15

Chapitre

Intégration

Résumé

Dans ce chapitre, on donne une définition de l'intégrale sur un segment, que l'on calculera à l'aide de différentes méthodes de calcul pratiques (intégration par parties, changement de variable). On revient également sur la notion de primitive. On introduit enfin la notion de sommes de Riemann pour le calcul intégral.

Plan du cours

> *« Je dois payer une certaine somme ; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de Riemann. »*

Henri-Léon Lebesgue (1875 – 1941). *Biographie de Lebesgue par Denjoy, Félix et Montel*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition de l'intégrale :

- dans le cas des fonctions positives . . . . ☐
- dans le cas des fonctions en escalier . . . . ☐

② Concernant les primitives :

- connaître les primitives usuelles . . . . ☐
- savoir déterminer des primitives dans les cas de dérivation calssique . . . . ☐
- connaître les opérations sur les primitives . . . . ☐

③ Connaître les différentes propriétés de l'intégrale :

- linéarité et relation de Chasles . . . . ☐
- encadrement et inégalité de la moyenne . . . . ☐
- positivité et croissance de l'intégrale . . . . ☐
- fonction positive et intégrale nulle . . . . ☐

④ Concernant les méthodes de calcul d'intégrales :

- l'intégration par partie . . . . ☐
- le changement de variable . . . . ☐
- les fonctions définies par une intégrale . . . . ☐

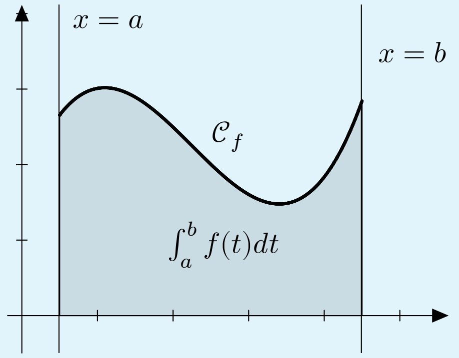
⑤ Savoir utiliser les sommes de Riemann pour calculer des sommes de séries . . . . ☐

I. Intégrale sur un segment

1. Cas des fonctions positives

Définition 15.1.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. On appelle **intégrale** de a à b de la fonction f, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Remarque

Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, t est une variable muette. Ainsi,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

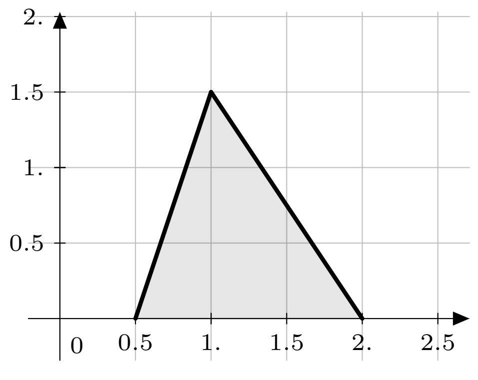
Exemple 15.1

Si f est la fonction constante égale à 2, alors le domaine est un rectangle, et

$$\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \times (4-2) = 4.$$

Exercice 15.2

Calculer $\displaystyle\int_{1/2}^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ dans le cas suivant :



Solution

Le domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1/2$ et $x = 2$ est un triangle. Ainsi

$$\int_{1/2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1.5 \times 1.5}{2} = 1.125 = \frac{9}{8}$$

2. Premières propriétés

On dispose des résultats suivants :

Proposition 15.1.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Alors

- $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$
- **Relation de Chasles** : pour tout réel $c \in [a, b]$, on a

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Dans le premier cas, le domaine est vide, donc d'aire nulle. Dans le second cas, il suffit de voir que le domaine délimité par les droites $x = a$ et $x = b$ peut être coupé en deux domaines : celui délimité par $x = a$ et $x = c$, et celui délimité par $x = c$ et $x = b$.

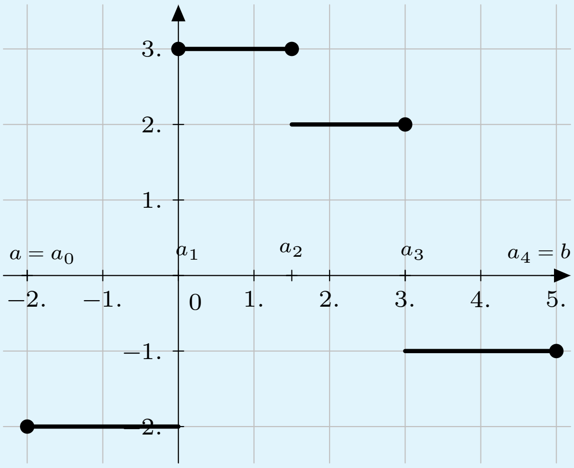
Ce dernier point nous amène à poser, si $a \leqslant b$

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Cas des fonctions en escalier

Définition 15.2.

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dites en escalier s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ telle que f est constante sur les intervalles $]a_i; a_{i+1}[$.



On note $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$, qui est un sous-ensemble ···

des fonctions définies sur $[a, b]$.

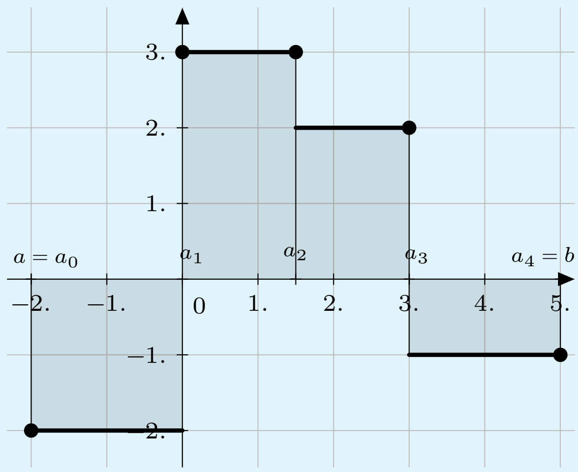
Exemple 15.3

Par exemple, la fonction partie entière est en escalier sur $[-1; 2]$.

Définition 15.3.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision adaptée. On note c_i la valeur de f sur $]a_i; a_{i+1}[$. On définit l'intégrale de f de a à b le nombre

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i)$$



Exemple 15.4

En utilisant cette définition,

$$\int_{-1}^{2} [x]\,\mathrm{d}x = -1(0 - (-1)) + 0(1 - 0) + 1(2 - 1) = 0$$

Remarque

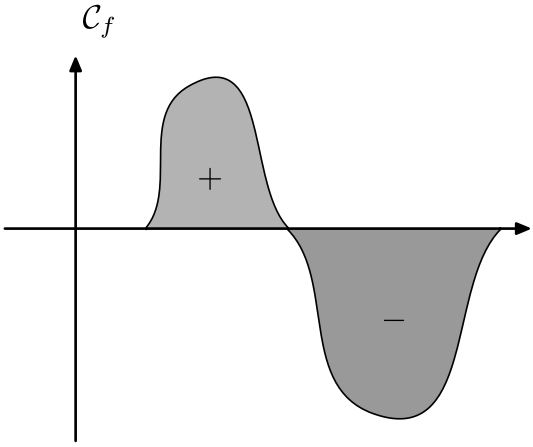
Dans le cas des fonctions en escalier, l'intégrale de f correspond donc à l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. L'aire est ainsi comptée positivement si f est positive, négativement sinon.

4. Cas général

On admettra que l'on peut généraliser la définition précédente à toutes les fonctions continue.

Définition 15.4.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale de f de a à b, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, l'aire **algébrique** (ou aire **signée**) en unité d'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Remarque

Par convention, si $a > b$, on notera

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

On conserve la propriété suivante :

Propriété 15.2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,\, b]$, et $c \in [a,\, b]$. Alors $\displaystyle\int_c^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

II. Propriétés générales

1. Relation de Chasles

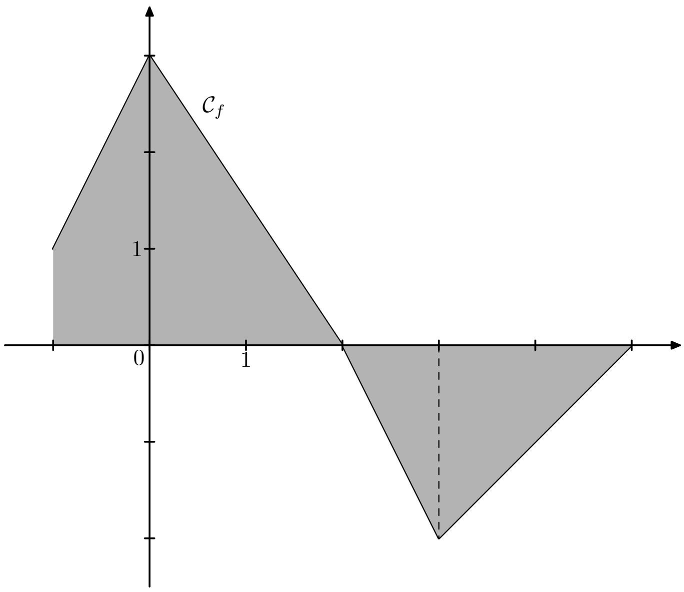
Théorème 15.3.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a, b, c trois réels quelconques de I. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 15.5 (Calcul de l'intégrale d'une fonction affine par morceaux)

Soit f la fonction donnée ci-dessous. Déterminer $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^5 f(t)\,\mathrm{d}t$.



Solution

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-1}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{3}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t = 2+3-1-2 = 2$$

Conséquence 15.4.

- Si f est paire sur $[-a;a]$, alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$
- Si f est impaire sur $[-a;a]$, alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

2. Linéarité

Théorème 15.5.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, soit λ un réel quelconque, et soient a, b deux réels quelconques de l'intervalle I. Alors

$$\int_{a}^{b} \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{a}^{b} (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{b} g(t)\,\mathrm{d}t$$

III. Primitives

1. Définition

Définition 15.5.

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I, avec F dérivable sur I. Si $F' = f$, on dit que F est une **primitive** de f sur l'intervalle I.

Exemple 15.6

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. Alors f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : x \mapsto x^2$, mais également les fonctions $G : x \mapsto x^2 + 1$, $H : x \mapsto x^2 + \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Remarque

Une fonction f peut avoir des primitives sans qu'elle soit continue ; en effet, une fonction peut être dérivable sans être $\mathcal{C}^1$.

⚠ **Attention**

On doit toujours préciser l'intervalle sur lequel F est une primitive de f.

Ainsi, on ne peut pas dire que ln est une primitive de la fonction inverse, mais on peut dire qu'elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Différentes primitives d'une fonction

Théorème 15.6.

Les seules primitives de la fonction nulle sur un intervalle I sont les fonctions constantes.

Démonstration

En effet, si $F' = 0$ sur l'intervalle I, nous avons vu dans le chapitre sur la dérivation, que cela implique que F est constante. Réciproquement, les fonctions constantes ont une dérivée nulle.

Conséquence 15.7.

Soit F une primitive d'une fonction f sur l'intervalle I. Alors toutes les primitives de f sur I s'écrivent $F + \lambda$, avec λ constante réelle.

Démonstration

En effet, en notant F et G deux primitives de f sur I, on a $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. D'après le résultat précédent, $F - G$ est une fonction constante sur l'intervalle I, c'est à dire $F = G + \lambda$ avec λ constante réelle.

Ainsi il n'y pas d'unique primitive : on parlera d'une primitive et non de *la* primitive.

3. Fonction continue et primitive

Théorème 15.8. Théorème fondamental de l'analyse

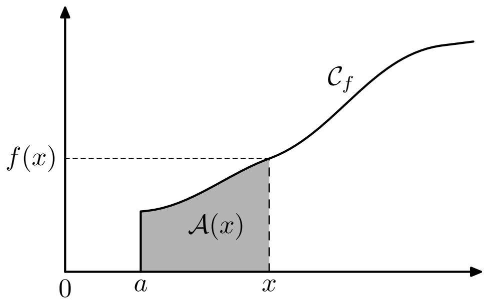
Une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I : la fonction

$$\mathcal{A} : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

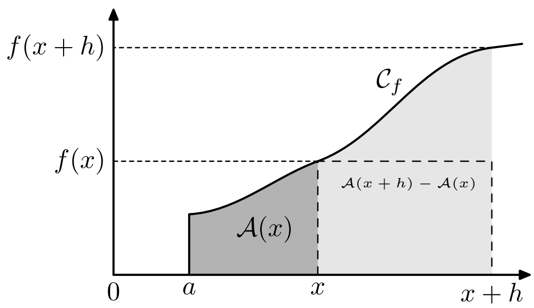
est la primitive de f nulle en x_0.

Démonstration

Démontrons, pour simplifier, le théorème dans le cas où f est une fonction croissante et positive. Soit f une fonction continue croissante sur $[a,\,b]$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Pour tout $x \in [a,\,b]$, on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, entre les abscisses a et x.



Cette fonction est bien définie sur $[a,\,b]$. On va montrer que $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[a,\,b]$, et que $\mathcal{A}' = f$.
Soit $h > 0$ et $x \in [a,\,b]$. Le nombre $\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)$ représente l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, et les abscisses x et $x+h$.



Puisque f est croissante, on peut encadrer cette aire par deux rectangles :

$$(x+h-x)f(x) \leqslant \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leqslant (x+h-x)f(x+h)$$

donc

$$f(x) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leqslant f(x+h)$$

Par continuité de f, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Par encadrement, on a donc

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x)$$

Donc $\mathcal{A}$ est bien dérivable à droite en x, et $\mathcal{A}_d'(x) = f(x)$.
On montre de même que $\mathcal{A}$ est dérivable à gauche en x, et que $\mathcal{A}_g'(x) = f(x)$. Les dérivées à droite et à gauche de $\mathcal{A}$ étant égales, on en déduit que $\mathcal{A}$ est dérivable et que sa dérivée est f.

On retiendra le résultat sous la forme suivante :

Théorème 15.9.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in I$. La fonction

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0. Ainsi, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $F' = f$.

Exemple 15.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Déterminer f'.

Solution

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction f est la primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ nulle en 0. Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\ x,\ f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

4. Fonction primitive et condition initiale

Théorème 15.10.

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I, et y_0 un réel donné. Alors il existe une, et une seule, primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
En particulier, f admet une unique primitive s'annulant en un x_0 donné.

Démonstration

Soit F une primitive de f. Alors, la fonction G définie par $G = F - F(x_0) + y_0$ est également une primitive de f, et $G(x_0) = y_0$.
Si G et H sont deux primitives de f telles que $G(x_0) = H(x_0) = y_0$, alors, puisqu'on peut écrire $G = H + l$, on a $G(x_0) = H(x_0) + l = G(x_0) + l$, donc $l = 0$ et $G = H$.

Exemple 15.8

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 - 1$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $F(1) = 0$.

5. Calcul intégral et primitive

Le résultat précédent permet de calculer une intégrale à l'aide des primitives :

Proposition 15.11.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. L'intégrale de a à b de la fonction f est égal au nombre réel $F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$. On note …

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Remarque
Par convention de notation, on note $[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$, de sorte que
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple 15.9
$\displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. On peut également prendre une autre primitive :
$$\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 1\right]_1^2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Remarque
La définition de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, soient F et G deux primitives de f. D'après un résultat précédent, il existe un réel λ tel que $G = F + \lambda$. Mais alors
$$G(b) - G(a) = (F(b) + \lambda) - (F(a) + \lambda) = F(b) - F(a)$$

IV. Recherche de primitives

Pour rechercher des primitives, on utilise les formules connues pour la dérivation, et les dérivées connues.

1. Fonctions usuelles

Fonction f	**Primitive F**	**Intervalle I**
$x \mapsto a$ (constante non nulle)	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n (n \geqslant 1)$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n > 1)$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}_-^*$ ou$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$

Fonction f	**Primitive** F	**Intervalle** I
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$

2. Utilisation des formules de dérivation

Puisqu'on connait les dérivées des fonctions composées, on obtient les primitives suivantes :

Fonction f	**Primitive** F
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$u'u$	$\dfrac{1}{2}u^2$
$u'u^n \ (n \in \mathbb{Z}^*, n \neq -1)$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'u^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert)$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$

Exemple 15.10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Déterminer une primitive de f.

Solution

On pose $u(x) = \ln x$. Alors $f(x) = u'(x)u(x)$ et admet donc comme primitive $F : x \mapsto \frac{1}{2}u^2(x) = \frac{1}{2}\ln(x)^2$.

Exercice 15.11

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^\alpha}$.

Solution

Attention à bien distinguer le cas $\alpha = 1$ des autres cas !

- Si $\alpha = 1$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(|1+x^2|) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- Si $\alpha \neq 1$, alors une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{-\alpha+1}\dfrac{1}{(1+x^2)^{\alpha-1}}$.

Exercice 15.12

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^6}$.

Solution

Le numérateur n'est pas la dérivée du dénominateur. On cherche alors autre chose. On constate que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{t^2}{1+t^6} = \frac{t^2}{1+(t^3)^2} = \frac{1}{3}\frac{3t^2}{1+(t^3)^2}$$

On reconnait la dérivée d'une composée, et on peut conclure qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{3}\arctan(t^3)$.

3. Opération sur les primitives

Théorème 15.12.

Soient F et G deux primitives respectives des fonctions f et g sur un meme intervalle I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- λF est une primitive de λf sur I.
- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

Démonstration

Assez immédiate : $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$ et $(F+G)' = F' + G' = f + g$ en exploitant la linéarité de la dérivation.

V. Propriétés d'encadrement et valeur moyenne

1. Encadrement

Théorème 15.13.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et soient a, b deux réels quelconques de I.

- (**Positivité** de l'intégrale) Si $a \leqslant b$ et si, pour tout réel t de $[a, b]$, $f(t) \geqslant 0$, alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$
- (**Croissance** de l'intégrale) Si $a \leqslant b$ et si, pout tout réel t de $[a, b]$ $f(t) \leqslant g(t)$ alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

⚠ **Attention**

Il faut absolument que $a \leqslant b$!

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I, et G une primitive de g sur I.

- Si f est positive sur I, alors F est croissante sur I (puisque $F' = f$). Mais alors, si $a \leqslant b$,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \geqslant 0 \text{ par croissance de } F$$
- Si $f \leqslant g$ sur I, alors $g - f \geqslant 0$ sur I. D'après le résultat précédent, $\displaystyle\int_a^b (g(t) - f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

  Par linéarité, on obtient bien $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Inégalité de la moyenne

Théorème 15.14. Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient m et M deux réels, et a, b deux réels de l'intervalle I tels que $a \leqslant b$.
Si $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a, b]$ alors
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$$
Et si $a \neq b$:
$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$$

Démonstration

Pour tout t dans $[a, b]$, on a $m \leqslant f(t) \leqslant M$. D'après le théorème précédent, puisque $a \leqslant b$, on a alors
$$\int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}t$$
Or $\int_a^b m\,\mathrm{d}t = m(b-a)$ et $\int_a^b M\,\mathrm{d}t = M(b-a)$ (car les fonctions $t \mapsto M$ et $t \mapsto m$ sont constantes sur $[a, b]$), ce qui donne le résultat.

On peut également le prouver à l'aide de l'inégalité des accroissements finis appliquée à F, une primitive de f.

Exercice 15.13

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est décroissante sur $[0; +\infty[$. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

Prouver que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$, puis en déduire que la suite (I_n) est convergente.

Solution

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Par dérivation :

$$\forall\ x \geqslant 0, \quad f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Puisque $x \mapsto e^x - e^{-x}$ est positive sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que f' est négative sur $\mathbb{R}^+$, et donc que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
Soit n un entier. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, elle l'est sur $[n, n+1]$. Ainsi, pour tout réel $t \in [n, n+1]$, on a

$$f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a alors

$$f(n+1)(n+1-n) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n)(n+1-n)$$

soit

$$f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$$

Constatons enfin que

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ par quotient.}$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite (I_n) converge, et que sa limite vaut 0.

Théorème 15.15. Inégalité triangulaire

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Démonstration

Théorème admis.

3. Valeur moyenne d'une fonction

Définition 15.6.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a, b deux réels distincts de I. Le …

nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b.

Théorème 15.16.

Dans les conditions précédentes, il existe un réel c situé entre a et b, tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)$$

Démonstration

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Puisqu'elle est continue, l'image du segment $[a, b]$ est un segment $[m; M]$. Mais alors, pour tout x de $[a, b]$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \Leftrightarrow \int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}t$$

Soit

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$$

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc compris entre m et M. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette valeur est atteinte en un réel $c \in [a, b]$.

4. Fonctions positive et intégrale nulle

Proposition 15.17.

Soit f une fonction <u>continue</u> sur $[a, b]$. Si

$$\forall\ t \in [a, b], f(t) \geqslant 0 \text{ et } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a, b]$.

Démonstration

Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha \in]a; b[$ tel que $f(\alpha) > 0$. Par continuité de f, il existe un intervalle $J =]\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon[$ tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \geqslant \frac{f(\alpha)}{2}$. Mais alors,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_J f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{f(\alpha)}{2} \times 2\varepsilon > 0$$

ce qui est absurde.

⚠ **Attention**

Il est important que f soit continue. En effet, si on prend $f : x \mapsto \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x \neq 0 \\ 1 & \text{si} & x = 0 \end{array}\right.$, son intégrale sur $[-1, 1]$ est nulle, mais elle n'est pas nulle sur $[-1, 1]$.

5. Intégration d'une fonction continue par morceaux

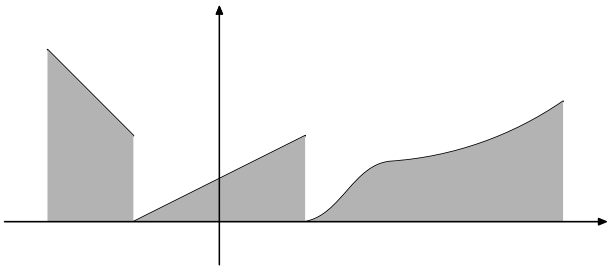
Rappel

Une fonction f est dite continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Définition 15.7.

Pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, notons $\widehat{f_i}$ le prolongement par continuité de f_i sur l'intervalle $[a_i; a_{i+1}]$. On appelle alors intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widehat{f_i}(x)\,\mathrm{d}x$$



Remarque

Ainsi, pour calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on calcule l'intégrale sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ de la subdivision, puis on additionne les différentes valeurs.

VI. Méthode de calcul d'intégrales

1. Intégration par partie

Théorème 15.18.

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors, pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

La fonction uv est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + uv'$. Donc $uv' = (uv)' - u'v$, et toutes ces fonctions sont continues sur I. On en déduit donc :

$$\int_a^b (uv')(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b [(uv)'(t) - (u'v)(t)]\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale, et puisque uv est une primitive de $(uv)'$, on a

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Méthode

Pour calculer une intégrale par intégration par partie, on détermine les fonctions u et v qui interviennent et on vérifie qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle considéré.

Exemple 15.14

Calculer $\displaystyle\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t$.

Solution

Pour tout $t \in [0;1]$, posons $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. Alors, $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$. On a donc

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = [t\mathrm{e}^t]_0^1 - \int_0^1 1\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = e - [\mathrm{e}^t]_0^1 = 1$$

Exemple 15.15

Calculer $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution

Puisque $\ln(t) = 1\times\ln(t)$, pour tout $t \in [1,\, \mathrm{e}]$, on pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;e]$. On a donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$. Alors

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} t\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - [t]_1^{\mathrm{e}} = 1$$

Remarque

Ainsi, une primitive de la fonction ln sur $]0,\, +\infty[$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$.

2. Changement de variable

L'idée du changement de variable est de se ramener à une intégrale que l'on sait calculer.

Théorème 15.19.

Soit f une fonction continue sur $[a,\, b]$, et u une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha;\beta]$, telle que $u([\alpha;\beta]) \subset [a,\, b]$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque

Il faut donc reconnaitre une forme $f(u)u'$ pour pouvoir effectuer un changement de variable. On n'oubliera pas de remplacer également les bornes d'intégration.

Démonstration

Soit F une primitive de f, et $g = F \circ u$. g est C^1 sur $[\alpha;\beta]$ (puisque F et u sont C_1) et on a $g' = F'(u) \times u' = f(u)u'$. Donc g est une primitive de $f(u)u'$. Donc

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = [g(t)]_\alpha^\beta = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = [F(t)]_{u(\alpha)}^{u(\beta)} = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 15.16

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = 1 - t^2$.

Solution

Pour tout $t \in [0;1]$, $u(t) = 1 - t^2$. u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. Alors

$$I = \int_0^1 -\frac{1}{2}u'(t)\sqrt{u(t)}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(1)} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Méthode

Soit $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour effectuer un changement de variable :

- On pose $t = \varphi(x)$ où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$. On écrit alors $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$.
- On s'occupe des bornes : lorsque $t = a$, x est un antécédent de a par φ et lorsque $t = b$, x est un antécédent de b par φ.
- Enfin, on exprime $f(t)$ et $\mathrm{d}t$ uniquement avec x et $\mathrm{d}x$.

On a alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$, cette intégrale étant a priori plus simple à calculer.

✎ On écrit sur sa copie : « On fait le changement de variable $t = \varphi(x)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$. On a $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. ».

⚠ Attention

La difficulté en général est que l'intégrale se présente sous la forme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et non $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$. Il faut donc déterminer un antécédent de a et de b par φ.

✎ On écrit alors « Si $t = \alpha$ alors $x = \varphi(t) = \varphi(\alpha) = a$ et si $t = \beta$ alors $x = \varphi(t) = \varphi(\beta) = b$ ».

On ne mélange pas les deux variables dans une intégrale.

Remarque

Conformément au programme, les changements de variable non affine sont indiqués. On vérifiera systématiquement qu'ils sont $\mathcal{C}^1$.

Exemple 15.17

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ en effectuant le changement de variable $x = 1 + \mathrm{e}^t$.

Solution

Le changement de variable, en réalité, est $t = \varphi(x) = \ln(x-1)$.
Si $u = 2$ alors $\varphi(2) = 0$, et si $u = 1 + \mathrm{e}$, $\varphi(1+\mathrm{e}) = 1$.
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2,\, 1+\mathrm{e}]$. On a

$$\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Par changement de variables :

$$I = \int_2^{\mathrm{e}+1} \frac{\ln(x)}{1-\mathrm{e}^{-\ln(x-1)}}\frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \int_2^{\mathrm{e}+1}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Ainsi,

$$I = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_2^{\mathrm{e}+1} = \frac{1}{2}\left((\ln(\mathrm{e}+1))^2 - \ln(2)^2\right)$$

Exercice 15.18

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ avec le changement de variable $x = \sin(t)$.

Solution

On pose $x = \sin(t)$. Si $t = 0$ alors $x = \sin(t) = 0$ et si $t = \frac{\pi}{2}$ alors $x = \sin(t) = 1$.
La fonction sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\, \frac{\pi}{2}]$, et on a

$$\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par changement de variables :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \text{ car cos est positif sur l'intervalle} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Remarquons que ce résultat est cohérent car il correspond à l'aire d'un quart de disque de rayon 1.

3. Fonctions définies par une intégrale

On peut être amené à étudier une fonction du type $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $G : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Méthode

Pour étudier ce genre de fonctions :

- Dans le premier cas, on reconnait, après avoir étudié la continuité de f, la primitive de f nulle en x_0, que l'on étudiera en tant que telle.
- Dans le deuxième cas, on introduira systématiquement une primitive H de f si f est continue. Dans ce cas, $G(x) = H(v(x)) - H(u(x))$ et on étudiera ensuite (dérivation par exemple, si u et v sont dérivables).

Exemple 15.19

Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer g'.

Solution

En notant F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a pour tout réel x, $g(x) = F(2x) - F(x)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque f est continue. On a donc

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

Exercice 15.20

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Déterminer les variations de g, puis déterminer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

Solution

La fonction $f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle admet une primitive F qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le théorème fondamental. Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(x) = F(x^2) - F(x)$$

et g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme et composée. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= 2xF'(x^2) - F'(x)\\ &= 2xf(x^2) - f(x)\\ &= 2x\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x^2} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\\ &= \frac{2\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\left(2\mathrm{e}^{-x^2+x} - 1\right)\end{aligned}$$

Remarquons que, par croissance de la fonction ln :

$$2\mathrm{e}^{-x^2+x} - 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2+x} \geqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow -x^2 + x \geqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow -x^2 + x - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 4\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 4\ln(2) > 0$$

et les racines sont

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{\Delta}}{-2} = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{\Delta}}{-2} = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2} < 0$$

Le signe de g' est donc, sur $\mathbb{R}^+$ (puisque $a = -1 < 0$) :

x	0		x_1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	||	↗	$g(x_1)$	↘	

Méthode

Pour déterminer les limites, on cherche à faire des encadrements de l'intégrande pour en déduire un encadrement de l'intégrale.

Pour la limite en $+\infty$: pour $x \geqslant 1$, pour tout $t \in [x,\, x^2]$, $\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x}$ et donc, par croissance de l'intégrale (car $x \leqslant x^2$ si $x \geqslant 1$) :

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant g(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\frac{-\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-x}}{x^2} \leqslant g(x) \leqslant \frac{-\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

Remarquons que

$$\frac{-\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-x}}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{-\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-x}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Par encadrement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$$

Pour la limite en 0 : si $x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant x$. Pour tout $t \in [x^2,\, x]$, on a $\mathrm{e}^{-x^2} \geqslant \mathrm{e}^{-t} \geqslant \mathrm{e}^{-x}$ soit, par croissance de l'intégrale ($x^2 \leqslant x$) :

$$\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{t}\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant g(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{t}\,\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\mathrm{e}^{-x^2}\ln\left(\frac{x^2}{x}\right) \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\ln\left(\frac{x^2}{x}\right)$$

soit, finalement

$$\mathrm{e}^{-x^2}\ln(x) \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\ln(x).$$

Remarquons que

$$\lim_{x\to0^+} \mathrm{e}^{-x}\ln(x) = -\infty$$

et par comparaison

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} g(x) = -\infty}$$

On peut alors compléter le tableau de variations :

x	0		x_1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$g(x_1)$	$\searrow$	0

VII. Sommes de Riemann

1. Définition

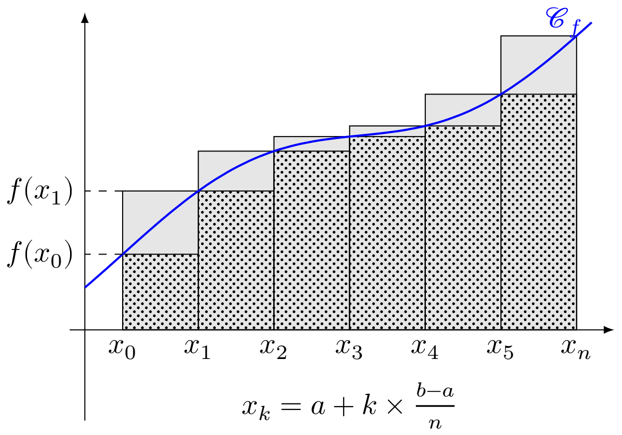
Définition 15.8.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Soit n un entier strictement positif. On note,

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \text{ et } S'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Remarque

Les sommes S_n et S'_n représentent l'aire des rectangles associés à la fonction f lorsqu'on effectue un découpage régulier de l'intervalle $[a;b]$:



Remarque

Dans le cas d'une fonction continue sur $[0;1]$, les sommes de Riemann s'écrivent

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } S'_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. Sommes de Riemann et intégrale

Les sommes de Riemann d'une fonction continue ont une propriété très importante : elles convergent vers l'intégrale de f sur $[a;b]$ et en sont donc une très bonne approximation.

Théorème 15.20.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Alors les suites $(S_n(f))_n$ et $(S'_n(f))_n$ convergent et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \lim_{n\to+\infty} S'_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On va en produire deux démonstrations ; la première dans le cas où la fonction est continue et croissante. Dans le deuxième cas, dans le cas où la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.

a. Cas où la fonction est croissante

Démonstration

Pour simplifier les calculs, supposons que $a=0$ et $b=1$, et supposons f continue croissante sur $[0;1]$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout k entre 0 et $n-1$, on a

$$\forall\ t\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right], f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant f(t)\leqslant f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

en utilisant la croissance de f. D'après l'inégalité de la moyenne, on a donc

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

En additionnant ces inégalités pour k entre 0 et $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

soit, par la relation de Chasles

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

En effectuant le changement de variable $j=k+1$ dans la deuxième somme, on déduit donc

$$S_n(f)\leqslant\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=S_n(f)-\frac{f(0)}{n}+\frac{f(1)}{n}$$

Cette inégalité s'écrit également

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{f(0)}{n}-\frac{f(1)}{n}\leqslant S_n(f)\leqslant\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

En passant à la limite, par encadrement, on déduit donc bien

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

b. Cas où la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$

Dans ce cas, on dispose même d'un théorème plus intéressant :

Théorème 15.21.

Soient $a<b$ deux réels et $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\,b]$. Nous avons (en ⋯

utilisant les notations précédentes)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| S_n(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{[a,\,b]} |f'|.$$

Ce résultat est valable également en remplaçant $S_n(f)$ par $S'_n(f)$.

Démonstration

Soit g, définie sur $[0,\,1]$, par

$$\forall\, x \in [0,\,1], \quad g(x) = (b-a)f(a + x(b-a))$$

afin de pouvoir ré-écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right).$$

Mais alors, en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} S_n(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{d}t - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g(t) \right] \mathrm{d}t \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire sur la somme puis l'intégrale :

$$\begin{aligned} \left| S_n(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g(t) \right] \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| g\left(\frac{k}{n}\right) - g(t) \right| \mathrm{d}t \end{aligned}$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\,1]$, donc g' est continue sur $[0,\,1]$: il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$M = \max_{[0,\,1]} |g'| = (b-a)^2 \max_{[a,\,b]} |f'|.$$

Mais alors, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\, (x, y) \in [0,\,1]^2, \quad |g(x) - g(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Mais alors :

$$\begin{aligned} \left| S_n(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} M \left| \frac{k}{n} - t \right| \mathrm{d}t \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t - \frac{k}{n} \right) \mathrm{d}t \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(t - \frac{k}{n})^2}{2} \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} = M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2} = \frac{M}{2n}. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{M}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit que

$$\left|S_n(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

c'est-à-dire que $(S_n(f))$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Application : limite de certaines suites

Méthode

Les sommes de Riemann peuvent nous permettre de calculer la limite de certaines suites.

Exemple 15.21

Soit u la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4}$$

Déterminer la limite de u.

Solution

Pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3$$

On reconnait une somme de Riemann de la fonction $f : x \mapsto x^3$ sur le segment $[0;1]$, qui est continue sur $[0;1]$. Alors, (u_n) converge, et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

4. Application : valeur approchée d'intégrale

a. Méthode des rectangles

Pour déterminer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment, on peut utiliser la méthode des rectangles, qui consiste à calculer l'une des sommes de Riemann dans le cas d'une fonction continue et monotone.

Méthode (Méthode des rectangles)

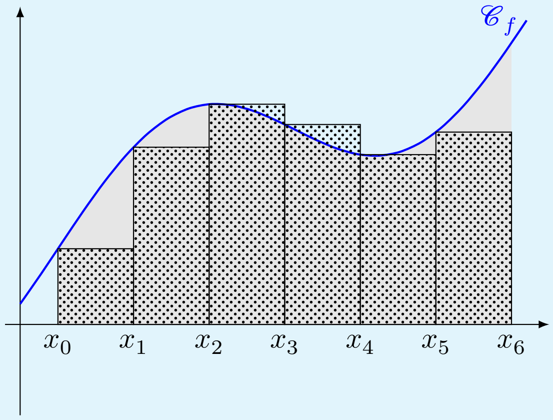
Lorsqu'une fonction est continue sur un segment $I = [a,b]$, on décompose I en subdivision de longueur $\frac{b-a}{n}$:

$$\left[a, a+\frac{b-a}{n}\right], \left[a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}\right] \dots, \left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right],$$
$$\dots \left[a+(n-1)\frac{b-a}{n}, b\right]$$

On calcule alors la somme des aires des rectangles « inférieurs » (ou supérieurs) : pour l'intervalle

$$\left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right],$$

on prend le rectangle de hauteur $f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ (rectangle inférieur), ou $f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)$.



Lorsque n tend vers $+\infty$, l'aire obtenue, si la fonction est continue, tend vers l'intégrale de la fonction sur le segment.

On peut appliquer la méthode des rectangles, c'est-à-dire le calcul des sommes de Riemman, pour déterminer une valeur approchée de l'intégrale. Par exemple, pour calculer une valeur approchée de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}$, on peut faire ainsi :

Code Python

```python
import math

def f(x): return math.sqrt(1+x**2)

def rectangle(a,b,n):
   ''' Fonction rectangle prend 3 arguments
        - [a b] désigne le segment sur lequel on calcule l'intégrale
        - n représente le nombre de subdivision
      Elle renvoie une valeur approchée de l'intégrale '''
   inf=0
   for i in range(n):
      inf = inf+(b-a)/n*f(a+i*(b-a)/n)
   return inf
```

et après exécution :

Console Python

```
>>> # Exemples pour a=0, b=1 et n=100
>>> print(rectangle(0,1,100))
0.7901042579447618
```

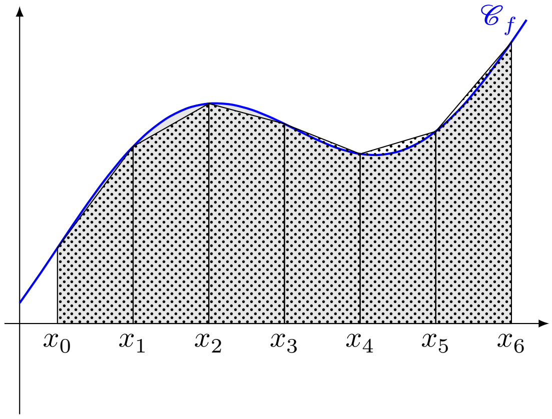
Le résultat précédent montre que, si f est $\mathcal{C}^1$, la convergence vers l'intégrale est en $\frac{1}{n}$.

b. Méthode des trapèzes

Au lieu d'ajouter l'aire de rectangles, on peut aussi essayer d'utiliser une autre méthode de calcul : la méthode des trapèzes.

On approche l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par les sommes :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f\left(a+k\frac{b-a}{b}\right)+f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(S_n(f)+S_n'(f)\right).$$



On peut montrer que, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\frac{1}{2}\left(S_n(f) + S_n'(f)\right) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{[a,\,b]} |f''|.$$

Ainsi, la suite converge vers l'intégrale avec une vitesse $\frac{1}{n^2}$, ce qui est plus efficace que la méthode des rectangles.
En Python, cela donne :

Code Python

```python
import math

def f(x): return math.sqrt(1+x**2)

def trapeze(a,b,n):
    ''' Fonction trapeze prend 3 arguments
          - [a b] désigne le segment sur lequel on calcule l'intégrale
          - n représente le nombre de subdivision
       Elle renvoie une valeur approchée de l'intégrale '''
    inf=0
    sup=0
    for i in range(n):
       inf = inf+(b-a)/n*f(a+i*(b-a)/n)
       sup = sup+(b-a)/n*f(a+(i+1)*(b-a)/n)
    return 1/2*(inf+sup)
```

et une fois exécuté :

Console Python

```
>>> # Exemples pour a=0, b=1 et n=10 et n=100
>>> trapeze(0,1,10)
0.7761295815620795
>>> trapeze(0,1,100)
0.7851042579447618
```

Remarquons que, la valeur approchée obtenue par la méthode des trapèzes est meilleure que celle obtenue avec la méthode des rectangles (la valeur exacte est $\frac{\pi}{4}$ et approchée est $0,7853981634$). Au lieu de calculer pour un rang n, on peut utiliser les majorations vues pour obtenir une valeur approchée à une certaine précision, avec une boucle **while**.

Exercices 15

Exercices

Intégrales et primitives

●○○ **Exercice 1 Primitives** (15 min.)

Déterminer sur quel(s) intervalle(s) les fonctions suivantes possèdent des primitives, puis les déterminer.

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1} \qquad f_4(x) = \frac{2}{x(x+1)} \qquad f_7(x) = \frac{\ln(x)}{2x}$$

$$f_2(x) = x\sqrt{1-x^2} \qquad f_5(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \qquad f_8(x) = \frac{3}{3+x^2}$$

$$f_3(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad f_6(x) = \tan(x) + \tan^3(x) \qquad f_9(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$$

●○○ **Exercice 2 Premières intégrales** (30 min.)

Montrer l'existence, puis calculer chacune des intégrales suivantes :

$$A = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad D = \int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln(t)}} \qquad G = \int_{-1/\sqrt{2}}^{0} \frac{1}{3+2t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$B = \int_0^3 (2u+1)\mathrm{e}^{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u \qquad E = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x \qquad H = \int_1^2 \mathrm{e}^u\left(\frac{1}{u} + \ln(u)\right)\mathrm{d}u$$

$$C = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t+t}\,\mathrm{d}t \qquad F = \int_{-1}^1 |x^2-x|\,\mathrm{d}x \qquad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin^3(x) - 3\sin^2(x) + 5\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

●○○ **Exercice 3 Intégration par parties** (20 min.)

Montrer l'existence, puis calculer chacune des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \qquad C = \int_1^{\mathrm{e}} x(\ln(x))^2\,\mathrm{d}x$$

$$B = \int_1^{\mathrm{e}} v^2\ln(v)dv \qquad D = \int_0^1 u^3\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u$$

●○○ **Exercice 4 Changement de variable** (15 min.)

Montrer l'existence, puis calculer chacune des intégrales suivantes en utilisant le changement de variable donné :

$$A = \int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x \text{ avec } y = x^2. \qquad B = \int_{1/2}^1 \frac{1}{x(x+1)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x \text{ avec } y = \frac{x}{x+1}.$$

$$C = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \text{ avec } x = \frac{1}{t}. \qquad D = \int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ avec } u = \mathrm{e}^{\sqrt{t}}.$$

Suites d'intégrales

●●○ Exercice 5 Suite d'intégrales I (25 min.)

Pour tout entier n, on pose

$$u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$. En déduire la valeur de u_0.
2. Calculer u_1.
3. Montrer que pour tout entier n,
$$u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$
En déduire u_2 et u_3.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et minorée par 0.
5. En minorant $1-x^2$, montrer que pour tout entier n, $u_n \leqslant \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. En déduire la limite de la suite u.

●●○ Exercice 6 Suite d'intégrales II (25 min.)

Pour tout entier n, on note

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Déterminer la monotonie des suites I et J.
2. Montrer que pour tout n, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n).
3. Par un intégration par parties, démontrer que pour tout n,
$$J_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$$
En déduire la limite de (J_n) puis celle de $(n \times J_n)$.

Fonctions définies par une intégrale

●●○ Exercice 7 Fonctions définies par une intégrale (20 min.)

Etudier complètement les fonctions suivantes (ensemble de définition, signe, dérivée, et tableau de variations). On justifiera toutes les étapes.

$$a(x) = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad b(x) = \int_x^1 \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}\,\mathrm{d}t \qquad c(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

●●○ Exercice 8 ESCP 99 (30 min.)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, et que la fonction g est impaire.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}$$
4. Dresser le tableau de variations de g. On précisera $g(0)$.
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $x\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant g(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

●●○ Exercice 9 Prolongement par continuité (10 min.)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^2\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$
Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement.

Sommes de Riemann et séries

●○○ Exercice 10 Sommes de Riemann (15 min.)

Montrer que les suites suivantes sont convergentes, et trouver leur limite.
$$u_n = n^{-3/2}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} \qquad w_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$$

●●○ Exercice 11 Série de Bertrand (15 min.)

En calculant $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$, et en montrant que pour tout $k \geqslant 2$,
$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$$
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}$ diverge.

Pour aller plus loin

●●● Exercice 12 Lemme de Riemann-Lebesgue (15 min.)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\, b]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

●●○ Exercice 13 Inégalité de Cauchy-Schwarz (15 min.)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,\, b]$. Montrer que
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$
Discuter le cas d'égalité.

On pourra introduire le trinôme $x \mapsto \displaystyle\int_a^b (f(t)+xg(t))^2\,\mathrm{d}t$ *et étudier son discriminant.*

●●○ **Exercice 14 Intégrale et réciproque** (15 min.)

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et telle que $f(a) = 0$. Montrer que

$$\forall t \in [a, b], \quad \int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = tf(t).$$

●●● **Exercice 15 Un peu de probabilités** (30 min.)

Soit p un entier naturel non nul. On considère $p+1$ urnes notées $U_0, U_1, \dots, U_p$. Dans chaque urne, il y a p boules indiscernables au toucher telles que, pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'urne numéro i contient i boules blanches, les autres étant noires.

On choisit une urne au hasard et dans l'urne choisie, on effectue n tirages avec remise d'une boule ($n \in \mathbb{N}^*$). On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches ainsi obtenues.

1. Déterminer la loi de N_p.
2. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(N_p = k) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x.$$

En déduire la valeur de cette limite.

Exercices bilans

●●○ **Exercice 16 Intégrales de Wallis** (30 min.)

Pour tout entier naturel n, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t.$$

1 - Premières propriétés

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Montrer que la suite (W_n) est décroissante.
3. Justifier que, pour tout entier n, $W_n > 0$.
4. À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, montrer que pour tout entier naturel n,

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t.$$

2 - Valeurs de W_n

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

2. En déduire que, pour tout entier n,

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

On peut le faire par récurrence ou par produit télescopique. Il est conseillé de faire les deux.

3. Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)$ est constante et calculer la valeur de cette constante.
4. En déduire la valeur de W_{2n+1} pour tout entier n.

3 - Équivalent de (W_n)

1. En utilisant les résultats de la deuxième partie, justifier que
$$W_{n+2} \underset{+\infty}{\sim} W_n.$$
2. Montrer que, pour tout n
$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$
En déduire que
$$W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n+1}.$$
3. Montrer alors que $(W_n)^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$ puis que
$$W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$
Quelle est la limite de (W_n) ?

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

• La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et y est continue comme quotient de fonctions continues. Donc f_1 admet des primitives sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$. En constatant que

$$\forall \ x \neq -1, \quad \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Les primitives sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$ s'écrivent

$$x \mapsto x - \ln|x+1| + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

soit $x \mapsto x - \ln(x+1) + k$ sur $]-1;+\infty[$, et $x \mapsto x - \ln(-(x+1)) + k'$ sur $]-\infty;-1[$.

• Remarquons que $x \mapsto 1 - x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$, et est positif sur $[-1;1]$. La fonction f_2 est donc définie et continue sur $[-1;1]$ comme composée de fonctions continues. Elle y admet donc des primitives. En constatant que $f_2(x) = -\frac{1}{2}u'(x)\sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = 1 - x^2$, on en déduit que les primitives de f_2 s'écrivent

$$x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2} + k = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2} + k$$

• La fonction f_3 est continue sur $\mathbb{R}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle admet donc des primitives. En appliquant la même idée que pour f_1 :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi, les primitives sur $\mathbb{R}$ de f_3 sont $x \mapsto x - \arctan(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

• La fonction f_4 est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$. Elle admet donc des primitives sur $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$. En remarquant que

$$\frac{2}{x(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$$

on en déduit que les primitives de f_4 sur chacun des intervalles s'écrivent

$$x \mapsto 2\ln|x| - 2\ln|x+1| + k = \ln\left(\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

• f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, comme composée et quotient de fonctions continues (sin et racine). Elle admet donc des primitives. En notant $u : x \mapsto \sqrt{x}$, on constate que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_5(x) = 2u'(x)\sin(u(x))$$

et les primitives de f_5 sont donc $x \mapsto -2\cos\left(\sqrt{x}\right) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

• f_6 est continue sur $\mathcal{D}_{\tan} = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Elle y admet donc des primitives. On peut écrire

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad f_6(x) = \tan(x)(1 + \tan^2(x)) = \tan(x)\tan'(x).$$

Ainsi, les primitives de f_6 sur chaque intervalle de $\mathcal{D}_{\tan}$ sont les $x \mapsto \frac{1}{2}\tan^2(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

- f_7 est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ (ln et polynôme).

On constate que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_7'(x) = \frac{1}{2}\ln(x)\ln'(x)$$

et les primitives de f_7 sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc $x \mapsto \frac{1}{4}\ln^2(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

- f_8 est continue sur $\mathbb{R}$ donc y admet des primitives. On remarque que cela ressemble à la dérivée d'arctangente. On modifie l'écriture :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_8(x) = \frac{3}{3\left(1+\frac{x^2}{3}\right)} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

Les primitives de f_8 sur $\mathbb{R}$ sont alors $x \mapsto \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

- Après calcul du discriminant, on constate que le dénominateur ne s'annule pas, et f_9 est donc continue sur $\mathbb{R}$, y admettant des prmitives.

On va utiliser la forme canonique :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_9(x) = \frac{1}{(x+1)^2+1}$$

Ainsi, les primitives de f_9 sur $\mathbb{R}$ sont $x \mapsto \arctan(x+1) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

L'idée de cet exercice est de trouver les primitives des fonctions sous le signe intégrale. On se ramènera aux primitives usuelles, ou aux formules de dérivations ($u'\mathrm{e}^u$, $\frac{u'}{u}$, $\cdots$).

Remarquons tout d'abord que chaque intégrale existe car toutes les fonctions considérées sont continues sur les intervalles d'intégration.

$$A = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^2 = \frac{(\ln(2))^2}{2} \text{ en reconnaissant } \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(x) = u'(x)u(x) \text{ avec } u(x) = \ln(x)$$

$$B = \int_0^3 (2u+1)\mathrm{e}^{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u = \left[\mathrm{e}^{u^2+u+1}\right]_0^3 = \mathrm{e}^{13} - \mathrm{e} \text{ en reconnaissant } v'(u)\mathrm{e}^{v(u)} \text{ avec } v(u) = u^2+u+1$$

$$C = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t+t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln|\mathrm{e}^t+t|\right]_0^1 = \ln(1+\mathrm{e}) \text{ en reconnaissant } \frac{u'(t)}{u(t)} \text{ avec } u(x) = \mathrm{e}^t + t$$

$$D = \int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln(t)}} = \left[2\sqrt{\ln(t)}\right]_E^{2\mathrm{e}} = 2\sqrt{\ln(2)+1} - 2 \text{ en reconnaissant } \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} \text{ avec } u(t) = \ln(t)$$

Pour le E, on ne reconnait pas de primitives usuelles. On transforme alors l'écriture de l'intégrale :

$$E = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[x - \ln|x+1|\right]_0^1 = 1 - \ln(2)$$

Méthode

Dans le cas d'une intégrale avec une valeur absolue, il faut utiliser la relation de Chasles pour pouvoir enlever, suivant les intervalles considérés, les valeurs absolues.

Remarquons que $x^2 - x = x(x-1)$ est positif sur $[-1;0]$ et est négatif sur $[0;1]$. Ainsi,

$$F = \int_{-1}^1 |x^2-x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 |x^2-x|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |x^2-x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 x^2 - x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 -(x^2-x)\,\mathrm{d}x$$

en utilisant le fait que $|u|=u$ si $u\geqslant 0$, $|u|=-u$ sinon. Ainsi,

$$F=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right]_{0}^{1}=1$$

Pour la G, on reconnait presque la dérivée d'arctan. On ré-écrit :

$$\begin{aligned}G&=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\frac{1}{3\left(1+\frac{2}{3}t^2\right)}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\frac{1}{3}\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{3}\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\\&=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\arctan(0)-\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6\sqrt{6}}\end{aligned}$$

Concernant la H, on peut constater que l'on a une dérivée simple :

$$x\mapsto \mathrm{e}^u\left(\frac{1}{u}+\ln(u)\right)=\mathrm{e}^u\ln'(u)+\mathrm{e}^u\ln(u)$$

et on reconnait ainsi la dérivée de $u\mapsto \mathrm{e}^u\ln(u)$. Ainsi

$$\begin{aligned}H&=\left[\mathrm{e}^u\ln(u)\right]_1^2\\&=\mathrm{e}^2\ln(2)\end{aligned}$$

Enfin, pour la dernière, on reconnait des termes de la forme $u'u^n$ avec $u=\sin$. On peut calculer directement une primitive :

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^3(x)\cos(x)-3\sin^2(x)\cos(x)+5\cos(x)\,\mathrm{d}x\\&=\left[2\frac{\sin^4(x)}{4}-3\frac{\sin^3(x)}{3}+5\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}-1+5=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

Exercice 3

Les quatre intégrales existent car les fonctions sous le signe intégrale sont bien continues sur l'intervalle considéré.

> ***Méthode***
>
> En règle générale, on essaiera de dériver la fonction ln et assimilée, et de prendre une primitive des fonctions exp et assimilées.

- Posons $u(t)=t$ et $v'(t)=\mathrm{e}^t$ sur $[0;1]$. Ainsi, $u'(t)=1$ et $v(t)=\mathrm{e}^t$ par exemple. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. Par intégration par parties :

$$A=\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

et donc
$$A = \mathrm{e} - [\mathrm{e}^t]_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$$

• Posons $u(v) = \ln(v)$ et $w'(v) = v^2$. Donc $u'(v) = \frac{1}{v}$ et $w(v) = \frac{v^3}{3}$. u et w sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; e]$. Par intégration par parties :
$$B = \int_1^{\mathrm{e}} v^2 \ln(v) dv = \left[\frac{v^3}{3}\ln(v)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{v^3}{3}\frac{1}{v} dv$$
soit
$$B = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{v^2}{3} dv = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left[\frac{v^3}{3\times 3}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left(\frac{\mathrm{e}^3}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2\mathrm{e}^3 - 1}{9}$$

• Posons $u(x) = (\ln(x))^2$ et $v'(x) = x$. Ainsi, $u'(x) = 2\frac{\ln(x)}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; e]$. Par intégration par parties,
$$C = \int_1^{\mathrm{e}} x(\ln(x))^2 \,\mathrm{d}x = \left[(\ln(x))^2\frac{x^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 2\frac{\ln(x)}{x}\frac{x^2}{2} \,\mathrm{d}x$$
soit
$$C = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x) \,\mathrm{d}x$$
Posons alors $a(x) = \ln(x)$ et $b'(x) = x$, soit $a'(x) = \frac{1}{x}$ et $b(x) = \frac{x^2}{2}$. a et b sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; e]$ et par intégration par parties
$$C = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x\right)$$
et donc
$$C = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x\right)$$
Ainsi,
$$C = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}}\right) = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}$$

• Posons $a(u) = u^2$ et $b'(u) = u\mathrm{e}^{u^2}$. Ainsi, $a'(u) = 2u$ et $b(u) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{u^2}$. a et b sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et, par intégration par parties :
$$D = \int_0^1 u^3\mathrm{e}^{u^2} \,\mathrm{d}u = \left[u^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2u\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u^2} \,\mathrm{d}u$$
soit
$$D = \frac{\mathrm{e}}{2} - \int_0^1 u\mathrm{e}^{u^2} \,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}}{2} - \left(\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u^2}\right]_0^1\right) = \frac{1}{2}$$

Exercice 4

Pour la A, on peut appliquer les deux méthodes.

Première méthode : on fait apparaître le dy.

On pose $y(x) = x^2$ sur $[1, 2]$. Ce changement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$ et $\mathrm{d}y = 2x \,\mathrm{d}x$. Quand $x = 1$, $y = 1$ et quand $x = 2$, $y = 4$.

On réécrit puis on effectue le changement de variable :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} x \, \mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} \frac{1}{2} 2x \, \mathrm{d}x \\ &= \int_1^4 \frac{1}{(y+1)(y+2)} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Par décomposition en éléments simples, on obtient que

$$\frac{1}{(y+1)(y+2)} = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln|y+1| - \ln|y+2|\right]_1^4 \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln(5) - \ln(6) - (\ln(2) - \ln(3))\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5 \times 3}{6 \times 2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right) \end{aligned}$$

Deuxième méthode - méthode générale. On inverse le changement de variable :
On pose $y = x^2$, soit $x = \sqrt{y}$. si $x = 1$ alors $y = 1$, et si $x = 2$ alors $y = 4$. La fonction racine est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 4]$. On a alors $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{y}} \, \mathrm{d}y$.
Par changement de variables, on a ainsi

$$A = \int_1^4 \frac{\sqrt{y}}{(y+1)(y+2)} \frac{1}{2\sqrt{y}} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{(y+1)(y+2)} \, \mathrm{d}x$$

On obtient le même résultat et on conclut de la même manière.

Pour B, on pose $y = \frac{x}{x+1}$. Ainsi, pour $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a

$$y = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)y = x \Leftrightarrow x(y-1) = -y \Leftrightarrow x = \frac{-y}{y-1} = \frac{y}{1-y}.$$

Si $x = 1/2$, $y = \frac{1}{3}$ et si $x = 1$ alors $y = \frac{1}{2}$. La fonction $y \mapsto \frac{y}{1-y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ et

$$\mathrm{d}x = \frac{1(1-y) - y(-1)}{(1-y)^2} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{(1-y)^2} \, \mathrm{d}y.$$

Par changement de variable,

$$B = \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{\frac{y}{1-y}\left(\frac{y}{1-y}+1\right)} \ln(y) \frac{1}{(1-y)^2} \, \mathrm{d}y = \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{\frac{y}{(1-y)^2}} \ln(y) \frac{1}{(1-y)^2} \, \mathrm{d}y = \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln(y)}{y} \, \mathrm{d}y$$

Ainsi,

$$B = \left[\frac{(\ln(y))^2}{2}\right]_{1/3}^{1/2} = \frac{\ln(1/2)^2}{2} - \frac{\ln(1/3)^2}{2} = \frac{\ln(2)^2 - \ln(3)^2}{2}$$

Pour la C, on pose $x = \frac{1}{t}$. Quand $t = 2$, $x = \frac{1}{2}$ et quand $t = \frac{1}{2}$, $x = 2$. On constate que $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{1}{2}, 2]$ et

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Par changement de variable :

$$\begin{aligned}
C &= \int_2^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(1+\left(\frac{1}{t}\right)^2\right)^2} \times \left(-\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{-t^4\ln(t)}{(1+t^2)^2}\frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -C
\end{aligned}$$

Ainsi $2C = 0$ puis $C = 0$.
Enfin, pour la D, on pose $u = \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$, c'est-à-dire $t = \ln(u)^2$. Si $u = \mathrm{e}$, $t = 1$ et si $u = \mathrm{e}^2$, $t = 4$. La fonction $u \mapsto \ln^2(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\mathrm{e}, \mathrm{e}^2]$ et

$$\mathrm{d}t = 2\frac{\ln(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Par changement de variables :

$$\begin{aligned}
D &= \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} u2\frac{\ln(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 2\ln(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 2\left[u\ln(u) - u\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \\
&= 2\left(2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2 - (\mathrm{e}-\mathrm{e})\right) = 2\mathrm{e}^2
\end{aligned}$$

Exercice 5

Remarquons déjà que, pour tout entier n, la fonction $x \mapsto \frac{x^n}{1-x^2}$ est définie et continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Toutes les intégrales considérées existent donc bien.

1. En mettant au même dénominateur,

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\},\quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{(a-b)x + (a+b)}{1-x^2}$$

Par identification des coefficients,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b &=& 0 \\ a+b &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout x différent de -1 et 1,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$$

et donc

$$u_0 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|\right]_0^{1/2}$$

soit

$$\boxed{u_0 = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{3}\right)}$$

2.

$$u_1 = \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{-2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\ln(1-x^2)\right]_0^{1/2}$$

et donc

$$\boxed{u_1 = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)}$$

3. Par linéarité de l'intégrale,

$$u_n - u_{n+2} = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} \frac{x^{n+2}}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{x^n - x^{n+2}}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

soit

$$u_n - u_{n+2} = \int_0^{1/2} \frac{x^n(1-x^2)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{1/2}$$

et donc

$$\boxed{u_n - u_{n+2} = \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}}$$

Pour $n=0$, on obtient donc $u_0 - u_2 = \frac{1}{2}$, soit

$$u_2 = u_0 - \frac{1}{2} = \ln\left(\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}$$

et pour $n=1$, il vient $u_1 - u_3 = \frac{1}{2^2 \times 2}$, soit

$$u_3 = u_1 - \frac{1}{8} = \ln\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) - \frac{1}{8}$$

4. Pour déterminer la monotonie de la suite u, déterminons pour tout entier n le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{1-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1} - x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ par linéarité}$$

donc

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n(x-1)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Or, sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $x^n \geqslant 0$, $x - 1 \leqslant 0$ et $1 - x^2 > 0$. Ainsi, sur cet intervalle, $\dfrac{x^n(x-1)}{1-x^2} \leqslant 0$. Puisque $0 < \frac{1}{2}$, par positivité de l'intégrale, on en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^n(x-1)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.
Bilan : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: la suite (u_n) est décroissante.
De plus, toujours sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $x^n \geqslant 0$ et $1 - x^2 \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on a donc $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$: la suite (u_n) est bien positive.
5. Remarquons déjà qu'étant décroissante et minorée, par théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.

Méthode
Pour encadrer une intégrale, on encadre ce qui est dans l'intégrale, et on utilise la croissance de l'intégrale.

Pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$; $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{1}{4}$ par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$. Soit

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x^2 \geqslant \frac{3}{4}$$

Donc sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, on a

$$\frac{1}{1-x^2} \leqslant \frac{4}{3}$$

ainsi

$$\frac{x^n}{1-x^2} \leqslant \frac{4}{3}x^n \text{ car } x^n \geqslant 0$$

Par croissance de l'intégrale ($0 \leqslant \frac{1}{3}$), on a alors

$$\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{1/2} \frac{4}{3}x^n\,\mathrm{d}x$$

et donc

$$u_n \leqslant \left[\frac{4}{3}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{4}{3}\frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} = \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$$

Par produit, et puisque $2 > 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)2^{n+1} = +\infty$$

et par quotient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{3(n+1)2^{n+1}} = 0$$

Or, pour tout entier n, nous avons $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. Ainsi, par le théorème d'encadrement, la limite de (u_n) existe et vaut 0 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Exercice 6

Les fonctions $x \mapsto \frac{t^n}{1+t^2}$ et $x \mapsto t^n\ln(1+t^2)$ sont définies et continues sur $[0;1]$, donc toutes les intégrales considérées existent.

1. Pour tout entier n, et par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}-t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or, sur $[0;1]$, $t^n \geqslant 0$, $t-1 \leqslant 0$ et $1+t^2 > 0$. Par quotient, $\dfrac{t^n(t-1)}{1+t^2} \leqslant 0$ sur $[0;1]$. Par positivité de l'intégrale ($0 < 1$), on a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

$$\boxed{I_{n+1} - I_n \leqslant 0 : \text{ la suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$$

De même,

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 t^n(t-1)\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$$

Puisque, sur $[0;1]$, $t^n \geqslant 0$, $1+t^2 \geqslant 1$ donc $\ln(1+t^2) \geqslant 0$ et $t-1 \leqslant 0$. Par produit, $t^n(t-1)\ln(1+t^2) \leqslant 0$ sur $[0;1]$. Par positivité de l'intégrale, on a donc $\displaystyle\int_0^1 t^n(t-1)\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

$$\boxed{J_{n+1} - J_n \leqslant 0 : \text{ la suite } (J_n) \text{ est décroissante}}$$

2. Pour tout $t \in [0;1]$ $t^n \geqslant 0$ et $1+t^2 \geqslant 0$. Par quotient, $\dfrac{t^n}{1+t^2} \geqslant 0$ sur $[0;1]$. Par positivité de l'intégrale,

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

De plus, pour tout $t \in [0;1]$ on a

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant t^2 \leqslant 1 \text{ par croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+$$

ainsi $1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2$ et donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $1 \geqslant \frac{1}{1+t^2}$ et donc $t^n \geqslant \frac{t^n}{1+t^2}$ sur $[0;1]$ car $t^n \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit donc

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, pour tout entier n,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, par théorème d'encadrement, (I_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

3. Partons de J_n et faisons une intégration par parties. On pose, pour $t \in [0;1]$, $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v'(t) = t^n$, soit $u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et, par intégration par parties,

$$J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

soit

$$J_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \int_0^1 \frac{2}{n+1}\frac{t^{n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_{n+2}$$

On a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{n+2} = 0$ d'après la question précédente. Par somme et produit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$$

De plus,

$$nJ_n = \frac{n\ln(2)}{n+1} - \frac{2n}{n+1}I_{n+2}$$

Puisque, par la règle du terme de plus haut degré,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln(2)}{n+1} = \ln(2) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

par somme et produit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \ln(2)}$$

> **Remarque**
> On peut ainsi conclure que (J_n) est équivalente à $\frac{\ln(2)}{n}$, c'est-à-dire $J_n \sim \frac{\ln(2)}{n}$.

Exercice 7

• a est la primitive de la fonction ln nulle en 1. Ainsi, la fonction ln étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*, \quad a'(x) = \ln(x)$$

Ainsi, puisque $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$a'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$a(x)$	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Remarquons que $a(1) = \displaystyle\int_1^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = 0$. On en déduit ainsi que la fonction a est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Remarquons que $t^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow t^3 > -1 \Leftrightarrow t > -1$ par stricte croissance de la fonction cube. Ainsi, la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}$ est continue sur $]-1; +\infty[$ comme quotient et composée de fonctions continues : elle admet des primitives. Soit F une primitive de f. Alors, pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $\ b(x) = F(1) - F(x)$ et la fonction b est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1; +\infty[$. On a alors

$$\forall\ x \in]-1; +\infty[, \quad b'(x) = 0 - F'(x) = -f(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$$

Puisque pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $\sqrt{x^3+1} > 0$, $b'(x)$ est du signe de $-x$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$b'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$b(x)$	||	$\nearrow$	$b(0)$	$\searrow$	

Concernant le signe de b, nous allons utiliser la positivité de l'intégrale.

– Pour $x \in [1, +\infty[$, la fonction f est positive. Puisque $x \geqslant 1$, les bornes sont dans le mauvais sens et donc

$$\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

– Pour $x \in [0, 1]$, la fonction f est positive. Puisque $x \leqslant 1$, les bornes sont dans le bon sens et

$$\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

– Pour $x \in]-1, 0]$, on ne peut pas conclure car la fonction est négative sur $]-1, 0]$ mais positive sur $[0, 1]$.

• La fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. La fonction c, qui est donc une primitive de h, est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad c'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

c' est strictement positive, donc la fonction c est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$c'(x)$		$+$	
$c(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

en remarquant que $c(0) = \displaystyle\int_0^0 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$. On en déduit que $c(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$, et $c(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$.

Remarque
On peut traiter le signe par la positivité de l'intégrale :
- Si $x \leqslant 0$, $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0$ sur $[x,\,0]$. Les bornes étant dans le mauvais sens, on en déduit que
$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$
- Si $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0$ sur $[0,\,x]$. Les bornes étant dans le bon sens, on en déduit que
$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Exercice 8

1.

Méthode
Pour une fonction définie par une intégrale, la parité se fera (presque) toujours par le changement de variable $x = -t$.

La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc bien définie sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et pour tout réel x, on a
$$g(-x) = \int_{-x}^{-2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
Faisons le changement de variable $u = -t$, soit $t = -u$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, et $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$. Lorsque $t = -x$, $u = x$ et lorsque $t = -2x$, $u = 2x$. Par changement de variable
$$g(-x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-(-u)^2}(-\,\mathrm{d}u) = -\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -g(x)$$
Ainsi, la fonction g est impaire.

2.

Remarque
On fera toujours attention à l'ordre des bornes avant d'utiliser la positivité de l'intégrale.

La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$. Il faut donc s'intéresser aux bornes de l'intégrale :
- Pour $x > 0$, on a $x < 2x$. Par positivité de l'intégrale,
$$g(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$
- Pour $x < 0$, on a par contre $x > 2x$. Par positivité de l'intégrale, on a cette fois-ci
$$g(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

Bilan : g est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$.
3. Soit F une primitive de f (qui existe car f est continue sur $\mathbb{R}$). F est de classe $\mathcal{C}^1$, et on peut alors écrire, pour tout réel x,

$$g(x) = F(2x) - F(x)$$

Par somme et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2\mathrm{e}^{-(2x)^2} - \mathrm{e}^{-x^2} = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}$$

4. On a alors

$$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{-4x^2} \geqslant \mathrm{e}^{-x^2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-3x^2} \geqslant \frac{1}{2}$$

Soit, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$-3x^2 \geqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 \leqslant \frac{\ln(2)}{3}$$

Ainsi, g' est négative sur $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right]$ et sur $\left[\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}; +\infty\right[$, positive sinon. On obtient le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$		$\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

5. Soit $x > 0$. Sur $[x, 2x]$, la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est décroissante. Ainsi

$$\forall t \in [x, 2x], \quad f(2x) \leqslant f(t) \leqslant f(x) \iff \mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$$

Par positivité de l'intégrale (car pour $x > 0$, $x < 2x$), on a alors

$$\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-4x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\mathrm{e}^{-4x^2}\,[t]_x^{2x} \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}\,[t]_x^{2x}$$

et donc

$$x\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant g(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$$

Or, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \underbrace{x^2\mathrm{e}^{-x^2}}_{\xrightarrow[+\infty]{} 0 \text{ (CC)}} = 0 \text{ par produit}$$

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-4x^2} = 0$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ existe et

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$$

Exercice 9

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^2e^t$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. On note alors F une primitive de f. On a donc

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x te^t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(F(x) - F(0)\right) = \frac{F(x) - F(0)}{x}$$

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car f est continue sur $\mathbb{R}$) donc g est continue sur $\mathbb{R}^*$. Enfin, par définition du nombre dérivé

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0)$$

or $F'(0) = f(0) = 0$.
Bilan : g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

Exercice 10

On essaie de faire apparaitre systématiquement une série de Riemann sur $[0;1]$*, en introduisant "de force" le terme en* $\frac{1}{n}$.

- On constate que

$$u_n = \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k} = \frac{1}{n\times n^{1/2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k} = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

Introduisons alors la fonction f, définie sur $[0,\,1]$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Cette fonction est continue sur $[0,\,1]$ et

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ainsi, (u_n) représente une somme de Riemann de la fonction f sur le segment $[0;1]$. f étant continue, cette somme converge vers $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}}$$

- On remarque que

$$v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}n\frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

On introduit alors la fonction g, définie sur $[0,\,1]$ par $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Cette fonction est continue sur $[0,\,1]$ et on a

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

On reconnait ainsi une somme de Riemann de la fonction g sur le segment $[0;1]$. g étant continue, cette somme converge vers $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln(2)}$$

- *Ici, on ne dispose pas d'une somme, mais d'un produit. On va alors utiliser la fonction logarithme népérien.*

Pour tout entier $n \geqslant 1$, $w_n > 0$ comme produit de termes positifs. Introduisons alors la suite (x_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $x_n = \ln(w_n)$. On a alors

$$\forall\ n \geqslant 1,\quad x_n = \ln(w_n) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

On définit alors la fonction h, définie sur $[0,\ 1]$ par $h(x) = \ln(1+x)$. h est continue sur $[0,\ 1]$ et

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)$$

(x_n) représente une somme de Riemann de la fonction h sur le segment $[0,\ 1]$. h étant continue, cette somme converge vers $\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$. Calculons cette intégrale par intégration par partie.

On pose, pour tout $t \in [0,\ 1]$, $u(t) = \ln(1+t)$ et $v'(t) = 1$, soit $u'(t) = \frac{1}{1+t}$ et $v(t) = t+1$ (en effet, $t \mapsto t+1$ est une primitive de v'). Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\ 1]$. Par intégration par parties,

$$\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = [(1+t)\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+t}(1+t)\,\mathrm{d}t = 2\ln(2) - \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 2\ln(2) - [t]_0^1 = 2\ln(2) - 1$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 2\ln(2) - 1$$

Or, pour tout entier $n \geqslant 1$, $x_n = \ln(w_n) \Leftrightarrow w_n = \mathrm{e}^{x_n}$. La fonction exp étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \mathrm{e}^{2\ln(2)-1} = \mathrm{e}^{\ln(4)}\mathrm{e}^{-1} = \frac{4}{\mathrm{e}}}$$

Exercice 11

La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $[2; +\infty[$. Ainsi, pour $k \geqslant 2$, on a

$$\forall\ x \in [k; k+1],\quad g(x) \leqslant g(k) = \frac{1}{k\ln(k)}$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a ainsi

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)} \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}(k+1-k) = \frac{1}{k\ln(k)}$$

En sommant ces inégalités pour $n \geqslant 2$, on a alors

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

soit, d'après la relation de Chasles,

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

Or,

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)} = \int_2^{n+1} \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int_2^{n+1} \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x$$

en posant $u(x) = \ln(x)$ sur $[2; n+1]$. Ainsi,

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)} = [\ln(\ln(x))]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$$

Bilan : on a donc, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) = +\infty \text{ par composée}$$

Par comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}=+\infty$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k\ln(k)}$ tend vers $+\infty$: la série $\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k\ln(k)}$ diverge.

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 12

Cet exercice est classique et est une version édulcorée du lemme général de Riemann-Lebesgue.
On se fixe $n\in\mathbb{N}$.
La fonction $t\mapsto f(t)\cos(nt)$ est continue donc l'intégrale à un sens. Nous allons faire une intégration par parties.
On pose $u:t\mapsto f(t)$ et $v:t\mapsto\frac{\sin(nt)}{n}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\,b]$ et on a

$$u':t\mapsto f'(t)\quad\text{et}\quad v':t\mapsto\cos(nt).$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t&=\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t\\&=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{f(t)\sin(nt)}{n}\right]_a^b-\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{f(b)\sin(nb)-f(a)\sin(na)}{n}-\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Constatons que, par inégalité triangulaire :

$$\left|\frac{f(b)\sin(nb)-f(a)\sin(na)}{n}\right|\leqslant\frac{|f(b)|+|f(a)|}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Par ailleurs, on constate que pour tout $t\in[a,\,b]$, puisque $|\sin(nt)|\leqslant 1$:

$$|f'(t)\sin(nt)|\leqslant|f'(t)|\,.$$

Par croissance de l'intégrale (car $a\leqslant b$) :

$$\int_a^b|f'(t)\sin(nt)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Appliquons alors l'inégalité triangulaire dans une intégrale :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right|&\leqslant\frac{1}{n}\int_a^b|f'(t)\sin(nt)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{1}{n}\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\end{aligned}$$

puisque l'intégrale $\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t$ est une constante indépendante de n.
Par somme, on en déduit finalement que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t=0.}$$

Exercice 13

On suit l'indication et on introduit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u : x \mapsto \int_a^b (f(t) + xg(t))^2 \,\mathrm{d}t$$

En développant :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u(x) &= \int_a^b \left(f^2(t) + 2xf(t)g(t) + x^2g^2(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t + 2x\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + x^2\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ainsi, u est un trinôme du second degré. Son discriminant vaut :

$$\Delta = \left(\int_a^b 2f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - 4\times\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = 4\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - 4\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [a,\, b]$, $(f(t) + xg(t))^2 \geqslant 0$, donc par positivité de l'intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \geqslant 0$.
Un trinôme est de signe constant si et seulement si $\Delta \leqslant 0$, c'est-à-dire

$$4\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - 4\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

ou encore

$$\boxed{\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

ce qui donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz en appliquant la fonction racine, croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Il y a égalité si et seulement si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = 0$. Cela donne donc

$$\int_a^b (f(t) + x_0g(t))^2\,\mathrm{d}t = 0$$

Soit, puisque la fonction $t \mapsto (f(t) + x_0g(t))^2$ est continue et positive sur $[a,\, b]$,

$$\forall\, t \in [a,\, b], \quad f(t) + x_0g(t) = 0 \Longleftrightarrow \forall\, t \in [a,\, b], \quad f(t) = -x_0g(t)$$

On dit que f et g sont **colinéaires**.

Exercice 14

Tout d'abord, le théorème de la bijection nous garantit que la fonction f est bijective sur $[a,\, b]$, et que sa bijection réciproque f^{-1} est continue. Ainsi, les deux intégrales ont un sens.
On se fixe $t \in [a,\, b]$. Dans la deuxième intégrale, nous allons effectuer le changement de variable $x = f^{-1}(u)$, c'est-à-dire $u = f(x)$. f étant $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\, b]$, ce changement de variable a un sens.
Si $x = a$, $f(x) = f(a) = 0$ et si $x = t$, $f(x) = f(t)$. Par changement de variable :

$$\int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^t f^{-1}(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x$$

et finalement

$$\begin{aligned}\int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,\mathrm{d}u &= \int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u + \int_a^t xf'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^t (f(x) + xf'(x))\,\mathrm{d}x \\ &= [xf(x)]_a^t \text{ en reconnaissant la dérivée d'un produit} \\ &= tf(t) - af(a) = tf(t)\end{aligned}$$

> **Remarque**
> Ce résultat est vrai simplement si f est continue et strictement croissante sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$.

Exercice 15

On introduit des événements :

- Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, on note Ur_i l'événement : « on choisit l'urne i pour le tirage ».

1. Par définition, si on choisit l'urne i, il y a i boules blanches et puisqu'on effectue un tirage avec remise, N_p comptera le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli de succès « tirer une boule blanche » de probabilité $\frac{i}{p}$. On peut en déduire que, si on choisit l'urne i,

$$N_p \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{i}{p}\right).$$

De plus, puisque le choix de l'urne est équiprobable,

$$\forall\ i \in [\![0, p]\!], \quad \mathbb{P}(Ur_i) = \frac{1}{p+1}.$$

On souhaite déterminer la loi de N_p. Par définition, $N_p(\Omega) = [\![0, n]\!]$ (car n tirages). Soit $i \in [\![0, n]\!]$.
Remarquons, enfin, que $(Ur_i)_{i\in[\![0, p]\!]}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_p = i) &= \sum_{j=0}^{p} \mathbb{P}(Ur_j \cap (N_p = i)) \\ &= \sum_{j=0}^{p} \mathbb{P}(Ur_j)\mathbb{P}_{Ur_j}(N_p = i) \\ &= \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{p+1}\binom{n}{i}\left(\frac{j}{n}\right)^i\left(1 - \frac{j}{n}\right)^{n-i}\end{aligned}$$

2. Remarquons qu'on peut également écrire :

$$\mathbb{P}(N_p = i) = \binom{n}{i}\frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

en introduisant la fonction f, définie sur $[0, 1]$, par $f : x \mapsto x^i(1-x)^{n-i}$.
f étant continue sur $[0, 1]$, on reconnait une somme de Riemann de f sur $[0, 1]$. Par théorème

$$\boxed{\forall\, i \in [\![0, n]\!], \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(N_p = i) = \binom{n}{i}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \binom{n}{i}\int_0^1 x^i(1-x)^{n-i}\,\mathrm{d}x}$$

Il reste à calculer cette intégrale. On va introduire, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$I_k = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$$

On remarque tout d'abord que

$$I_0 = \int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

puis, par intégration par partie, en posant $u : x \mapsto x^k$ et $v : x \mapsto -\frac{(1-x)^{n-k+1}}{n-k+1}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned} I_k &= \left[x^k\frac{-(1-x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right]_0^1 - \int_0^1 kx^{k-1}\frac{-(1-x)^{n-k+1}}{n-k+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{k}{n-k+1}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-(k-1)} = \frac{k}{n-k+1}I_{k-1} \end{aligned}$$

On réitérant ce procédé, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad I_k &= \frac{k}{n-k+1}\frac{k-1}{n-k+2}\dots\frac{1}{n}I_0 \\ &= \frac{k!}{(n-k+1)(n-k+2)\dots n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{1}{\frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{k!}} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{1}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall\, i \in [\![0, n]\!], \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(N_p = i) = \binom{n}{i}\frac{1}{n+1}\frac{1}{\binom{n}{i}} = \frac{1}{n+1}}$$

Ainsi, N_p suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Corrigés des exercices bilans

Exercice 16

1 - Premières propriétés

1. Rapidement

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos t)^{n+1} - (\cos t)^n\right) \mathrm{d}t && \text{par linéarité} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \left(\cos t - 1\right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos t \geqslant 0$ et $\cos t - 1 \leqslant 0$. Ainsi, $t \longmapsto (\cos t)^{n+1}(\cos t - 1) \leqslant 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Puisque $0 < \frac{\pi}{2}$, par positivité de l'intégrale

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \left(\cos t - 1\right) \mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Ainsi, la suite (W_n) est décroissante.

3. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $t \longmapsto (\cos t))^n$ est continue, positive et non identiquement nulle. Par positivité de l'intégrale et continuité

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad W_n > 0.$$

4. Posons $u = \frac{\pi}{2} - t$, c'est-à-dire $t = \frac{\pi}{2} - u$. Si $t = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$ et si $t = \frac{\pi}{2}$, $u = 0$.
La fonction $u \longmapsto \frac{\pi}{2} - u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$. Par changement de variable :

$$\begin{aligned} \boxed{W_n} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)^n (-\,\mathrm{d}u) \\ &= \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n \,\mathrm{d}u.} \end{aligned}$$

2 - Valeurs de W_n

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} \,\mathrm{d}t$.

Posons $u : t \longmapsto (\cos t)^{n+1}$ et $v : t \longmapsto \sin t$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Remarquons que $(\cos t)^{n+2} = u(t)v'(t)$, et $u' : t \longmapsto -(n+1)\sin t(\cos t)^n$. Par intégration par parties

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \left[(\cos t)^{n+1} \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)\sin t(\cos t)^n \sin t \,\mathrm{d}t \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (\sin t)^2 \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \left(1 - (\cos t)^2\right) \mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} \,\mathrm{d}t = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.}$$

2. *Première méthode : produit télescopique.* On remarque que, par télescopage :

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{W_{2n}}{W_{2(n-1)}} \times \frac{W_{2(n-1)}}{W_{2(n-2)}} \times \ldots \times \frac{W_2}{W_0} \times W_0 \\ &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 1}{2^n n!}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode : récurrence.

Soit P la proposition définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par P_n : « $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ ».

- Pour $n = 0$, $\frac{(2\times 0)!}{(2^0 0!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0$. Ainsi, P_0 est vérifiée.
- Supposons la proposition P_n vérifiée pour un certain entier n fixé. En utilisant la relation de la première question :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)} = W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} \\ &= \frac{2n+1}{2(n+1)}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^2(n+1)^2(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et P_n est donc vérifiée.

D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout n, et finalement

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}.}$$

3. Notons, pour tout entier n, $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. On remarque, en utilisant la relation de la question 1 :

$$u_{n+1} = \underbrace{(n+2)W_{n+2}}_{=(n+1)W_n} W_{n+1} = (n+1)W_n W_{n+1} = u_n.$$

La suite (u_n) est donc constante, égale à $u_0 = W_0 W_1 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la relation précédente, $(2n+1)W_{2n+1}W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}$ et donc

$$\boxed{W_{2n+1}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n+1)W_{2n}} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)(2n)!} = \boxed{\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}.$$

Équivalent de (W_n)

1. En utilisant la relation de la question 1 de la partie précédente,

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi, $W_{n+2} \underset{+\infty}{\sim} W_n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite (W_n) est décroissante. Ainsi

$$W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$$

soit, en divisant par $W_n > 0$:

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$$

puis, en utilisant toujours la même relation

$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$

Puisque $\frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, par encadrement, on en déduit que $\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et finalement

$$\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n+1}.}$$

3. Rappelons que, pour tout n, $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$. Puisque

$$n+1 \underset{+\infty}{\sim} n \quad \text{et} \quad W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} W_n$$

par produit des équivalents

$$(n+1)W_{n+1}W_n \underset{+\infty}{\sim} n\,(W_n)^2$$

et puisque $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$, on obtient finalement

$$n\,(W_n)^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \text{ soit } (W_n)^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$

Par exponentiation :

$$\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

Ainsi, puisque $\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit que

$$\boxed{W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$