14

Chapitre

Calcul différentiel

Résumé

Dans ce chapitre, on (re)définit rigoureusement la notion de nombre dérivé et de fonction dérivée. On utilise ensuite celle-ci pour l'étude de fonctions (variation, inégalités), et pour obtenir de jolis résultats (inégalité des accroissements finis, théorème de Rolle).

Plan du cours

> *« Sans doute les infinis et les infiniment petits que nous concevons sont-ils imaginaires, mais aptes à déterminer des choses réelles, comme le font généralement du reste les racines imaginaires. Ils se trouvent dans les régions idéales, dont les choses sont régies comme par des lois, même si elles ne se trouvent pas dans les parties de la matière. »*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) – *Lettre à Jean Bernoulli (1698)*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de dérivabilité :

- Savoir montrer qu'une fonction est dérivable en un point en utilisant le taux d'accroissement . . . . ☐
- Savoir utiliser la dérivabilité à droite et à gauche pour démontrer une dérivabilité . ☐
- Savoir déterminer l'équation d'une tangente à une courbe en un point . . . . ☐

② Savoir utiliser les formules de dérivation :

- connaître les dérivées des fonctions usuelles . . . . ☐
- savoir déterminer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, ou d'une composée . . . . ☐
- savoir déterminer la dérivée en un point d'une fonction réciproque . . . . ☐

③ Savoir utiliser le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ pour montrer qu'une fonction est dérivable en un point . . . . ☐

④ Concernant les applications :

- savoir utiliser le théorème de Rolle pour démontrer que la dérivée d'une fonction s'annule . . . . ☐
- savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis . . . . ☐
- connaître le lien entre signe de la dérivée et monotonie d'une fonction . . . . ☐

⑤ Savoir étudier complètement une fonction (tableau de variations, comportement asymptotique) . . . . ☐

I. Dérivabilité en un point

1. Définition

Définition 14.1.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est **dérivable** en x_0 si la fonction

$$\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

appelée **taux d'accroissement** de f en x_0, admet une limite finie quand x tend vers x_0.
Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en x_0, et est notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Remarque

En posant $h = x - x_0$, et sous réserve d'existence, on a également

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Méthode

Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en x_0, on détermine le taux d'accroissement

$$\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et on cherche sa limite en x_0. Si la limite est finie et vaut a, la fonction f est dérivable en x_0, et $f'(x_0) = a$.

Exemple 14.1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrer que f est dérivable en 1.

Solution

Déterminer le taux d'accroissement :

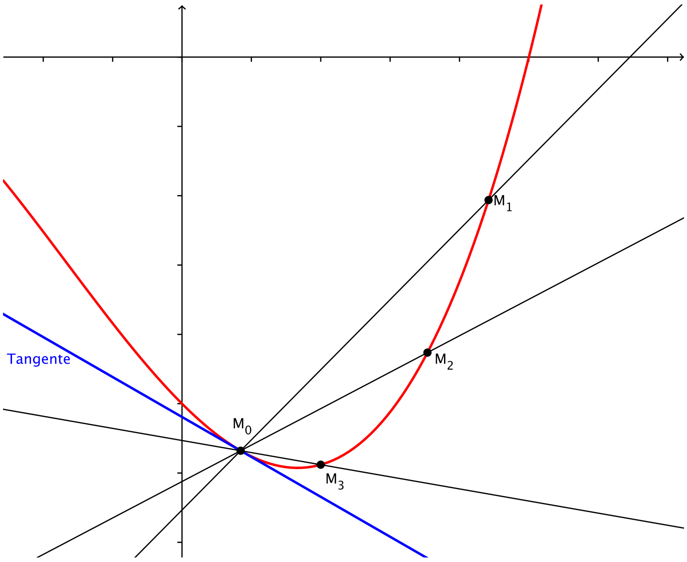
$$\tau_1(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \xrightarrow[x \to 1]{} 2$$

Donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = 2$.

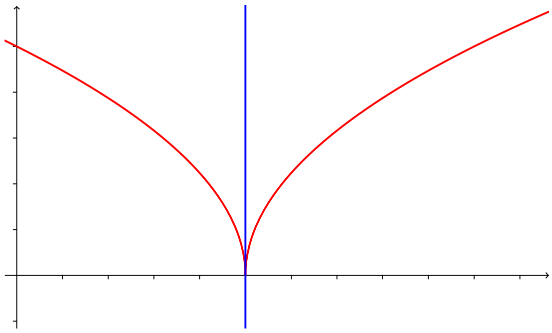
2. Interprétation géométrique

Si on note M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et M le point de coordonnées $(x, f(x))$, alors le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ représente le coefficient directeur de la droite (M_0M). Ainsi :

- Si f est dérivable en x_0, la famille de droites (M_0M) admet une position limite lorsque x tend vers x_0 : la droite passant par M_0 et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Cette droite est appelée **tangente** en M_0 à la courbe de f.



- Si la limite du taux d'accroissement est infinie, la courbe de f possède en x_0 une **tangente verticale** au point M_0, d'équation $x = x_0$.



Remarque

Si f est dérivable en x_0, la courbe de f admet donc une tangente en $M_0(x_0, f(x_0))$ d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exemple 14.2

Puisque la fonction carrée est dérivable en $x_0 = 1$, alors sa courbe représentative admet au point $M_0(1, 1)$ une tangente, d'équation $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

☞ *Exercices 1 et 2*

3. Dérivabilité et continuité

La notion de dérivabilité en un point est plus forte que la continuité. En effet :

Théorème 14.1.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Démonstration

Supposons que f est dérivable en x_0. On introduit la fonction g sur I par

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{sinon} \end{cases}.$$

f étant dérivable en x_0, g est continue en x_0. Mais alors, pour tout $x \neq x_0$:

$$f(x) = (x - x_0)g(x) + f(x_0)$$

g étant continue en x_0, $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} g(x_0)$ et par produit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ainsi, f est continue en x_0.

Attention

Une fonction peut être continue en un point, sans être dérivable. Par exemple, la fonction racine est continue en 0. Pourtant, elle n'est pas dérivable en 0. En effet

$$\tau_0(x) = \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

4. Dérivabilité à droite et à gauche

Puisqu'on dispose de limites à droite et à gauche, on peut également s'intéresser à la dérivabilité à droite et à gauche en un point.

Définition 14.2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in I$ qui n'est pas à la frontière (*pour pouvoir parler de limite à droite et à gauche*).

- On dit que f est **dérivable à droite** en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite *à droite* en x_0. Dans ce cas, on note
$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite *à gauche* en x_0. Dans ce cas, on note
$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On dispose du même théorème que pour les limites :

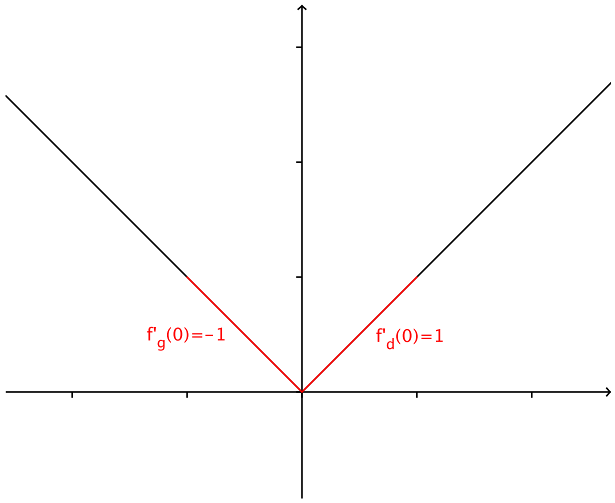
Théorème 14.2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in I$ qui n'est pas à la frontière de I. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 **et** $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$. Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Remarque

Une fonction peut être dérivable à droite et à gauche en un point, sans que $f'_d(x_0)$ soit égal à $f'_g(x_0)$. Dans ce cas, la courbe admet des **demi-tangentes**. Par exemple, si $f : x \mapsto |x|$,

f admet une dérivée à droite en 0 (qui vaut $f'_d(0) = 1$) et une dérivée à gauche en 0 (qui vaut $f'_g(0) = -1$)).



Les nombres dérivés à droite et à gauche étant distincts, la fonction n'est pas dérivable en 0.

Remarque

Si la fonction f n'admet ni dérivée à droite ni à gauche en x_0, mais que

$$\lim_{x \to (x_0)^{-/+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

alors la courbe de f admet une **demi-tangente verticale** au point d'abscisse x_0.

Exemple 14.3

La fonction racine admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

5. Nombre dérivé et extremum

Définition 14.3. Extremum local

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f admet un **maximum local** (respectivement un **minimum local**) en x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, x \in I \cap [x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha], \quad f(x) \leqslant f(x_0) \text{ (respectivement } f(x) \geqslant f(x_0) \text{).}$$

On dit que f admet un **extremum local** en x_0 si f admet un maximum ou un minimum local.

Dit autrement, un maximum local en x_0 est un maximum sur un intervalle autour de x_0, qui n'est pas nécessaire un maximum sur I, qu'on appelle alors maximum global.

Théorème 14.3.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$ qui n'est pas à la frontière de I (c'est-à-dire aux extrémités de I). On suppose que f est dérivable en x_0. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration

Supposons que f admette un maximum en x_0. Alors, sur un intervalle J autour de x_0, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$. Mais alors :

- Pour $x < x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$. Par passage à la limite, puisque f est dérivable en x_0, on a $f'(x_0) = f'_g(x_0) \geqslant 0$.
- Pour $x > x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$. Par passage à la limite, puisque f est dérivable en x_0, on a $f'(x_0) = f'_d(x_0) \leqslant 0$.

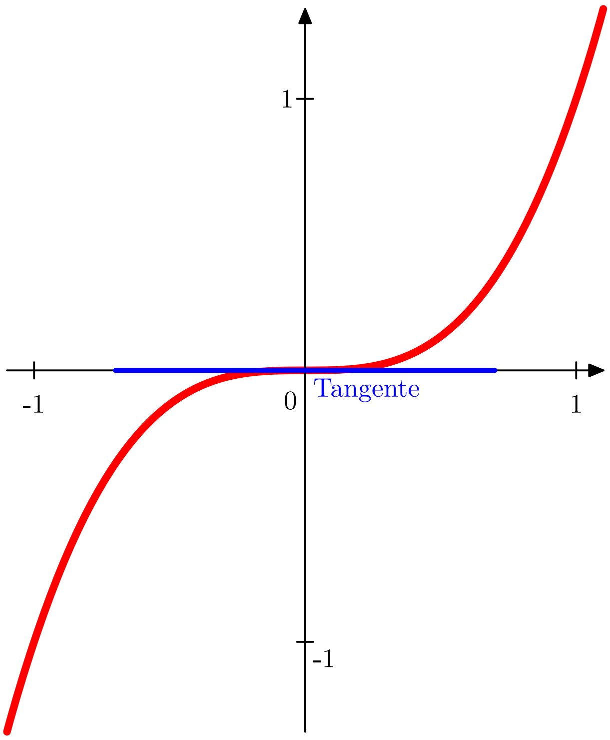
Et donc $f'(x_0) = 0$.

Remarque

Ainsi, si f est dérivable en x_0 et admet un extremum local, alors la tangente y est **horizontale**.

Attention

- La réciproque n'est pas vraie : si $f'(x_0) = 0$, cela n'implique pas nécessairement que f admet un extremum local en x_0. Par exemple, si $f : x \mapsto x^3$, alors $f'(0) = 0$, et pourtant 0 n'est pas un extremum local de f.



- Le théorème précédent n'est valable que pour tout point en dehors de la frontière de I. Ainsi, une fonction peut admettre un extremum local sans pour autant que la dérivée en ce point soit nulle : dans ce cas, elle admet son extremum local en une borne de l'intervalle.

6. Opérations sur les dérivées

a. Somme, produit, quotient

Théorème 14.4.

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $f+g$ et λf sont dérivables en x_0, et on a $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$ et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ (*linéarité de la dérivation*)
2. $f \times g$ est dérivable en x_0, et on a
$$(f \times g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$
3. Si g ne s'annule pas en x_0, $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et on a
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$
4. Si g ne s'annule pas en x_0, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0, et on a
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Démonstration

Toutes ces preuves reposent sur la définition de la dérivée, en utilisant la dérivabilité de f et g en x_0.

1. Pour tout $x \neq x_0$:
$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)+f'(x_0)$$
$$\frac{\lambda f(x)-\lambda f(x_0)}{x-x_0} = \lambda\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda f'(x_0)$$
2. De même :
$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{(f(x)-f(x_0))g(x)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &\xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$
en utilisant la continuité de g en x_0 (puisqu'elle y est dérivable).
3. À nouveau :
$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}\\ &= -\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} -\frac{1}{(g(x_0))^2}g'(x_0)\end{aligned}$$
en utilsant toujours la continuité de g en x_0.

4. Enfin, on peut écrire $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et appliquer les deux résultats qui précèdent :

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)\\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + \frac{-g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\end{aligned}$$

Dans le cas d'un produit de plus de deux fonctions, le même raisonnement donne :

Proposition 14.5.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in I$. Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions à valeurs réelles définies sur I et dérivables en x_0. Alors $f_1 \cdot f_2 \dots f_n$ est dérivable en x_0 et

$$(f_1 f_2 \dots f_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_1(x_0) \dots f_{k-1}(x_0) f_k'(x_0) f_{k+1}(x_0) \dots f_n(x_0).$$

En particulier, si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, alors la fonction f^n est dérivable en x_0 et $(f^n)'(x_0) = n f'(x_0) f^{n-1}(x_0)$.

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence sur n, en utilisant la propriété $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

b. Composée

Théorème 14.6.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$ (pour pouvoir composer les fonctions). Si f est dérivable en x_0, et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Démonstration

Pour tout $x \neq x_0$, notons $y_0 = f(x_0)$. On introduit $\tau_g : y \in J \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tau_g : y \mapsto \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{si} \quad y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{sinon} \end{cases}.$$

g étant dérivable en y_0, τ_x a un sens et est continue en y_0.
On peut alors écrire

$$\forall\, y \in J, \quad g(y) - g(y_0) = \tau_g(y)(y - y_0)$$

soit, en particulier

$$\forall\, x \in I, \quad g(f(x)) - g(y_0) = \tau_g(f(x))(f(x) - y_0).$$

Mais alors

$$\begin{aligned}\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(y_0)}{x - x_0}\\ &= \tau_g(f(x))\frac{f(x) - y_0}{x - x_0} = \tau_g(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\end{aligned}$$

Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$ car f est continue en x_0, on en déduit que $\tau_g(f(x)) \xrightarrow[x\to x_0]{} \tau_g(f(x_0))$, par continuité de τ_g en $y_0 = f(x_0)$.
De plus, f est dérivable en x_0 donc $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)$. Par produit

$$\frac{g\circ f(x) - g\circ f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} \tau_g(f(x_0)) \times f'(x_0) = g'(y_0)\times f'(x_0) = g'(f(x_0))\times f'(x_0).$$

⚠ Attention

On fera attention à bien justifier la dérivabilité d'une fonction composée

Exemple 14.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x par $f(x) = \ln(x^2+1)$. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Solution

La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1;+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Proposition 14.7. Composées particulières

Soit u une fonction dérivable en $x_0 \in I$.

- Pour tout entier $n>0$, la fonction u^n est dérivable en x_0, et sa dérivée est $(u^n)'(x_0) = nu'(x_0)u^{n-1}(x_0)$.
- e^u est dérivable en x_0, et sa dérivée est $(\mathrm{e}^u)'(x_0) = u'(x_0)\mathrm{e}^{u(x_0)}$.
- Si u est strictement positive en x_0, $\sqrt{u}$ est dérivable en x_0, et sa dérivée est $(\sqrt{u})'(x_0) = \frac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}$.
- Si u est strictement positive en x_0, u^α est dérivable en x_0, et sa dérivée est $(u^\alpha)'(x_0) = \alpha u'(x_0)u^{\alpha-1}(x_0)$.
- Si u est strictement positive en x_0, $\ln u$ est dérivable en x_0, et sa dérivée est $(\ln u)'(x_0) = \frac{u'(x_0)}{u(x_0)}$.

Exemple 14.5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

Solution

Puisque $x\mapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

☞ *Exercices 3 et 4.*

c. Fonction réciproque

Théorème 14.8.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone sur I. Alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.
Si $y_0 \in J$ et si f est dérivable en $x_0 = f^{-1}(y_0)$, alors :

- Si $f'(x_0) \neq 0$, f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et on a
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$
- Si $f'(x_0) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et sa courbe représentative possède une tangente verticale en y_0.

Démonstration

Le fait que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ découle du théorème de la bijection.
Soit $y \in J \setminus \{y_0\}$. Puisque f est bijective, $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$. On peut alors écrire :
$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \left(\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}\right)^{-1}\\ &= \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}\right)^{-1}\end{aligned}$$
f^{-1} est continue en y_0 (le théorème de la bijection l'affirme) donc $f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} f^{-1}(y_0) = x_0$.
De plus, f est dérivable en x_0 donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)$. Par composition des limites :
$$\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} \xrightarrow[y \to y_0]{} f'(x_0).$$

- Si $f'(x_0) \neq 0$, par quotient
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$
- Si $f'(x_0) = 0$, alors par quotient (et selon la monotonie de f)
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \pm\infty.$$
Il y a ainsi une demi-tangente verticale.

Méthode

Pour montrer que f^{-1} est dérivable en réel y_0 :

- On écrit $y_0 = f(x_0)$ (soit $x_0 = f^{-1}(y_0)$) et on montre que f est dérivable en x_0.
- On s'assure que $f'(x_0) \neq 0$.

On peut alors conclure que f^{-1} est dérivable en y_0, et que
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Exercice 14.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0;1[$.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$.

Solution

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout réel x,
$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$$
Pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par composée,
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est a fortiori continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de la bijection, f est bijective de $]0;+\infty[$ sur $f(]0;+\infty[) =]0;1[$.
2. Remarquons que
$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \ln(2) \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln(2)} \text{ car x>0}$$
Or f est dérivable en $\sqrt{\ln(2)}$ et
$$f'\left(\sqrt{\ln(2)}\right) = -2\sqrt{\ln(2)}\mathrm{e}^{-(\sqrt{\ln(2)})^2} = -2\sqrt{\ln(2)}\mathrm{e}^{-\ln(2)} = -\sqrt{\ln(2)} \neq 0$$
Ainsi, f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et
$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\ln(2)}}$$
3. Soit $y \in]0;1[$. De la même manière,

Remarque

- Dans l'exercice précédent, on a en réalité montré que
$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \sqrt{-\ln(y)}$$
Ainsi $f^{-1} :]0,\, 1[\to \mathbb{R}$ est définie par,
$$\forall\, y \in]0,\, 1[, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{-\ln(y)}$$
On peut donc remarquer que f^{-1} est bien dérivable en $\frac{1}{2}$ par composée.

II. Dérivabilité sur un intervalle

1. Fonction dérivée

Définition 14.4.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point de I. Sa fonction dérivée est alors notée $f' : x \mapsto f'(x)$ ou $\frac{df}{dx} : x \mapsto \frac{df}{dx}(x)$.

Notation
On dit que f est de classe $\mathcal{D}^1$ sur I (et on note $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$) si f est **dérivable** sur I.

2. Opérations sur les dérivées

Les opérations sur les nombres dérivées vues précédemment se ré-écrivent dans le cadre de la fonction dérivée :

Théorème 14.9.

Soient I un intervalle, f, g deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
- λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- $f \cdot g$ est dérivable sur I et $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
- si g ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.
- si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.
- si $u : J \to R$ est dérivable sur J et $f(I) \subset J$, alors $u \circ f$ est dérivable sur I et $(u \circ f)' = f' \cdot u' \circ f$.
- si f est bijective et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

3. Dérivées usuelles

a. Dérivabilité des fonctions $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 14.10.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto 0$ si $n = 0$, $x \mapsto nx^{n-1}$ sinon.
Pour tout entier $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est $x \mapsto nx^{n-1}$.

Démonstration
Si $n = 0$, le taux d'accroissement est nul donc tend vers 0.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} &= \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k - x_0^n}{h} \\
&= \frac{x_0^n + n x_0^{n-1} h + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k - x_0^n}{h} \\
&= n x_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} \xrightarrow[h \to 0]{} n x_0^{n-1}
\end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, notons $n = -p$. Alors, pour tout $x \neq x_0$:

$$\begin{aligned}\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= \frac{\frac{1}{x^p} - \frac{1}{x_0^p}}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{x_0^p x^p} \frac{x_0^p - x^p}{x - x_0} \\ &= \frac{-1}{x_0^p x^p} \frac{x^p - x_0^p}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{-1}{x_0^p x_0^p} p x_0^{p-1} = \frac{-p}{x_0^{p+1}} = n x_0^{n-1}\end{aligned}$$

en utilisant le résultat précédent.

b. Fonctions exponentielle, logarithme et puissances

Théorème 14.11.

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.
2. La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est
$$f'_\alpha : x \mapsto \alpha x^{\alpha - 1}.$$
Si $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha(0) = 0$. Ainsi prolongée, la fonction f_α est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha \geqslant 1$.

Démonstration

Nous démontrerons les deux premiers points à la fin de ce chapitre. Concernant le dernier point, il est vrai par composée de $\alpha \ln$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par exp, dérivable sur $\mathbb{R}$. Remarquons que si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \alpha \ln(x) = -\infty$ et donc, par composée, $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\alpha(x) = 0$. On peut donc prolonger f_α en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$. Mais alors :

$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x - 0} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha - 1}$$

qui possède une limite finie si et seulement si $\alpha - 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $\alpha \geqslant 1$.

Conséquence 14.12.

ln et exp étant dérivables en 0, alors

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \ln'(1) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1.$$

c. Fonctions trigonométriques

On rappelle tout d'abord un résultat vu dans le chapitre 11 :

Lemme 14.13.

On a

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

On peut donc conclure que sin est dérivable en 0, et $\sin'(0) = 1$.

Théorème 14.14.

1. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.
2. La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.
3. La fonction tangente est dérivable sur chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$, et

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Démonstration

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules de trigonométrie, pour tout $h \neq 0$:
$$\begin{aligned}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\sin(x_0+h)-\sin(x_0)\right)\\ &= \frac{1}{h} 2\cos\left(\frac{x_0+h+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x_0+h-x_0}{2}\right)\\ &= \frac{2}{h}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)\\ &= \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(x_0)\times 1\end{aligned}$$
car cos est continue en x_0 et en utiliant le lemme.
2. Par le même principe :
$$\begin{aligned}\frac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h} &= \frac{-2}{h}\sin\left(\frac{x_0+h+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x_0+h-x_0}{2}\right)\\ &= \frac{-2}{h}\sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)\\ &= -\sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \xrightarrow[h\to 0]{} -\sin(x_0)\times 1\end{aligned}$$
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. tan est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Par quotient : $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)}\\ &= \frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}\\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)\end{aligned}$$

d. Fonction arctan

Théorème 14.15.

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration

Nous avons vu dans le chapitre précédent que tan est continue et strictement croissante sur

$I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
De plus, tan est dérivable sur I, et $\tan' = 1+\tan^2$ qui ne s'annule pas sur I. Par théorème, $\arctan = \tan^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}.$$

☞ *Exercices 23, 12 et 13*

4. Dérivées successives

Définition 14.5.

Soit I un intervalle.

- On dit que f est **deux fois dérivables** si f et f' sont dérivables. Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.
- Plus généralement, on dit que f est n **fois dérivables** ($n \geqslant 1$) si, pour tout entier $p \leqslant n-1$, $f^{(p)}$ est dérivable. On note alors $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Définition 14.6.

Soit I un intervalle. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable, et si pour tout $p \leqslant n$, $f^{(p)}$ est continue.

Remarque

D'après un théorème précédent, pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$, il suffit de montrer que f est n fois dérivable, et que sa dérivée n-ième est continue.

Définition 14.7.

Soit I un intervalle. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est indéfiniment dérivable, et si toutes ses dérivées sont continues.

Remarque

Toutes les fonctions usuelles (exponentielle, ln, polynômes) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

☞ *Exercices 20, 21 et 22.*

III. Rolle et accroissements finis

Dans cette section, on va donner plusieurs résultats importants sur des fonctions dérivables.

1. Théorème de Rolle

Théorème 14.16. Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$.
Alors, il existe un réel $c \in \,]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Attention

Il n'y a pas forcément unicité de c.

En revanche, toutes les hypothèses sont importantes : la continuité sur l'intervalle **fermé**, la dérivabilité sur l'intervalle **ouvert**.

Par exemple, $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $[-1, 1]$, vérifie $f(-1) = f(1)$ mais il n'existe pas de réel $c \in]-1, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$. f est donc bornée et atteint ses bornes. Il existe ainsi s et t dans $[a, b]$ tels que

$$f([a, b]) = [f(s), f(t)].$$

- Si $f(s) = f(t)$, la fonction est constante donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, par exemple $c = \frac{a+b}{2}$.
- Si $f(t) > f(a)$, alors $t \in]a, b[$ (car sinon $f(t) = f(b) = f(a)$). Puisque f admet un maximum local en t, $f'(t) = 0$. On prend alors $c = t$.
- Si $f(t) = f(a)$, alors $f(s) < f(a)$ et donc $s \in]a, b[$ (car sinon $f(s) = f(a) = f(b)$). Puisque f admet un minimum local en s, on a $f'(s) = 0$. On prend alors $c = s$.

Remarque

Graphiquement, cela signifie que si f vérifie les hypothèses du théorème, il existe un point de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en lequel la tangente est horizontale.

2. Théorème des accroissements finis

Théorème 14.17. Théorème des accroissements finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration

On va appliquer le théorème de Rolle à une fonction bien choisie. On pose $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in [a, b], \quad \varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

On constate que φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (puisque f l'est, ainsi que la fonction affine). De plus :

$$\varphi(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a) \quad \text{et} \quad \varphi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

D'après le théorème de Rolle, appliqué à la fonction φ, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Attention
À nouveau, il n'y a pas forcément unicité de c.

Remarque
Graphiquement, notons $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ les points de la courbe de f d'abscisses respectives a et b. Il existe un point de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f d'abscisse dans $]a, b[$ en lequel la tangente est parallèle à la droite (AB).
Une interprétation physique : si on voyage à une vitesse moyenne v_{moy} lors d'un trajet, il existe au moins un moment où la vitesse est égale à v_{moy}.

3. Inégalité des accroissements finis

Théorème 14.18. Inégalité des accroissements finis

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que,

$$\forall x \in I, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

Alors, pour tous réels a et b de I, tels que $a \leqslant b$, on a

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

ou encore

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leqslant M$$

Démonstration
Soient a, b deux réels de I tels que $a < b$. La fonction f est dérivable sur I, donc est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Le théorème des accroissements finis nous garantit l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Mais alors, puisque $m \leqslant f'(c) \leqslant M$, on en déduit le résultat (puisque $b - a > 0$).

Conséquence 14.19.

Soit f est une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant C$$

Alors

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(b) - f(a)| \leqslant C|b-a|$$

Méthode
L'inégalité des accroissements finis permet d'obtenir des inégalités intéressantes, en introduisant la bonne fonction.

Exemple 14.7
Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

Solution
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction ln est dérivable sur $[x, x+1]$. De plus, pour tout $z \in [x, x+1]$

$$\frac{1}{x+1} \leqslant f'(z) = \frac{1}{z} \leqslant \frac{1}{x}$$

par décroissance de la fonction inverse sur $[x, x+1]$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}(x+1-x) \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}(x+1-x) = \frac{1}{x}$$

Remarque
Ce résultat nous permet de prouver une propriété intéressante, qui concernant la série harmonique, que nous étudierons plus tard.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En sommant les inégalités précédentes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit le résultat : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{n+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(n+1) - \ln(n)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

soit, par telescopage

$$H_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Or,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+1/n))}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

et ainsi, par encadrement

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1 \text{ i.e. } H_n \sim \ln(n).$$

☞ *Exercice 14.*

4. Application : étude des suites récurrentes

L'inégalité des accroissements finis permet d'étudier, dans certains cas, des suites récurrentes.
On disposera d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

- $f(I) \subset I$,
- f est dérivable sur I,
- $|f'|$ est bornée par un réel $M > 0$,
- f admet un point fixe ℓ sur I (c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$).

On introduit alors une suite (u_n) par $u_0 \in I$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$. On montrera alors (mais ce sera accompagné) :

- I est stable par f donc pour tout n, $u_n \in I$,
- puis on utilisera l'inégalité des accroissement finis, qui entraînera que, pour tout entier n

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant M|u_n - \ell|.$$

- Par récurrence, on obtiendra alors que, pour tout entier n,

$$|u_n - \ell| \leqslant M^n|u_0 - \ell|.$$

Si $M \in \,]0,\, 1[$, on pourra alors conclure que u tend vers ℓ.

☞ *Exercice 15*

5. Fonctions $\mathcal{C}^1$

Définition 14.8.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (et on note $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$) si f est **dérivable** sur I, et si sa **dérivée** f' est **continue** sur I.

⚠ **Attention**

Une fonction peut être de classe $\mathcal{D}^1$ sans être de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque

Les résultats sur les opérations sur les dérivées sont encore valables : la somme, le produit, le quotient, la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (quand cela a un sens) est encore de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 14.20.

Les fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielle, logarithme, puissances généralisées, sinus, cosinus, tangente et arctangente sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de définition.

Un théorème fort, permet de démontrer une dérivabilité en un point en s'intéressant à la limite de la dérivée :

Théorème 14.21. Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$

Soit I un intervalle, et $x_0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- f est continue sur I.
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \backslash \{x_0\}$.
- f' admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers x_0.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et on a $f'(x_0) = \ell$.

Démonstration

Il faut montrer tout d'abord que f est dérivable en x_0, puis que f' est continue en x_0. On va supposer que x_0 n'est pas à la frontière (sinon, il faut s'intéresser à la dérivée à droite ou à gauche). Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha] \subset I$.

Soit $x \in \,]x_0,\, x_0 + \alpha[$ fixé.

f est continue sur $[x_0,\, x]$, dérivable sur $]x_0,\, x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c_x \in \,]x_0,\, x[$ tel que

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Or, lorsque x tend vers x_0, c_x également (puisque $c_x \in \,]x_0,\, x[$). Puisque f' admet une limite ℓ en x_0, on peut conclure que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell.$$

Ainsi, f est dérivable à droite en x_0, et $f'_d(x_0) = \ell$. Par un raisonnement similaire, f est dérivable à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = \ell$. Ainsi, f est bien dérivable, et $f'(x_0) = \ell$.

Enfin, d'après ce qui précède, $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$ et donc f' est continue en x_0.

Remarque

Ce théorème est très fort, puisqu'il permet de conclure que f est dérivable en x_0 sans avoir à étudier la dérivabilité en tant que telle. Il suffit d'étudier la limite de la dérivée.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction définie par morceaux est de classe $\mathcal{C}^1$, on utilisera très souvent le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$:

- on montre que f est continue sur I.
- on montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I sauf en un (ou plusieurs) points.
- on montre que f' admet des limites finies aux points où elle n'apparait pas dérivable.

On conclut alors qu'elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exemple 14.8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution

f est bien continue sur $\mathbb{R}$. En effet, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (composée de deux fonctions continues), et par composée,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0)$$

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est donnée pour tout $x \neq 0$ par

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

qui est bien continue sur $\mathbb{R}^*$: f est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Enfin, en posant $X = \frac{1}{x^2}$, on a

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{X\to+\infty} 2X^{3/2}\mathrm{e}^{-X} = 0$$

par croissance comparée.
Bilan : d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a $f'(0) = 0$.

IV. Application de la dérivation

1. Dérivée nulle sur un intervalle

Théorème 14.22.

Soit I un intervalle fermé, ouvert, ou semi-ouvert de bornes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, et dérivable sur $]a; b[$. Alors

$$f \text{ est constante sur } I \Leftrightarrow \forall\, x \in]a; b[,\ \ f'(x) = 0$$

Attention

Si I n'est pas un intervalle, le résultat est faux ! Par exemple, si $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x) = -\pi$ sur $]-\infty; 0[$, et $f(x) = \sqrt{2}$ si $x > 0$, alors f vérifie les conditions de l'hypothèse, sans pour autant que f soit constante.

Démonstration

Soient x et y deux réels de I tels que $x < y$. Le théorème des accroissements finis, appliquées à la fonction f continue sur $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$, entraîne qu'il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Donc $f(y) = f(x)$ et la fonction f est constante.

Exercice 14.9

Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Solution

Posons $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = \arctan'(x) - \frac{1}{x^2}\arctan'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1 + (1/x)^2} = 0.$$

Ainsi, f est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Pour déterminer sa valeur, on prend une valeur particulière, par exemple $x = 1$: $\arctan(1) + \arctan(1/1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Conséquence 14.23.

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et $a \in I$. On suppose que $f(a) = g(a)$. Alors

$$f' = g' \text{ sur } I \Leftrightarrow f = g \text{ sur } I$$

2. Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 14.24.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.

Démonstration

Le deuxième point se déduit du premier. Supposons donc f croissante sur I. Soient $x_0 \in I$ et $x \in I$. f étant croissante, $f(x) - f(x_0)$ est du signe de $x - x_0$ et donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Par passage à la limite (la fonction f étant dérivable) quand x tend vers x_0, on en déduit que $f'(x_0) \geqslant 0$.

Réciproquement, supposons que pour tout $z \in I$, $f'(z) \geqslant 0$. On se fixe x et y deux réels de I tels que $x < y$. Le théorème des accroissements finis, appliqué à f sur $[x, y]$, amène l'existence d'un réel $c \in]x, y[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \geqslant 0.$$

Puisque $y - x \geqslant 0$, on en déduit que $f(y) - f(x) \geqslant 0$, et la fonction f est donc croissante.

On dispose d'un théorème également pour démontrer qu'une fonction est strictement monotone :

Théorème 14.25.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration

Même idée que précédemment, on en déduit que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$ et donc que $f(y) - f(x) > 0$.

Attention

La réciproque est fausse.

L'exemple classique est celui de la fonction cube : soit $f : x \mapsto x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2$. f' est strictement positive sauf pour $x = 0$. Pourtant, la fonction cube est strictement croissante

On dispose alors d'un théorème plus fin pour la réciproque :

Proposition 14.26.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. La fonction f est strictement croissante (repsectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si f' est positive (resp. négative) sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle non réduit à un point.

Démonstration

Si f n'est pas strictement monotone, il existe deux réels a et b tels que $a < b$ et $f(a) = f(b)$. Mais étant monotone, on en déduit que f est constante sur $[a, b]$. Par contraposée, on a donc montré que si f n'est pas identiquement nulle sur aucun intervalle non réduit à un point de I alors f est strictement monotone.

Si f' est nulle sur $[a, b] \subset I$, alors f y est constante et n'est donc pas strictement monotone. Par contraposée, on a donc montré que si f est strictement monotone, alors f n'est nulle sur aucun intervalle non réduit à un point.

On utilisera le cas particulier suivant :

Conséquence 14.27.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si $f' > 0$ (respectivement $f' < 0$) sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points de I, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Méthode

Pour étudier les variations d'une fonction (quand ce n'est pas une fonction classique) :

- on justifie que la fonction est bien dérivable,
- on déterminer la dérivée de la fonction,
- on détermine le signe de la dérivée, avant de conclure.

Exemple 14.10
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Solution
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme, et on a pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 3$. Or, pour tout réel x, $f'(x) > 0$: ainsi la fonction f est strictement croissante.

☞ *Exercices 16 et 17*

3. Nombre dérivé et extrema locaux

Nous avons vu que si $f'(x) = 0$, cela n'implique pas forcément qu'il y ait un extremum local en x. On dispose cependant du théorème suivant :

Théorème 14.28.
Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x_0 \in I$. Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

Exemple 14.11
Dans le cas de la fonction cube, $f'(0) = 0$ mais la dérivée reste positive.

V. Le cas des fonctions exponentielle et logarithme

Dans cette partie, nous allons démontrer rigoureusement tous les résultats usuels sur les fonctions exponentielle et logarithme.

1. Fonction exponentielle

a. Définition

Théorème 14.29. Existence de l'exponentielle
Il existe une fonction à valeurs réelles, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui vaut 1 en 0, et qui coïncide avec sa dérivée sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est appelée **exponentielle** et on la note exp.

Démonstration
Il existe plusieurs démonstrations. On en verra une plus tard, au second semestre, à l'aide des séries.

b. Propriétés

On commence par montrer une propriété qui nous servira régulièrement dans la suite.

Lemme 14.30.
Pour tout réel x, on a $\exp(x)\exp(-x) = 1$.

Démonstration

On introduit la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \exp(x)\exp(-x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de deux fonctions dérivables, et on a, en utilisant la définition de l'exponentielle :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= \exp'(x)\exp(-x) + \exp(x)\left(-\exp'(-x)\right)\\ &= \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$. Or, $g(0) = \exp(0)\exp(-0) = 1$, donc g est constante égale à 1, ce qui permet de conclure.

On peut alors exprimer toutes les propriétés usuelles de la fonction exponentielle :

Théorème 14.31.

1. $\exp(0) = 1$.
2. exp est dérivable, et donc continue, sur $\mathbb{R}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$.
4. exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
5. exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
6. exp est unique, c'est-à-dire que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors $f = \exp$.
7. Pour tout réel x, $\exp(x) \geqslant 1 + x$.
8. On a les limites aux bornes :
$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty.$$
9. Pour tout réel x, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
10. Pour tous réels x et y, on a
$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{et} \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$
11. Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Démonstration

1. Cela provient de la définition de exp.
2. Idem. Étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue.
3. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en 0. Ainsi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1.$$
4. Puisque, pour tout x, $\exp(x)\exp(-x) = 1 \neq 0$, exp ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}$. Étant continue et ne s'annulant pas, on a vu que la fonction exp est donc de signe constant. Puisque $\exp(0) = 1 > 0$, on en déduit que exp est strictement positive.
5. Puisque $\exp' = \exp$ et que exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Soit f une fonction vérifiant les propriétés énoncées. Posons alors, pour tout réel x, $g : x \mapsto \frac{f(x)}{\exp(x)}$, qui a un sens car exp ne s'annule pas. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient donc le dénominateur ne s'annule pas, et on a
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp'(x)}{(\exp(x))^2} = \frac{f(x)\exp(x) - f(x)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0.$$

Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}$ et puisque $g(0) = \frac{f(0)}{\exp(0)} = 1$, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(x)}{\exp(x)} = 1 \implies \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(x).$$

7. Posons, pour tout réel x, $g : x \mapsto \exp(x) - 1 - x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \exp'(x) - 1 = \exp(x) - 1.$$

Or, on constate que $\exp(x) - 1 > 0 \iff \exp(x) > 1 = \exp(0) \iff x > 0$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$.
On obtient alors le tableau de variations suivant, sachant que $g(0) = 0$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, g est positive sur $\mathbb{R}$, ce qui donne le résultat.

8. D'après le résultat précédent, pour tout x, $g(x) \geqslant 1 + x$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + x = +\infty$. Par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$. Enfin, puisque exp ne s'annule pas, on peut écrire, pour tout réel x, que

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}.$$

Or, quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$ et d'après le cas précédent, $\exp(-x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$. Par quotient, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

9. Le lemme et la non annulation d'exp donnent immédiatement le résultat.

10. Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. On introduit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g : x \mapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)}.$$

g est bien définie puisque exp ne s'annule pas. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\exp'(x+y)\exp(x)\exp(y) - \exp(x+y)\exp'(x)\exp(y)}{(\exp(x)\exp(y))^2} \\ &= \frac{\exp(x+y)\exp(x)\exp(y) - \exp(x+y)\exp(x)\exp(y)}{(\exp(x)\exp(y))^2} = 0 \end{aligned}$$

en remarquant que y est fixé. De plus, $g(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$. La fonction g est donc constante, égale à 1. On en déduit alors que pour tout x et y

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Enfin, en utilisant le point 9 :

$$\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \exp(x)\frac{1}{\exp(y)}.$$

11. On se fixe $x \in \mathbb{R}$. On démontre tout d'abord le résultat sur $\mathbb{N}$ par récurrence.

- Pour $n=0$, $\exp(0\times x)=\exp(0)=1=(\exp(x))^0$. Le résultat est donc vrai pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie au rang n. Alors, en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned}\exp((n+1)x) &= \exp(nx+x)\\ &= \exp(nx)\exp(x) = (\exp(x))^n \exp(x) = (\exp(x))^{n+1}\end{aligned}$$

  et la propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, on en déduit alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\exp(nx)=(\exp(x))^n$.
Si $n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, alors $-n\in\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\exp(nx) &= \exp((-n)(-x))\\ &= (\exp(-x))^{-n} \quad \text{car } -n\in\mathbb{N}\\ &= \left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^{-n} = (\exp(x))^n\end{aligned}$$

On remarque que le point 10 nous indique que la fonction exp se comporte comme les puissances entières. On décide alors d'une autre notation :

Définition 14.9.

On note $\mathrm{e}=\exp(1)$. Alors, pour tout réel x, on note $\mathrm{e}^x=\exp(x)$.

Enfin, la fonction exp est bijective :

Proposition 14.32.

La fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Les points 2, 5 et 8 nous garantissent que exp est continue, strictement monotone. Le théorème de la bijection nous garantit que exp établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\exp(\mathbb{R})=\,]0,+\infty[$.

2. Fonction logarithme népérien

On va alors définir la fonction logarithme népérien à partir de l'exponentielle :

Définition 14.10. Logarithme népérien

La bijection réciproque de la fonction exponentielle, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est appelée **logarithme népérien** et est notée ln.

Les propriétés d'une bijection réciproque, ainsi que les propriétés de exp, nous donne des propriétés pour la fonction ln :

Proposition 14.33.

1. Pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}_+^*$, $y=\exp(x)$ si et seulement si $x=\ln(y)$.
2. ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On a $\ln(1)=0$, ln est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$.
4. ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

…

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$.
6. On a les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty.$$
7. Pour tout $x\in\,]-1,\,+\infty[$, $\ln(1+x)\leqslant x$.
8. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, et $n\in\mathbb{Z}$, on a :
$$\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y),\quad \ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x),\quad \ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)\quad \text{et}\quad \ln(x^n)=n\ln(x).$$

Démonstration

1. Cela vient de la définition de ln comme fonction réciproque de l'exponentielle.
2. Le théorème de la bijection nous garantit d'une part que ln est continue et d'autre part qu'elle est de la même monotonie que exp sur son domaine $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire strictement croissante.
3. Puisque $\exp(0)=1$, alors $0=\ln(1)$ par définition de ln. Puisque ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\ln(1)=0$, on en déduit que si $x\in\,]0,\,1[$, $\ln(x)<0$ et si $x\in\,]1,\,+\infty[$, $\ln(x)>0$.
4. On applique le théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque : exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\exp'(x)=\exp(x)\neq 0$. Le théorème nous garantit alors que ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :
$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \ln'(x)=\frac{1}{\exp'(\ln(x))}=\frac{1}{\exp(\ln(x))}=\frac{1}{x}.$$
5. Puisque ln est dérivable en 1,
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=\ln'(1)=\frac{1}{1}=1.$$
6. C'est une conséquence à nouveau du théorème de la bijection.
7. On pose, pour tout $x\in\,]-1,\,+\infty[$, $g(x)=\ln(1+x)-x$. On constate que g est dérivable sur $]-1,\,+\infty[$ comme composée et somme de fonctions dérivables, et on a
$$\forall\, x\in\,]-1,\,+\infty[,\quad g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}.$$
Ainsi, g' est positive sur $]-1,\,0[$ et négative sinon. On obtient le tableau de variation :

x	-1		0		$+\infty$
signe de $g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de g	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

ce qui nous permet de conclure que, pour tout $x\in\,]-1,\,+\infty[$, $g(x)\leqslant 0$.
8. On utilise les propriétés de la fonction exp. On fixe x et y dans $\mathbb{R}_+^*$. On constate que
$$\exp(\ln(xy))=xy \quad \text{et} \quad \exp(\ln(x)+\ln(y))=\exp(\ln(x))\exp(\ln(y))=xy$$
exp étant bijective, on en déduit que $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$. Les autres se traitant de la même manière.

Enfin, terminons par la démonstration d'une croissance comparée :

Théorème 14.34.

On a
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0.$$

Démonstration

On introduit la fonction g, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, par $g : x \mapsto \ln(x) - 2\sqrt{x}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\quad g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1-\sqrt{x}}{x}.$$

On constate que $g'(x)$ est du signe de $1-\sqrt{x}$, à savoir positif si $x \in\,]0,\, 1]$ et négatif sinon. Cela donne le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
signe de $g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
variations de g	||	$\nearrow$	-2	$\searrow$	

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) \leqslant -2$ et finalement, pour tout $x \geqslant 1$, $g(x) \leqslant 0$.
Mais alors, pour tout $x \geqslant 1$, $\ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$ soit, en divisant par $x > 0$
$$\forall\, x \in [1,\, +\infty[,\quad 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant 2\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$, par encadrement,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0.$$

VI. Exercice bilan

Exercice 14.12 (Ecricome 2014)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par
$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = e \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, (u_n) existe.
2. Ecrire une fonction Python qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.
3. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
4. Etablir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.

5. Montrer que, pour $x \in]0;+\infty[$, $f'(x)$ peut s'écrire
$$\forall\, x>0,\ f'(x) = \frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{1+x}}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2}$$
6. En utilisant le résultat $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$ que l'on admettra, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, et déterminer $f'(0)$.
7. Etablir que
$$\forall\, x \geqslant \mathrm{e}-1,\ f(x)\leqslant x \text{ et } (x+1)\ln(x+1)\geqslant x+1$$
En déduire que
$$\forall\, x\geqslant \mathrm{e}-1,\ f'(x)\geqslant 0$$
8. Démontrer que
$$\forall\, n,\ \mathrm{e}-1\leqslant u_n$$
9. Etablir que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.

Solution

1. Pour tout réel $x>0$, $x+1>1$ donc $\ln(x+1)>\ln(1)=0$ par stricte croissance de la fonction ln. Par quotient, $f(x)>0$ si $x>0$. Ainsi, on a $f(]0;+\infty[)\subset]0;+\infty[$.
Montrons alors, par récurrence, la proposition P définie pour tout entier n par P_n : "u_n existe et $u_n>0$".
   - Pour $n=0$, u_0 est bien défini, et $u_0=1>0$. P_0 est donc vraie.
   - Supposons que la proposition P_n soit vraie pour un certain entier n fixé. Ainsi, par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n>0$. Mais alors, d'après ce qui précède, $f(u_n)$ existe (car $u_n>0$) et $f(u_n)>0$ puisque la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc u_{n+1} existe et $u_{n+1}>0$: P_{n+1} est également vraie.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n : la suite (u_n) est donc bien définie.
2. La suite étant définie par une relation $u_{n+1}=f(u_n)$, on peut utiliser une boucle *for* pour calculer u_N.

Code Python

```python
from numpy import exp, log # Pour utiliser les fonctions

def suiteu(n):
    u = exp(1) # u0
    for i in range(n):
        u = u/log(u+1)
    return u
```

3. f est continue sur $]0;+\infty[$ comme quotient d'un polynôme par une fonction logarithme, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, puisque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, on a, par quotient,
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)} = 1 = f(0)$$
La fonction f est donc continue en 0.
Bilan : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
4. De même, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ comme quotient d'un polynôme par une

fonction logarithme, dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, pour tout réel $x > 0$

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x) - x\frac{1}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} = \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{(x+1)(\ln(x+1))^2}$$

5. Remarquons que, pour tout réel $x > 0$

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{1+x} = \frac{(x+1)\ln(x+1) - x(x+1) + x^2}{x^2(1+x)} = \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x^2(x+1)}$$

et donc,

$$f'(x) = \frac{x^2\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \frac{1}{1+x}\right)}{(\ln(1+x))^2} = \frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \frac{1}{1+x}}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2}$$

6. En utilisant le résultat admis, par somme,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

et puisque $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, par quotient

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2}$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)$ admet une limite en 0. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

7. Si $x \geqslant \mathrm{e} - 1$, alors $1 + x \geqslant \mathrm{e}$ et donc, par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x) \geqslant \ln(\mathrm{e}) = 1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors $\frac{1}{\ln(1+x)} \leqslant 1$, et puisque $x > 0$,

$$f(x) \leqslant x$$

Enfin, puisque $\ln(x+1) \geqslant 1$ et que $x + 1 > 0$, par produit

$$(x+1)\ln(x+1) \geqslant x + 1$$

D'après le résultat précédent, on en déduit donc que, si $x \geqslant \mathrm{e} - 1$,

$$(x+1)\ln(x+1) - x \geqslant 1 > 0$$

Puisque $x^2(x+1) > 0$, par quotient :

$$\forall\, x \geqslant e - 1,\ f'(x) > 0$$

8. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n \geqslant e - 1$".
   - Pour $n = 0$, $u_0 = \mathrm{e} \geqslant \mathrm{e} - 1$. Donc P_0 est vraie.
   - Supposons que la propriété P_n soit vraie pour un certain entier n fixé. Alors, par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant \mathrm{e} - 1$. D'après la question précédente, puisque $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\mathrm{e} - 1; +\infty[$, f est croissante sur $[\mathrm{e} - 1; +\infty[$. Ainsi,

   $$f(\mathrm{e} - 1) \leqslant f(u_n)$$

   c'est-à-dire $f(\mathrm{e} - 1) \leqslant u_{n+1}$. Or, $f(\mathrm{e} - 1) = \mathrm{e} - 1$. Donc $\mathrm{e} - 1 \leqslant u_{n+1}$ et P_{n+1} est également vraie.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n : la suite (u_n) est donc bien minorée par $\mathrm{e} - 1$.

9. Pour tout entier n, $u_n \geqslant \mathrm{e}-1$. D'après la question 7, on a alors
$$f(u_n) \leqslant u_n$$
puisque $f(x) \leqslant x$ si $x \geqslant \mathrm{e}-1$. On obtient donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante, et puisqu'elle minorée (question précédente), elle converge.
Notons ℓ sa limite. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, d'après le théorème du point fixe, ℓ est un point fixe de f, et puisque 0 n'est pas un point fixe (car $f(0) = 1$), ℓ vérifie donc
$$\frac{\ell}{\ln(\ell+1)} = \ell$$
soit $\frac{1}{\ln(\ell+1)} = 1$ (car $\ell \neq 0$), c'est-à-dire $\ell = \mathrm{e}-1$.
Bilan : la suite (u_n) converge vers $\mathrm{e}-1$.

☞ *Exercices 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 et 23*

Exercices

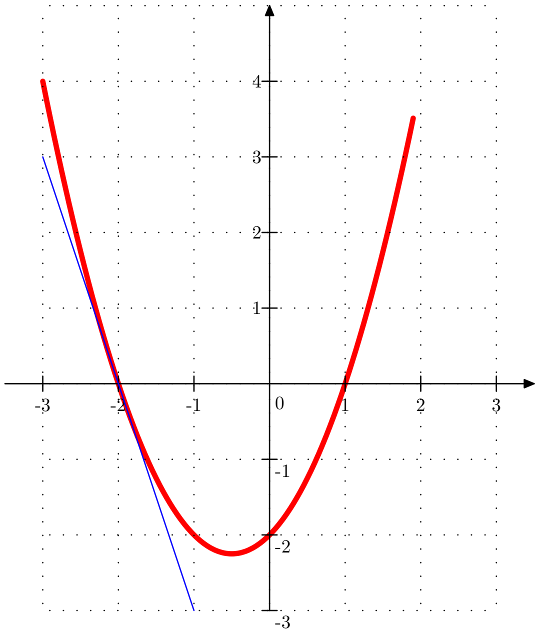
14

Exercices

Exercices de base

●○○ **Exercice 1 Dérivée et représentation graphique** (10 min.)

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x + 5$. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1, puis son équation. Tracer la courbe représentative de g et cette tangente.
2. On considère la fonction f dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Sur ce même dessin est tracée la tangente T à la courbe au point d'abscisse -2 (elle passe par les points $(-2;0)$ et $(-3;3)$). Déterminer $f(-2)$ et $f'(-2)$ à partir du graphique.

●○○ **Exercice 2 Limite et dérivabilité** (10 min.)

En reconnaissant le calcul d'un nombre dérivée, déterminer :

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1} \qquad \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x-1} \qquad \lim_{x\to a} \frac{e^{x^2} - e^{a^2}}{x-a}.$$

●○○ **Exercice 3 Dérivée - I** (10 min.)

Justifier que les fonctions suivantes sont dérivables sur le domaine I donné, et déterminer la fonction dérivée.

$f(x) = x\sqrt{x}, \quad I = \mathbb{R}_+^*$

$g(x) = (x^2+x+1)\mathrm{e}^x, \quad I = \mathbb{R}$

$h_1(x) = \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$ et $h(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)}, \quad I = \mathbb{R}^*$

$i(x) = \ln(\ln(x)), \quad I =]1;+\infty[$

$j(x) = 2^x, \quad I = \mathbb{R}$

$k(x) = x^{2,3}, \quad I = \mathbb{R}_+^*$

$l(x) = x^x, \quad I = \mathbb{R}_+^*$

●○○ Exercice 4 Dérivée - II (25 min.)

Pour les fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée.

1. $x \mapsto \dfrac{\ln(2+\cos(x))}{\exp(\tan(x))}$,
2. $x \mapsto \cos(\sin^2(x))$,
3. $x \mapsto \arctan\left(x^5 - \frac{3}{x}\right)$,
4. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\arctan(x)}}$,
5. $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$,
6. $(\cos(x))^{\sin(x)}$,
7. $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{(\sin(x)+2)^4}$,
8. $x \mapsto \ln(\cos(x)-1)$.

●○○ Exercice 5 Parité et dérivée (5 min.)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.

●●○ Exercice 6 Prolongement et dérivées (25 min.)

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, et les prolonger éventuellement par continuité. Préciser ensuite les intervalles sur lesquels elles sont dérivables, et calculer leurs dérivées (à droite ou à gauche si nécessaire). Sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$?

1. $x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$
2. $x \mapsto x\ln(x) - x$,
3. $x \mapsto x^{1/\ln(x)}$,
4. $x \mapsto x^x$,
5. $x \longmapsto \sqrt{x^3 - x^2}$,
6. $x \mapsto 1 - \cos\left(\sqrt{|x-1|}\right)$.

●●○ Exercice 7 Des limites (15 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x) - \sin(7x)}{\sin(x) + \sin(9x)}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x)}{\tan(3x)}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\ln(x))}{x}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x\sin(x-2)}{x^2+x-6}$.

Dérivabilité

●○○ Exercice 8 Dérivées et récurrence (15 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et montrer que pour tout $x \neq -1$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

●●○ Exercice 9 Dérivées n-ième (15 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall\, x\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}, \quad f(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}.$$

2. En déduire la dérivée n-ième de f.

●○○ Exercice 10 Deux, mais pas trois (15 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ si $x \geqslant 0$, et $f(x) = \mathrm{e}^x$ si $x < 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas 3 fois dérivable.

●○○ Exercice 11 Une égalité arctantesque (10 min.)

Simplifier, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, la somme

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

●○○ Exercice 12 Une somme et des arctan (10 min.)

Montrer que, pour tout réel x,

$$\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \arctan(1+x) - \arctan(x).$$

En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right).$$

●○○ Exercice 13 Dérivées de arccos et arcsin (15 min.)

Dans l'exercice 10 de la feuille d'exercice 12, nous avons introduit les fonctions arccos, fonction réciproque de cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ et arcsin, fonction réciproque de sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$. Étudier la dérivabilité de ces fonctions sur $[-1, 1]$, et calculer leurs dérivées.

Rolle, accroissements finis

●●○ Exercice 14 Inégalité des accroissements finis et suite (20 min.)

Soit k un entier $k \geqslant 2$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[k-1; k]$ à la fonction $f : x \mapsto \frac{-1}{x}$, démontrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

●●○ Exercice 15 Inégalité des accroissements finis et suite - II (20 min.)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = h(u_n).$$

1. Étudier les variations de h et montrer que $h([1, 2]) \subset [1, 2]$ (on pourra utiliser $h(1) \approx 1,4$ et $h(2) \approx 1,1$).
2. Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1, 2]$ notée α.
3. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
4. Montrer que, pour tout réel $x \in [1, 2]$, $|h'(x)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}|u_n - \alpha|$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n}.$$
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Etude de fonctions

●○○ Exercice 16 Etude de fonctions - I (20 min.)

Soit
$$f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et expliciter f'.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Tracer dans un repère orthonormé de la courbe de f, ainsi que la tangente au point d'inflexion.

●○○ Exercice 17 Étude de fonctions - II (30 min.)

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $]-1;+\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$, et expliciter sa dérivée.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$
   On pourra admettre que
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
5. Etudier la fonction g définie par $g(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$ sur $]-1;+\infty[$, et étudier ensuite l'existence de tangente horizontale pour f.
6. Dresser le tableau de variations de f sur $]-1;+\infty[$.
7. Déterminer la nature des branches asymptotiques de f en -1 et en $+\infty$, puis tracer la courbe de f.

●○○ Exercice 18 Étude de fonctions - III (20 min.)

Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer les branches asymptotiques.

●●○ Exercice 19 Suite, IAF et fonction (30 min.)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} = 4 + \frac{\ln u_n}{4}.$$

1. Soit $f(x) = 4 + \dfrac{\ln x}{4}$. Étudier la fonction f et montrer que $f([1, e^2]) \subset [1, e^2]$.
2. Étudier les variations de $h(x) = f(x) - x$ sur $[1, e^2]$. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution dans $[1, e^2]$ que l'on notera α.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et appartient à l'intervalle $[1, e^2]$.
4. a) Montrer que $u_1 \geqslant u_0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   b) En déduire que (u_n) converge vers α.
5. a) Montrer que pour tout $x, y \in [1, e^2]$, $|f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{4}|x - y|$.

b) En déduire que $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$.
c) Donner une majoration de $|u_n-\alpha|$ en fonction de n.

6. Déterminer un entier N tel que $|u_N-\alpha| \leqslant 10^{-9}$.

Sujets de concours

●○○ Exercice 20 Sujet de concours - I (30 min.)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ en $+\infty$ ainsi que celle de $\frac{\varphi(x)}{x}$ en $+\infty$. Interpréter.
2. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Montrer que φ est dérivable en 0. Donner l'allure de la représentation graphique de φ au voisinage du point d'abscisse 0.
5. Dresser le tableau de variation de φ.
6. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$. Montrer l'existence d'un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$, et justifier que : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

●○○ Exercice 21 Sujet de concours - II (30 min.)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaitre les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que
$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$
6. Proposer un programme en Scilab permettant d'encadrer dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

●○○ Exercice 22 Sujet de concours - III (30 min.)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaitre les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln 2 \approx 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que
$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$
$$\text{avec } 0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta$$

●○○ **Exercice 23** Sujet de concours - IV (30 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = 2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, et vérifier que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Etudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f.
5. On définit la fonction $g : \left[0; \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ par $\forall\ x \in \left[0; \frac{1}{2}\right],\quad g(x) = 2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}$. Montrer que g est bijective de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ dans un intervalle à considérer.
6. Dresser le tableau de variations complet de g^{-1}
7. Démontrer que g est dérivable en tout point de l'intervalle $\left]0; \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\right[$. Est-elle dérivable aux bornes ?
8. Tracer l'allure des fonctions g et g^{-1}.

●○○ **Exercice 24** Sujet de concours - V (30 min.)

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, & f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \\ & f(0) = -1 \end{cases}$$

le tableau de valeurs de f,

x	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)$	$-0,5$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

ainsi que la fonction φ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$$

Étude de la fonction

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Dresser le tableau de variations de f', puis de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
4. Etudier la nature de la branche infinie.
5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
6. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

Étude de deux suites associées

7. Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que :

$$f(x_k) = k$$

8. a) Donner la valeur de x_0.
   b) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.
   c) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.
9. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

a) Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) On donne $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\frac{3}{2},2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2},2\right]$
c) En étudiant les variations de φ', montrer que :

$$\forall\, x \in \left[\frac{3}{2},2\right] \quad |\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{9}$$

d) Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation :

$$x = \varphi(x)$$

e) Montrer successivement que pour tout entier n :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &\leqslant u_n \leqslant 2 \\ |u_{n+1} - x_1| &\leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1| \\ |u_n - x_1| &\leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n \end{aligned}$$

f) En déduire la limite de la suite (u_n).

Pour aller plus loin

●●○ Exercice 25 Règle de l'Hôpital (20 min.)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, et dérivables sur $]a, b[$. On suppose de plus que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b]$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

On pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction $x \mapsto f(x) - \alpha g(x)$ avec α un réel bien choisi.

3. **Règle de l'Hôpital**. On suppose que la fonction $x \mapsto \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite finie ℓ à droite en a. Montrer que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

4. Application : montrer que :

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1, \quad \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2}.$$

●●○ Exercice 26 Retour de Lipschitz (20 min.)

Nous avons vu, dans l'exercice 20 de la feuille de TD du chapitre 12 la définition de fonctions k-lipschitzienne. On dit qu'une fonction est Lipschitzienne sur I s'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ pour lequel que cette fonction est k-lipschitzienne sur I.

1. Existe-il des fonctions Lipschitziennes qui ne sont pas dérivables ?
2. Soit f une fonction dérivable et Lipschitzienne sur I. Montrer que f' est bornée.
3. Soit f une fonction dérivable sur I et telle que f' est bornée sur I. Montrer que f est Lipschitzienne sur I.

●●○ Exercice 27 Rolle généralisé (15 min.)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$, qui s'annule en exactement n points de $[a, b]$. Montrer que f' s'annule en au moins $n-1$ points de $]a, b[$.

●●○ Exercice 28 Une fonction à hypothèse (10 min.)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant f'(x)$.
2. En déduire les variations de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

●●○ Exercice 29 Une autre fonction à hypothèse (15 min.)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 1$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigés

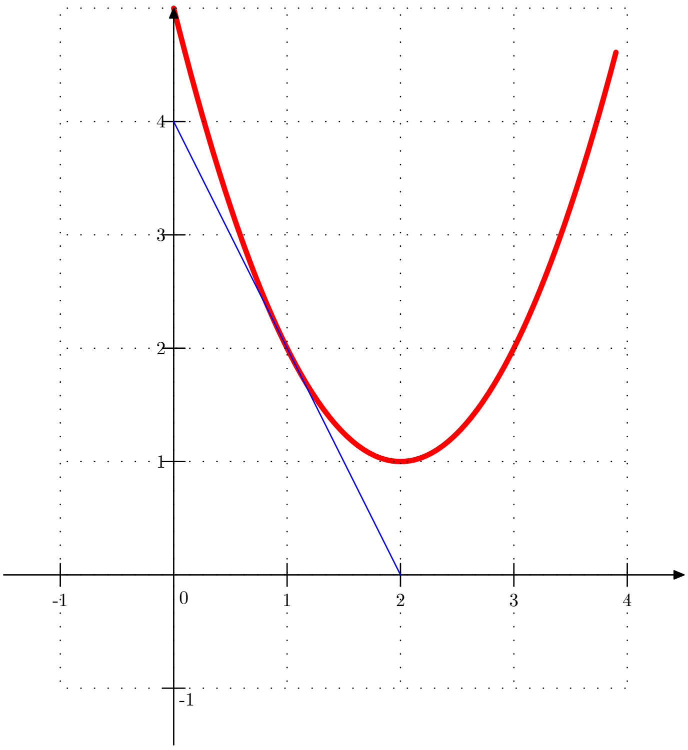
Corrigés des exercices

Exercice 1

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par définition, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est $g'(1) = -2$. Son équation est alors

$$\begin{aligned} y &= g'(1)(x-1) + g(1) \\ &= -2(x-1) + 2 = -2x + 4 \end{aligned}$$

On obtient alors la courbe et la tangente suivante :



2. Graphiquement, $f(-2) = 0$ et $f'(-2)$ est égal au coefficient directeur de la tangente, c'est-à-dire

$$f'(-2) = \frac{3-0}{-3-(-2)} = -3$$

Exercice 2

Dans chacun des cas, on essaie de faire apparaître un taux d'accroissement. Ainsi :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

où $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$. f étant dérivable en 1 (car dérivable sur $\mathbb{R}$), on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x-1} = f'(1) = \mathrm{e}}$$

Par le même raisonnement :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{g(x)-g(4)}{x-4} \text{ où } g : x\mapsto \sqrt{x} \text{ est dérivable en } 4\\
&= g'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \boxed{\frac{1}{4}}\\
\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} \text{ avec } h : x\mapsto x^n \text{ est dérivable en } 1\\
&= h'(1) = \boxed{n}\\
\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{a^2}}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{i(x)-i(a)}{x-a} \text{ où } i : x\mapsto \mathrm{e}^{x^2} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\\
&= i'(a) = \boxed{2a\mathrm{e}^{a^2}}
\end{aligned}$$

Exercice 3

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de $x\mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $x\mapsto\sqrt{x}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\forall\ x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f'(x) = \sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'un polynôme et de la fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall\ x\in\mathbb{R},\quad g'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x + (x^2+x+1)\mathrm{e}^x = (x^2+3x+2)\mathrm{e}^x$$

Pour tout réel x, $1+x^2\geqslant 1$ et $x\mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction ln étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée, la fonction h_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Par quotient, h est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\ x\in\mathbb{R},\quad h_1'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

puis

$$\forall\ x\in\mathbb{R},\quad h'(x) = -\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{(\ln(1+x^2))^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)(\ln(1+x^2))^2}$$

Pour tout $x\in]1;+\infty[$, $\ln(x)>0$. Puisque la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée, la fonction i est également dérivable sur $]1;+\infty[$, et on a

$$\forall\ x>1,\quad i'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$$

Par définition, pour tout réel x, $j(x) = \mathrm{e}^{x\ln(2)}$. La fonction $x\mapsto x\ln(2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction affine). Par composée avec la fonction exp, dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que j est également dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall\ x\in\mathbb{R},\quad j'(x) = \ln(2)\mathrm{e}^{x\ln(2)} = \ln(2)2^x$$

De même, pour tout $x>0$, $k(x) = \mathrm{e}^{2,3\ln(x)}$. La fonction $x\mapsto 2,3\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée avec la fonction exp, dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\ x\in\mathbb{R}_+^*,\quad ,k'(x) = \frac{2,3}{x}\mathrm{e}^{2,3\ln(x)} = \frac{2,3}{x}x^{2,3} = 2,3x^{1,3}$$

Enfin, pour tout $x>0$, $l(x)=x^x=\mathrm{e}^{x\ln(x)}$. Par produit, $x\mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et par composée avec exp, dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que l est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall\ x\in\mathbb{R}_+^*,\quad l'(x)=\left(1\ln(x)+x\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x\ln(x)}=(\ln(x)+1)x^x$$

Exercice 4

1. La fonction est définie et dérivable sur $\mathcal{D}_{\tan}$, comme quotient et composée de fonctions dérivables (ln, cos, exp et tan) avec $2+\cos(x)>0$. Sa dérivée est

$$x\mapsto\frac{\frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)}\exp(\tan(x))-\ln(2+\cos(x))(1+\tan^2(x))\exp(\tan(x))}{(\exp(\tan(x)))^2}$$

2. La fonction est définie, et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (cos, sin et fonction carrée). Sa dérivée est

$$x\mapsto 2\sin(x)\cos(x)\left(-\sin(\sin^2(x))\right)=-2\sin(x)\cos(x)\sin(\sin^2(x))$$

3. La fonction $x\mapsto x^5-\frac{3}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par composée avec arctan, dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est

$$x\mapsto\left(5x^4+\frac{3}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(x^5-\frac{3}{x}\right)^2}$$

4. Par définition, arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée avec la fonction racine et la fonction inverse, la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est

$$x\mapsto-\frac{\frac{\frac{1}{1+x^2}}{2\sqrt{\arctan(x)}}}{\arctan(x)}=-\frac{1}{2(1+x^2)\arctan^{3/2}(x)}$$

5. Cette fonction est définie sur $[-1,+\infty[$ et est dérivable sur $]-1,+\infty[$ par composée de fonctions racines. Sa dérivée est

$$x\mapsto\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}=\frac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$$

6. Remarquons que $(\cos(x))^{\sin(x)}=\mathrm{e}^{\sin(x)\ln(\cos(x))}$ et est donc définie et dérivable sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\frac{\pi}{2}+2k\pi[$, avec $k\in\mathbb{Z}$. Sur ce domaine, la dérivée est :

$$x\mapsto\left(\cos(x)\ln(\cos(x))+\sin(x)\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\right)\mathrm{e}^{\sin(x)\ln(\cos(x))}=(\cos(x)\ln(\cos(x))-\sin(x)\tan(x))\,(\cos(x))^{\sin(x)}$$

7. Par composée et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est

$$x\mapsto\frac{-\sin(x)(\sin(x)+2)^4-\cos(x)4\cos(x)(\sin(x)+2)^3}{(\sin(x)+2)^8}=\frac{-1-2\sin(x)-3\cos^2(x)}{(\sin(x)+2)^5}$$

8. La fonction n'est définie que si $\cos(x)-1>0$ ce qui n'arrive jamais. Ainsi, la fontion n'est jamais définie (et a fortiori pas dérivable).

Exercice 5

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f' est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
Par parité de f, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(-x)=f(x)$$

On dérive cette expression :

$$\forall\ x\in\mathbb{R},\quad -f'(-x)=f'(x)$$

et donc, pour tout réel x, $f'(-x)=-f'(x)$: f' est impaire.

Remarque
Ce résultat est plus générale : si f est paire et dérivable, f' est impaire, et si f est impaire et dérivable, f' est paire.

Exercice 6

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$:
- Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1+x}$ est dérivable et a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$.
- Sur $\mathbb{R}_-^*$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1-x}$ est dérivable et a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$.

On constate que
$$\lim_{x\to O^+} \frac{1}{(1+x)^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{(1-x)^2} = 1.$$
D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $f'(0) = 1$.
2. La fonction $f : x \mapsto x\ln(x) - x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme et quotient, et sa dérivée est $f' : x \mapsto \ln(x)$.
On constate de plus que
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \text{ par croissance comparée.}$$
Ainsi, la fonction f est continue (ou prolongeable par continuité) sur $\mathbb{R}^+$, en posant $f(0) = 0$.
Calculons le taux d'accroissement en 0 :
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x\ln(x) - x}{x} = \frac{\ln(x) - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty.$$
La fonction n'est donc pas dérivable en 0.
Bilan : f est continue sur $\mathbb{R}^+$, et dérivable et classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On constate que $f : x \mapsto x^{\frac{1}{\ln(x)}}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ par composée. Mais on constate que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^{\frac{1}{\ln(x)}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(x)}\ln(x)} = \mathrm{e}^1.$$
Ainsi, on peut prolonger f sur $\mathbb{R}$ tout entier, et elle y est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée nulle.
4. De même, $f : x \mapsto x^x$ est définie, continue, dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée. En écrivant
$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{x\ln(x)}$$
sa dérivée s'écrit
$$f' : x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x.$$
De plus, puisque $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, par composée $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$. On peut prolonger par continuité f en 0^+, en posant $f(0) = 1$.
Déterminons le taux d'accroissement :
$$\begin{aligned}\frac{x^x - 1}{x} &= \frac{\mathrm{e}^{x\ln(x)} - 1}{x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{x\ln(x)} - \mathrm{e}^0}{x\ln(x)}\ln(x)\end{aligned}$$
Par composée, puisque $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, alors
$$\frac{\mathrm{e}^{x\ln(x)} - \mathrm{e}^0}{x\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \exp'(0) = 1$$

et donc par produit
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty.$$
La fonction f n'est donc pas dérivable en 0.
Bilan : f est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Remarquons que $f : x\mapsto\sqrt{x^3-x^2}$ est définie et continue si et seulement si $x^3-x^2\geqslant 0$, c'est-à-dire $x^2(x-1)\geqslant 0$. En dressant le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^3-x^2		$-$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, f est définie et continue sur $[1,+\infty[$. De même, elle est dérivable sur $]1,+\infty[$, et sa dérivée est
$$x\mapsto(3x^2-2x)\frac{1}{2\sqrt{x^3-x^2}}$$
Déterminons la dérivabilité potentielle de f en 1 :
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{x-1}=\sqrt{\frac{x^2}{x-1}}\xrightarrow[x\to 1]{}+\infty.$$
Ainsi, f n'est pas dérivable en 1.
Bilan : f est définie et continue sur $[1,+\infty[$, dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.
6. Notons $f : x\mapsto 1-\cos\left(\sqrt{|x-1|}\right)$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ par composée. De plus, elle est dérivable, par composée, sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, et :

- Sur $]1,+\infty[$, $f : x\mapsto 1-\cos(\sqrt{x-1})$ et donc
$$f' : x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\sin(\sqrt{x-1}).$$
- Sur $]-\infty,1[$, $f : x\mapsto 1-\cos(\sqrt{1-x})$ et donc
$$f' : x\mapsto\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\sin(\sqrt{1-x}).$$

Intéressons-nous à la dérivabilité à droite et à gauche en 1 :

- En 1^+ :
$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\frac{1-\cos(\sqrt{x-1})}{x-1}\\&=\frac{(1-\cos(\sqrt{x-1}))(1+\cos(\sqrt{x-1}))}{(x-1)(1+\cos(\sqrt{x-1}))}\\&=\frac{1-\cos^2(\sqrt{x-1})}{(x-1)(1+\cos(\sqrt{x-1}))}\\&=\frac{\sin^2(\sqrt{x-1})}{x-1}\,\frac{1}{1+\cos(\sqrt{x-1})}\\&=\left(\frac{\sin(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}}\right)^2\frac{1}{1+\cos(\sqrt{x-1})}\end{aligned}$$

Or $\sqrt{x-1}\xrightarrow[x\to 1]{}0$. Par composée et dérivabilité de sin en 0 :
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}}=\sin'(0)=1$$
soit, par composée et quotient
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}$$

- Par le même raisonnement, en 1^- :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \frac{1-\cos(\sqrt{1-x})}{x-1} \\ &= \frac{1-\cos^2(\sqrt{1-x})}{(x-1)(1+\cos(\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{\sin^2(\sqrt{1-x})}{-(1-x)}\frac{1}{1+\cos(\sqrt{1-x})} \\ &= -\left(\frac{\sin(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}}\right)^2 \frac{1}{1+\cos(\sqrt{1-x})} \xrightarrow[x\to 1^-]{} -1\times\frac{1}{2}\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 1, mais admet des demi-tangentes à gauche et à droite, avec $f'_d(1)=\frac{1}{2}$ et $f'_g(1)=-\frac{1}{2}$.
Bilan : f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, et admet en 1 des dérivées à droite et à gauche.

Exercice 7

L'idée est de se ramener à des taux d'accroissement.

1. On écrit, pour $x\neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{3\sin(x)-\sin(7x)}{\sin(x)+\sin(9x)} &= \frac{3\frac{\sin(x)}{x}-\frac{\sin(7x)}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}+\frac{\sin(9x)}{x}} \\ &= \frac{3\frac{\sin(x)}{x}-7\frac{\sin(7x)}{7x}}{\frac{\sin(x)}{x}+9\frac{\sin(9x)}{9x}} \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3\sin'(0)-\sin'(0)}{\sin'(0)+9\sin'(0)} = -\frac{2}{5}\end{aligned}$$

en utilisant la dérivabilité de sin en 0.

2. De la même manière, en utilisant la dérivabilité de tan et arctan :

$$\begin{aligned}\frac{\arctan(2x)}{\tan(3x)} &= \frac{2\frac{\arctan(2x)}{2x}}{3\frac{\tan(3x)}{3x}} \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2\arctan'(0)}{3\tan'(0)} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

3. On ré-écrit :

$$\frac{\sin(x\ln(x))}{x} = \frac{\sin(x\ln(x))}{x\ln(x)}\times\ln(x)$$

Or, par conséquence des croissances comparées, $x\ln(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Ainsi, par composée :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\ln(x))}{x\ln(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = \sin'(0) = 1.$$

Enfin, $\ln(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$. Par produit,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x\ln(x))}{x} = -\infty.$$

4. On constate que $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{x\sin(x-2)}{x^2+x-6} &= \frac{x\sin(x-2)}{(x-2)(x+3)}\\ &= \frac{x}{x+3}\frac{\sin(x-2)}{x-2}\\ &\xrightarrow[x\to 2]{} \frac{2}{5}\sin'(0)=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

en remarquant que

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=\sin'(0).$$

Exercice 8

Vu l'énoncé, on va procéder par récurrence. Soit P la proposition définie pour tout entier $n\geqslant 1$ par P_n : "f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et pour tout $x\neq -1$, $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$".

• Pour $n=1$, f est bien dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et pour tout réel x,

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

qui est une fonction continue sur $\mathcal{D}_f$. Donc f est $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x\neq 1$, $f'(x)=\frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$: P_1 est vraie.

• Supposons que P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^n$ et pour tout $x\neq -1$,

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Ainsi, $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, et

$$\forall\ x\neq -1,\ f^{(n+1)}(x)=-(n+1)\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+2}}$$

Cette fonction étant continue sur $\mathcal{D}_f$, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et pour tout $x\neq -1$,

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n\geqslant 1$.

Exercice 9

Tout d'abord, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ comme quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas.

1. Méthode classique : on met au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x} &= \frac{a(1+x)+b(1-x)}{(1-x)(1+x)}\\ &= \frac{(a-b)x+(a+b)}{1-x^2}\end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases}a-b=0\\ a+b=1\end{cases}\sim\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}$$

2. On dérive chacun des deux termes séparément (en s'inspirant de l'exercice **??**) et on obtient :

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\frac{1}{2}(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{\frac{1}{2}n!}{(1+x)^{n+1}}}$$

Exercice 10

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme polynôme et fonction exponentielle. La difficulté se trouve en 0.

• **Continuité** : on constate que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1+x+\dfrac{x^2}{2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$. Les deux limites étant égales, et valant $f(0)$, la fonction f est continue en 0, et donc f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

• **Caractère** $\mathcal{C}^1$: pour tout $x \in]-\infty;0[$, $f'(x) = 1+x$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$. On constate alors que

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 1+x = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f étant continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et f' admettant une limite finie en 0, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $f'(0) = 1$.

• **Caractère** $\mathcal{C}^2$: pour tout $x \in]-\infty;0[$, $f''(x) = 1$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) = \mathrm{e}^x$. On constate alors que

$$\lim_{x\to 0^-} f''(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f''(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f''(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f''(x)$. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f' étant continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et f'' admettant une limite finie en 0, f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et $f''(0) = 1$.

• **Dérivée troisième** : étant dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, montrons qu'elle n'est pas dérivable en 0 en déterminant les dérivées à droite et à gauche :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f''(x) - f''(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x) - f''(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Ainsi, $f_d^{(3)}(0) = 1$ et $f_g^{(3)}(0) = 0$: $f^{(2)}$ n'est donc pas dérivable en 0, et donc f n'est pas trois fois dérivables en 0.

□ On constate que $f^{(3)}(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f^{(3)}(x) = \mathrm{e}^x$ pour $x > 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f^{(3)}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(3)}(x) = 1$ qui sont des limites différentes. Mais en faisant cela, on ne montre pas que f n'est pas trois fois dérivables en 0. On montre simplement que la dérivée troisième n'est pas continue en 0, alors que $f^{(3)}(0)$ pourrait tout de même exister.

Exercice 11

Introduisons, pour $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et somme de fonctions dérivables (arctan et fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas) et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}\\
&= -\frac{1}{x^3+\frac{1}{4x}} - \frac{1}{(x+1)^2+x^2} + \frac{1}{x^2+(x-1)^2}\\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{-(x^2+(x-1)^2)+(x+1)^2+x^2}{((x+1)^2+x^2)(x^2+(x-1)^2)}\\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{x^2(x+1)^2+(x+1)^2(x-1)^2+x^4+x^2(x-1)^2}\\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{4x^4+1}
\end{aligned}$$

La fonction f est donc constante **sur chaque intervalle de** $\mathbb{R}^*$.

- Sur $\mathbb{R}_+^*$, prenons la limite en 0^+ :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$$

Par composée de limite,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

- Sur $\mathbb{R}_-^*$, prenons la limite en 0^- :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x} = -\infty$$

Par composée de limite,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

Exercice 12

Remarquons que, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
\tan\left(\arctan(1+x) - \arctan(x)\right) &= \frac{\tan(\arctan(1+x)) - \tan(\arctan(x))}{1+\tan(\arctan(1+x))\tan(\arctan(x))}\\
&= \frac{1+x-x}{1+(1+x)x} = \frac{1}{1+x+x^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant la fonction arctan :

$$\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \arctan(1+x) - \arctan(x).$$

On utilise alors le résultat précédent : pour tout entier k :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \arctan(1+k) - \arctan(k)\\
&= \arctan(1+n) - \arctan(0) \text{ par téléscopage}\\
&= \arctan(1+n)
\end{aligned}$$

Or, quand n tend vers $+\infty$, $1+n \to +\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 13

On applique le théorème du cours. Nous avons vu, tout d'abord, que arccos est la fonction réciproque de cos sur $[0, \pi]$ et arcsin est la fonction réciproque de sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
On remarque que, pour tout $x \in]0, \pi[$, $\cos'(x) \neq 0$ et donc arccos est dérivable sur $]-1, 1[$.
En $x = 0$ et en $x = \pi$, $\cos'(x) = 0$ et donc arccos n'est dérivable ni en $-1 = \arccos(\pi)$ ni en $1 = \arccos(0)$, et y admet des tangentes verticales.
De même, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\sin'(x) \neq 0$, donc arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$.
En $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin'(x) = 0$ et donc arcsin n'est dérivable ni en $-1 = \arcsin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ni en $1 = \arcsin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, et y admet des tangentes verticales.

Exercice 14

La fonction f est dérivable sur $[k-1; k]$ ($k \geqslant 2$) et pour tout réel $x \in [k-1; k]$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

Puisque f' est décroissante sur $[k-1; k]$, on a, pour tout réel x,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors, pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{k^2}(k-(k-1)) \leqslant f(k) - f(k-1) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}(k-(k-1))$$

soit

$$\frac{1}{k^2} \leqslant f(k) - f(k-1) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}$$

En additionnant ces inégalités pour k entre 2 et n (avec $n \geqslant 2$) :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(k-1) = f(n) - f(1) \text{ par téléscopage}$$

Puisque $f(n) \leqslant 0$ pour tout entier $n \geqslant 2$, on a enfin

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant -f(1) = 1$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$$

Ainsi, la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est majorée. De plus, elle est croissante, car

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (S_n) converge.

Remarque

La limite de la suite (S_n) est $\frac{\pi^2}{6}$, mais la démonstration est difficile.

Exercice 15

1. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une exponentielle et d'une fonction constante. On a, pour tout réel x

$$h'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$$

De plus, par composée, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$$

On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
h	$+\infty$ $\searrow$ 1

Puisque $h(1) \approx 1,4 \in [1,2]$ et $h(2) \approx 1,1 \in [1,2]$, par décroissance de h, on en déduit que $h([1,2]) \subset [1,2]$.

2.

> **Remarque**
> Pour montrer qu'une équation du type $f(x) = g(x)$ admet une unique solution, on introduit la fonction différence $h = f - g$, et on applique le théorème de la bijection à celle-ci.

Notons f la fonction définie sur $[1,2]$ par $f(x) = h(x) - x$. f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables, et sa dérivée est $h : x \mapsto h'(x) - 1 = -\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$.
La fonction f est donc continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[1,2]$. D'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $[1,2]$ sur $f([1,2])$.
Or $f(1) = h(1) - 1 \approx 0,4$ et $f(2) = h(2) - 2 \approx -0,9$. Ainsi, $0 \in f([1,2])$ et l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $[1,2]$, que l'on note α.
L'équation $h(x) = x$ admet une unique solution sur $[1,2]$.

3. On utilise le fait que $[1,2]$ soit stable par h. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n \in [1,2]$".
$u_0 = 1 \in [1,2]$ donc P_0 est vraie.
Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie.
Ainsi, $u_n \in [1,2]$. Puisque $[1,2]$ est stable par h, $h(u_n) \in [1,2]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [1,2]$: P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n :

$$\forall\ n, \quad u_n \in [1,2]$$

4. On rappelle que $h : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$. Mais alors :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ donc } & -1 \geqslant -x \geqslant -2 \\ & \text{soit } \mathrm{e}^{-1} \geqslant \mathrm{e}^{-x} \geqslant \mathrm{e}^{-2} \text{ car exp est croissante sur } \mathbb{R} \\ & \text{puis } -\mathrm{e}^{-1} \leqslant h'(x) \leqslant -\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

Or $-\mathrm{e}^{-2} < 0 < \frac{1}{\mathrm{e}}$ et donc

$$\forall\ x \in [1,2], \quad -\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant h'(x) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$$

c'est-à-dire $|h'(x)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$.

5. h est continue sur $[1,2]$, dérivable sur $]1,2[$ et pour tout $x \in]1,2[$, $|h'(x)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$. D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\ (x,y) \in [1,2]^2, \quad |h(y) - h(x)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}|y - x|$$

Posons alors $y = u_n \in\ [1,2]$ (d'après la question 3) et $x = \alpha \in [1,2]$ (d'après la question 2). On a alors

$$|h(u_n) - h(\alpha)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}|u_n - \alpha|$$

Or $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(\alpha) = \alpha$ (d'après question 2), d'où

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}|u_n - \alpha|$$

6. Soit Q la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n}$".
Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ donc $|u_0 - \alpha| = \alpha - 1 \in [0,1]$ (car $\alpha \in [1,2]$). Ainsi $|u_0 - \alpha \leqslant 1 = \frac{1}{\mathrm{e}^0}$: Q_0 est vraie.
Supposons la proposition Q_n vraie pour un certain entier n, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n}$. Mais alors

$$\frac{1}{\mathrm{e}}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{\mathrm{e}^n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}$$

Mais d'après la question précédente, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}|u_n - \alpha|$, donc

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}$$

Ainsi, Q_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, Q_n est vraie pour tout entier n et donc

$$\forall\ n, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}$$

7. Remarquons que $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$$

Exercice 16

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + 1 > 0$. Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1) - (\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$$

2. Pour tout réel x, $2\mathrm{e}^x > 0$ et $(\mathrm{e}^x + 1)^2 > 0$. Ainsi la dérivée f' est toujours strictement positive. De plus,

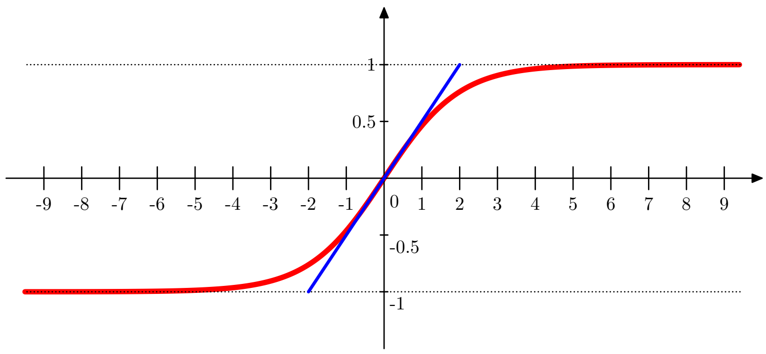
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \text{ par quotient}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = 1 \text{ par quotient}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1 ↗	1

3.



Exercice 17

1. f est continue sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues. On constate alors que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$$

car $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Ainsi, puisque $f(0)=0$, f est continue en 0.

Bilan : f est bien continue sur $]-1;+\infty[$.

2. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. On a

$$\forall\ x\in]-1;0[\cup[0;+\infty[,\quad f'(x) = \frac{(1-\frac{1}{1+x})x-(x-\ln(1+x))1}{x^2} = \frac{-\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)}{x^2}$$

3. On souhaite montrer que f' admet une limite quand x tend vers 0. On utilise l'indication en écrivant

$$\forall\ x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{-\frac{x}{x+1}+x-x+\ln(x+1)}{x^2} = \frac{-\frac{x}{x+1}+x}{x^2}+\frac{\ln(x+1)-x}{x^2} = \frac{1}{x+1}+\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$$

Puisque $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$, par somme,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2}$$

Ainsi, f est continue sur $]-1;+\infty[$, dérivable sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ et f' admet une limite en 0. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ et $f'(0)=\frac{1}{2}$.

4. f étant dérivable en 0, l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est donnée par

$$T_0 : y = f'(0)(x-0)+f(0) = \frac{1}{2}x$$

5. Remarquons déjà que

$$f'(x) = \frac{-\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)}{x^2} = \frac{-x+(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{g(x)}{x^2(x+1)}$$

Donc f' s'annule sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ si et seulement si g s'annule, et f' est du signe de g sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables, et

$$\forall\ x\in]-1;+\infty[,\quad g'(x) = \ln(1+x)+(1+x)\frac{1}{1+x}-1 = \ln(1+x)$$

Ainsi $g'(x)=0$ si et seulement si $1+x=1$, -c'est-à-dire si et seulement si $x=0$ qui n'appartient pas à $]-1;0[\cup]0;+\infty[$. De plus, en $x=0$, $f'(0)\neq 0$.

Bilan : la courbe de f n'admet pas de tangente horizontale.

De plus, $g'(x)>0 \Leftrightarrow \ln(1+x)>0 \Leftrightarrow 1+x>1 \Leftrightarrow x>0$ ce qui nous donne le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	0	↗	

6. D'après l'étude précédente, f' est du signe de g sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$. D'après les variations de g, g admet un minimum atteint en 0, et valant 0. Ainsi, g est strictement positive sur $]-1;+\infty[$ exceptée en 0, donc f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \ln(1+x) = -\infty$ donc par somme et quotient,

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$$

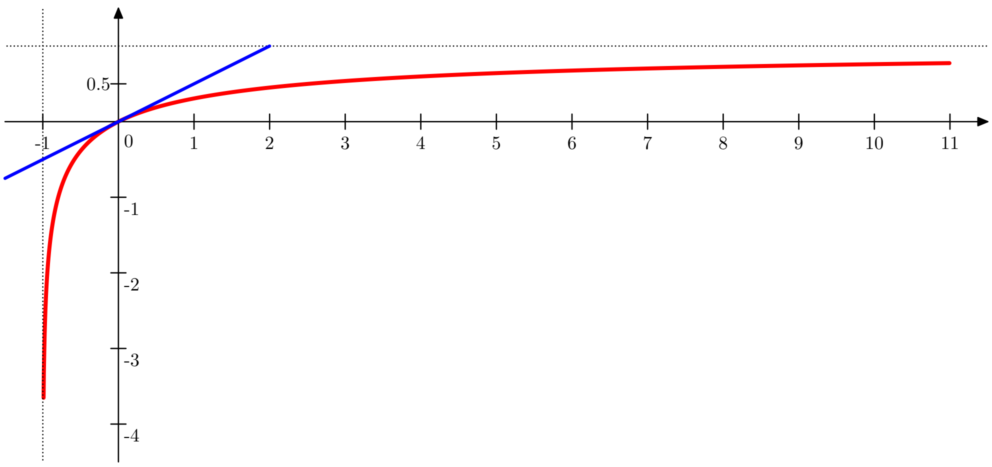
Enfin, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{x - \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, et par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1

7. En -1, la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$. En $+\infty$, la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. On obtient alors la courbe suivante :



Exercice 18

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et pour tout $x \neq 0$:

$$f(-x) = (-x)e^{-\frac{3}{|-x|}} = -xe^{-\frac{3}{|x|}} = -f(x)$$

en utilisant la parité de la fonction valeur absolue.
Bilan : la fonction f est impaire.

2. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues (exponentielle, inverse et valeur absolue). Constatons enfin que $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{3}{|x|} = -\infty$, donc par composée, $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}} = 0$. Par produit,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

La fonction f est donc également continue en 0.
Bilan : f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. □ – Attention à la valeur absolue ! On décomposera toujours $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Pour tout $x > 0$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}$ et pour tout $x < 0$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{3}{-x}} = x\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} + x\left(\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}\left(1 + \frac{3}{x}\right)$$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{3}{x}} + x\left(-\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{3}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{3}{x}}\left(1 - \frac{3}{x}\right)$$

Déterminons la limite de f' quand x tend vers 0 :

- Pour $x > 0$, posons $X = -\frac{3}{x}$. Alors,

$$\lim_{x\to 0^+} X = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0 \text{ ainsi que } \lim_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^x = 0 \text{ (croissances comparées)}$$

Par composée,

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} -\frac{3}{x}\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} = 0$$

Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$.

- De même, pour $x < 0$, posons $X = \frac{3}{x}$. Alors,

$$\lim_{x\to 0^-} X = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0 \text{ ainsi que } \lim_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^x = 0 \text{ (croissances comparées)}$$

Par composée,

$$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{3}{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x}\mathrm{e}^{\frac{3}{x}} = 0$$

Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$.
Ainsi, les limites à droite et à gauche étant égales, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.
Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée admet une limite finie en 0. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.
4. On a vu précédemment que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$ qui est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$. De même, pour tout $x < 0$, $f'(x) = \left(1 - \dfrac{3}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$ qui est également strictement positif sur $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, en posant $X = -\frac{3}{|x|}$

$$\lim_{x\to+\infty} X = \lim_{x\to-\infty} X = 0 \text{ et } \lim_{X\to 0} \mathrm{e}^x = 1$$

donc par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}} = 1$. Par produit, on en déduit donc que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

5. Puisque les limites en l'infini sont infinies, il faut étudier le comportement asymptotique. Or, pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}}$. D'après les limites étudiées précédemment, on obtient donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

On s'intéresse donc à $f(x) - x = x\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}} - 1\right)$.

• Pour $x > 0$, on peut écrire

$$f(x) - x = x(\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} - 1) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} - 1}{-\frac{3}{x}} \times (-3)$$

En posant $X = -\frac{3}{x}$, on constate que $\lim\limits_{x \to +\infty} X = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{X} = 1$ (limite du cours). Par composée,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} - 1}{-\frac{3}{x}} = 1$$

et par produit,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = -3$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

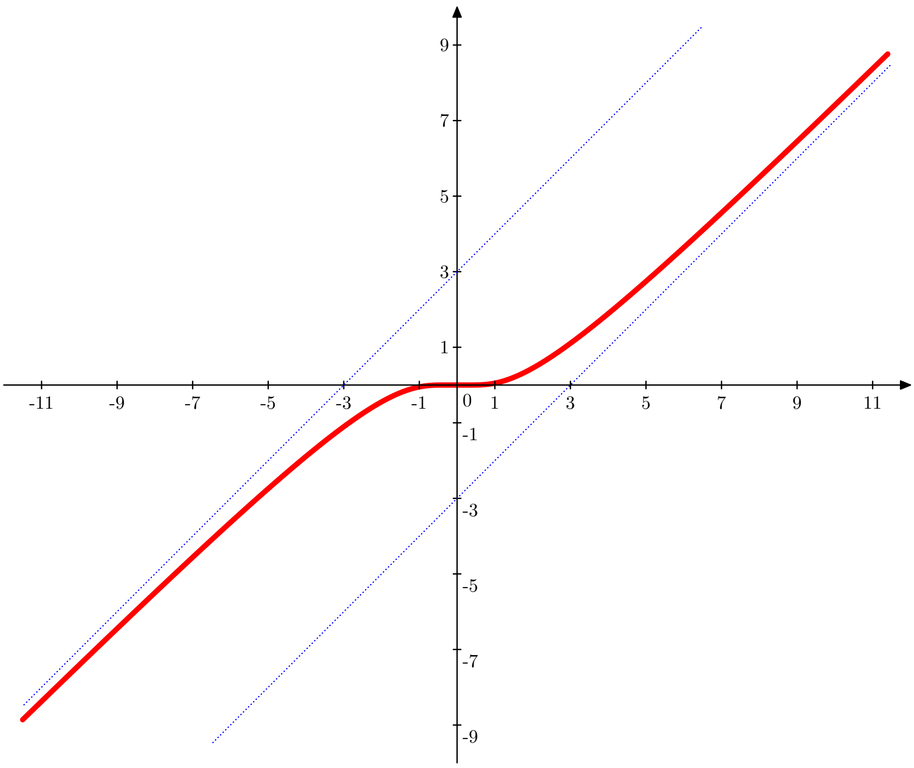
• De la même manière, pour $x < 0$, on peut écrire

$$f(x) - x = x\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{x}} - 1\right) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{x}} - 1}{\frac{3}{x}} \times 3$$

et par un même raisonnement

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = 3$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.
On obtient ainsi la courbe représentative suivante :



Exercice 19

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction logarithme) et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{4x} > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $f(1) = 4 \in [1, \mathrm{e}^2]$ et $f(\mathrm{e}^2) = 4 + \frac{1}{2} = 4,5 \in [1, \mathrm{e}^2]$. Par stricte croissance de f, $f([1, \mathrm{e}^2]) \subset [1, \mathrm{e}^2]$.
2. h est dérivable sur $[1, \mathrm{e}^2]$ comme somme de deux fonctions dérivables, et pour tout réel $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{4x} - 1 = \frac{1-4x}{4x}$$

Sur $[1, \mathrm{e}^2]$, $h'(x) < 0$ et donc h est strictement décroissante sur $[1, \mathrm{e}^2]$.
h est continue et strictement décroissante sur $[1, \mathrm{e}^2]$. Ainsi, h établit une bijection de $[1, \mathrm{e}^2]$ dans $h([1, \mathrm{e}^2]) = [4,5 - \mathrm{e}^2, 3]$. Or, $0 \in [4,5 - \mathrm{e}^2, 3]$. Ainsi, puisque h est bijective, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1, \mathrm{e}^2]$.
3. Récurrence classique, l'intervalle $[1, \mathrm{e}^2]$ est stable par f.
4.
a) $u_1 = 4 + \frac{\ln(4)}{4} > 4 = u_0$. Par récurrence ensuite, et puisque f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $u_{n+1} \geqslant u_n$, c'est-à-dire que u est croissante.
b) (u_n) est croissante, majorée par e^2. D'après le théorème de convergence monotone, u converge. D'après le théorème du point fixe, la fonction f étant continue sur $[1, \mathrm{e}^2]$, u converge vers un point fixe de f. Or, d'après la question 2, il y en a un seul.
Donc u converge vers α.
5. a) Sur $[1, \mathrm{e}^2]$:

$$1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^2 \quad \text{donc } 4 \leqslant 4x \leqslant 4\mathrm{e}^2$$
$$\text{soit } \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4x} \geqslant \frac{1}{4\mathrm{e}^2} \text{ car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

Ainsi,

$$-\frac{1}{4} < \frac{1}{4\mathrm{e}^2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4} \text{ soit } |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$$

f est continue sur $[1, \mathrm{e}^2]$, dérivable sur $]1, \mathrm{e}^2[$. D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\ (x, y) \in [1, \mathrm{e}^2], \quad |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{4}|y - x|$$

b) On prend $y = u_n \in [1, \mathrm{e}^2]$ et $x = \alpha \in [1, \mathrm{e}^2]$. Puisque $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, on a

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

c) On montre alors, par récurrence sur n, que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

d)
6. Il suffit de prendre $\left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| \leqslant 10^{-9}$, c'est-à-dire

$$n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{10^{-9}}{|u_0 - \alpha|}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$$

Exercice 20

1. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(x) = +\infty$ donc par somme,
$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$$
On obtient alors, pour tout $x>0$, $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{1}{x} - x\ln(x)$, et par produit et somme
$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$$
Ainsi, la courbe de φ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$.
2. φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions continues (ln et fonction carrée). De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0$ donc
$$\lim_{x\to0^+} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$$
La fonction φ est donc continue en 0.
Bilan : la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables (ln et fonction carrée). Pour tout réel $x>0$, on a
$$\varphi'(x) = -2x\ln(x) - x^2\times\frac{1}{x} = -x(2\ln(x)+1)$$
4. Déterminons le taux d'accroissement en 0 :
$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \frac{1-x^2\ln(x)-1}{x} = -x\ln(x)$$
Par croissance comparée,
$$\lim_{x\to0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = 0$$
Bilan : la fonction φ est dérivable en 0, et $\varphi'(0)=0$. La courbe de la fonction φ admet donc une (demi) tangente horizontale au point d'abscisse 0.
5. On a démontré que pour tout $x>0$, $\varphi'(x) = -x(2\ln(x)+1)$. Pour tout $x>0$, $-x<0$ et
$$2\ln(x)+1>0 \Leftrightarrow \ln(x) > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$ car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On obtient alors le tableau de signes et de variations suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$-x$		$-$		$-$	
$2\ln(x)+1$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	‖ 1	$\nearrow$	$\varphi\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

avec
$$\varphi\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{1}{2\mathrm{e}}$$
6. Sur $\left[0;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$, φ admet un minimum local qui vaut $1>0$. L'équation $\varphi(x)=0$ n'admet donc pas de solution sur $\left[0;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$.
Sur $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[$, φ est continue, strictement décroissante,et $\varphi\left(\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[\right) = \left]-\infty;1+\frac{1}{2\mathrm{e}}\right]$ et

$0 \in \left]-\infty; 1+\frac{1}{2\mathrm{e}}\right]$ car $1+\frac{1}{2\mathrm{e}} > 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution sur $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[$.
Bilan : l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\varphi\left(\sqrt{2}\right) = 1-(\sqrt{2})^2\ln(\sqrt{2}) = 1-2\times\frac{1}{2}\ln(2) = 1-\ln(2) \approx 0,3$$

et

$$\varphi(2) = 1-2^2\ln(2) = 1-4\ln(2) \approx -1,8$$

On a donc $\varphi(\sqrt{2}) > \varphi(\alpha) > \varphi(2)$. Par stricte décroissance de φ, on en déduit que $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

Exercice 21

1. En mettant au même dénominateur,

$$\varphi(x) = \frac{x\ln(x)-x\ln(x+1)+1}{x}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, et par produit, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x+1) = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)-x\ln(x+1)+1 = 1$. Et donc, par quotient,

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = +\infty$$

Ainsi, la courbe de φ admet une asymptote verticale, d'équation $x=0$.
2. On peut écrire

$$\forall\ x>0,\quad \varphi(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x}$$

Posons $X = \frac{x}{x+1}$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} X = 1 \text{ et } \lim_{X\to 1}\ln(X) = 0$$

Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$ et par somme

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$$

Ainsi, la courbe de φ admet une asymptote horizontale, d'équation $y=0$, au voisinage de $+\infty$.
3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (ln et fonction inverse).
On a

$$\forall\ x>0,\quad \varphi'(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2} = \frac{x(x+1)-x^2-(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

Pour tout $x>0$, $x^2>0$ et $x+1>0$. Ainsi, par quotient,

$$\forall\ x>0,\ \varphi'(x)<0$$

La fonction φ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. D'après ce qui précède, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$
$\varphi(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0

5. La fonction φ est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\varphi\left(]0;+\infty[\right) =]0;+\infty[$ et $1 \in]0;+\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
On constate que

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}+1\right) + \frac{1}{1/3} = -\ln(3) - (\ln(4) - \ln(3)) + 3 = 3 - 2\ln(2) \approx 1,6 > 1$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}+1\right) + \frac{1}{1/2} = -\ln(2) - (\ln(3) - \ln(2)) + 2 = 2 - \ln(3) \approx 0,9 < 1$$

Ains, $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) > \varphi(\alpha) > \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$. Par stricte décroissance de φ, on en déduit que

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

Exercice 22

1. On constate que

$$\varphi(x) = 2\ln(x) - 2\ln(2) + \frac{1}{x} = \frac{2x\ln(x) - 2x\ln(2) + 1}{x}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc par somme et produit, $\lim\limits_{x\to 0} 2x\ln(x) - 2x\ln(2) + 1 = 1$.
Et donc, par quotient,

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = +\infty$$

Ainsi, la courbe de φ admet une asymptote verticale, d'équation $x = 0$.
2. Puisque $\varphi(x) = 2\ln(x) - 2\ln(2) + \frac{1}{x}$, par somme et quotient,

$$\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

De plus,

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{2\ln(x)}{x} - \frac{2\ln(2)}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$. Par somme et quotient,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$$

Ainsi, la courbe représentative de la fonction φ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses en $+\infty$.
3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (ln et fonction inverse).
On a

$$\forall\ x > 0,\ \varphi'(x) = 2\frac{1/2}{x/2} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x-1}{x^2}$$

4. $x^2 > 0$ donc le signe de $\varphi'(x)$ est du signe de $2x - 1$. On obtient ainsi le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

avec $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{1/2} = -4\ln(2) + 2 \approx -0,8$.

5. Sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$, φ est continue (car dérivable) et strictement décroissante. De plus, $\varphi\left(\left]0; \frac{1}{2}\right]\right) = [\varphi(1/2); +\infty[$ et $0 \in [\varphi(1/2); +\infty[$ car $\varphi(1/2) < 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution, notée α sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$.
Sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, φ est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus, $\varphi\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\right) = [\varphi(1/2); +\infty[$ et $0 \in [\varphi(1/2); +\infty[$ car $\varphi(1/2) < 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution, notée β sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
Bilan : l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta$.

Exercice 23

1. Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ (fonctions usuelles). Par produit, f est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{e}}} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$$

2. $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est donnée, pour tout $x > 0$, par

$$f'(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x} + 2\sqrt{x}(-\mathrm{e}^{-x})$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\forall\ x > 0,\ f'(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}}$$

Pour déterminer si f est dérivable en 0, on détermine le taux d'accroissement de f en 0, noté T_0 :

$$\forall\ x > 0,\ T_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}}{x} = 2\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Remarquons que $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-x} = 1$. Par quotient,

$$\lim_{x \to +0^+} T_0(x) = +\infty$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 0, et la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.
Bilan : f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas en 0.
3. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = 2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x} = 2\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ (par croissance comparée) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, par quotient,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

Ainsi, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
4. On a vu que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1-2x}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}$. Puisque $\sqrt{x} > 0$, et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	0

5. On constate que g est la restriction de f à l'intervalle $I = \left[0; \frac{1}{2}\right]$. D'après l'étude précédente, g est continue sur I, strictement croissante sur I. D'après le théorème de la bijection, g établit une bijection de I sur $g(I) = \left[0; f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[0; \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\right]$.

6. Par théorème, g^{-1} est continue et de même variation de g. D'après le tableau de f, on obtient le tableau de variations suivant

x	0 $\qquad\qquad$ $\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$
$g^{-1}(x)$	$0 \nearrow \frac{1}{2}$

7. Pour tout réel $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$, $f'(x) \neq 0$. Par théorème, g^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0; \frac{1}{2}\right[\right) = \left]0; \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\right[$.

- En $x = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$, $g'\left(g^{-1}(x)\right) = g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. D'après un résultat du cours, g^{-1} n'est pas dérivable en $\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$ et la courbe de g^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse $x = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$.
- En $x = 0$, on a vu (question 2) que g n'est pas dérivable en 0 et que la courbe de g admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0. Par symétrie par rapport à l'axe $y = x$, la courbe de g va admettre une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

Remarque

On peut le montrer, en calculant la limite du taux d'accroissement, et **cette méthode est à connaitre**.

$$\lim_{x\to 0} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{g^{-1}(x)}{x}$$

Posons $X = g^{-1}(x)$, et donc $x = g(X)$. Par continuité de g^{-1} (comme fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone) on a

$$\lim_{x\to 0} X = \lim_{x\to 0} g^{-1}(x) = g^{-1}(0) = 0$$

et

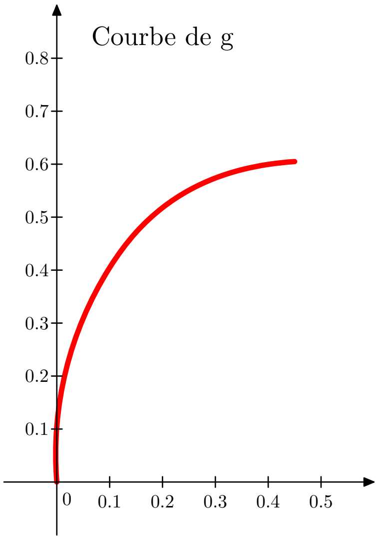
$$\lim_{X\to 0} \frac{X}{g(X)} = \lim_{X\to 0} \frac{1}{\frac{g(X)}{X}} = 0$$

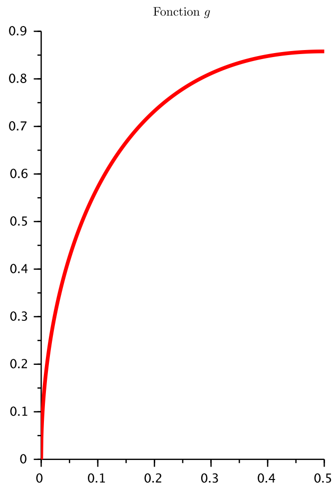
car $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{g(X)}{X} = +\infty$ (question 2). Par composée,

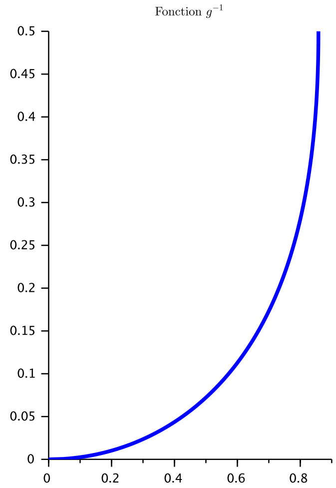
$$\lim_{x\to 0} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 0$$

Donc g^{-1} est dérivable en 0, et $(g^{-1})'(0) = 0$.

- En regroupant tous les résultats précédents, on obtient les graphiques suivants :







Exercice 24

1. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de polynôme et de fonction ln. Par ailleurs, puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, par somme

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1 = f(0).$$

Ainsi, f est également continue en 0.
Bilan : f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculons la limite du taux d'accroissement en 0 si elle existe :

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 - x\ln(x) - 1 - (-1)}{x} = x - \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 0, mais la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse 0 (car le taux d'accroissement a une limite infinie).
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de polynôme et fonction ln. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \left(\ln(x) + x\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x - \ln(x) - 1. \end{aligned}$$

f' est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de polynôme et ln. Pour tout réel $x > 0$, on a

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}.$$

Remarquons que $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$. Enfin : $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.
On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	
var de f'	||	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) \geqslant \ln(2) > 0$: f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et finalement f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, pour $x > 0$:

$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Par croissance comparée, $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Par somme et produit

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

On obtient alors le tableau suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $+$
var de f	-1 $\nearrow$ $+\infty$

4. Pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

et à nouveau par somme et produit,

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

5. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $f(\mathbb{R}_+^*) =]-1, +\infty[$.

6. Toujours d'après le théorème de la bijection, f^{-1} est également strictement croissante sur $]-1, +\infty[$. Enfin, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

7. f établit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-1, +\infty[$. Puisque, pour tout entier k, $k \in]-1, +\infty[$, on en déduit que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et également sur $\mathbb{R}^+$ (puisque $f(0) = -1 < 0$).

8. a) Remarquons que $f(1) = 1^2 - 1\ln(1) - 1 = 0$. Ainsi $x_0 = 1$.

b) Remarquons que $f(1,5) \approx 0,6 < 1$ et $f(2) \approx 1,6 > 1$. Par stricte croissante de f, on en déduit que $1,5 < x_1 < 2$. De même, $f(2) \approx 1,6 < 2$ et $f(2,5) \approx 3 > 2$ et finalement $2 < x_2 < 2,5$.

c) Par définition de (x_k) remarquons que pour tout entier k, $x_k = f^{-1}(k)$.

f^{-1} étant strictement croissante, on en déduit que la suite (x_k) est également strictement croissante (définition explicite de la suite). Enfin, puisque $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, par caractérisation séquentielle de la limite

$$x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty.$$

9. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonction inverse et fonction ln. Pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2}.$$

Puisque $x - 2 > 0 \iff x > 2$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
var de φ	$\|$	$\searrow$	$1+\ln(2)$	$\nearrow$	

10. Sur $[\frac{3}{2}, 2]$, φ est strictement décroissante. De plus, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1,73 < 2$ et $\varphi(2) \approx 1,69 > \frac{3}{2}$. On en déduit que

$$\varphi\left([\frac{3}{2}, 2]\right) \subset \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

et $[\frac{3}{2}, 2]$ est intervalle stable par φ.

11. Pour tout $x \in [\frac{3}{2}, 2]$:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2 &\implies \frac{9}{4} \leqslant x^2 \leqslant 4\\ &\implies \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

Mais alors, puisque $x-2 \leqslant 0$ sur $[\frac{3}{2}, 2]$:

$$\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2 \implies |\varphi'(x)| = \frac{|x-2|}{x^2} = \frac{2-x}{x^2}$$

et finalement, si $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$, $2-x \leqslant \frac{1}{2}$ et on obtient

$$\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right], \quad |\varphi'(x) \leqslant \frac{1}{2}\frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

12. Remarquons que si $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(x) = x \iff \frac{2}{x} + \ln(x) = x \iff 2 + x\ln(x) = x^2 \iff f(x) = 1.$$

Ainsi, x_1 est solution de l'équation $\varphi(x) = x$, et c'est l'unique d'après l'étude sur f vue précédemment.

13. La première est une récurrence usuelle, puisque $u_0 \in [\frac{3}{2}, 2]$ et $[\frac{3}{2}, 2]$ est un intervalle stable de φ.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. φ est continue sur $[\frac{3}{2}, 2]$ (car continue sur $\mathbb{R}_+^*$), dérivable sur $]\frac{3}{2}, 2[$ (car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$). Puisque $x_1 \in [\frac{3}{2}, 2]$ (question 8b) et $u_n \in [\frac{3}{2}, 2]$ pour tout n (encadrement précédemment), l'inégalité des accroissements finis appliquée à x_1 et u_n donne, en utilisant la majoration de $|\varphi'|$ vue en 9c :

$$|f(u_n - x_1)| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1|$$

soit

$$\boxed{|u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1|.}$$

Démontrons alors par récurrence sur n que la proposition P_n : « $|u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n$ » est vraie pour tout n.

- Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2} \leqslant x_1 \leqslant 2$, donc $0 \leqslant |u_0 - x_1| \leqslant 1 = \left(\frac{2}{9}\right)^0$. P_0 est vraie.

- On suppose que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n fixé. D'après l'inégalité vue précédemment :

$$|u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1 \implies |u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^n \text{ par H.R.}$$
$$\implies |u_{n+1} - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}.$$

Ainsi P_{n+1} est vraie et la proposition P est héréditaire.
Le principe de récurrence nous garantit finalement que

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n.}$$

14. Finalement, puisque $-1 < \frac{2}{9} < 1$, $\left(\frac{2}{9}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par théorème d'encadrement, on en déduit finalement que (u_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = x_1.}$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 25

1. Soit $x \in \,]a,\, b]$. g est continue sur $[a,\, x]$, dérivable sur $]a,\, x[$. Le théorème des accroissements finis garantit qu'il existe $c \in \,]a,\, x[$ tel que

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(c) \neq 0$$

ce qui assure que $g(x) \neq g(a)$.
2. Suivons l'indication. On introduit la fonction $h : x \mapsto f(x) - \alpha g(x)$, en imposant $h(a) = h(b)$, c'est-à-dire

$$f(a) - \alpha g(a) = f(b) - \alpha g(b) \iff \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

qui a un sens car, d'après ce qui précède, le dénominateur ne s'annule pas.
h est continue sur $[a,\, b]$, dérivable sur $]a,\, b[$ par somme. Enfin, $h(a) = h(b)$. Le théorème de Rolle permet d'affirmer qu'il existe $c \in \,]a,\, b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f'(c) - \alpha g'(c) = 0 \iff \frac{f'(c)}{g'(c)} = \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

3. On suppose que $x \longmapsto \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite ℓ. D'après le résultat précédent, pour tout $x \in \,]a,\, b[$, il existe $c_x \in \,]a,\, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Faisons tendre x vers a^+. c_x tend vers a puisque $c_x \in \,]a,\, x[$. D'après l'hypothèse

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \ell.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

4. On applique la règle de l'Hôpital.

• sin et $x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Alors
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$
et de même pour la limite à gauche.
• $x \mapsto 1-\cos(x)$ et $x \mapsto x^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et dérivables sur $\mathbb{R}^*$. $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Alors
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}$$
et de même pour la limite à gauche.
• Enfin, $x \mapsto \ln(1+x)-x$ et $x \mapsto x$ sont continues sur $]-1,+\infty[$, dérivables sur $]-1,+\infty[$. $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[$. Alors
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-x}{1+x}}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$
et de même pour la limite à gauche.

Exercice 26

1. Oui, il en existe : la fonction valeur absolue est un bon exemple. Elle n'est pas dérivable en 0 et pourtant, d'après l'inégalité triangulaire :
$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad ||x|-|y|| \leqslant |x-y|$$
et donc la valeur absolue est 1-lipschitzienne.
2. Soit f une fonction k-lipschitzienne et dérivable sur I. On se fixe $x \in I$ et $y \in I$ avec $y \neq x$. Alors :
$$|f(y)-f(x)| \leqslant k|y-x|$$
soit, en divisant par $|y-x|>0$:
$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant k$$
On fait tendre y vers x. $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \xrightarrow[y\to x]{} f'(x)$ et la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$. Par passage à la limite :
$$|f'(x)| \leqslant k.$$
Ceci étant vraie pour tout x, on en déduit que f' est bornée.
3. On s'intéresse à la réciproque : soit f une fonction dérivable sur I et telle que f' est bornée sur I. Il existe un réel $k \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $z \in I$
$$|f'(z)| \leqslant k.$$
Soient x et y deux éléments de I tels que $x<y$. f est dérivable sur I. D'après l'inégalité des accroissements finis :
$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant \max_{[x,\,y]}|f'| \leqslant k$$
soit, en multipliant $|y-x|>0$:
$$|f(y)-f(x)| \leqslant k|y-x|$$
Le résultat est le même si $x>y$ et on a ainsi démontré que f est k-lipschitzienne.

Exercice 27

f s'annule en exactement n points de $[a,\, b]$. Notons $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ les n points d'annulation.
Soit $i \in [\![1,\, n-1]\!]$.
Sur $[x_i,\, x_{i+1}]$, f est continue sur $[x_i,\, x_{i+1}]$, et dérivable sur $]x_i,,\, x_{i+1}[$ (car f est dérivable sur $[a,\, b]$). Enfin, $f(x_i) = f(x_{i+1})$. Le théorème de Rolle garantit qu'il existe $y_i \in\,]x_i,\, x_{i+1}[$ tel que $f'(y_i) = 0$.
Puisque les intervalles $]x_i,\, x_{i+1}[$ sont deux à deux disjoints, on a bien démontré qu'il existe au moins $n-1$ points $y_1, \ldots, y_{n-1}$ où f' s'annule.

Exercice 28

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. f est continue sur $[0,\, x]$, dérivable sur $]0,\, x[$. Le théorème des accroissements finis garantit qu'il existe $c \in\,]0,\, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c).$$

Or $f(0) = 0$ et, f' étant croissante, puisque $c < x$, $f'(c) \leqslant f'(x)$. Finalement

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant f'(x).$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$. Par quotient, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right).$$

D'après le résultat précédent, on en déduit que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) \geqslant 0$.
Ainsi, $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 29

Puisque $f' \geqslant 1$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle est également continue sur $\mathbb{R}$, puisque dérivable, le théorème de la bijection nous garantit que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$.
Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $x < y$. f est continue sur $[x,\, y]$, dérivable sur $]x,\, y[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in\,]x,\, y[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \geqslant 1$$

soit, puisque $y - x > 0$,

$$f(y) - f(x) \geqslant (y - x).$$

Prenons $x = 0$ et $y > 0$. Le résultat précédent devient

$$f(y) \geqslant y + f(0) \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty.$$

Par comparaison

$$\boxed{\lim_{y \to +\infty} f(y) = +\infty.}$$

Prenons $y = 0$ et $x < 0$. Le résultat donne cette fois-ci

$$-f(x) \geqslant -x - f(0) \iff f(x) \leqslant x + f(0) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty.$$

Par comparaison

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.}$$

On a donc bien montré que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.