17 Chapitre

Systèmes linéaires

Résumé

L'OBJECTIF *de ce chapitre est d'introduire rigoureusement la notion de système linéaire, déjà vue lors des années antérieures. On y voit, entre autre, la méthode de résolution du pivot de Gauss.*

Plan du cours

> « *Pour comprendre un système, il faut... s'en extraire.* »
>
> Bernard Werber (1961 –). *L'empire des anges*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir résoudre un système simple par substitution . . . . ☐

② Savoir appliquer la méthode du pivot de Gauss-Jordan pour transformer un système en un système triangulaire . . . . ☐

③ Résoudre un système ayant une infinité de solutions avec un (ou plusieurs) paramètres . ☐

④ Savoir déterminer le rang d'un système . . . . ☐

⑤ Savoir résoudre un système ayant un paramètre . . . . ☐

I. Définitions et propriétés

1. Définitions

Définition 17.1.

Soient n et p deux nombres entiers non nuls. On appelle **système d'équations linéaires** de n équations à p inconnus (ou système n fois p, $n \times p$) un système de la forme

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

où les $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et les $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des nombres réels, et $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des inconnues.
Le nombres a_{ij} est le **coefficient** de la $j^{\text{ème}}$ inconnue x_j dans la $i^{\text{ème}}$ équations (L_i).

Remarque

Si $n = p$ on dit que le système (S) est **carré d'ordre** n.

Exemple 17.1

Le système

$$(S_1) \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 1 & (L_1) \\ 3x_1 & + & x_2 & = & -2 & (L_2) \end{array}\right.$$

est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues. C'est ainsi un système carré d'ordre 2.
Le système

$$(S_2) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 & (L_1) \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 3 & (L_2) \end{array}\right.$$

est un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues.

2. Propriétés

Définition 17.2.

Soit

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

- **Résoudre** le système (S), c'est trouver toutes les p-listes $(x_1, \dots, x_p)$ de réels vérifiant les n équations $(L_1, \dots, L_n)$.
- On dit qu'un système est **incompatible** s'il n'admet pas de solution.

Remarque

Dans le cas où $p < n$, il y a plus d'équations que d'inconnues. Soit certaines équations sont redondantes (et on peut donc les supprimer), soit le système est incompatible.
Dans la suite, on ne s'intéressera qu'au cas $n \leqslant p$.

Définition 17.3.

Deux systèmes (S) et (S') sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions. On notera $(S) \sim (S')$ pour signifier que (S) et (S') sont équivalents, ou bien $(S) \iff (S')$.

Exemple 17.2

Les systèmes $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ sont équivalents.

Définition 17.4.

Soit

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Le système (S) est dit **homogène** (ou **sans second membre**) si $b_1 = \dots = b_n = 0$. Dans ce cas, la p-liste $(0, \dots, 0)$ est toujours solution de (S).

On appelle **système homogène associé** à (S) le système obtenu à partir de (S) en remplaçant tous les nombres b_i par 0.

Exemple 17.3

Le système homogène associé à (S) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ est (S_0) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$.

3. Résolution par substitution

Méthode

La méthode par résolution consiste à écrire une des inconnues (par exemple x_1) en fonction des autres $(x_2, x_3, \dots)$, puis à remplacer cette inconnue x_1 dans toutes les autres équations en fonction de $x_2, x_3, \dots$. Cette méthode est efficace lorsqu'il y a peu d'inconnues ou d'équations.

Exemple 17.4

Résoudre le système suivant :

$$(S_1) \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 & (L_1) \\ -3x_1 + x_2 = 2 & (L_2) \end{cases}$$

Solution

En utilisant (L_2), on peut exprimer x_2 en fonction de x_1 : $x_2 = 3x_1 + 2$. On remplace alors cette égalité dans (L_1) pour en déduire la valeur de x_1. On obtiendra enfin la valeur de x_2 :

$$(S_1) \iff \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_2 = 3x_1 + 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x_1 - 3(3x_1+2) = 1 \\ x_2 = 3x_1 + 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -7x_1 = 7 \\ x_2 = 3x_1 + 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Ainsi, le système admet une unique solution : $\{(-1;-1)\}$.

4. Systèmes triangulaires

Les système triangulaires sont les plus simples des systèmes, puisqu'ils se résolvent très facilement.

Définition 17.5.

On dit qu'un système (S) $n \times p$ est **triangulaire** si

$$\forall\, i \in [\![1,\, n]\!],\ \forall\, j \in [\![1,\, p]\!],\ i > j \implies a_{i,j} = 0$$

Ainsi, si $n < p$, le système est de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + \dots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + \dots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n + \dots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Si $n = p$, on a alors le système suivant :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + \dots + a_{2n}x_n = b_n & (L_2) \\ \qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Les coefficients diagonaux $a_{11}, \dots, a_{nn}$ sont appelés les **pivots** du système.

Remarque

Lorsque $n = p$ et que tous les pivots a_{ii} (pour $i \in \{1; \dots; n\}$) sont non nuls, le système se résout par substitutions successives, de (L_n) à (L_1). Il y a alors une **unique n-liste solution**.

Méthode

Dans le cas $n < p$, il y a une (ou plusieurs) inconnue(s) en trop. On choisit alors ces inconnues comme inconnues auxiliaire, et on résout comme pour la cas $n = p$.

Exemple 17.5
Résoudre le système suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ \phantom{2x - {}} 2y - 4z = 2 \end{cases}$$

Solution
Il y a 3 inconnues, pour deux équations. Exprimons x et y en fonction de z :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x - y = -1 - 3z \\ \phantom{2x - {}} 2y = 2 + 4z \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$$
$$\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = 1 + 2z \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \left\{\left(-\dfrac{1}{2}z; 1 + 2z; z\right),\ z \in \mathbb{R}\right\}$.

Remarque
Bien évidemment, si on choisit une autre inconnue auxiliaire, le résultat ne sera pas sous la même forme, mais désignera bien le même ensemble de solutions.

II. Pivot de Gauss-Jordan

1. Exemple

On souhaite résoudre le système suivant

$$(S)\quad \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 & L_1 \\ 2x - 2y + 2z = 2 & L_2 \\ -x + y + 3z = 1 & L_3 \end{cases}$$

Pour faire cela, on va utiliser différentes opérations dites élémentaires, qui transforment le système (S) en un système équivalent, mais triangulaire cette fois-ci. Il ne restera alors plus qu'à résoudre le système triangulaire associé.
Ici :

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 & L_1 \text{ ligne pivot} \\ - 6y - 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \phantom{x - {}} 3y + 5z = 2 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 & L_1 \\ - 6y - 2z = 0 & L_2 \text{ ligne pivot} \\ \phantom{x - 6y - {}} 8z = 4 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{cases}$$

On obtient ainsi un système triangulaire, qu'on résout :

$$(S) \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{6} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, la solution de (S) est $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2. Opérations élémentaires

Définition 17.6.

Soit (S) un système $n \times p$. On appelle **opération élémentaire** l'une des trois opérations suivantes :

- $L_i \leftrightarrow L_j$: **échange** de la $i^{\text{ième}}$ ligne L_i et de la $j^{\text{ième}}$ ligne L_j.
- $L_i \leftarrow aL_i$ où $a \neq 0$: on **remplace** la $i^{\text{ième}}$ ligne par elle même **multipliée** par un nombre non nul a.
  Utilité : lorsqu'on a des fractions dans la ligne L_i, cela permet d'enlever les dénominateurs.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ où b est quelconque : on **remplace** la $i^{\text{ième}}$ ligne par la **somme** d'elle même et d'un multiple d'une autre ligne.
  Utilité : permet d'éliminer une inconnue.

Remarque

En combinant la deuxième et la troisième opérations élémentaires, on obtient l'opération $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ où a est non nul, et b est quelconque.

Théorème 17.1.

Tout système obtenu à partir d'un système (S) en transformant l'une de ses équations par une opération élémentaire est équivalent à (S), et a donc le même ensemble de solutions.

Démonstration

Il faut démontrer, pour chacune des opérations, qu'une solution de l'un est solution de l'autre, ce qui se fait en traitant les 3 cas.

Remarque

Ainsi, en combinant différentes opérations élémentaires, on ne change pas l'ensemble de solutions du système.

On a enfin une propriété qui en découle :

Conséquence 17.2.

Si un système possède deux lignes identiques, il est équivalent au système où on enlève une de ces deux lignes.

3. Pivot de Gauss-Jordan

Méthode

En utilisant les opérations élémentaires comme dans l'exemple, on va résoudre un système (S) par la méthode du pivot de Gauss-Jordan :

1. On élimine successivement des inconnues via les opérations élémentaires, pour transformer le système initial en un système triangulaire ;
2. On résout le système triangulaire par substitutions.

Exemple 17.6

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss. Le nombre de solutions est indiqué.

- (Une unique solution)

$$(S_1)\quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & (L_1)\\ 3x + y + 2z = 1 & (L_2)\\ 2x + 3y + z = 0 & (L_3)\end{cases}$$

- (Une infinité de solution)

$$(S_2)\quad \begin{cases} -y + 2z + 3t = 0 & (L_1)\\ 2x + 2y - z = 0 & (L_2)\\ 3x - y + 2z - 2t = 0 & (L_3)\\ 5x + y + z - 2t = 0 & (L_4)\end{cases}$$

- (Aucune solution)

$$(S_3)\quad \begin{cases} -y + 2z + 3t = 0 & (L_1)\\ 2x + 2y - z = 0 & (L_2)\\ 3x - y + 2z - 2t = 0 & (L_3)\\ 5x + y + z - 2t = 1 & (L_4)\end{cases}$$

Solution

On utilise la méthode du Pivot de Gauss, en n'oubliant pas d'indiquer les opérations effectuées.

- On applique les opérations élémentaires pour obtenir un système triangulaire :

$$(S_1) \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & L_1 \text{ ligne pivot}\\ -5y - 7z = -5 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1\\ -y - 5z = -4 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & L_1\\ -5y - 7z = -5 & L_2 \text{ ligne pivot}\\ -18z = -15 & L_3 \leftarrow 5L_3 - L_2\end{cases}$$

Le système est triangulaire avec tous ses pivots non nuls : on remonte celui-ci pour trouver une unique solution.

$$(S_1) \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{6}\\ y = -\frac{1}{6}\\ z = \frac{5}{6}\end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)\right\}}$$

- On n'hésite pas à échanger des lignes pour avoir une ligne pivot pratique.

$$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & \\ 3x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 & \\ 5x & + & y & + & z & - & 2t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & L_1 \text{ ligne pivot} \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & L_2 \\ & - & 8y & + & 7z & - & 4t & = & 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \\ & - & 8y & + & 7z & - & 4t & = & 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1 \end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes sont les mêmes. On en élimine une, et on continue la méthode du pivot de Gauss. On peut ajouter une ligne pour rappeler l'inconnue auxiliaire (ici, la ligne L_4), mais ce n'est pas nécessaire :

$$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & L_1 \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & L_2 \text{ ligne pivot} \\ & & & - & 9z & - & 28t & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2 \\ & & & & & & t & = & t & L_4 \end{array}\right.$$

On obtient un système triangulaire, qu'on résout en utilisant une variable auxiliaire (par exemple ici, t) :

$$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{rl} x = & \frac{15}{9}t \\ y = & -\frac{29}{9}t \\ z = & -\frac{28}{9}t \\ t = & t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{5}{3}t; -\frac{29}{9}t; -\frac{28}{9}t; t\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}}$$

- Le système est le même que précédemment, excepté la dernière ligne. Par les deux mêmes opérations, on obtient :

$$(S_3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & \\ 3x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 & \\ 5x & + & y & + & z & - & 2t & = & 1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & L_1 \text{ ligne pivot} \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & L_2 \\ & - & 8y & + & 7z & - & 4t & = & 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \\ & - & 8y & + & 7z & - & 4t & = & 2 & L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1 \end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes étant incompatibles, le système est incompatible. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$$

Remarque

Un système linéaire admet :

- soit aucune solution (il est donc incompatible) ;

- soit une unique solution ;
- soit une infinité de solutions (quand il y a une (ou des) inconnues auxiliaires)

4. Rang d'un système

Définition 17.7.

Soit (S) un système. On appelle **rang** d'un système, que l'on note $\mathrm{rg}(S)$, le nombre de pivot non nul qu'on obtient après avoir appliqué la méthode du pivot de Gauss, ou encore le nombre d'équations non nulles.

Exemple 17.7

Soit (S) le système $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$. Appliquons la méthode du pivot :

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 & L_1 \text{ ligne pivot} \\ \quad - 5y - 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad\quad 5y + 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 & L_1 \\ \quad - 5y - 3z = 0 & L_2 \text{ ligne pivot} \\ \quad\quad\quad 0z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Le système est triangulaire, et il y a 2 pivots non nuls (ou 2 équations non nulles). Ainsi, le rang de (S) est de 2.

III. Systèmes de Cramer

1. Définition

Définition 17.8.

Un système carré d'ordre n est dit **de Cramer** s'il possède une unique n-liste solution.

Conséquence 17.3.

Un système homogène (S) de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si son unique solution est la n-liste $(0, 0, \dots, 0)$.

2. Systèmes de Cramer et pivot de Gauss

Théorème 17.4.

Un système (S) carré d'ordre n est de Cramer si et seulement si la méthode du pivot de Gauss fait apparaitre n pivots successifs non-nuls.

Exemple 17.8

Montrer que le système suivant est de Cramer

$$(S)\quad \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Solution

En appliquant la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 & \\ \quad - 3y + 5z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad - y + 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 & \\ \quad - y + 2z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \\ \quad - 3y + 5z = 0 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 & \\ \quad - y + 2z = 0 & \\ \quad\quad - z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases}$$

On a ainsi fait apparaitre les pivots $1, -1$ et -1 qui sont tous les trois non nuls : le système (S) est bien de Cramer.

On peut ré-écrire le théorème précédent avec la notion de rang :

Théorème 17.5.

Un système carré d'ordre n (avec $n \geqslant 1$) est de Cramer si et seulement si $\mathrm{rg}(n) = n$.

3. Système de Cramer et système homogène associé

Théorème 17.6.

Un système (S) est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est aussi de Cramer.

Démonstration

En effet, le choix des pivots dans la méthode des pivots de Gauss ne dépend pas du second membre.

Méthode

Pour montrer qu'un système quelconque est de Cramer, il suffit donc de montrer que son système homogène associé l'est, ce qui est plus simple.

Exercices 17

Exercices

Résolution de systèmes

●○○ **Exercice 1 Systèmes** (30 min.)

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 7x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & & & + & 2z & = & -1 \\ x & - & y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -3x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & - & 3z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & - & 3t & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_6)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & 3y & & & - & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & + & 2t & = & 0 \\ & & 5y & + & 2z & & & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

●○○ **Exercice 2 Systèmes avec variable** (20 min.)

Résoudre les systèmes suivants, en fonction de a, b, c et d :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ x & - & y & - & z & = & b \\ -3x & + & y & + & 3z & = & c \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 3y & - & 2z & = & a \\ -4x & + & 4y & + & 3z & = & b \\ 2x & - & 2y & - & z & = & c \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 3z & = & a \\ 3x & + & y & - & 5z & = & b \\ 4x & + & 2y & - & z & = & c \\ x & & & - & 7z & = & d \end{array}\right.$$

●○○ **Exercice 3 Systèmes à paramètre** (10 min.)

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de λ les systèmes suivants sont de Cramer. Résoudre alors les systèmes.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcl} (2-\lambda)x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & + & (2-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x & - & y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & (2-\lambda)y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & (-3-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (2-\lambda)x & & & + & 4z & = & 0 \\ 3x & - & (4+\lambda)y & + & 12z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & (5-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (3-\lambda)x & - & 2y & & & = & 0 \\ 2x & - & \lambda y & - & 4z & = & 0 \\ & & y & - & (3+\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Applications

●○○ **Exercice 4 Des polynômes** (10 min.)

Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$?
Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant, pour tout entier $k \in [\![0, 3]\!]$, $P(k) = k$?

●○○ **Exercice 5 Décomposition en éléments simples** (20 min.)

Montrer qu'il existe des réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$:

$$\frac{3x+2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}.$$

On a effectué la **décomposition en éléments simples** de $\dfrac{3x+2}{x(x-1)(x+2)}$. De même, décomposer en éléments simples

$$\frac{2}{x(x+1)(x+2)} \quad \text{et} \quad \frac{8}{x^3+3x^2-x-3}.$$

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

On utilise la méthode du pivot de Gauss sur chacun des 6 systèmes. Lorsqu'un système va avoir une infinité de solutions, on utilise une (ou plusieurs) inconnue(s) auxiliaire(s). En général, on prendra les inconnues dans l'ordre inverse (par exemple, si les inconnues sont x_1, x_2, x_3, x_4, on essaiera de prendre dans l'ordre x_4, puis x_3,...). On obtient ici :

- Une unique solution pour S_1 : $\mathcal{S} = \{(1; -1; -1)\}$.
- Une unique solution pour S_2 : $\mathcal{S} = \{(-4; 5; -3)\}$.
- Une infinité de solution pour S_3, par exemple

$$\mathcal{S} = \{(1 - z; 1 + z; z), z \in \mathbb{R}\}$$

Remarque : on peut obtenir d'autres réponses possibles selon la variable auxiliaire que l'on prend.

- Aucune solution pour S_4, qui est en effet incompatible : $\mathcal{S} = \varnothing$.
- Une unique solution pour S_5 qui est un système homogène et de Cramer : $\mathcal{S} = \{(0; 0; 0; 0)\}$.
- Une infinité de solution pour S_6, par exemple

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{6}{5}z - t; -\frac{2}{5}z; z; t \right), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 2

On applique également la méthode du pivot de Gauss. La seule difficulté ici repose sur les lettres inconnues, qui compliquent les calculs. Il est cependant important de savoir résoudre un tel système, que l'on reverra en fin d'année dans les applications linéaires. On obtient ici :

- Une unique solution pour S_1 :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{a+b}{2}; \frac{-3b-c}{2}; \frac{a+2b+c}{2} \right) \right\}$$

- **Attention** : ici, selon les valeurs de a, b et c, les résultats sont différents. Il faut donc traiter **tous** les cas par **disjonction de cas**. Ainsi :
  - Si $c \neq 2a + b$, le système est incompatible : $\mathcal{S} = \varnothing$.
  - Si $c = 2a + b$, le système possède une infinité de solutions, par exemple

$$\mathcal{S} = \{(3c + b + 2y; y; 2c + b)\,,\ y \in \mathbb{R}\}$$

- On doit également traiter par disjonction de cas :
  - Si $a + b \neq c + d$, le système est incompatible : $\mathcal{S} = \varnothing$.
  - Si $a + b = c + d$, le système possède une unique solution :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{5d + 7c - 14a}{5}; \frac{27a - 10d - 11c}{5}; \frac{c - 2a}{5} \right) \right\}$$

Exercice 3

Méthode

Pour déterminer si un système à paramètre est de Cramer ou non, on applique la méthode du pivot de Gauss, en essayant de ne mettre le paramètre que sur le dernier pivot. On utilise ensuite le résultat classique : un système est de Cramer si et seulement si ses pivots sont tous non nuls.

- Pour (S_1), on a

$$(S_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & + & (2-\lambda)y & = & 0 \\ & & (9-(2-\lambda)^2)\,y & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, (S_1) est de Cramer si et seulement si $9-(2-\lambda)^2 \neq 0$. Or $9-(2-\lambda)^2 = (3-(2-\lambda))(3+(2-\lambda) = (1+\lambda)(5-\lambda)$. Donc (S_1) est de Cramer si et seulement si

$$\boxed{\lambda \notin \{-1;5\}}$$

- Pour (S_2), on a

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & (-3-\lambda)z & = & 0 \\ & - & \lambda y & - & \lambda z & = & 0 \\ & & & & (\lambda^2-1)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, (S_2) est de Cramer si et seulement si $-\lambda \neq 0$ et $\lambda^2-1 \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 1$. Donc (S_2) est de Cramer si et seulement si

$$\boxed{\lambda \notin \{-1;0;1\}}$$

- Pour (S_3), on a

$$(S_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & (5-\lambda)z & = & 0 \\ & & (2-\lambda)y & + & (-3+3\lambda)z & = & 0 \\ & & & & (\lambda-\lambda^2)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, (S_3) est de Cramer si et seulement si $2-\lambda \neq 0$ et $\lambda-\lambda^2 \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$. Donc (S_3) est de Cramer si et seulement si

$$\boxed{\lambda \notin \{0;1;2\}}$$

- Pour (S_4), on a

$$(S_4) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & \lambda y & - & 4z & = & 0 \\ & & y & - & (3+\lambda)z & = & 0 \\ & & & & (\lambda(\lambda^2-1))z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, (S_4) est de Cramer si et seulement si $\lambda(\lambda^2-1) \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 0$. Donc (S_4) est de Cramer si et seulement si

$$\boxed{\lambda \notin \{-1;0;1\}}$$

Exercice 4

On écrit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Les hypothèses s'écrivent alors :

$$\left\{\begin{array}{l} a+\ b+c+d=1 \\ -a+\ b-c+d=1 \\ 3a+2b+c\qquad=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+\ b+\ c+\ d=1 \\ \quad 2b\qquad +2d=2 \\ \ -\ b-2c-3d=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+\ c+\ d=1 \\ \quad b\qquad +\ d=1 \\ \qquad -2c-2d=-1 \end{array}\right.$$

Ce système admet une infinité de solutions : il y a donc une infinité de polynôme vérifiant les hypothèses, par exemple $P = -\frac{1}{2}X^3 + X^2 + \frac{1}{2}X$.

De même, si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, les hypothèses s'écrivent :

$$\begin{cases} a3^3 + b3^2 + c3 + d = 3 \\ a2^3 + b2^2 + c2 + d = 2 \\ a + b + c + d = 1 \\ d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 1 \\ -6b - 8c = -8 \\ -2b - 3c = -3 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c = 1 \\ -6b - 8c = -8 \\ -c = -1 \\ d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

Il y a ainsi un unique polynôme qui convient, le polynôme $P = X$.

Exercice 5

On met au même dénominateur, et on identifie les numérateurs qui sont des polynômes. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2} &= \frac{a(x-1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2 + (a+2b-c)x - 2a}{x(x-1)(x+2)}.\end{aligned}$$

Par identification des numérateurs, on doit avoir

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b - c = 3 \\ -2a = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{5}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$:

$$\frac{3x+2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{-1}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{x-1} - \frac{\frac{2}{3}}{x+2}.$$

Par le même raisonnement, on trouve, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$:

$$\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2}.$$

Enfin, après factorisation

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x-1)(x+1)(x+3)$$

et finalement, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$:

$$\frac{8}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}.$$