même dans l'autre sens : $A^\intercal \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
b) Il s'agit d'un calcul simple. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$(AB)(AB)^\intercal = A\underbrace{BB^\intercal}_{=I_n}A^\intercal = AA^\intercal = I_n$$

et

$$(AB)^\intercal AB = B^\intercal\underbrace{A^\intercal A}_{=I_n}B = B^\intercal B = I_n.$$

Ainsi $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
2. a) Si $X = 0$ alors $\|X\| = \sqrt{0} = 0$.
Réciproquement, si $\|X\| = 0$, alors $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = 0$, soit $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$. Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls ; ainsi, $x_1^2 = \dots = x_n^2 = 0$ et donc $x_1 = \dots = x_n = 0$: $X = 0$.
b) Il s'agit d'un calcul, déjà vu dans l'exercice 2 :

$$X^\intercal X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$= x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|X\|^2.$$

c) On utilise la remarque précédente :

$$\|AX\|^2 = (AX)^\intercal AX = X^\intercal\underbrace{A^\intercal A}_{=I_n}X = X^\intercal X = \|X\|^2.$$

Les deux termes étant positifs, on en déduit bien que $\|AX\| = \|X\|$.

3. a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Par définition du produit matriciel :

$$\begin{aligned}(AA^{\mathsf{T}})_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k}(A^{\mathsf{T}})_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(A)_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2.\end{aligned}$$

Or $AA^{\mathsf{T}} = I_n$ donc $(AA^{\mathsf{T}})_{i,i} = 1$. On peut conclure que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 1.$$

b) Soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. D'après ce qui précède

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 1 \implies a_{i,j}^2 = 1 - \underbrace{\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\neq j}} a_{i,k}^2}_{\text{termes positifs}} \leqslant 1.$$

Par application de la fonction racine, croissante sur $\mathbb{R}^+$

$$\forall\,(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad |a_{i,j}| \leqslant 1.$$

4. a) Un exemple (pas unique) : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) On fixe $M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}(MM^{\mathsf{T}})_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} (M)_{i,k}(M^{\mathsf{T}})_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{j,k}.\end{aligned}$$

Or, dans la colonne k, il y a un seul terme non nul. Si on note ℓ sa position (i.e. $m_{\ell,k} \in \{-1, 1\}$ et $m_{i,k} = 0$ si $k \neq \ell$), alors le résultat précédent est nul si $i \neq j$, et si $i = j$, un seul terme est non nul et

$$(MM^{\mathsf{T}})_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{i,k} = m_{\ell,k}^2 = 1.$$

Finalement,

$$(MM^{\mathsf{T}})_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et donc

$$MM^{\mathsf{T}} = I_n.$$

Le raisonnement dans l'autre sens est similaire et finalement $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
c) La question 3 assure que si M est une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers, puisque pour tous i et j, $|m_{i,j}| \leqslant 1$ alors ses seuls coefficients possibles sont 0, 1 ou -1.

Par ailleurs, puisque $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 1$, si un terme vaut 1 ou -1, les autres termes sont nécessairement nuls : ainsi, sur chaque colonne, un seul terme est non nul et vaut 1 ou -1. Le raisonnement sur les lignes est le même (en utilisant l'autre produit) et finalement une matrice orthogonale à coefficients entiers a nécessairement tous ses termes nuls, sauf 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne, qui vaut 1 ou 1. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{O}_n(\mathbb{Z}) = \mathcal{P}_n.}$$