Chapitre 16

Polynômes

Résumé

Dans ce chapitre, on introduit un objet qui servira tant en première qu'en deuxième année, et qui a déjà été vu, en partie, au lycée.

Plan du cours

> *« Rien n'est solitaire, tout est solidaire. L'homme est solidaire avec la planète, la planète est solidaire avec le soleil, le soleil est solidaire avec l'étoile, l'étoile est solidaire avec la nébuleuse, la nébuleuse, groupe stellaire, est solidaire avec l'infini. Ôtez un terme de cette formule, le polynôme se désorganise, l'équation chancelle, la création n'a plus de sens dans le cosmos et la démocratie n'a plus de sens sur la terre. Donc, solidarité de tout avec tout, et de chacun avec chaque chose. La solidarité des hommes est le corollaire invincible de la solidarité des univers. Le lien démocratique est de même nature que le rayon solaire. »*

Victor Hugo (1802 – 1885). *Proses philosophiques, L'âme*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir manipuler la notion de degré (définition, opérations) . . . . □

② Savoir manipuler la notion de dérivation de polynôme . . . . □

③ Connaître le principe de la division euclidienne . . . . □

④ Connaître la notion de racine . . . . □

⑤ Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}$ . . . . □

⑥ Savoir résoudre des équations se ramenant à un polynôme . . . . □

I. Définitions

1. Notion de polynômes

a. Définition

Notation

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on introduit les fonctions $X^i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^i \end{array}$ et la fonction $X^0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$

Définitions 16.1.

On appelle **polynôme à coefficients réels** toute somme finie d'applications précédentes, c'est-à-dire toute fonction s'écrivant sous la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, k \in [\![0, n]\!], a_k \in \mathbb{R}$.

- Les nombres a_k sont appelés les **coefficients** du polynôme P.
- Si $a_n \neq 0$, on dit que P est de **degré** n et on note $\deg(P) = n$. Dans ce cas, a_n est appelé **coefficient dominant** du polynôme P.

Définitions 16.2.

Soit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients réels. La **fonction polynôme associée** au polynôme P est la fonction, encore notée P, définie sur $\mathbb{R}$ par
$P : x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.
Un polynôme ne contenant qu'un terme, c'est-à-dire s'écrivant sous la forme $P = a_n X^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \in \mathbb{R}$ est appelé un **monôme**.

Exemple 16.1

Le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^2 + 1$ est un polynôme de degré 4 et de coefficient dominant 1. Sa fonction polynôme associée est la fonction $P : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$. Ainsi, $P(1) = 1^4 - 2 \times 1^2 + 1 = 0$.

Remarque

Attention : la notation $P(X)$ représente une fonction (c'est une représentation **formelle**), que l'on peut voir comme la composée de P avec la fonction X définie en préambule.
On peut ainsi parler du polynôme $P(X) = X^2 - 1$ plutôt que de parler de la fonction polynôme P définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 1$.
On **évalue** un polynôme en un réel x quand on donne la valeur de $P(x)$.

Notation

On note $\mathbb{R}[X]$, ou $\mathbb{R}[x]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Ainsi, $\mathbb{R}_1[X] = \{aX + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

b. Egalité de polynômes

L'écriture d'un polynôme n'est pas unique : on peut ajouter autant de termes nuls qu'on le souhaite :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n+p} a_k X^k \text{ avec } a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{n+p} = 0.$$

En revanche, les coefficients d'un polynôme sont uniquement déterminés :

Théorème 16.1. Unicité des coefficients d'un polynôme

Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux polynômes. Alors $P = Q$ si et seulement si

$$n = m \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0,\, n]\!], \quad a_k = b_k$$

En particulier, la fonction constante égale à 0 est l'unique polynôme dont tous les coefficients sont nuls. On l'appelle le **polynôme nul** et on le note 0.

Démonstration

Supposons que $n \leqslant m$. On pose alors $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_m = 0$, de sorte que

$$\sum_{k=0}^{m} a_k X^k = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{m} (a_k - b_k) x^k = 0.$$

On en revient à démontrer la propriété suivante : pour tout n, si $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est tel que $\sum_{k=0}^{n} c_k X^k = 0$ alors $c_0 = \ldots = c_n = 0$. Notons H_n cette propriété que l'on montre par récurrence.

H_0 est vraie (car le polynôme est constant). Supposons la propriété H_n vraie pour un certain entier n fixé.

Prenons $(c_0, \ldots, c_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k x^k = 0$. Si $c_{n+1} \neq 0$, remarquons alors que

$$\lim_{x \to +\infty} |Q(x)| = +\infty$$

ce qui est absurde, car $Q(x) = 0$ pour tout réel x. Donc nécessairement, $c_{n+1} = 0$. Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k = 0$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour en déduire que $c_0 = \ldots = c_n = 0$.

Le principe de récurrence nous permet alors de conclure que H_n est vraie pour tout n.

Exemple 16.2

Soient $P(X) = 2X^2 + 3X - 1$ et $Q(X) = 2X^2 + aX - b$. Alors $P = Q$ si et seulement si $a = 3$ et $b = 1$.

c. Application à l'identification

Exemple 16.3

Soit $P(X) = X^3 - X^2 - 3X + 2$. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

Solution

Soit $Q(X) = (X-2)(aX^2+bX+c)$. En développant,

$$Q(X) = aX^3 + bX^2 + cX - 2aX^2 - 2bX - 2c = aX^3 + (b-2a)X^2 + (c-2b)X - 2c$$

Pour que $P = Q$, par unicité de l'écriture d'un polynôme, on identifie les coefficients :

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b-2a &= -1 \\ c-2b &= -3 \\ -2c &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 1 \\ c &= -1 \end{cases}$$

Ainsi, $P(X) = (X-2)(X^2+X-1)$.

Exercice 16.4

Trouver deux réels a et b tels que,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

Solution

En mettant au même dénominateur, on cherche a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, on a

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$$

Par identification des coefficients, on a donc

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ a-b &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ains, pour tout réel x différent de 1 et -1, on a

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

☞ *Exercice 6.*

d. Degré

Définition 16.3. Degré

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficient réel.

- Si P n'est pas le polynôme nul, on appelle **degré** de P, et on note $\deg(P)$, le plus grand des indices des coefficients non nuls de P :

  $$\deg(P) = \max\{k \in [\![0,\, n]\!], \quad a_k \neq 0\}.$$

  Si $p = \deg(P)$, on appelle **coefficient dominant** de P le terme a_p, et **terme** dominant de P le terme a_pX^p. Si $a_p = 1$, on dit que le polynôme est **unitaire**.
- Si P est le polynôme nul, on choisit, par convention, de définir $\deg(0) = -\infty$.

On utilisera, pour les règles suivantes, la convention, pour $a \in \mathbb{N}$:

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = (-\infty) + (-\infty) = -\infty \quad \text{et} \quad \max(a, -\infty) = a.$$

Propriété 16.2.

Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes.

- Le degré d'un polynôme constant non nul est 0.
- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$, avec égalité si et seulement si $p \neq q$ ou bien $p = q$ et $a_p \neq -b_q$.
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$, et son coefficient dominant est $a_p b_q$.

Démonstration

Supposons que $p \leqslant q$ (l'autre cas est similaire). Alors :

- Posons $a_{p+1} = \ldots = a_q = 0$, de sorte que
$$P + Q = \sum_{k=0}^{q} (a_k + b_k) X^k \in \mathbb{R}[X].$$
Remarquons alors que $P + Q$ est de degré au maximum $q = \max(p, q)$, et il est de degré q si et seulement si $a_q + b_q \neq 0$, c'est-à-dire $a_q \neq -b_q$. C'est entre autre le cas si $a_q = 0$, c'est-à-dire si $\deg(P) < \deg(Q)$.
- On suppose que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. Calculons le produit PQ :
$$\begin{aligned} PQ &= \left(a_p X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k\right)\left(b_q X^q + \sum_{i=0}^{q-1} b_i X^i\right) \\ &= a_p b_q X^{p+q} + \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} a_k b_q X^{k+q}}_{\text{degré } \leqslant p+q-1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{q-1} a_p b_i X^{p+i}}_{\text{degré } \leqslant p+q-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{q-1} a_k b_i X^{k+i}}_{\text{degré } \leqslant p-1+q-1=p+q-2} \end{aligned}$$
Ainsi, puisque $a_p b_q \neq 0$, PQ est de degré $p + q$, et de coefficient dominant $a_p b_q$.

Corollaire 16.3.

On peut généraliser à la somme et au produit d'un nombre fini de polynômes. Si $P_1, \ldots, P_k$ sont des polynômes à coefficients réels,
$$\deg\left(\sum_{i=1}^{k} P_i\right) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant k} (\deg(P_i)) \quad \text{et} \quad \deg\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \deg(P_i).$$
Le coefficient dominant du produit est égal au produit des coefficients dominants.

Ainsi, si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$ alors $P^k \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg\left(P^k\right) = k\deg(P)$ et le coefficient dominant de P^k est la puissance k-ième de celui de P.

Les résultats précédents permettent de justifier que la somme et le produit par un réel dans $\mathbb{R}_n[X]$ sont des opérations internes : si $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

Les opérations sur les polynômes possèdent les propriétés usuelles qui découlent des opérations sur les réels. Par exemple, si P, Q et R sont des polynômes :

- Commutativités : $P + Q = Q + P$ et $P \times Q = Q \times P$.
- Associativités : $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ et $P(QR) = (PQ)R$.
- Neutres : $P + 0 = 0 + P = P$ (0 est le neutre de l'addition) et $P \times 1 = 1 \times P = P$ (le polynôme constant 1 est le neutre de la multiplication).
- Inverse : $P + (-P) = 0$: on dit que $-P$ est l'opposé de P, ou encore que $-P$ est **l'inverse pour l'addition** de P.

Remarque

Ces propriétés font de $\mathbb{R}[X]$, muni de l'addition et de la multiplication, un **anneau**.

En revanche, un polynôme n'admet pas nécessairement un inverse pour la multiplication :

Proposition 16.4.

Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. On a $PQ = 1$ si et seulement si P et Q sont des polynômes constants non nuls, inverses l'un de l'autre.

Démonstration

Soient P et Q deux polynômes vérifiant $PQ = 1$. Tout d'abord, ils sont non nuls. Alors, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) = \deg(1) = 0$ et donc nécessairement, $\deg(P) = \deg(Q) = 0$. Ainsi, P et Q sont constants, et puisque $PQ = 1$, ils sont constants inverses l'un de l'autre.

Réciproquement, si P et Q sont constants, inverses l'un de l'autre, $PQ = 1$.

Enfin, on dispose d'une propriété importante : $\mathbb{R}[X]$ est **intègre** :

Proposition 16.5. Intégrité

Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{R}[X]$. $PQ = 0$ si et seulement si $P = 0$ ou $Q = 0$.

Démonstration

Si $P = 0$ ou $Q = 0$, $PQ = 0$.

Réciproquement, si P et Q sont tous les deux non nuls, alors $\deg(PQ) = \deg(P)+\deg(Q) \geqslant 0$ et donc $PQ \neq 0$. On en déduit le résultat par contraposée.

2. Composée et dérivée d'un polynôme

a. Composition

Proposition 16.6. Composition de polynômes

Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes **non constants**. $P \circ Q$ est un polynôme et $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$. Le coefficient dominant de $P \circ Q$ est $a_p (b_q)^p$.

Démonstration

On suppose $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$ (ainsi, P est de degré p et Q de degré q).

Notons que, pour tout k, Q^k est un polynôme, de degré $k \times q$ par produit. Alors

$$P \circ Q = \underbrace{a_p Q^p}_{\text{degré } pq} + \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} a_k Q^k}_{\text{degré } \leqslant (p-1)q}$$

Ainsi, $P \circ Q$ est est degré pq et de coefficient dominant $a_p b_q^p$.

b. Polynôme dérivé

Remarquons que si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme, la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Ainsi, P' est également un polynôme, qu'on appelle polynôme dérivé de P :

Définition 16.4. Polynôme dérivé

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. On appelle **polynôme dérivé**, et on note P', le polynôme défini par $P' = 0$ si le polynôme P est constant, ou sinon

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

Remarque

On peut dérivée à nouveau P' et on note P'' ou $P^{(2)}$ la dérivée seconde de P. Plus généralement, on note $P^{(k)}$ la dérivée k-ième de P.

Exemple 16.5

Soit $P(X) = 3X^3 + 2X^2 - 1$. Alors $P'(X) = 9X^2 + 4X$, $P^{(2)}(X) = 18X + 4$, $P^{(3)}(X) = 18$ et $P^{(4)}(X) = 0$.

Proposition 16.7.

Soient P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\deg(P) \geqslant 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
- Si $\deg(P) = n$, alors $\forall\, k > n, \quad P^{(k)} = 0$.
- $(P+Q)' = P' + Q'$, $(\lambda P)' = \lambda P'$, $(PQ)' = P'Q + PQ'$ et $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$.

☞ *Exercices 1, 2, 3 et 4.*

On peut relier les coefficients d'un polynôme à ses dérivées successives en un point : c'est l'objectif de la formule de Taylor :

3. Formule de Taylor

Théorème 16.8. Formule de Taylor pour les polynômes

Soient P un polynôme à coefficient réels de degré n (avec $n \geqslant 1$), et $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + P''(a)\frac{(X-a)^2}{2} + \dots + P^{(n)}(a)\frac{(X-a)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!}.$$

Démonstration

Notons Q le polynôme

$$Q = P - \left(\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!} \right)$$

et montrons que celui-ci est nul. Tout d'abord, Q est de degré au plus n, comme différence de deux polynômes de degré n. Ainsi, $Q^{(n)}$ est un polynôme constant. Or, après dérivation,

$$Q^{(n)} = P^{(n)} - P^{(n)}(a) \quad \text{et} \quad Q^{(n)}(a) = 0.$$

ainsi, $Q^{(n)} = 0$. Donc $Q^{(n-1)}$ est lui-même constant. Or

$$Q^{(n-1)} = P^{(n-1)} - P^{(n-1)}(a) - (X-a)P^{(n)}(a) \quad \text{et} \quad Q^{(n-1)}(a) = 0.$$

Ainsi, $Q^{(n-1)}$ est nul. En réitérant ce procédé (par récurrence descendante pour être rigoureux), on en déduit à chaque étape que $Q^{(k)}$ est nul pour tout k, et finalement $Q = 0$.

Remarque

Si P est de degré n, alors $P^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k > n$. Ainsi, on peut écrire par abus de notation

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!},$$

les termes étant nuls à partir d'un certain rang.

II. Arithmétique des polynômes

1. Division euclidienne

Dans l'exercice 22 du chapitre 02, nous avons introduit la notion de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$: si a et b sont deux entiers relatifs, avec $b \neq 0$, il existe un unique couple d'entiers $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad r \in [\![0,\, b-1]\!].$$

Cette propriété confère à $\mathbb{Z}$ la notion d'**anneau euclidien**. Nous disposons de la même chose pour $\mathbb{R}[X]$:

Théorème 16.9. Division euclidienne

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, tels que $B \neq 0$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Le polynôme Q est appelé le **quotient**, et R est appelé le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Démonstration

Montrons tout d'abord l'unicité. Supposons qu'il existe deux couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) vérifiant

$$A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2 \quad \text{et} \quad \deg(R_1) < \deg(B) \text{ et } \deg(R_2) < \deg(B).$$

Alors, $R_1 - R_2 = B(Q_2 - Q_1)$. Si $Q_1 \neq Q_2$, alors $\deg(B(Q_2-Q_1)) = \deg(B) + \deg(Q_2-Q_1) \geqslant \deg(B)$, mais en même temps

$$\deg(R_1 - R_2) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B).$$

C'est absurde. Ainsi, $Q_1 - Q_2 = 0$, c'est-à-dire $Q_1 = Q_2$, puis $R_1 = R_2$. Il y a ainsi unicité.

Nous allons montrer l'existence par récurrence. On fixe $B = \displaystyle\sum_{j=0}^{p} b_j X^j$ avec $b_p \neq 0$ (ainsi $\deg(B) = p$). Pour tout entier n, on note H_n la proposition :

Pour tout $A \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(Q) < \deg(B)$.

- Pour $n = 0$, $A \in \mathbb{R}_0[X]$ est constant. On pose alors
$$Q = 0, R = A \text{ si } \deg(B) \geqslant 1, \quad Q = \frac{1}{b_0}A, R = 0 \text{ si } \deg(B) = 0.$$
- On suppose que H_n est vraie pour un certain entier n. On écrit $A = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
Si $n + 1 < p$, alors on peut écrire
$$A = B \times 0 + A \quad \text{et} \quad \deg(A) < \deg(B).$$
On peut prendre $Q = 0$ et $R = A$. Si $n + 1 \geqslant p$ alors :
  - Si $a_{n+1} = 0$, en réalité $A \in \mathbb{R}_n[X]$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à A, ce qui garantit l'existence.
  - Si $a_{n+1} \neq 0$, posons alors
$$C = A - \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B.$$
C est de degré au maximum n, car c'est la somme de deux polynôme de degré $n + 1$ dont les coefficients dominants sont opposés. Par hypothèse de récurrence appliquée à C, il existe D et R deux polynômes tels que
$$C = DB + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B)$$
c'est-à-dire
$$A - \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B = DB + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B)$$
et finalement
$$A = \left(\underbrace{D + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p}}_{=Q} \right) B + R.$$
Puisque $\deg(R) < \deg(B)$, on a bien démontré l'existence du couple (Q, R) qui convient.

Par récurrence, on peut garantir que H_n est vraie pour tout n, ce qui démontre l'existence de la division euclidienne.

Exemple 16.6

On peut poser la division euclidienne comme on le fait dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & X^4 & -2X^3 & +4X^2 & -3X+1 & X^2+1 \\ \cline{6-6}
- & X^4 & & -X^2 & & X^2-2X+3 \\ \cline{1-4}
 & & -2X^3 & +3X^2 & -3X & \\
 & & 2X^3 & & +2X & \\ \cline{3-5}
 & & & 3X^2 & -X+1 & \\
 & & & -3X^2 & -3 & \\ \cline{4-5}
 & & & & -X-2 &
\end{array}$$

On peut en déduire que $X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 3X + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 3) - X - 2$: $X^2 - 2X + 3$ est le quotient, et $-X - 2$ est le reste.

Exercice 16.7

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n + 1$ par $X^2 - 1$.

Solution

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Notons qu'il existe Q et R tels que

$$X^n + 1 = (X^2 - 1)Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(X^2 - 1).$$

Ainsi, R est degré au plus 1 : on peut l'écrire $R = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donc, pour tout réel x :

$$x^n + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b.$$

Prenons $x = 1$ et $x = -1$. On obtient

$$1^n + 1 = 0 + a + b \quad \text{et} \quad (-1)^n + 1 = 0 + (-a + b).$$

Ainsi

$$a = \frac{1 - (-1)^n}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{3 + (-1)^n}{2}.$$

Le reste de la division euclidienne de $X^n + 1$ par $X^2 - 1$ est donc

$$\frac{1 - (-1)^n}{2} X + \frac{3 + (-1)^n}{2}.$$

Terminons par un résultat qui nous servira plus tard :

Proposition 16.10.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout réel a, le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est $P(a)$. Ainsi, si $P(a) = 0$, le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est nul.

Démonstration

Par division euclidienne, il existe Q et R deux polynômes tels que $P = (X - a)Q + R$ et $\deg(R) < \deg(X - a) = 1$. Ainsi, $\deg(R) \leqslant 0$ et R est une constante λ. Mais alors, en évaluant en a :

$$P(a) = Q(a) \times (a - a) + \lambda \implies \lambda = P(a).$$

2. Divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$

On va retrouver le vocabulaire classique des entiers, appliqué aux polynômes, avec des résultats très similaires.

Définition 16.5.

Soient A et B deux polynômes à coefficients réels. On dit que A est **divisible** par B (ou que B **divise** A, ou que B est un **diviseur** de A, ou enfin que A est un **multiple** de B) dans $\mathbb{R}[X]$ si le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul, c'est-à-dire s'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = BQ$.

On note alors $B \mid A$.

Si B divise A, alors le polynôme Q tel que $A = BQ$ est nécessairement unique, d'après le théorème de la division euclidienne.

Exemple 16.8

$X-1$ divise X^3-1 car $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$. De même, X^2+2X+3 divise $X^4+2X^3+4X^2+2X+3$ car $(X^2+2X+3)(X^2+1)=X^4+2X^3+4X^2+2X+3$.

Exercice 16.9

Démontrer que $X-1$ divise X^3-2X^2-X+2.

Solution

En posant la division :

$$
\begin{array}{rr|l}
X^3-2X^2 & -X+2 & X-1 \\ \cline{3-3}
-X^3+X^2 & & X^2-X-2 \\ \cline{1-1}
-X^2 & -X & \\
X^2 & -X & \\ \cline{1-2}
 & -2X+2 & \\
 & 2X-2 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Ainsi, $X^3-2X^2-X+2=(X-1)(X^2-X-2)$ et $X-1$ divise bien X^3-2X^2-X+2.

Propriété 16.11.

Soient A, B et C trois polynômes non nuls.

- Si $B \mid A$, alors $\deg(B) \leqslant \deg(A)$. Il y a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $A=\lambda B$ (on dit que A et B sont **colinéaires**).
- (Réflexivité) $A \mid A$.
- (Antisymétrie) Si $A \mid B$ et $B \mid A$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A=\lambda B$.
- (Transitivité) Si $A \mid B$ et $B \mid C$ alors $A \mid C$.

☞ *Exercices 7 et 8.*

III. Racines d'un polynôme

1. Définition

Définition 16.6.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et a un réel. On dit que a est une **racine** de P si $P(a)=0$.

Remarque

Chercher les racines de P, c'est donc résoudre l'équation $P(X)=0$.

Le polynôme nul admet tout réel comme racine (il en a donc une infinité). Les autres polynômes constants n'admettent aucune racine.

Exemple 16.10

1 est une racine du polynôme $P(X)=X^2-1$. En effet, $P(1)=0$.

Théorème 16.12.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et a un réel. Alors a est une racine de P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $P = (X-a)Q$, c'est-à-dire si et seulement si $X-a$ divise P.
Q est alors unique, et on a $\deg(P) = \deg(X-a) + \deg(Q)$ c'est-à-dire $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Démonstration

D'après le résultat de la proposition 16.10, il existe Q tel que $P = (X-a)Q + P(a)$. Le reste est nul si et seulement si $P(a) = 0$, et donc si et seulement si $P = (X-a)Q$.

Exemple 16.11

Soit P le polynôme défini par $P(X) = X^3 - 2X + 1$. Montrer que 1 est racine, puis factoriser P par $(X-1)$.

Solution

On constate que $P(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine. Par théorème, on peut donc factoriser P par $X-1$: il existe Q un polynôme tel que $P(X) = (X-1)Q(X)$ avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = 2$.
Deux possibilités pour conclure : la division euclidienne, ou bien l'identification.
Pour l'identification, on cherche donc a, b et c tel que

$$X^3 - 2X + 1 = (X-1)(aX^2 + bX + c)$$

Après développement, on obtient

$$X^3 - 2X + 1 = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$$

Par identification, on obtient $a = 1,\ b = 1$ et $c = -1$. Ainsi

$$X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1)$$

Proposition 16.13.

Soit P un polynôme à coefficient réels, et $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts (avec $n \geqslant 1$). Si $a_1, \dots, a_n$ sont des racines de P, alors P est divisible par $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$.

Démonstration

On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$.

- Si $n = 1$, a_1 est racine de P et d'après le théorème précédent, $X - a_1$ divise P.
- Supposons la proposition vraie pour un entier $n \geqslant 1$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant $n+1$ racines distinctes $a_1, \dots, a_{n+1}$. Puisque a_{n+1} est une racine de P, il existe un polynôme Q tel que $P = (X - a_{n+1})Q$. Q est alors un polynôme qui admet n racines $a_1, \dots, a_n$ comme racines ; en effet, puisque les (a_i) sont distincts, pour $j \in [\![1, n]\!]$

$$Q(a_j) = \frac{P(a_j)}{a_j - a_{n+1}} = 0.$$

  D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à Q, il existe un polynôme S tel que $Q = (X - a_1) \dots (X - a_n)S$, et finalement

$$P = (X - a_1) \dots (X - a_n)(X - a_{n+1})S$$

  ce qui garantit que la proposition est vraie au rang $n+1$.

Enfin, un théorème important : un polynôme ayant « trop » de racines est nécessairement nul :

Théorème 16.14.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si P admet au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes, alors $P = 0$.
Ainsi, un polynôme non nul de degré n admet **au plus** n racines deux à deux distinctes.

Démonstration

Supposons par l'absurde qu'un polynôme de degré n admet au moins $n+1$ racines $(a_1, \dots, a_{n+1})$. D'après le théorème précédent, on peut écrire

$$P = \left(\prod_{i=1}^{n+1}(X-a_i)\right) Q \text{ avec } \deg(Q) \geqslant 0.$$

Or

$$\deg\left(\left(\prod_{i=1}^{n+1}(X-a_i)\right) Q\right) = \deg\left(\prod_{i=1}^{n+1}(X-a_i)\right) + \deg(Q) \geqslant n+1$$

ce qui est absurde puisque $\deg(P) \leqslant n$.

Ce théorème admet des conséquences utiles :

Conséquence 16.15.

- Si P admet une infinité de racines, alors P est le polynôme nul.
- Soient P et Q deux polynômes de degré au plus n (avec $n \geqslant 1$). $P = Q$ si et seulement si P et Q coïncident en au moins $n+1$ valeurs distinctes.
- Soient P et Q deux polynômes. $P = Q$ si et seulement si P et Q coïncident en une infinité de valeurs distinctes.

Démonstration

Le premier point découle directement du théorème. Quant aux deux suivants, $P = Q$ si et seulement si $P - Q = 0$ et on utilise ensuite le théorème et le premier point.

On en déduit un principe de factorisation si un polynôme de degré n admet n racines distinctes :

Conséquence 16.16.

Soit P un polynôme de degré n (avec $n \geqslant 1$), de coefficient dominant α_n. Si $a_1, \dots, a_n$ sont des racines de P deux à deux distinctes, alors

$$P = \alpha_n \prod_{k=1}^{n}(X-a_k).$$

En général, il n'y a aucune raison pour qu'un polynôme ait des racines *deux à deux distinctes*. C'est l'objet de la prochaine partie.

2. Multiplicité d'une racine

Un réel peut être racine « plusieurs fois » d'un polynôme P. Par exemple, si $P = (X-a)^2$, a est une racine qui « compte » deux fois : on dira qu'elle est double.

Définition 16.7. Ordre de multiplicité

Soit P un polynôme à coefficients réels non nul. Soit $a \in \mathbb{R}$.
On dit que a est une racine **d'ordre** k ($k \in \mathbb{N}^*$) si $(X-a)^k$ divise P, et $(X-a)^{k+1}$ ne divise pas P.
k est alors appelé **l'ordre** de multiplicité de la racine a.

Si l'ordre vaut 1, on dira que la racine est simple ; s'il vaut 2, que la racine est double, etc.
Remarquons que l'ordre de multiplicité d'une racine existe toujours. En effet, si a est une racine de P, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^*, \quad (X-a)^k \mid P\}$ est une partie non vide (comme a est une racine, 1 est dedans), et majorée (par $\deg(P)$) de $\mathbb{N}$: elle admet un maximum.

⚠ **Attention**
S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-a)^k \mid P$ on ne peut pas dire que a est d'ordre k, mais que k est d'ordre **au moins** k.

Connaissant la multiplicité d'une racine, on peut alors **factoriser** le polynôme.

Proposition 16.17.

Soit P un polynôme à coefficients réels non nul. Soit $a \in \mathbb{R}$.
a est de multiplicité k (avec $k \in \mathbb{N}^*$) si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $P = (X-a)^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$. Q est unique.

Démonstration
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
Si a est de multiplicité k, par définition, il existe un polynôme Q tel que $P = (X-a)^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$ puisque, sinon, $X-a \mid Q$ et finalement $(X-a)^{k+1} \mid P$. Q est unique par factorisation.
S'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-a)^k Q$ et $Q(a) \neq 0$. Alors $(X-a)^k \mid P$: a est de multiplicité au moins k. Par division euclidienne, il existe $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = (X-a)S + Q(a)$, et donc

$$P = (X-a)^{k+1} S + Q(a)(X-a)^k$$

Puisque $\deg((X-a)^k) < \deg((X-a)^{k+1})$, il s'agit de la division euclidienne de P par $(X-a)^{k+1}$. Or $Q(a) \neq 0$ donc le reste est non nul : ainsi, $(X-a)^{k+1}$ ne divise pas P et k est de multiplicité k.

On peut alors généraliser la conséquence 16.16 :

Proposition 16.18.

Soit P un polynôme à coefficients réels admettant p racines $a_1, \dots, a_p$ (avec $p \geqslant 1$) deux à deux distinctes, d'ordres de multiplicité respectifs $k_1, \dots, k_p$. Alors

$$\sum_{i=1}^{p} k_i \leqslant \deg(P) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{p} (X-a_i)^{k_i} \mid P.$$

De plus, en notant α le coefficient dominant de P :

$$\sum_{i=1}^{p} k_i = \deg(P) \iff P = \alpha \prod_{i=1}^{p} (X-a_i)^{k_i}.$$

Enfin, on a un lien direct entre multiplicité d'une racine et dérivées du polynôme en cette racine :

Proposition 16.19. Lien entre multiplicité et dérivées

Soient P un polynôme à coefficient réel non nul, et $a \in \mathbb{R}$ une racine de P.
Alors a est de multiplicité k ($k \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si

$$\forall\, i \in [\![0,\, k-1]\!],\ P^{(i)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(a) \neq 0.$$

Démonstration

Soit n le degré de P. Si a est de multiplicité k, alors $(X-a)^k \mid P$. Or, d'après la formule de Taylor :

$$P = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(a)\frac{(X-a)^i}{i!} = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} P^{(i)}(a)\frac{(X-a)^i}{i!}}_{\text{degré } <k} + (X-a)^k \sum_{i=k}^{n} P^{(i)}(a)\frac{(X-a)^{i-k}}{i!}.$$

Par unicité de la division euclidienne, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} P^{(i)}(a)\frac{(X-a)^i}{i!}$ est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^k$ et est donc nul puisque $(X-a)^k \mid P$. Ainsi

$$\sum_{i=0}^{k-1} P^{(i)}(a)\frac{(X-a)^i}{i!} = 0 \implies \forall\, i \in [\![0,\, k-1]\!], \quad P^{(i)}(a) = 0.$$

Réciproquement, si $\forall\, i \in [\![0,\, k-1]\!],\ P^{(i)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$, alors d'après la formule de Taylor

$$P = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(a)\frac{(X-a)^i}{i!} = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} P^{(i)}(a)\frac{(X-a)^i}{i!}}_{=0} + (X-a)^k \sum_{i=k}^{n} P^{(i)}(a)\frac{(X-a)^{i-k}}{i!} = (X-a)^k Q(X).$$

avec $Q(a) = P^{(k)}(a) \neq 0$: a est de multiplicité k.

3. Factorisation

Un des objectifs est de factoriser le plus possible un polynôme (pour l'étudier, ou étudier ses racines par exemple).
Dans $\mathbb{R}[X]$, on ne peut pas factoriser tous les polynômes de manière simple : X^2+1 est un polynôme de degré 2 qui n'a pas de racine, donc ne se factorise pas par un terme de la forme $X-a$.

a. Cas des polynômes de degré 2.

Rappelons la méthode pour déterminer les racines et la factorisation d'un polynôme de degré deux à coefficients réels.

Théorème 16.20.

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme P possède deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  On a alors $P(X) = a(X-x_1)(X-x_2)$.

…

- Si $\Delta = 0$, le polynôme P possède une unique racine réelle dite double
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
On a alors $P(X) = a(X - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme P ne possède pas de racines réelles, et ne se factorise donc pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 16.12

Factoriser $P(X) = 2X^2 + 2X - 4$.

Solution

On a $\Delta = 36 > 0$ donc le polynôme P possède deux racines réelles
$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2\times 2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = 1$$
Donc $P(X) = 2(X-1)(X+2)$.

Remarque

Attention : on n'oubliera pas, lors de la factorisation, de mettre en facteur le coefficient de plus haut degré (dans l'exemple précédent, le 2).

b. Polynômes irréductibles

Les polynômes irréductibles jouent le rôle, dans $\mathbb{R}[X]$, des nombres premiers de $\mathbb{Z}$. Un nombre premier, par exemple 13, n'est divisible que par 1 ou 13 (ou leur opposé). On donne une définition similaire pour les polynômes :

Définition 16.8. Polynômes irréductibles

Un polynôme P à coefficients réels non constant est dit **irréductible** s'il n'est divisible que par un polynôme constant, ou un multiple de lui-même :
$$Q \mid P \implies \exists \lambda \in \mathbb{R},\ Q = \lambda \text{ ou } Q = \lambda P.$$

Exemple 16.13

Tout polynôme P, de degré 1, est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, puisqu'un polynôme Q qui divise P est de degré 0 ou 1, c'est-à-dire constant ou de la forme λP.
Le polynôme X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. En effet, si Q divise X^2+1, Q est de degré 0 (donc constant), 2 (donc nécessairement un multiple de X^2+1) ou 1. Or, si Q est de degré 1, il admet une racine réelle (si $Q = aX + b$ avec $a \neq 0$, alors $-\frac{b}{a}$ est une racine) et donc, puisqu'on peut écrire $X^2+1 = Q \times R$, alors cette racine est également racine de X^2+1, ce qui est absurde.

On dispose d'un théorème fondamental sur $\mathbb{R}[X]$:

Théorème 16.21. Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1, ou les polynômes de degré 2 n'admettant pas de racines réelles.

Démonstration

Théorème admis.

On a alors le résultat de factorisation suivant :

Théorème 16.22. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme P non constant de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{q} (X^2 + b_j X + c_j)^{s_j}$$

où λ est le coefficient dominant de P, et les polynômes $X^2 + b_j + c_j$ sont irréductibles (c'est-à-dire $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$).

Démonstration

Théorème admis.

On termine par du vocabulaire :

Vocabulaire

Lorsqu'un polynôme s'écrit comme un produit de polynômes uniquement de degré 1 (donc sans polynômes de degré 2), $P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{r_i}$, on dit que le polynôme est **scindé**.

Si, de plus, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $r_i = 1$, on dit que le polynôme est **scindé à racines simples**.

c. Cas général

Méthode

Lorsqu'on doit factoriser un polynôme P (ou déterminer ses racines) :

- On cherche des racines évidentes $(-2, -1, 0, 1, 2)$ pour se ramener à un (ou des) polynôme(s) de degré 2.
- On factorise le polynôme P par $X - a$ où a désigne une racine évidente.
- Une fois ramené à un (ou des) polynômes de degré 2, on utilise la méthode classique du discriminant.

Exemple 16.14

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$. Déterminer les racines de P.

Solution

- Premier étape : on cherche une « racine évidente » : $-2, -1, 0, 1, 2$. Ici, on constate que $P(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$ donc 1 est racine évidente.
- Deuxième étape : on factorise P par $X - 1$: on écrit $P(X) = (X - 1)Q(X)$ avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = 2$. Donc Q peut s'écrire $aX^2 + bX + c$.
  On a alors
  $$P(X) = (X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on identifie les coefficients :

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b-a &= -2 \\ c-b &= -1 \\ -c &= 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -1 \\ c &= -2 \end{cases}$$

Donc $P(X) = (X-1)(X^2-X-2)$.

- Troisième étape : on détermine les racines du polynôme Q. Ici, Q est du second degré, dont le discriminant vaut $\Delta = 9$. Donc Q possède deux racines :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = 2$$

Donc $Q(X) = (X-2)(X+1)$

- Quatrième étape : on conclut. On a donc

$$P(X) = (X-1)(X-2)(X+1)$$

et P possède trois racines réelles : $1, 2$ et -1.

☞ *Exercices 9 et 11.*

4. Équations se ramenant à un polynôme

Il est possible de résoudre des équations particulières en se ramenant à une équation polynomiale.

Exemple 16.15

Résoudre l'équation $\ln(x)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$.

Méthode

Pour résoudre une équation liée à un polynôme, on effectue un changement de variable : on posera, ici, $u = \ln(x)$ et on se ramènera à un polynôme.

Solution

L'équation n'a de sens que sur $]0, +\infty[$. On pose alors $u = \ln(x)$. L'équation s'écrit alors

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$

Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$. Les racines sont alors

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_2 = 2$$

On revient alors à la variable de départ :

$$\begin{aligned} u_1 = 1 &\Leftrightarrow \ln(x_1) = 1 \\ &\Leftrightarrow x_1 = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \\ \text{et } u_2 = 2 &\Leftrightarrow \ln(x_2) = 2 \\ &\Leftrightarrow x_2 = \mathrm{e}^2 \end{aligned}$$

Les solutions x_1 et x_2 sont bien dans $]0, +\infty[$. On peut alors conclure que l'ensemble des solutions de l'équation $\ln(x)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$ est $\mathcal{S} = \{\mathrm{e}, \mathrm{e}^2\}$.

Exercice 16.16

Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3 = 0$.

Solution

L'équation est valable sur $\mathbb{R}$. On pose $u = e^x$. En constatant que $e^{2x} = (e^x)^2$, l'équation devient alors $u^2 - 2u - 3 = 0$.

Les racines sont $u_1 = -1$ et $u_2 = 3$. On revient alors à la variable de départ. $u_1 = -1$ devient $e^{x_1} = -1$ ce qui est impossible. La deuxième devient $e^{x_2} = 3$ soit $x_2 = \ln(3)$.

Ainsi, l'équation $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ admet une unique solution : $\mathcal{S} = \{\ln(3)\}$.

☞ *Exercices 10 et 12.*

Exercices 16

Exercices

Généralités et recherches

●○○ **Exercice 1 Degré, coefficient dominant** (10 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chacun des polynômes suivant, déterminer le degré et le coefficient dominant.

1. $P = (X+1)^n + (X-1)^n$,
2. $P = (X+1)^n - (X-1)^n$,
3. $P = \prod_{i=1}^{n} (X^i + 1)$,
4. $P = \prod_{i=1}^{n} (iX - 1)$,
5. $P = \prod_{i=3}^{17} (X^2 + iX + 1)$.

●○○ **Exercice 2 Une première recherche** (5 min.)

Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels et de degré 2 tels que $P(1) = 0$, $P'(1) = 1$ et $P''(1) = 4$.

●○○ **Exercice 3 Une autre recherche** (5 min.)

Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels et de degré 2 tels que $P(1) = 1$ et $P'(1) = 0$.

●○○ **Exercice 4 Dérivées multiples** (10 min.)

Soit P le polynôme définie par $P(X) = (X-1)^4$. Calculer $P^{(k)}(1)$ pour tout entier $k > 0$. Généraliser dans le cas où $P(X) = (X-a)^n$ $(a \in \mathbb{R}, n > 0)$.

●●○ **Exercice 5 Une relation fonctionnelle** (10 min.)

Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

●○○ **Exercice 6 Identifions** (10 min.)

Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a

$$\frac{x^2+1}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

Division euclidienne

●○○ **Exercice 7 Des divisions euclidiennes** (10 min.)

Effectuer les divisions euclidiennes de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^4 - 4X^3 + X - 1$ par $B = X^2 + X - 1$,
2. $A = 2X^3 + X^2 - X + 2$ par $B = 2 - X^2$,
3. $A = X^6 + 1$ par $B = X^2 - X$.

●●○ **Exercice 8 Des divisions euclidiennes plus subtiles** (15 min.)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la division euclidienne de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ par $(X-1)^2$. Que conclure ?

2. Soit P un polynôme, et a, b deux réels distincts. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
3. Soit P un polynôme, et a un réel. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Factorisation, signes, équations

●○○ **Exercice 9 Factorisation** (10 min.)

Pour tout réel x, soit $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

1. Montrer que P est factorisable par $x-1$.
2. Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $(x-1)$ par un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.
3. En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.

●○○ **Exercice 10 Factorisation** (10 min.)

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Vérifier que $X+2$ divise P.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(X) = (X+2)(aX^2 + bX + c)$.
3. En déduire l'ensemble des racines de P.
4. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} + 6\mathrm{e}^{-x} - 5 = 0$.

●○○ **Exercice 11 Factorisation tout seul** (20 min.)

Factoriser, déterminer l'ensemble des racines, puis le signe des deux polynômes suivants :

$$P(X) = 2X^3 + X^2 - 23X + 20 \qquad Q(X) = X^3 - 13X - 12$$

●●○ **Exercice 12 Résolutions d'équations liées à un polynôme** (15 min.)

Résoudre les équations suivantes :

1. (E_1) : $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
2. (E_2) : $2x + 6\sqrt{x} + 4 = 0$
3. (E_3) : $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 6 = 0$

Pour aller plus loin

●●○ **Exercice 13 Sur la somme et le produit des racines** (15 min.)

Soit $P(X) = ax^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$) et possédant deux racines réelles, qu'on note α et β.

1. Factoriser P en fonction de α et β. En développant l'expression obtenue, exprimer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de a, b et c.
2. Réciproquement, soient p et q deux nombres réels distincts. On pose $S = p + q$ et $P = pq$. Montrer que p et q sont les racines du polynômes $X^2 - SX + P$. Que se passe-t-il si $p = q$?
3. Déterminer l'âge de Boule et Bill, sachant que Bill est le plus âgé, que la somme de leurs âges est égale à 28, et que le produit de leurs âges est égal à 192. (On pourra utiliser le fait que $784 = 28^2$).

●○○ **Exercice 14 Relation coefficients racines** (10 min.)

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n, avec n racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (non nécessairement distinctes). Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

●●● Exercice 15 Un polynôme divisible par sa dérivée (20 min.)

Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré supérieur ou égal à 1 tels que P' divise P.
On pourra utiliser la formule de Taylor.

●●● Exercice 16 Un polynôme divisible par sa dérivée - Autre méthode (15 min.)

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P' \mid P$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = \frac{1}{n}(X-\alpha)\,P'$.
2. Établir une relation de récurrence entre les coefficients de P.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur P.

●●○ Exercice 17 Racines de P' (10 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit P un polynôme de degré n ayant n racines distinctes. Montrer que P' admet $n-1$ racines distinctes.
   Ainsi, si P est scindé à racines simples, P' l'est également.
2. Soit P un polynôme de degré n scindé sur $\mathbb{R}[X]$. Montrer que P' est également scindé.

●●● Exercice 18 Polynôme de Lagrange (20 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer un polynôme L_i de degré $n-1$ vérifiant
   - $L_i(a_i) = 1$,
   - $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$ tel que $j \neq i$, $L_i(a_j) = 0$.
2. Soient $b_1, \dots, b_n$ des réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $L(a_j) = b_j$.
3. Application : trouver l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la courbe représentative, dans un repère orthonormé, passe par les points $(2,3)$, $(4,2)$ et $(5,4)$.

Exercices bilans

●●○ Exercice 19 Polynômes de Tchebychev (30 min.)

On définit une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes[1] par la relation suivante :

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n est appelé le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev.

Partie 1 – Premières propriétés des polynômes de Tchebychev

1. Vérifier que

   $$T_2 = 2X^2-1, \qquad T_3 = 4X^3-3X, \qquad T_4 = 8X^4-8X^2+1 \qquad \text{et} \qquad T_5 = 16X^5-20X^3+5X.$$

[1] Cela signifie simplement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme.

2. a) Recopier et compléter la fonction Python suivante, afin qu'elle prenne en entrée un entier naturel n et un réel x et renvoie $T_n(x)$ en utilisant la formule de récurrence de la question 1c.

Code Python

```python
def Tchebychev(n,x):
    T=1
    U=x
    ..............
        V=..............#polynome auxiliaire
        U=T
        T=...............
    return T
```

b) Écrire des commandes en Python qui représentent graphiquement T_{20} sur l'intervalle $[-5,5]$.

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
Il y a bien trois choses à montrer dans cette récurrence : que T_n est un polynôme, qu'il est de degré n et que son coefficient dominant est 2^{n-1}.
Attention : $T_0 = 1$ est bien un polynôme de degré $n = 0$ mais son coefficient dominant est 1 et non pas 2^{n-1}.

4. a) Montrer que, pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.
b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer alors par récurrence que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n est l'unique polynôme vérifiant
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(x)) = \cos(nx). \tag{$\star$}$$

6. Calculer $T_n(-1)$, $T_n(0)$ et $T_n(1)$.

Partie 2 – Factorisation des polynômes de Tchebychev

1. Factoriser au maximum les polynômes T_2, T_3, T_4 et T_5 calculés à la question 1 de la partie A.
On s'aidera de trinômes du second degré.

2. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, posons $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$.
a) Montrer que $x_1, \dots, x_n$ sont n réels deux à deux distincts.
b) En utilisant $(\star)$, vérifier que $x_1, \dots, x_n$ sont des racines de T_n.
c) En déduire la factorisation de T_n.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

On utilise les propriétés des degrés et coefficients dominants, ainsi que la formule du binôme.

1.

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k \\ &= 2X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(1+(-1)^{n-k}\right) X^k \end{aligned}$$

P est de degré n et de coefficients dominants 2.

2. De même :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1-(-1)^{n-k}\right) X^k \\ &= 2\binom{n}{n-1} X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \left(1-(-1)^{n-k}\right) X^k \end{aligned}$$

Ainsi, P est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2\binom{n}{n-1} = 2n$.

3. P est de degré $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ et de coefficient dominant 1 par produit.
4. P est de degré n, et de coefficient dominant $1 \times 2 \times \ldots \times n = n!$.
5. P est de degré $2 \times (17-3+1) = 30$ et de coefficient dominant 1.

Exercice 2

On cherche un polynôme de degré 2. On cherche donc a, b et c réels tels que $P(X) = aX^2+bX+c$. Ainsi, $P'(X) = 2aX+b$ et $P''(X) = 2a$. Ainsi, $P''(1) = 4$ nous donne $a = 2$. Puis $P'(1) = 1$ nous donne

$$2a+b = 1 \iff b = 1-2a = -3$$

Enfin, $P(1) = 0$ nous donne

$$a+b+c = 0 \iff c = -a-b = 1$$

Bilan : il y a un seul polynôme solution : $P(X) = 2X^2-3X+1$.

Exercice 3

De même, on cherche a, b et c trois réels tels que $P(X) = aX^2+bX+c$. Ainsi, $P'(X) = 2aX+b$. Les deux conditions $P(1) = 1$ et $P'(1) = 0$ s'écrivent alors

$$a+b+c = 1 \quad \text{et} \quad 2a+b = 0 \iff b = -2a \quad \text{et} \quad c = 1-a-b = 1+a$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{P(X) = aX^2-2aX+(1+a), \quad a \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 4

On constate que

$$P'(X) = 4(X-1)^3, \quad P''(X) = 4\times 3(X-1)^2 = 12(X-1)^2, \quad P^{(3)}(X) = 12\times 2(X-1) = 24(X-1)$$
$$P^{(4)}(X) = 24 \quad \text{et} \quad P^{(n)}(X) = 0 \text{ si } n \geqslant 5$$

Ainsi, $P^{(k)}(1) = 0$ si $k \leqslant 3$ et $k \geqslant 5$, et $P^{(4)}(1) = 24$.
De manière plus générale, si $P(X) = (X-a)^n$, on a :

$$P^{(k)}(a) = 0 \text{ si } k \leqslant n-1 \text{ ou } k \geqslant n+1, \quad \text{et} \quad P^{(n)}(a) = n!$$

Exercice 5

Soit P un tel polynôme. Notons n son degré. Alors

$$\deg(P(X^2)) = 2n, \quad \deg((X^2+1)P(X)) = 2+n$$

et donc $2n = 2+n$, soit $n = 2$.
P s'écrit donc $aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$. En injectant alors dans l'équation :

$$\begin{aligned}
aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2+bX+c) &\iff aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c \\
&\iff \begin{cases} a = & a \\ 0 = & b \\ b = & c+a \\ 0 = & b \\ c = & c \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = & a \\ b = & 0 \\ c = & -a \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, si P vérifie l'équation alors $P = aX^2 - a = a(X^2-1)$, avec $a \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si $P = a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $(X^2+1)P(X) = a(X^2+1)(X^2-1) = a(X^4-1) = P(X^2)$.
Bilan : l'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{a(X^2-1),\, a \in \mathbb{R}\}\,.}$$

Exercice 6

Pour tout réel x différent de 1, on a

$$ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2 + (b-a)x + c - b}{x-1}$$

Ainsi

$$ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1} \iff \frac{ax^2 + (b-a)x + c - b}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Par identification des coefficients, on a alors

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ b-a & = & 0 \\ c-b & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 1 \\ c & = & 2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\quad \frac{x^2+1}{x-1} = x+1+\frac{2}{x-1}}$$

Exercice 7

Il suffit de poser les divisions euclidiennes. On obtient :

1. $A = (X^2 - 5X + 6)B + (-10X + 5)$,
2. $A = (-2X - 1)B + (3X + 4)$,
3. $A = (X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)B + X + 1$.

Exercice 8

On utilise principalement le résultat suivant : si B est de degré p, le reste de la division de A par B est de degré inférieur strict à p.

1. On fixe $n \geqslant 1$. On note $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$. B est de degré 2, donc le reste de la division euclidienne de A par B est de degré 1 au maximum. Il existe donc deux réels a et b, et un polynôme Q tels que

$$A = BQ + aX + b \iff nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = (X-1)^2 Q + aX + b.$$

En évaluant en 1, on obtient déjà

$$n - (n+1) + 1 = 0 + a + b \iff a + b = 0.$$

On constate ensuite que 1 est racine double dans $(X-1)^2$. On dérive donc l'expression de la division euclidienne ($n \geqslant 1$) :

$$A' = B'Q + BQ' + a \iff n(n+1)X^n - (n+1)nX^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + a.$$

Évaluer en 1, on a alors

$$n(n+1) - (n+1)n = 0 + a \iff a = 0$$

et finalement $b = -a = 0$.

Finalement, si $n \geqslant 1$, le reste de la division euclidienne de A par B est nul. Ainsi, $(X-1)^2$ divise A. Si $n = 0$, $A = 1$ et le reste est donc 1.

On peut montrer que, pour $n \geqslant 1$:

$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = (X-1)^2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k \right)$$

2. $(X-a)(X-b)$ est de degré 2. Il existe donc un polynôme Q et deux réels u, v tels que $P = (X-a)(X-b)Q + uX + v$. En évaluant en a et b :

$$P(a) = 0 + ua + v \quad \text{et} \quad P(b) = 0 + ub + v \iff u = \frac{P(b) - P(a)}{b-a} \quad \text{et} \quad v = \frac{bP(a) - aP(b)}{b-a}.$$

Le reste s'écrit donc $\dfrac{P(b)-P(a)}{b-a}X + \dfrac{bP(a)-aP(b)}{b-a}$.

3. $(X-a)^2$ est de degré 2. Il existe un polynôme Q et deux réels u, v tels que $P = (X-a)^2 Q + uX + v$. En dérivant, $P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2 Q' + u$. En évaluant les deux résultats en a :

$$P(a) = ua + v \quad \text{et} \quad P'(a) = u \iff u = P'(a) \quad \text{et} \quad v = P(a) - aP'(a).$$

Finalement, le reste s'écrit $P'(a)X + P(a) - aP'(a)$.

Exercice 9

1. *Rappel* : pour montrer qu'un polynôme est factorisable par $x-a$, il suffit de montrer que a est racine du polynôme.
On constate que $P(1)=0$. Ainsi, 1 est racine de P, donc P est factorisable par $x-1$.
2. P étant de degré 3, il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall\ x\in\mathbb{R},\quad P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$$

Après développement, on a

$$\forall\ x\in\mathbb{R},\quad 3x^3-x-2=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$$

Par identification des coefficients, on a

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 3\\ b-a & = & 0\\ c-b & = & -1\\ -c & = & -2\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 3\\ b & = & 3\\ c & = & 2\end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\forall\ x\in\mathbb{R},\quad x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$$

3. Soit Q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x)=3x^2+3x+2$. Q est un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta=3^2-4\times3\times2=-15<0$. Ainsi, Q est de signe constant, et est donc positif sur $\mathbb{R}$ $(3>0)$. On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$Q(x)$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

P est donc négatif sur $]-\infty;1[$ et positif sur $]1;+\infty[$.

Exercice 10

1. On constate que $P(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-5(-2)+6=0$. Ainsi, $X+2$ divise P.
2. On cherche trois réels a, b et c tels que $P(X)=(X+2)(aX^2+bX+c)$, c'est-à-dire

$$X^3-2X^2-5X+6=aX^3+(b+2a)X^2+(c+2b)X+2c$$

Par identification des coefficients, on a

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1\\ b+2a & = & -2\\ c+2b & = & -5\\ 2c & = & 6\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1\\ b & = & -4\\ c & = & 3\end{array}\right.$$

Ainsi

$$P(X)=(X+2)(X^2-4X+3)$$

3. Déterminons les racines de $Q(X)=X^2-4X+3$. Son discriminant vaut $\Delta=(-4)^2-4\times1\times3=4$. Ainsi, Q admet deux racines :

$$x_1=\frac{4+\sqrt{4}}{2}=3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{4-\sqrt{4}}{2}=1$$

Ainsi, le polynôme P admet, quand à lui, trois racines : $-2, 1$ et 3.

4. Remarquons, puisque $e^x > 0$ que

$$e^{2x} - 2e^x + 6e^{-x} - 5 = 0 \Longleftrightarrow e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \Longleftrightarrow P(e^x) = 0$$

D'après l'étude précédente, on en déduit que

$$e^x = -2 \quad \text{ou} \quad e^x = 1 \quad \text{ou} \quad e^x = 3$$

La première égalité est impossible. Les deux autres donnent $x = 0$ ou $x = \ln(3)$. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0,\ \ln(3)\}}$$

Exercice 11

On utilise la méthode classique : on cherche une solution particulière, on factorise et on conclut. On obtient ainsi :

- $P(X) = 2(X-1)(X+4)\left(X - \frac{5}{2}\right)$ et ses racines sont $-4, 1$ et $\frac{5}{2}$. On obtient le signe suivant :

x	$-\infty$		-4		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- $Q(X) = (X+1)(X+3)(X-4)$ et ses racines sont $-3, -1$ et 4. On obtient le signe suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		4		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 12

La méthode, déjà précisée dans l'exercice **??**, est de poser un changement de variable, pour se ramener à un polynôme dont on cherchera les racines. On revient, ensuite, à la variable de départ.

1. Posons $u = x^2$. L'équation (E_1) s'écrit alors $u^2 - 5u + 6 = 0$. Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 = 1$, et ses racines sont alors

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3$$

On revient à la variable de départ :

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 6 = 0 &\Leftrightarrow u^2 - 5u + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow u = 2 \text{ ou } u = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2 \text{ ou } x^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est donc

$$\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$$

2. Tout d'abord, on résout (E_2) sur $\mathbb{R}^+$. Posons $u = \sqrt{x}$. L'équation (E_2) s'écrit alors $3u^2 + 6u + 4 = 0$. Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 4 = 4$, et ses racines sont alors

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{4}}{2 \times 2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{4}}{2 \times 2} = -1$$

On revient à la variable de départ :

$$\begin{aligned} 2x+6\sqrt{x}+4=0 &\Leftrightarrow 2u^2+6u+4=0 \\ &\Leftrightarrow u=-2 \text{ ou } u=-1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}=-2 \text{ ou } \sqrt{x}=-1 \text{ ce qui est impossible} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est donc

$$\mathcal{S}=\varnothing$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 13

1. Puisque α et β sont les deux racines, on a

$$P(X)=a(X-\alpha)(X-\beta)$$

En développant, on a donc

$$P(X)=aX^2+bX+c=aX^2-a(\alpha+\beta)X+a\alpha\beta$$

Ainsi, par identification, on en déduit que

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

2. Notons $Q(X)=X^2-SX+P=X^2-(p+q)X+pq$. Alors

$$Q(p)=p^2-(p+q)p+pq=0 \quad \text{et} \quad Q(q)=q^2-(p+q)q+pq=0$$

Ainsi, p et q sont racines de Q, et ce sont donc ses deux racines (car il est de degré 2.). Si $p=q$ alors

$$Q(X)=X^2-2pX+p^2=(X-p)^2$$

donc Q admet p comme racine double.

3. On note p l'âge de Boule et q l'âge de Bill. On a donc $p+q=28$ et $pq=192$. D'après la question précédente, p et q sont racines du polynômes

$$P(X)=X^2-28X+192$$

dont le discriminant est $\Delta=(-28)^2-4\times1\times192=16$. Ainsi, ce polynôme admet deux racines :

$$x_1=\frac{28-\sqrt{16}}{2}=12 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{28+\sqrt{16}}{2}=16$$

Puisque Bill est le plus âgé, on en déduit que Bill a 16 ans et Boule 12 ans.

Exercice 14

Puisqu'on a n racines, par factorisation :

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k=a_n\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k).$$

Il suffit de développer et de constater que

$$\begin{aligned} a_n\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k) &= a_n\left(X^n-\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)X^{n-1}+\ldots+\prod_{k=1}^{n}(-\alpha_k)\right) \\ &= a_nX^n-\left(a_n\sum_{k=1}^{n}\right)X^{n-1}+\ldots+(-1)^na_n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k. \end{aligned}$$

Par identification des coefficients

$$-\left(a_n\sum_{k=1}^{n}\right)=a_{n-1}\quad\text{et}\quad(-1)^n a_n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k=a_0$$

ce qui donne le résultat.

Exercice 15

Soit P de degré n supérieur ou égal à 1 tel que $P'\mid P$. On peut alors écrire $P=QP'$ et pour des raisons de degré, $\deg(Q)=1$. Ainsi, il existe λ et α deux réels tels que $P=\lambda(X-\alpha)P'$.
Appliquons la formule de Taylor pour P en α :

$$P=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(\alpha)\frac{(X-\alpha)^k}{k!}$$

En dérivant :

$$P'=\sum_{k=1}^{n}P^{(k)}(\alpha)\frac{(X-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}$$

soit encore

$$\lambda(X-\alpha)P'=\sum_{k=1}^{n}\lambda P^{(k)}(\alpha)\frac{(X-\alpha)^k}{(k-1)!}.$$

Puisque $P=\lambda(X-\alpha)P'$, on obtient l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(\alpha)\frac{(X-\alpha)^k}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\lambda P^{(k)}(\alpha)\frac{(X-\alpha)^k}{(k-1)!}$$

Par égalité des polynômes, on en déduit que

$$P(\alpha)=0\quad\text{et}\quad\forall\,k\in[\![1,\,n]\!],\quad\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}=\frac{\lambda P^{(k)}(\alpha)}{(k-1)!}$$

soit finalement

$$\forall\,k\in[\![0,\,n]\!],P^{(k)}(a)\,(1-\lambda k)=0.$$

Puisque P est de degré n, $P^{(n)}(\alpha)\neq 0$ et nécessairement $1-\lambda n=0$, c'est-à-dire $\lambda=\frac{1}{n}$.
Mais alors

$$\forall\,k\in[\![0,\,n-1]\!],\quad P^{(k)}(\alpha)=0.$$

Ainsi, α est une racine de multiplicité n pour un polynôme de degré n : P s'écrit donc $\mu(X-\alpha)^n$ pour $\mu\in\mathbb{R}$.
Réciproquement, un tel polynôme convient.
Bilan : les polynômes de degré $n\geqslant 1$ vérifiant $P'\mid P$ sont les polynômes de la forme $\mu(X-\alpha)^n$, avec $\mu\in\mathbb{R}$.

Exercice 16

1. Puisque P' divise P, il existe un polynôme Q tel que $P=QP'$. Puisque $\deg(P)=n$ et $\deg(P')=n-1$, on en déduit que $\deg(Q)=1$, et donc Q peut s'écrire $\lambda(X-\alpha)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. On a donc

$$P=\lambda(X-\alpha)P'$$

et en regardant les coefficients dominants, celui de P est a_n, celui de $\lambda(X-\alpha)P'$ est $\lambda n a_n$ et finalement $\lambda=\frac{1}{n}$.

2. On utilise l'écriture précédente :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{n}(X-\alpha)P' \Leftrightarrow P &= \frac{1}{n}XP' - \frac{1}{n}\alpha P' \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k X^k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} k a_k X^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha}{n}(k+1)a_{k+1}X^k \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k X^k &= -\frac{\alpha}{n}a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}ka_k - \frac{\alpha}{n}(k+1)a_{k+1}\right)X^k + a_nX^n \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on en déduit

$$a_0 = -\frac{\alpha}{n}a_1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![1,\, n-1]\!], \quad \frac{1}{n}ka_k - \frac{\alpha}{n}(k+1)a_{k+1} = a_k$$

soit

$$a_0 = \frac{\alpha}{n}a_1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![1,\, n-1]\!], \quad \frac{\alpha(k+1)}{k-n}a_{k+1} = a_k.$$

3. On fixe $a_n \in \mathbb{R}^*$. Alors, d'après les récurrences précédentes

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \frac{\alpha n}{-1}a_n = -\alpha n a_n \\ a_{n-2} &= \frac{\alpha(n-1)}{-2}a_{n-1} = \alpha^2\frac{n(n-1)}{2}a_n = \alpha^2\binom{n}{2}a_n \\ a_{n-3} &= \frac{\alpha(n-2)}{-3}a_{n-2} = -\alpha^3\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a_n = -\alpha^3\binom{n}{3}a_n \end{aligned}$$

et par récurrence sur i :

$$\forall\, i \;\in\; [\![1,\, n-1]\!], \quad a_{n-i} = (-\alpha)^i\binom{n}{i}a_n.$$

valable également pour $i = n$ et $i = 0$. Finalement, P s'écrit nécessairement

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n}(-\alpha)^k\binom{n}{k}a_nX^k \\ &= a_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\alpha X)^k \\ &= a_n(1-\alpha X)^n \end{aligned}$$

Ainsi, quitte à ré-écrire, P s'écrit $\lambda(X-\beta)^n$. Réciproquement, un tel polynôme convient.

Exercice 17

1. On suppose que P, de degré n, admet n racines distinctes, qu'on note $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. P est continue sur chacun des intervalles $[x_i,\, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i,\, x_{i+1}[$ et $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c_i \in\,]x_i,\, x_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$. Ainsi, les $(c_i)_{i\in[\![1,\,n-1]\!]}$ sont $n-1$ racines distinctes de P'. Puisque P' est de degré $n-1$, ce sont toutes les racines, et P' est également scindé à racines simples.
2. On suppose P scindé et on note p le degré de P. On suppose que P admet n racines : ℓ racines simples $x_1, \ldots x_\ell$ et $n-\ell$ racines multiples $x_{\ell+1}, \ldots, x_n$, de multiplicités respectives $k_{\ell+1}, \ldots, k_n$ (avec $k_i > 1$)

Puisque P est scindé, on a
$$p = \ell + \sum_{i=\ell+1}^{n} k_i.$$
Par définition de la multiplicité, $x_{\ell+1}, \dots, x_n$ sont des racines de P', de multiplicité $k_{\ell+1}-1, \dots k_n-1$.
Par le même raisonnement qu'en 1., il existe également $n-1$ racines distinctes, strictement entre deux racines successives de P.
On a donc au final $n-1$ racines simples distinctes, et $n-\ell$ racines distinctes et différentes des précédentes, de multiplicités $k_{\ell+1}-1, \dots, k_n-1$. Or :

$$\begin{aligned}\underbrace{n-1}_{\text{racines simples}} + \underbrace{\sum_{i=\ell+1}^{n}(k_i-1)}_{\text{racines multiples}} &= n-1+\sum_{i=\ell+1}^{n} k_i - \sum_{i=\ell+1}^{n} 1 \\ &= n-1+\sum_{i=\ell+1}^{n} k_i - (n-(\ell+1)+1) \\ &= \ell + \sum_{i=\ell+1}^{n} k_i - 1 = p-1\end{aligned}$$

On a donc trouvé $p-1$ racines (comptées avec multiplicités) pour un polynôme de degré $p-1$: ce sont donc toutes les racines, et P' est également scindé.

Exercice 18

1. On fixe $i \in [\![1, n]\!]$. Nécessairement, les (a_j) pour $j \neq i$ sont racines de L_i. Puisque L_i est de degré $n-1$ et admet $n-1$ racines distinctes, il s'écrit
$$L_i(X) = \lambda \prod_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} (X-a_j).$$
Puisque $L_i(a_i) = 1$, on a
$$1 = \lambda \prod_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} (a_i-a_j)$$
ce qui nous donne finalement
$$L_i(X) = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} (X-a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} (a_i-a_j)} = \prod_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}.$$
2. On utilise alors les polynômes précédents : le polynôme suivant convient :
$$L(X) = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i(X).$$
En effet, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,
$$L(a_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i(a_j) = b_j.$$
Pour l'unicité, prenons deux polynômes L et M qui conviennent. Ainsi, le polynôme $L-M$ admet n racines (les a_i) et est de degré au maximum $n-1$: il est donc nul, et $L = M$.

3. On applique naïvement : $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 5$ et $b_1 = 3, b_2 = 2, b_3 = 4$. Alors

$$\begin{aligned} L(X) &= \sum_{i=1}^{n} b_i L_i(X) \\ &= 3\frac{(X-4)(X-5)}{(2-4)(2-5)} + 2\frac{(X-2)(X-5)}{(4-2)(4-5)} + 4\frac{(X-2)(X-4)}{(5-2)(5-4)} \\ &= 3\frac{X^2-9X+20}{6} + 2\frac{X^2-7X+10}{-2} + 4\frac{X^2-6X+8}{3} \\ &= \frac{5}{6}X^2 - \frac{11}{2}X + \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Corrigés des exercices bilans

Exercice 19

Partie 1 – Premières propriétés des polynômes de Tchebychev

1. On a :
- $T_2 = 2XT_1 - T_0$ donc $T_2 = 2X^2 - 1$,
- $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X\left(2X^2-1\right) - X$ donc $T_3 = 4X^3 - 3X$
- $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X\left(4X^3-3X\right) - \left(2X^2-1\right)$ donc $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$,
- $T_5 = 2XT_4 - T_3 = 2X\left(8X^4-8X^2+1\right) - \left(4X^3-3X\right)$ donc $T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X$.

2. a)

Code Python

```python
def Tchebychev(n,x):
    T=1
    U=x
    for k in range(n):
          V=2*x*U+T #polynome auxiliaire
          U=T
          T=V
    return T
```

b)

Code Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X=np.linspace(-5,5,1000)
Y=[Tchebychev(20,x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n la proposition « T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} ». Raisonnons par récurrence double.
- Initialisation.

$T_1 = X$ est bien un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^{1-1}$.
$T_2 = 2X^2 - 1$ est bien un polynôme de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^{2-1}$.
Ainsi H_1 et H_2 sont vraies.
- Hérédité. Supposons que les propositions H_n et H_{n+1} sont vraies pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$.

T_n et T_{n+1} sont alors des polynômes dont $2XT_{n+1}$ est un polynôme et donc $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ aussi. De plus :

– $\deg(2XT_{n+1}) = \deg(2X) + \deg(T_{n+1}) = 1 + n + 1 = n + 2$ et $\deg(-T_n) = n$ donc

$$\deg(T_{n+2}) = \max\{\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)\} = n + 2$$

et le coefficient dominant de T_{n+2} est celui de $2XT_{n+1}$ c'est-à-dire le produit de celui de $2X$ et de celui de T_{n+1}. Il s'agit donc de $2 \times 2^n = 2^{(n+2)-1}$.
Ainsi H_{n+2} est vraie.
Ainsi, par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, H_n$ est vraie .
4. a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Par formule d'addition $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ puis

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

On somme et on trouve : $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a)\cos(b)$.
b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par récurrence double.
• On a $T_0(\cos(x)) = 1 = \cos(0) = \cos(0x)$ et $T_1(\cos(x)) = \cos(x) = \cos(1x)$. Ainsi la propriété est vraie aux rangs 0 et 1 .
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie aux rangs n et $n + 1$. On a

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(x)) = (2XT_{n+1} - T_n)(\cos(x)) &= 2\cos(x)T_{n+1}(\cos(x)) - T_n(\cos(x)) \\ &= 2\cos(x)\cos((n + 1)x) - \cos(nx) \end{aligned}$$

par formule de récurrence. On utilise la formule de la question précédente avec $a = (n + 1)x$ et $b = x$:

$$T_{n+2}(\cos(x)) = \cos((n + 1)x + x) + \cos((n + 1)x - x) - \cos(nx) = \cos((n + 2)x).$$

Ainsi la formule est vraie au rang $n + 2$.
Ainsi, par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
5. Supposons qu'il existe un autre polynôme P_n qui vérifie $(\star)$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos(x)) = \cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

Puisque cos est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1; 1]$, on en déduit que

$$\forall y \in [-1; 1], \quad P_n(y) = T_n(y)$$

Ainsi les polynômes P_n et T_n coïncident en une infinité de valeurs (tous les réels de $[-1; 1]$). On en déduit que $P_n = T_n$. Ainsi T_n est l'unique polynôme vérifiant $(\star)$.
6. On a $T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi)$ donc $T_n(1) = (-1)^n$.
• On a $T_n(1) = T_n(\cos(2\pi)) = \cos(n2\pi)$ donc $T_n(1) = 1$
• On a $T_n(0) = T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ donc $T_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \\ (-1)^{n/2} & \text{si} \quad n \text{ est pair .} \end{cases}$

Partie 2 – Factorisation des polynômes de Tchebychev

1. On factorise par les méthodes usuelles.
• On a $T_2 = 2X^2 - 1 = 2\left(X^2 - \frac{1}{2}\right) = 2\left(X^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$ donc $T_2 = 2\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
• On a $T_3 = 4X^3 - 3X = 4X\left(X^2 - \frac{3}{4}\right)$ donc $T_3 = 4X\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
• On a $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$. Un réel x est une racine de T_4 si et seulement si x^2 est une racine de $P = 8X^2 - 8X + 1$. Ce trinôme admet $(-8)^2 - 4 \times 8 = 32$ pour discriminant si bien qu'il admet deux racines réelles : $\frac{8+\sqrt{32}}{16} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\frac{8-\sqrt{32}}{16} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. On en déduit que x est une racine de T_4 si et seulement si $x \in \left\{-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right\}$.
Ainsi $T_4 = 8\left(X - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$.

- $T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X = X\left(16X^4 - 20X^2 + 5\right)$. Un réel non nul x est une racine de T_5 si et seulement si x^2 est une racine de $P = 16X^2 - 20X + 5$. Ce trinôme admet $(-20)^2 - 4 \times 5 \times 16 = 20(20-16) = 80$ pour discriminant si bien qu'il admet deux racines réelles :

$$\frac{20+\sqrt{80}}{32} = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad \frac{20-\sqrt{80}}{32} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}.$$

On en déduit que x est une racine de T_5 si et seulement si

$$x \in \left\{ -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \right\}.$$

Ainsi $T_5 = 16X\left(X - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(X + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(X - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)\left(X + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)$.

2. a) Les réels $\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k \in [\![1;n]\!]$, sont deux à deux disjoints et appartiennent à $]0;\pi[$. Puisque cos est injective (car strictement décroissante sur $]0;\pi[$), nous en déduisons que $x_1, \dots, x_n$ sont disjointes.

b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a

$$T_n\left(x_k\right) = T_n\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right) = \cos\left(n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right) = \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

On a bien $T_n\left(x_k\right) = 0$

c) Le polynôme T_n admet n racines distinctes, est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} donc

$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(X - x_k\right) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right).$$