Chapitre 13

Continuité

Résumé

On définit rigoureusement la notion déjà vue l'année dernière de continuité. C'est l'occasion de revoir le théorème des valeurs intermédiaires, et un corollaire important - le théorème de la bijection.

Plan du cours

Chapitre 13. **Continuité**

I. Généralités . . . 3
II. Théorème des valeurs intermédiaires . . . 6
III. Théorème de la bijection . . . 10
IV. Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie . . . 14
V. Suites récurrentes et continuité . . . 15
VI. Cas des suites implicites . . . 18
Exercices . . . 21
Corrigés . . . 26

> « *Une certaine continuité dans le désespoir peut engendrer la joie.* »
>
> Albert Camus (1913 – 1960). *Noces*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant la continuité :

- Savoir montrer qu'une fonction est continue en un point . . . . ☐
- Savoir prolonger de manière continue une fonction en un point . . . . ☐
- Savoir utiliser la continuité pour déterminer la limite d'une suite récurrente . . . . . . ☐

② Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer l'existence d'une solution à une équation du type $f(x) = a$ . . . . ☐

③ Savoir utiliser le théorème des bornes atteintes pour prouver l'existence d'un maximum ou d'un minimum . . . . ☐

④ Savoir utiliser le théorème de la bijection pour montrer qu'une fonction est bijective, et étudier le sens de variations d'une fonction réciproque . . . . ☐

⑤ Connaître la définition et les propriétés de la fonction arctan . . . . ☐

I. Généralités

1. Continuité en un point, sur un intervalle

Définition 13.1. Continuité en un point

Soit f une fonction, et I un **intervalle** inclus dans l'ensemble de définition de f.

- On dit que la fonction f est **continue à droite en un point** a de I si f admet une limite à droite en a, qui est égale à $f(a)$:
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$
- On dit que la fonction f est **continue à gauche en un point** a de I si f admet une limite à gauche en a, qui est égale à $f(a)$:
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$
- On dit que la fonction f est **continue en un point** a de I si f admet une limite en a, qui est égale à $f(a)$:
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Remarque

Ainsi, f est continue en a si et seulement si
$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ \ x \in I,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Définition 13.2. Continuité sur un intervalle

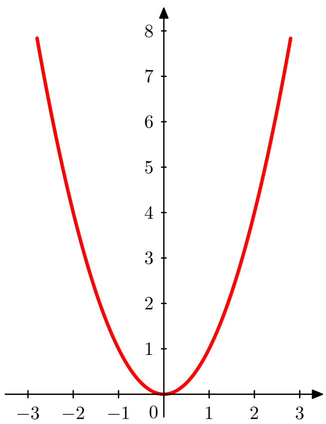
Soit f une fonction, et I un **intervalle** inclus dans l'ensemble de définition de f.
On dit que f est **continue sur l'intervalle I** si elle est continue en tout point de I.

Remarque (Somme, produit, quotient, composée)

Il résulte des théorèmes sur les limites que la **somme**, le **produit**, le **quotient** (là où il est défini) et la **composée** (là où elle est définie) de deux fonctions continues est continue. De même, la **valeur absolue** d'une fonction continue est également continue.

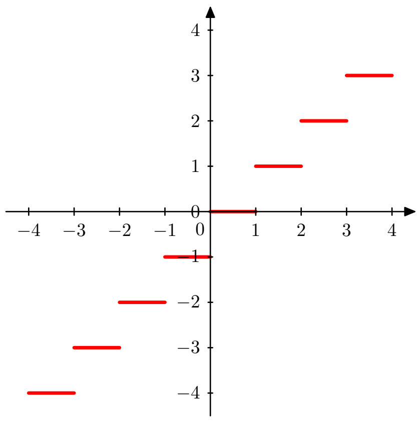
Exemple 13.1

La fonction carré est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.



Exemple 13.2

La fonction **partie entière** n'est pas continue en tout $k \in \mathbb{Z}$:



2. Continuité à droite et à gauche, et continuité

Un résultat vu sur les limites nous permet d'en déduire une propriété importante :

Propriété 13.1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a un point intérieur à I (c'est-à-dire que a n'est pas une borne de I).
f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction définie par morceaux est continue en un réel a, on calcule les limites à droite et à gauche en ce réel, et on montre que les deux limites valent $f(a)$.

Exemple 13.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

Solution

On a $f(0) = 1$. Constatons alors que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-0} = 1 = f(0)$$

Ainsi, f est continue à droite et à gauche en 0. Elle est donc continue en 0.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Karl Weierstrass (encore lui) donna vers 1850 la première définition de la continuité d'une fonction. C'est également lui qui donna les définitions rigoureuses de la dérivée, que l'on verra plus tard.

3. Continuité des fonctions usuelles

Proposition 13.2.

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonctions puissances $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Les fonctions puissances $x \mapsto x^a$ $(a \in \mathbb{R})$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonctions trigonométriques cos, sin, et tan sont continues sur leurs domaines de définition.

Démonstration

Admis. On verra dans un chapitre ultérieure qu'une fonction dérivable est continue, ce qui nous permet de conclure rapidement.

Proposition 13.3. Restriction d'une fonction continue

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $J \subset I$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Alors $f|_J$ est également continue.

Cela amène une remarque importante : la notion de continuité est une notion **locale**. Ainsi, si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est une fonction telle que f est continue sur $]a, c]$ et sur $[c, b[$, alors f est continue sur $]a, b[$. En effet, la continuité étant une notion locale, le seul soucis est en c. Or, étant continue sur $]a, c]$, f est continue à gauche en c et $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c)$; de même, par continuité sur $[c, b[$, $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c)$ et donc f est bien continue en c.

Attention

En revanche, si f est continue sur $]a, c[$ et sur $[c, b[$, on ne peut pas conclure, car la fonction n'est pas *a priori* continue à gauche en c.

Il suffit de prendre la fonction partie entière pour s'en convaincre.

4. Prolongement par continuité

Définition 13.3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf en un réel a. On suppose que f est continue sur $I \setminus \{a\}$, et qu'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

On dit qu'on peut **prolonger par continuité** la fonction f en posant $f(a) = \ell$. On définit ainsi une nouvelle fonction, définie sur I, qui est continue sur I et coïncide avec f sur $I \setminus \{a\}$.

Exemple 13.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\ln(x)$. Montrer que l'on peut prolonger par continuité f en 0.

Solution
On constate que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Ainsi, on peut prolonger par continuité f en 0 en posant $f(0) = 0$.

Remarque
Rigoureusement, on doit définir une nouvelle fonction $\tilde{f}$ qui est égale à f sur $I \setminus \{a\}$, et telle que $\tilde{f}(a) = \ell$. En pratique, on confondra toujours $\tilde{f}$ et f.

☞ *Exercices 1, 2, 3, 4 et 5.*

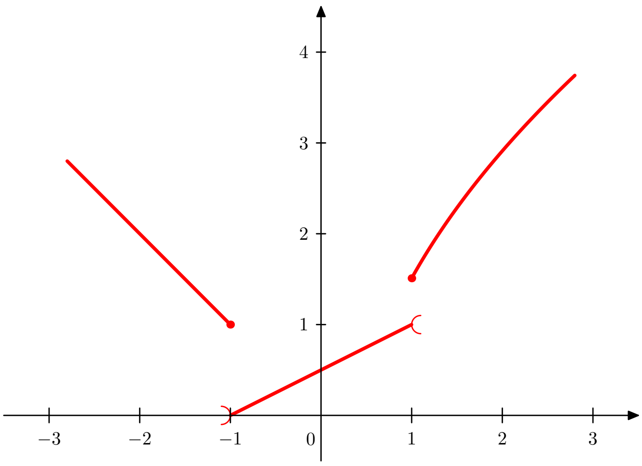
5. Tableau de variations et convention

Remarque
Dans un tableau de variation, on convient que les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

6. Continuité par morceaux

Définition 13.4.

Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur le segment $[a, b]$ s'il existe une **subdivision** $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ (c'est-à-dire un découpage du segment $[a; b]$) telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.



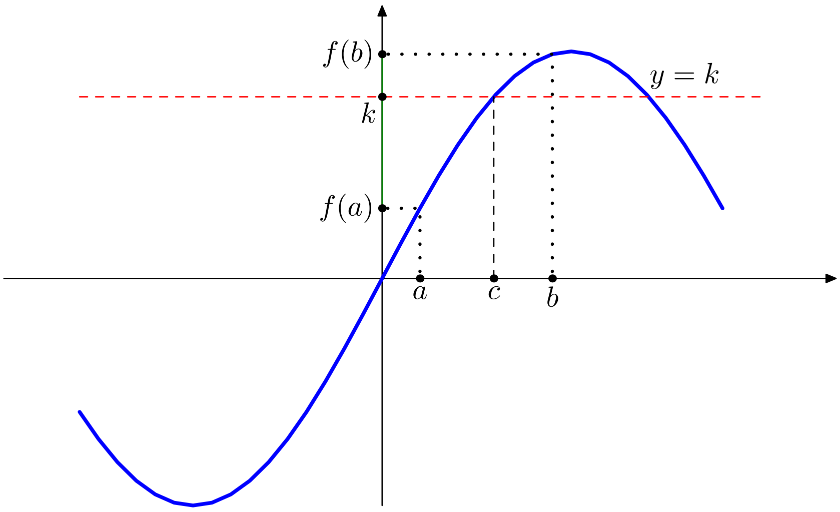
Exemple 13.5
La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. En effet, sur tout segment de la forme $]n; n+1[$ (où $n \in \mathbb{Z}$) le fonction est continue (car constante), et prolongeable par continuité en n et $n+1$.

II. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Théorème des valeurs intermédiaires sur un segment

Théorème 13.4. Théorème des valeurs intermédiaires I

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,\, b]$. Alors, pour tout réel k pris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c de l'intervalle $[a,\, b]$, tel que $f(c) = k$.



Démonstration

Si $k = f(a)$ ou $k = f(b)$, le résultat est trivial (il suffit de prendre respectivement $c = a$ et $c = b$). De même, si $f(a) = f(b)$, il suffit de prendre $c = a$.

Supposons alors $f(a) \neq f(b)$ et, quitte à remplacer f par $-f$, que $f(a) < f(b)$.

Soit $k \in \,]f(a),\, f(b)[$. Nous allons introduire deux suites par un découpage dit **par dichotomie**. On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout entier n :

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > k \\ \left(\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant k \end{cases}.$$

Par définition des suites, et qu'on peut montrer par récurrence sur n, on a les résultats suivants :

- Pour tout n, $f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$,
- (a_n) est croissante,
- (b_n) est décroissante.

De plus, par définition toujours,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

et donc la suite $(b_n - a_n)$ est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{2}$. Elle converge donc vers 0.

Ainsi, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Par théorème, elles convergent donc toutes les deux vers un même réel, que l'on note c. D'une part, $a_0 \leqslant c \leqslant b_0$ donc $c \in [a,\, b]$. D'autre part, par continuité de f sur $[a,\, b]$, on a

$$f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c) \quad \text{et} \quad f(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c).$$

Or, pour tout n, $f(a_n) \geqslant k$ et $f(b_n) < k$. Par passage à la limite, $f(c) \geqslant k$ et $f(c) \leqslant k$, c'est-à-dire $f(c) = k$.

Remarque

La méthode utilisée ici pour démontrer l'existence sera utilisé un peu plus tard pour écrire une fonction PYTHON déterminant une valeur approchée d'une solution d'une équation du type $f(x) = 0$.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Bernard Bolzano donna en 1817 la première démonstration analytique de ce théorème. **Weierstrass** en donna une autre plus tard, vers 1850.

Conséquence 13.5.

Soit f une fonction continue sur I. Si f ne s'annule pas sur I, alors f est strictement positive ou strictement négative.

Démonstration

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'elle change de signe. Il existe donc deux réels x et y de I tels que $f(x) > 0$ et $f(y) < 0$. Mais alors, puisque $0 \in [f(y), f(x)]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'un réel c entre x et y tel que $f(c) = 0$, ce qui est absurde.

2. Théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle

Le théorème précédent n'est valable que sur un segment $[a, b]$. On va le généraliser à un intervalle I tout entier.

Définition 13.5. Bornes supérieures et inférieures d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non vide.

Si f est majorée, on appelle **borne supérieure** de f, le nombre

$$\sup_{x \in I} f(x) = \sup \{f(x),\, x \in I\}.$$

Si f est minorée, on appelle **borne inférieure** de f, le nombre

$$\inf_{x \in I} f(x) = \inf \{f(x),\, x \in I\}.$$

Remarquons que le théorème de la borne supérieure nous garantit l'existence de ces valeurs. On peut alors énoncer une version plus large du théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème 13.6. Théorème des valeurs intermédiaires II

Soit f une fonction continue sur I, à valeurs réelles. Notons

$$M = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad m = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Alors, pour tout $k \in]m, M[$, il existe $c \in I$ tel que $f(c) = k$. Autrement dit, $]m, M[\subset f(I)$.

Démonstration

Soit $k \in]m, M[$. Par caractérisation de la borne supérieure (et inférieure), il existe $a \in I$ tel que $f(a) < k$ et il existe $b \in I$ tel que $f(b) > k$. Ainsi, $k \in [f(a),, f(b)]$. D'après le TVI sur un segment, il existe c entre a et b tel que $f(c) = k$. Comme $c \in I$, on en déduit que

$k \in f(I)$ et donc $]m, M[\subset f(I)$.

On a un exemple classique :

Exemple 13.6

Soit P une fonction polynomiale à coefficients réels de degré impair. Alors P admet au moins une racine.

Solution

En effet, puisque le degré est impair, les limites de P en $+\infty$ et $-\infty$ sont infinies et opposées l'une de l'autre. Ainsi, P n'est ni majorée, ni minorée et le résultat précédent assure, puisque $0 \in]-\infty, +\infty[$, qu'il existe au moins un réel c tel que $f(c) = 0$.

3. Théorème des valeurs intermédiaires général

On dispose d'un énoncé plus général :

Théorème 13.7. Théorème des valeurs intermédiaires II

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et à valeurs réelles. Alors l'image $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration

En utilisant les notations du théorème précédent, pour tout $x \in I$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, et donc $f(I)$ est inclus dans $]m, M[,]m, M], [m, M[$ ou bien $[m, M]$ (si ces intervalles ont un sens). Or, le TVI précédent nous assure que $]m, M[\subset f(I)$. Par conséquent, $f(I)$ est égal à $]m, M[$, $]m, M]$, $[m, M[$ ou bien $[m, M]$ et est donc un intervalle.

⚠ **Attention**

L'image d'un intervalle par une fonction continue n'est pas forcément un intervalle de même nature (caractère ouvert/fermé/semi-fermé).

4. Théorème des bornes atteintes

Les fonctions continues sur un segment vérifient une propriété fondamentale : les bornes supérieures et inférieures sont nécéssairement atteintes.

Définition 13.6.

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ atteint ses bornes s'il existe $s \in I$ et $t \in I$ tels que

$$f(s) = \inf_{x \in I} f(x) \quad \text{et} \quad f(t) = \sup_{x \in I} f(x).$$

Dans ce cas, on note plutôt

$$f(s) = \min_{x \in I} f(x) \quad \text{et} \quad f(t) = \max_{x \in I} f(x).$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 13.8.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrons tout d'abord que f est bornée.

On suppose par l'absurde qu'elle ne l'est pas. On construit deux suites par dichotomie de telle sorte que, pour tout n, $a_n < b_n$ et f n'est pas bornée sur $[a_n, b_n]$.

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a construit $a_n$et b_n tels que $a_n < b_n$ et f n'est pas bornée sur $[a_n, b_n]$. On pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} \in [a_n, b_n]$. Puisque f n'est pas bornée sur $[a_n, b_n]$, elle n'est pas bornée sur $[a_n, c_n]$ ou bien sur $[c_n, b_n]$. Si elle n'est pas bornée sur $[a_n, c_n]$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Sinon, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Par construction, (a_n) et (b_n) sont adjacentes (même raisonnement que pour le TVI) et convergent donc toutes les deux vers un réel $c \in [a, b]$. Par continuité de f en c, f est bornée au voisinage de c : il existe $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall \ x \in I \ \cap [c - \alpha, c + \alpha], \ |f(x)| \leqslant M.$$

Mais alors, puisque (a_n) et (b_n) convergent vers c, il existe deux rangs n_0 et n_0' tels que

$$\forall \ n \geqslant n_0, \ a_n \in I \ \cap [c - \alpha, c + \alpha] \quad \text{et} \quad \forall \ n \geqslant n_0', \ b_n \in I \ \cap [c - \alpha, c + \alpha].$$

Mais alors, posons $N = \max(n_0, n_0')$. D'après ce qui précède, $a_N \in I \ \cap [c - \alpha, c + \alpha]$ et $b_N \in I \ \cap [c - \alpha, c + \alpha]$, donc $[a_N, b_N] \subset I \ \cap [c - \alpha, c + \alpha]$. Et finalement

$$\forall \ x \in [a_N, b_N], \quad |f(x)| \leqslant M.$$

f est donc bornée sur $[a_N, b_N]$ ce qui est absurde.

Il reste enfin à prouver que les bornes sont atteintes. On suppose par l'absurce que ce n'est pas le cas. On note m la borne inférieure de f sur $[a, b]$ qu'on suppose non atteinte. On a donc, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > m$. On pose alors $g : x \mapsto \dfrac{1}{f(x) - m}$. Elle est bien définie, positive et continue sur $[a, b]$. D'après ce qui précède, g est bornée, donc majorée. On note $K > 0$ un majorant de g. On a alors

$$\forall \ x \in [a, b], \quad \frac{1}{f(x) - m} \leqslant K$$

soit

$$\forall \ x \in [a, b], \quad f(x) \geqslant m + \frac{1}{K}$$

ce qui contredit le fait que m soit le plus grand des minorants.

On peut ré-écrire ce théorème ainsi :

Théorème 13.9. Image d'un segment par une fonction continue

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, avec $a < b$, alors

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

existent et on a $f([a, b]) = [m, M]$.

III. Théorème de la bijection

1. Enoncé

Dans le cas d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle, on dispose d'un théorème plus intéressant encore :

Théorème 13.10. Théorème de la bijection

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I alors

- f est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$,
- la bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation que f,
- la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Théorème 13.11. Théorème de la bijection

Soit f une fonction **continue strictement monotone** sur l'intervalle $I = [a, b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une **unique solution** dans $[a; b]$.

Démonstration

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = k$. Il reste à montrer l'unicité.

Or nous avons vu dans le chapitre 7 qu'une fonction strictement monotone était nécessairement injective. Ainsi, l'équation $f(x) = k$ admet au plus une solution.

Finalement, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Proposition 13.12.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, les courbes représentatives de f et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration

Soit $f : E \to F$ et $f^{-1} : F \to E$ sa fonction réciproque. Par définition,

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Ainsi, $(x, y = f(x)) \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si $(y, x = f^{-1}(y)) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$.

Or les points (a, b) et (b, a) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. On en déduit donc le résultat.

Méthode

On utilise le théorème de la bijection pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution à une équation, ou bien pour démontrer qu'une fonction est une bijection.

Pour démontrer que f est une bijection de I dans un intervalle J ainsi :

- on montre que f est continue et strictement monotone sur I,
- on écrit « d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I dans $f(I)$ »,

- et on déterminer $f(I)$ à l'aide du tableau suivant :

$f \quad \backslash \quad I$	$[a, b]$	$]a, b]$	$[a, b[$	$]a, b[$
st. $\nearrow$	$[f(a), f(b)]$	$\left]\lim\limits_a f, f(b)\right]$	$\left[f(a), \lim\limits_b f\right[$	$\left]\lim\limits_a f, \lim\limits_b f\right[$
st. $\searrow$	$[f(b), f(a)]$	$\left[f(b), \lim\limits_a f\right[$	$\left]\lim\limits_b f, f(a)\right]$	$\left]\lim\limits_b f, \lim\limits_a f\right[$

Pour démontrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution ainsi :

- on montre que f est continue et strictement monotone sur I,
- on écrit « d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I dans $f(I)$ »,
- on détermine $f(I)$ par le tableau précédent,
- et on montre que $k \in f(I)$.

Exemple 13.7

On suppose que la fonction f est continue, et que ses variations sont décrites dans le tableau suivant :

x	0	5
$f(x)$	-3 $\nearrow$	4

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0; 5]$.

Solution

- f est continue sur $[0, 5]$;
- f est strictement croissante sur $[0, 5]$.

D'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $[0, 5]$ sur $f([0, 5]) = [-3, 4]$. Or $0 \in [-3, 4]$; doncl'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0; 5]$.

Exercice 13.8

Prouver que l'équation $(E) : x\sqrt{x} = 1 - x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Solution

On se ramène à une écriture $f(x) = k$: $x + x\sqrt{x} = 1$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + x\sqrt{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée vaut

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante, et continue sur $]0; +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, elle établit donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur

$$f(]0, +\infty[) = \left]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty}, f(x)\right[=]0, +\infty[$$

qui contient 1.
L'équation $f(x) = 1$ possède donc une unique solution sur $]0; +\infty[$.

2. Une application : la fonction arctangente

Proposition 13.13.

La fonction tangente est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée **arctangente**, notée arctan.
Cette fonction est impaire, continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = +\frac{\pi}{2}.$$

On a également $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Démonstration

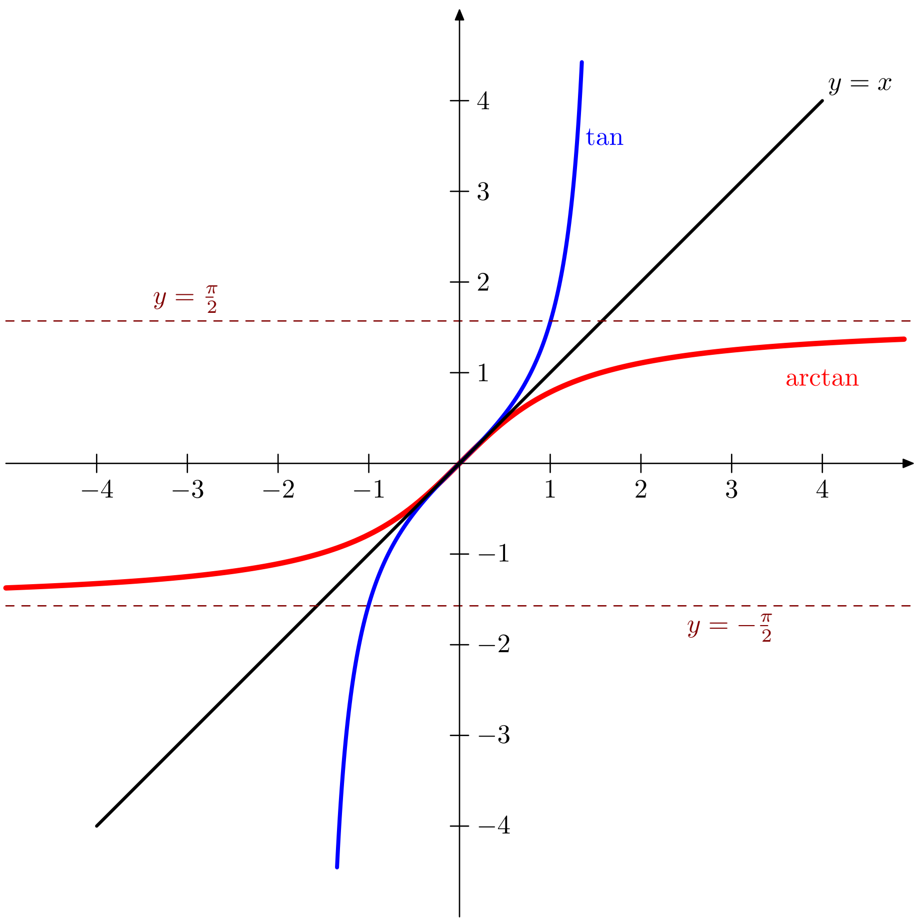
La fonction tan est continue et strictement croissante sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Le théorème de la bijection nous assure qu'elle réalise une bijection de I sur $f(I)$ et que sa réciproque arctan est continue et strictement croissante sur $f(I)$. Puisque

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty,$$

la proposition précédente entraîne que $f(I) =]-\infty, \infty[$.
tan est impaire donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

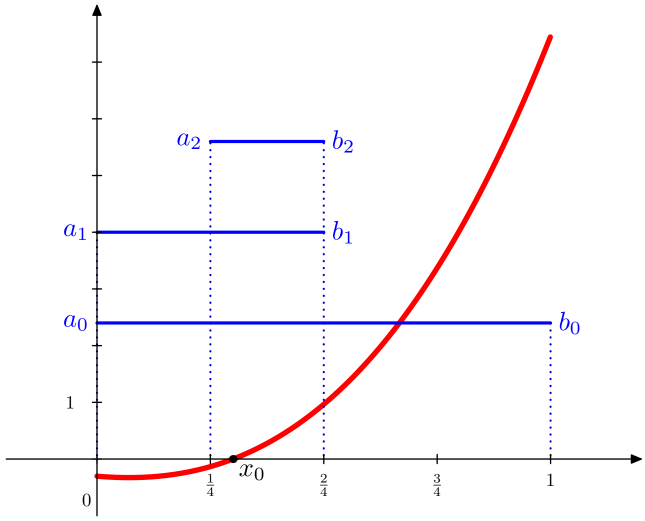
$$\tan(\arctan(-x)) = -x = -\tan(\arctan(x)) = \tan(-\arctan(x))$$

et donc, puisque tan est injective sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(-x) = \arctan(x)$.
Enfin, $\tan(0) = 0$ donc $\arctan(0) = 0$, et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ donc $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.



IV. Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

Dans le cas d'une fonction continue, et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signe contraire, on peut déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ par **dichotomie** : on découpe au fur et à mesure l'intervalle en 2 pour pouvoir cibler la solution, en utilisant les idées de la démonstratoin du théorème des valeurs intermédiaires.



COMPLÉMENT CULTUREL

Le mot dichotomie vient du grec *dikha* (*en deux*), et *tomein* (*couper*), c'est à dire « couper en deux ».

Algorithme 13.14.

Dans cet algorithme, e représente la précision de la valeur approchée.

Algorithme 1 : DICHOTOMIE

Entrées : Saisir a, b et e

Tant que $b - a \geqslant e$

    $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$

    si $f(a) \times f(m) \leqslant 0$ **alors**

        $b \leftarrow m$

    sinon

        $a \leftarrow m$

    fin

FinTantque

Sorties : Afficher a et b

En Python, cela donne (à condition que la fonction f ait été définie, dans le cas f croissante par exemple) la fonction suivante, où $[x;y]$ désigne l'intervalle de recherche de départ, et `eps` la précision :

Code Python

```
''' On suppose que f est définie précédemment
dicho prend trois arguments x, y, eps :
- [x,y] représente l'intervalle de recherche de départ
- eps la précision voulue'''

```

```python
def f(x): return x**2-2   # un exemple avec f : x ↦ x^2 − 2

def dicho(x,y,eps):
    a=x
    b=y
    while (b-a > eps):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m) <= 0:
            b=m
        else:
            a=m
    return [a,b]
```

ce qui donne par exemple :

Console Python

```
>>> dicho(0,2,0.001)
[1.4140625, 1.4150390625]
```

V. Suites récurrentes et continuité

La continuité va nous permettre de simplifier l'étude des suites récurrentes, mais également de pouvoir déterminer les limites des suites récurrentes convergentes.

1. Intervalle stable

Rappel

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $J \subset I$. On dit que J est un intervalle **stable** de f si $f(J) \subset J$, c'est-à-dire si

$$\forall\ x \in J, \quad f(x) \in J$$

Exemple 13.9

Par exemple, l'intervalle $[0,1]$ est un intervalle stable de la fonction carrée. En effet, pour tout $x \in [0,1]$, on a $x^2 \in [0,1]$.

Méthode

Pour démontrer qu'un intervalle I est stable, on dispose de deux méthodes classiques :

1. Si I est un intervalle du type $I = [a,\, b]$, on part de $a \leqslant x \leqslant b$ et on essaie de raisonner par implication pour démontrer que $a \leqslant f(x) \leqslant b$.
2. Sinon, on étudie les variations de f, et en utilisant les monotonies de f et l'éventuelle continuité, on conclut.

Exercice 13.10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout x par $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$. Montrer que $[-1;2]$ est un intervalle stable de f.

Solution

f est un trinôme du second degré. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

Sur $[-1;2]$, f est croissante. On a $f(-1)=-1$ et $f(2)=2$. Par croissance et continuité de f, on en déduit que $f([-1;2])=[-1;2]$.
Sans la continuité, mais uniquement avec la monotonie, on en déduit que $f([-1;2])\subset[-1;2]$, ce qui est souvent suffisant.

Les intervalles stables sont très pratiques pour l'étude des suites récurrentes :

Théorème 13.15. Rappel

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $J\subset I$ et soit u la suite définie par $u_0\in I$ et pour tout n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
Si $u_0\in J$ et J est un intervalle stable de f, alors pour tout n, $u_n\in J$.

Démonstration

Cela se montre rapidement par récurrence. Soit P la proposition définie pour tout n par $P_n : u_n\in J$.

- Pour $n=0$, par hypothèse, $u_0\in J$ donc P_0 est vraie.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n\in J$. Or J est un intervalle stable de f, donc $f(u_n)\in J$. Or, par définition, $u_{n+1}=f(u_n)$ et donc $u_{n+1}\in J$ et donc P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout n, et donc

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\quad u_n\in J$$

Remarque

Cela permet ainsi de montrer qu'une suite récurrente est bornée, en cherchant un intervalle stable de la fonction sous-jacente.

Exercice 13.11

Soit u la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier n, $u_{n+1}=f(u_n)$, avec $f : x\mapsto \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$. Montrer que pour tout n, $u_n\in[-1;2]$.

Solution

On a montré dans l'exercice 13.10 que l'intervalle $[-1;2]$ est stable par f. Puisque $u_0=1\in[-1;2]$, d'après le théorème précédent, on a bien que pour tout n, $u_n\in[-1;2]$.

Remarque

En pratique, cette dernière récurrence sera systématiquement à rédiger, mais appliquée au contexte de l'exercice.

2. Théorème du point fixe

La continuité va permettre de déterminer la limite d'une suite définie sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, lorsque f est continue.

Théorème 13.16.

Soit f une fonction continue, et ℓ un réel. Soit (u_n) une suite convergente, de limite ℓ. Alors la suite $(f(u_n))$ converge également, et a pour limite $f(\ell)$.

Remarque

Si f n'est pas continue en x_0 mais si la fonction f a pour limite ℓ en x_0, alors quelle que soit la suite (u_n) de limite x_0, $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Théorème 13.17. Théorème du point fixe

Soit f une fonction continue, et u une suite définie par u_0 donné, et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite u est convergente, alors par passage à la limite, en notant ℓ la limite de u, on en déduit que la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$: c'est donc un **point fixe** de la fonction f.

Méthode

Le théorème précédent permet souvent de déterminer la limite d'une suite définie par récurrence lorsqu'elle est convergente.

Exercice 13.12

Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Montrer que la suite u est croissante, et que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. En déduire que la suite u converge, et déterminer sa limite.

Solution

1. Méthode classique : on montre par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   Pour tout entier n, soit P_n la proposition définie par "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: P_0 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie.
     On a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc
     $$\sqrt{0} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant 1$$
     et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: P_{n+1} est donc vraie : la propriété est héréditaire.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n :
     $$\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

   Pour tout entier n, soit Q_n la proposition définie par "$u_n \leqslant u_{n+1}$".
   Remarque : on aurait pu, aussi, montrer que $[0;1]$ est un intervalle stable de la fonction racine, puis de démontrer rapidement par récurrence que pour tout n, $u_n \in [0;1]$.

- Initialisation : pour $n=0$, on a $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_1=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}>u_0$. $u_0\leqslant u_1$: Q_0 est vraie.
- Hérédité : supposons que la propriété Q_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
  On a $u_n\leqslant u_{n+1}$. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc
  $$\sqrt{u_n}\leqslant\sqrt{u_{n+1}}$$
  et donc $u_{n+1}\leqslant u_{n+2}$: Q_{n+1} est donc vraie : la propriété est héréditaire.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout entier n :
  $$\forall\ n,\ u_n\leqslant u_{n+1}$$
  La suite u est donc croissante.

Remarque : on aurait également pu démontrer, par récurrence, les deux propositions en une seule, en démontrant “$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$”.

2. La suite u est donc croissante et majorée. D'après le théorème de convergence monotone, celle-ci converge. Notons ℓ sa limite. Puisque la fonction racine est continue sur $]0;+\infty[$, on en déduit par passage à la limite que que $\ell=\sqrt{\ell}$, c'est à dire $\ell=0$ ou $\ell=1$. Or, puisqu'elle est croissante,
$$\text{Pour tout }\ n,u_n\geqslant u_0=\frac{1}{2}$$
La limite est donc 1.

☞ *Exercice 14*

VI. Cas des suites implicites

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie **implicitement** lorsque, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit u_n comme l'unique solution d'une certaine équation dépendant de n.

Exemple 13.13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie en posant, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n la plus grande solution de l'équation $x^{n+2}+x^{n+1}+x=1$.

La première chose à faire quand on rencontre une telle suite (l'énoncé le demande) est de justifier que la suite est bien définie, c'est-à-dire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation admet une unique solution u_n).
Dans le cas d'une suite implicite, le théorème de la bijection peut nous être très utile.

1. Le fas $f(u_n)=n$

Supposons qu'il existe une fonction f continue, strictement monotone et telle que $\mathbb{N}\subset f(I)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad f(u_n)=n$$
La démarche, guidée en concours, est la suivante :

- On utilise le théorème de la bijection pour assurer que f réalise une bijection de I dans $f(I)$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme $n\in f(I)$, il existe un unique x tel que $f(x)=n$. Ce x dépend de n donc on le note u_n. Cela garantit que la suite est bien définie.
- On remarque que, pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n=f^{-1}(n)$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc la même monotonie que la fonction f^{-1} et donc la même monotonie

que la fonction f (d'après le théorème de la bijection).

- Dans le cas où f est strictement croissante, en notant b l'extrémité droite (éventuellement infinie) de I, on a $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$ donc $f^{-1}(y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} b$ et donc $u_n = f^{-1}(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b$.
  Dans le cas où f est strictement décroissante, en notant a l'extrémité gauche (éventuellement infinie) de I, on a $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ donc $f^{-1}(y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} a$ et donc $u_n = f^{-1}(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.

Exemple 13.14

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n l'unique réel de $]0,\, 1]$ tel que $u_n - \ln(u_n) = n+1$. Montrer que la suite est bien définie, étudier ses variations et sa limite éventuelle.

Solution

- La fonction $f : x \longmapsto x - 1 - \ln(x)$ est dérivable sur $]0;1]$. Pour tout $x \in]0;1]$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \leqslant 0$ et f' ne s'annule qu'en 1 . Ainsi f est strictement décroissante sur $]0;1]$. Le théorème de la bijection assure alors que f réalise une bijection de $]0,\, 1]$ sur $f(]0,\, 1]) = [f(1); \lim_0 f[= [0,\, +\infty[$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in]0,\, 1]$ tel que $f(u_n) = n$ c'est-à-dire tel que $u_n - \ln(u_n) = n+1$.
- On a même $u_n = f^{-1}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque f est strictement décroissante sur $]0,\, 1]$, f^{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (d'après le théorème de la bijection). On en déduit que la $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- On a $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ donc $f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

2. Le cas $f_n(u_n) = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne une fonction f_n continue et strictement monotone sur un intervalle I_n tel que $0 \in f_n(I_n)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f_n(u_n) = 0$$

La première chose à faire est d'essayer de réécrire le problème sous la forme $g(u_n) = n$ avec g une fonction qui ne dépend pas de n. Dans ce cas, on procède comme dans la paragraphe précédent. Si ce n'est pas possible, la démarche, guidée en concours, est la suivante :

- On se donne $n \in \mathbb{N}$. On utilise le théorème de la bijection pour assurer que f_n réalise une bijection de I_n dans $f_n(I_n)$. Ainsi, comme $0 \in f_n(I_n)$, il existe un unique x tel que $f_n(x) = 0$. Ce x dépend de n donc on le note u_n. Cela garantit que la suite est bien définie.
- On étudie le signe de $f_{n+1}(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  - Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) \geqslant 0$. On a alors $f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1})$. Si f_{n+1} est strictement croissante (resp. décroissante) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \geqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \leqslant u_{n+1}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante).
  - Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) \leqslant 0$. On a alors $f_{n+1}(u_n) \leqslant f_{n+1}(u_{n+1})$. Si f_{n+1} est strictement croissante (resp. décroissante) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).
- Pour la limite de la suite, la monotonie assure son existence (finie ou infinie selon que la suite est bornée ou pas). Comme pour les suites « du type $u_{n+1} = f(u_n)$ » (étudiées dans le chapitre 7), on peut éventuellement raisonner par l'absurde pour montrer que la suite est non majorée/minorée. Le passage à la limite dans la relation $f_{n+1}(u_n) = 0$ permet souvent de trouver la limite. Laissez-vous guider sinon.

Exemple 13.15

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la plus grande solution de l'équation $x^{n+2} + x^{n+1} + x = 1$. Montrer que la suite est bien définie, étudier ses variations et sa limite éventuelle.

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \longmapsto x^{n+2} + x^{n+1} + x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle vérifie $f_n(0) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$(par somme de fonctions qui le sont). Ainsi, le théorème de la bijection assure que f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $f_n(\mathbb{R}^+) = [-1, +\infty[$.

Puisque $0 \in [1, +\infty[$, il existe un unique antécédent à 0 par f_n dans $\mathbb{R}^+$. C'est forcément le plus grand des antécédents (s'il y en a un autre, il se trouve dans $\mathbb{R}_-^*$). Notons u_n cet antécédent.

Remarquons que $f_n(1) = 2 > 0 = f_n(u_n)$ donc, puisque f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $u_n \in]0, 1[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= u_n^{n+3} + u_n^{n+2} + u_n - 1 \\ &= u_n^{n+3} + f_n(u_n) - u_n^{n+1} = u_n^{n+1}\left(u_n^2 - 1\right) \end{aligned}$$

Puisque $u_n \in]0, 1[$, on a $u_n^2 - 1 < 0$ et donc $f_{n+1}(u_n) < 0$. Ainsi $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$. Puisque f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient que $u_n < u_{n+1}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Puisqu'elle est majorée par 1 , le théorème de la limite monotone assure que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel $\ell \in]0, 1]$. Si $\ell < 1$, alors $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell) < 0$ et donc $1 = u_n^{n+2} + u_n^{n+1} + u_n = e^{(n+2)\ln(u_n)} + e^{(n+1)\ln(u_n)} + u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + 0 + \ell = \ell$.

Par unicité de la limite, on a donc $\ell = 1$. C'est absurde donc $\ell = 1$.

Conclusion : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercices

13

Exercices

Continuité

●○○ **Exercice 1 Continuité - I** (10 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\ln(x)$ pour $x > 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

●○○ **Exercice 2 Continuité - II** (10 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$, et $f(x) = \mathrm{e}^x$ pour $x \geqslant 0$. La fonction f est-elle continue ?

●○○ **Exercice 3 Continuité - III** (10 min.)

Etudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto x - [x]$ en 0.

●○○ **Exercice 4 Continuité - IV** (10 min.)

Peut-on prolonger la fonction f définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ en 0 ? en 1 ?

●○○ **Exercice 5 Prolongement par continuité II** (10 min.)

On considère la fonction f définie sur $[-1, 0[\cup]0, +\infty[$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $[-1, +\infty[$.

Théorème des valeurs intermédiaires

●○○ **Exercice 6 Théorème de la bijection** (10 min.)

Montrer que la fonction f définie sur $I =]-2, +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$ établit une bijection de I sur un intervalle à déterminer. En déduire le tableau de variations, puis préciser sa réciproque.

●○○ **Exercice 7 TVI, fonction réciproque et suite** (30 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle à préciser.
3. Établir le tableau de variations de la fonction réciproque f^{-1} de f.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution. On note u_n cette solution.
5. Étudier les variations et la limite de (u_n).

●●○ **Exercice 8 Fonction implicite** (20 min.)

Soient n et p deux entiers tels que $0 < p < n$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel $t \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $t^n + xt^p = 1$. On note t_x cet unique réel.
2. Étudier les variations et les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $f : x \mapsto t_x$.

●○○ Exercice 9 Des bijections (20 min.)

Dans chacun des cas suivants, montrer que f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J à déterminer, et expliciter f^{-1} sur J.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{1+3(\ln(x))^2}$,
2. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}$,
3. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,
4. $f : x \longmapsto \ln\left(x^{3/4} - 1\right)$.

Fonctions trigonométriques réciproques

●○○ Exercice 10 arccos et arcsin (15 min.)

On démontre des résultats identiques à arctan mais à cos et sin :

1. Montrer que la fonction cosinus réalise une bijection de $[0,\, \pi]$ sur un intervalle à préciser. On note arccos sa bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de arccos et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle à préciser. On note arcsin sa bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de arcsin et tracer sa courbe représentative.
3. Pour tout $x \in [-1,\, 1]$, déterminer $\sin(\arccos(x))$ et $\cos(\arcsin(x))$.

●●○ Exercice 11 Trigo, réciproque et Machin (15 min.)

1. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, simplifier
$$\cos(\arctan(x)), \quad \sin(\arctan(x)) \quad \text{et} \quad \tan(\arctan(x)).$$
2. Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right[$, simplifier $\arctan(\tan(x))$.
3. **Formule de Machin**. Montrer que
$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

●●○ Exercice 12 Fonction dépendant de arctan (20 min.)

Soient $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ et $g = \tan|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. Prolonger f aux éventuelles bornes finies de $\mathcal{D}_f$ afin qu'elle soit, si possible, continue à gauche.
2. Expliciter l'application $f \circ g$. En déduire $f(x)$ en fonction de $\arctan(x)$, pour $x \in \mathcal{D}_f$.
3. Représenter graphiquement l'application f dans un repère orthonormé.

Continuité et suites

●○○ Exercice 13 Intervalle stable et suite (15 min.)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{5}{6} + \frac{1}{x^2+5}$$
et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'intervalle $[0; 2]$ est stable par f.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in [0;2]$.
3. (u_n) est-elle monotone ?
4. Quelles sont les limites possibles de (u_n) ?

●●○ Exercice 14 EDHEC E (30 min.)

Soit $n \geqslant 3$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variations de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions. En notant u_n la plus petite, et v_n la plus grande, vérifier que $\forall\ n \geqslant 3, 0 < u_n < n < v_n$.
3. Quelle est la limite de la suite v ?
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $1 < u_n < e$.
5. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
6. Montrer que la suite u est convergente, puis en encadrant $\ln(u_n)$, déterminer sa limite.

●●○ Exercice 15 EML E 2015 (40 min.)

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Etude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.
2. Etablir que l'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3\mathrm{e}^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie II : Etude d'une suite

3. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
4. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

●●● Exercice 16 Suite implicite (20 min.)

Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n strictement positif tel que

$$1 + \sqrt{x_n}\ln(x_n) = n.$$

Déterminer le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Étudier sa limite.

Pour aller plus loin

●●○ Exercice 17 Continuité et point fixe (10 min.)

Soit $f : [0,\, 1] \to [0,\, 1]$ une fonction continue. En posant $g : x \mapsto f(x) - x$, montrer que la fonction f admet au moins un point fixe.

●○○ Exercice 18 Décroissante, continue et point fixe (10 min.)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. On va montrer dans cet exercice que f admet un unique point fixe.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g : x \mapsto f(x) - x$. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. En déduire que f admet un point fixe et qu'il est nécessairement unique.
3. Est-ce que ce résultat est vrai si f est croissante ?

●●○ Exercice 19 Continuité et égalité (10 min.)

Soit $n > 0$ et $a_1, \cdots a_n$ des réels deux à deux distincts de $[0;1]$. Soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$$

Calculer $f_n(0) + f_n(1)$, et en déduire qu'il existe au moins un réel u de $[0;1]$ tel que $f_n(u) = \frac{1}{2}$.

●●○ Exercice 20 Fonctions lipschitzienne (30 min.)

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application k-lipschitzienne, c'est-à-dire

$$\forall\ (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

1. Montrer que f est continue sur I.
2. On suppose dans cette partie que $k \in\ ]0, 1[$, que I est un segment, et que $f(I) \subset I$. On définit la suite (x_n) par $x_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   a) Montrer que f admet un unique point fixe $\ell \in I$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ell| \leqslant k^n |x_0 - \ell|$.
   c) En déduire que (x_n) converge vers ℓ.
   d) Déterminer une valeur de n pour laquelle x_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

●●○ Exercice 21 Fonctions injectives continues (20 min.)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point.

1. Montrer que, si f est strictement monotone, alors f est injective sur I.
2. Étudions une réciproque partielle. On suppose que f est injective et continue sur I. Fixons a et b dans I tels que $a < b$. f étant injective, $f(a) \neq f(b)$ et quitte à considérer $-f$, on suppose que $f(a) < f(b)$. On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas strictement croissante sur I.
   a) Justifier l'existence de x et y dans I tels que $x < y$ et $f(y) - f(x) \leqslant 0$.
   b) Montrer brièvement que, pour tous $(u, v) \in I^2$ et $t \in [0, 1]$, $u + t(v - u)$ est compris entre u et v.
   c) Considérons alors la fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(b + t(y - b)) - f(a + t(x - a))$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\varphi(c) = 0$.
   d) En déduire que $(1 - c)(b - a) = -c(y - x)$ et aboutir à une absurdité.
3. Donner un exemple de fonction injective sur $[0, 1]$ qui n'est pas strictement croissante.

●●● Exercice 22 Oral ESCP (20 min.)

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ; Pour tout $u \in \mathbb{R}$, considérons la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par

$$g_u : x \longmapsto ux - f(x).$$

1. Soit $u \in \mathbb{R}$. Montrer que g_u admet un maximum $M(u)$. On note E_u l'ensemble des réels de $[-1, 1]$ en lesquels g_u atteint son maximum.
2. Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et soient $x \in E_u$ et $y \in E_v$. Montrer que $M(u) - M(v) \leqslant (u - v)x$ et que $M(v) - M(u) \leqslant (v - u)y$. En déduire que

$$|M(v) - M(u)| \leqslant |u - v|.$$

3. Montrer que la fonction $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $M : u \mapsto M(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est continue comme produit de deux fonctions continues. De plus

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Puisque $f(0) = 0$, f est donc continue en 0.
Bilan : f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2

Sur $\mathbb{R}_-^*$, f est continue (car constante). Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est continue car la fonction exponentielle l'est. Le problème se situe donc en 0. Or

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = f(0) = 1$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$: la fonction f n'est donc pas continue en 0, et n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Pour étudier la continuité de la fonction f en 0, il faut déterminer la limite de f en 0^- et en 0^+.

- Pour tout réel $x \in]-1, 0[$, $[x] = -1$, donc $f(x) = x - (-1) = x + 1$. On a donc
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x + 1 = 1$$
- Pour tout réel $x \in]0, 1[$, $[x] = 0$, donc $f(x) = x - 0 = x$. On a donc
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$: la fonction f n'est pas continue en 0.

> **Remarque**
> Autre possibilité, en utilisant les limites de la partie entière :
> $$\lim_{x\to 0^-} [x] = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} [x] = 0.$$
> Par somme,
> $$\lim_{x\to 0^-} x - [x] = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x - [x] = 0$$
> et on retrouve le même résultat.

Exercice 4

La fonction f est définie sur $]0, 1[$. Pour la prolonger par continuité en 0 ou en 1, il faut déterminer ses limites aux bornes.

- Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, par quotient
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

On peut donc prolonger par continuité la fonction f en 0, en posant $f(0) = 0$.

- Puisque $\ln(1) = 0$ et que pour tout réel $x \in]0, 1[$, $\ln(x) < 0$, par quotient
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$
On ne peut donc pas prolonger par continuité la fonction f en 1.

Exercice 5

La fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est définie et continue sur $[-1, +\infty[$ par composée. Par somme et quotient, on en déduit que f est bien continue sur $[-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
Déterminons sa limite en 0. Écrite sous cette forme, elle est indéterminée. Utilisons la quantité conjuguée. Pour tout $x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}^2 - 1^2}{x\left(\sqrt{x+1} + 1\right)} \\ &= \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1} - 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} \end{aligned}$$
Quand x tend vers 0, $x + 1 \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ et par composée
$$\sqrt{x+1} \xrightarrow[x \to 0]{} \sqrt{1} = 1$$
Finalement, par somme et quotient :
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$$
Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$. On peut donc prolonger la fonction f en 0 par continuité, en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 6

f est définie et dérivable sur I, par somme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \in I$:
$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$
Ainsi, pour tout $x > -2$, $f'(x) > 0$. De plus, par somme et quotient :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$$
On obtient le tableau de variations suivant :

x	-2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	2

La fonction f est donc :
- continue sur I (comme somme et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ; ou alors, en anticipant sur un prochain chapitre, parce qu'elle est dérivable) ;
- strictement croissante sur I (car sa dérivée est strictement positive sur I).

Le théorème de la bijection nous garantit que f établit une bijection de I sur $f(I) =]-\infty, 2[$.
Le même théorème garantit que f^{-1} est continue, et de même monotonie ; son tableau de variations est :

x	$-\infty$	2
variations de f^{-1}	0 ↗	$+\infty$

Ici, on peut expliciter la bijection réciproque. Soit $x \in I$ et $y \in]-\infty, 2[$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x+2} = y \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} = 2 - y \\ &\Leftrightarrow x + 2 = \frac{1}{2-y} \text{ valide car } y < 2 \\ &\Leftrightarrow x = -2 + \frac{1}{2-y} \end{aligned}$$

On a obtenu l'expression de f^{-1} :

$$\forall\ x \in]-\infty, 2[, \quad f^{-1}(x) = -2 + \frac{1}{2-x}$$

Exercice 7

1. La fonction f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $f' : x \longmapsto 3x^2 + 2x + 1$. Son discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 = -8 < 0$. Ainsi, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$. De plus, d'après la règle du terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

et $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f(0) = -1$ par continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.
On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	
variations de f	-1 ↗	$+\infty$

2. L'application f est continue sur $\mathbb{R}^+$, et strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, f est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+) = [-1, +\infty[$.
3. Le théorème de la bijection nous garantit également que f^{-1} est continue sur $[-1, +\infty[$ et de même monotonie que f. On obtient le tableau de variations suivant :

x	-1	$+\infty$
variations de f^{-1}	0 ↗	$+\infty$

4. f étant bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[-1, +\infty[$, pour tout $n \geqslant 1$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.
5. En utilisant f^{-1}, on peut écrire $x_n = f^{-1}(n)$. Le tableau de variations nous garantit alors deux choses :
• f^{-1} étant strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, on en déduit que la suite (x_n) est également strictement croissante.
• Puisque $f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, par définition séquentielle de la limite, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

Exercice 8

1. On veut montrer l'existence d'une unique valeur. On se fixe $x \in \mathbb{R}$, et on introduit la fonction f_x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_x : t \mapsto t^n + xt^p.$$

f_x est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est

$$f_x' : t \mapsto nt^{n-1} + pxt^{p-1} = t^{p-1}\left(nt^{n-p} + px\right).$$

• En 0, f_x tend vers 0 ; puisque $n > p$, par factorisation, on en déduit que f_x tend vers $+\infty$.
• Si $x \geqslant 0$, le terme $nt^{n-p} + xt^p$ est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f_x est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$f_x'(t)$	‖	$+$	
var de f_x	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

Étant continue, le théorème de la bijection nous garantit que f_x établit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $1 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique réel $t_x \in /R >$ tel que $f_x(t_x) = 1$.
• Si $x < 0$, le terme $nt^{n-p} + px$ s'annule en $\alpha = \left(-\frac{px}{n}\right)^{\frac{1}{n-p}}$. On obtient le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f_x'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
var de f_x	‖ 0	$\searrow$	$f_x(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Sur $]0, \alpha]$, la fonction f_x est strictement négative dont l'équation $f_x(t) = 1$ n'admet pas de solution. Sur $]\alpha + \infty[$, la fonction est strictement croissante et continue. Le théorème de la bijection nous garantit que f_x établit une bijection de $]\alpha + \infty[$ dans $]f_x(\alpha), +\infty[$. Puisque $f_x(\alpha) < 0$, $1 \in]f_x(\alpha), +\infty[$. L'équation $f_x(t) = 1$ admet une unique solution sur $]\alpha + \infty[$, et donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soient x et y deux réels positifs tels que $x < y$. Alors

$$\forall\, t > 0, \quad t^n + xt^p < t^n n + yt^p$$

En appliquant en t_x : $f_x(t_x) < f_y(t_x)$ soit $1 < f_y(t_x)$, ce qu'on peut également écrire

$$f_y(t_y) < f_y(t_x)$$

Par stricte croissance de f_y : $t_y < t_x$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t : x \mapsto t_x$ est donc strictement décroissante.
Puisque t est minorée par 0, la fonction t admet une limite en $+\infty$. En notant ℓ sa limite, on sait déjà que $\ell \geqslant 0$. Supposons $\ell > 0$. Alors :

$$t_x^n + x t_x^p = 1$$

et par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, par continuité, $t_x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell^n$ et $t_x^p \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell^p$.
Par somme

$$t_x^n + x t_x^p \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui est absurde puisque c'est constant égal à 1. Ainsi, $\ell = 0$.
Bilan : sur $\mathbb{R}^+$, t est strictement décroissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} t_x = 0$.
Le même raisonnement sur $\mathbb{R}^-$ permet de démontrer que, si $x < y < 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f_x(t) > f_y(t)$ puis que la fonction t est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$. Elle admet donc une limite en $-\infty$ et le même raisonnement amène que t admet 0 comme limite en $-\infty$.
Bilan final : on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
var de t	0	$\nearrow$	$t_0 = 1$	$\searrow$	0

Exercice 9

1. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme ln) car le radicande est strictement positif. De plus, elle y est dérivable (par composée) et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{3 \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)}{2\sqrt{1 + 3(\ln(x))^2}} = \frac{3\ln(x)}{x\sqrt{1+3(\ln(x))^2}}.$$

$f(x)$ est donc, sur $\mathbb{R}_+^*$, du signe de ln. Les limites en $+\infty$ et 0 ne sont pas indéterminée et valent respectivement $+\infty$ et $+\infty$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

f étant continue et strictement monotone sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$, d'après le théorème de la bijection, f établit donc une bijection de $]0, 1]$ dans $[1, +\infty[$ et de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.
Prenons le cas $[1, +\infty[$. Soit $x \in [1, +\infty[$ et $y \in [1, +\infty[$ tels que $f(x) = y$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \sqrt{1 + 3(\ln(x))^2} = y \\ &\iff \ln(x)^2 = \frac{y^2 - 1}{3} \\ &\iff \ln(x) = \sqrt{\frac{y^2-1}{3}} \quad \text{qui a un sens car } y \geqslant 1 \text{ et } x \geqslant 1 \text{ (donc) } \ln(x) \geqslant 0) \\ &\iff x = \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{y^2-1}{3}}} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{f^{-1} : y \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{y^2-1}{3}}}.}$$

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ (en effet, le discriminant du trinôme $x \longmapsto x^2 + x + 2$ est strictement négatif donc le trinôme est strictement positif), et est dérivable sur ce domaine, par composée (la fonction racine étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+2)^{3/2}}.$$

Remarquons que $f'(x)$ est donc du signe de $-(2x+1)$. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{7}}$	$\searrow$	0

Les limites s'obtenant sans difficultés par composée. Le théorème de la bijection indique que f établit une bijection de $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ dans $]0, \frac{2}{\sqrt{7}}]$ et de $]-\frac{1}{2}, +\infty]$ dans $]0, \frac{2}{\sqrt{7}}]$.
Si on prend $I =]-\infty - \frac{1}{2}]$, par exemple, alors, pour $x \in I$ et $y \in]0, \frac{2}{\sqrt{7}}]$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}} = y \\ &\iff x^2 + x + 2 = \frac{1}{y^2} \\ &\iff x^2 + x + \left(2 - \frac{1}{y^2}\right). \end{aligned}$$

Le discriminant est

$$\Delta = 1^2 - 4 \times \left(2 - \frac{1}{y^2}\right) = \frac{4}{y^2} - 7$$

Puisque $y \in]1, \frac{2}{\sqrt{7}}]$, le discriminant est strictement positif. Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{\frac{4}{y^2} - 7}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{\frac{4}{y^2} - 7}}{2}$$

Sur I, on prend x_1. Ainsi :

$$\boxed{f^{-1} : y \mapsto \frac{-1 - \sqrt{\frac{4}{y^2} - 7}}{2}.}$$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions exponentielles. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{-x} \\ &\iff x > -x \text{ par stricte croissance d'exp} \\ &\iff x > 0. \end{aligned}$$

On obtient le tableau suivant, les limites s'obtenant par somme :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On aurait également pu montrer que la fonction f est paire.
À nouveau, le théorème de la bijection nous garantit que f établit une bijection de $\mathbb{R}^-$ dans $[1, +\infty[$ et de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$.
Si on prend $I = \mathbb{R}^+$ et $J = [1, +\infty[$, soit $x \in I$ et $y \in J$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = y \\ &\iff \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2y = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{2x} + 1 - 2y\mathrm{e}^x = 0 \text{ en multipliant par } \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

On pose classiquement $X = \mathrm{e}^x$. L'équation s'écrit $X^2 - 2yX + 1$, dont le discriminant est $\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$.
Puisque $y \geqslant 1$, $\Delta \geqslant 0$. Les solutions sont alors

$$X_1 = \frac{2y - \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2y + \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

Puisque $y \geqslant 1$, $(y-1)^2 \leqslant y^2 - 1$ et donc $X_1 \leqslant 1$. $X_2 \geqslant 1$. On revient à la variable de départ :

$$x_1 = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

Puisque $X_1 \leqslant 1$ et $X_2 \geqslant 1$, on en déduit que $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$. Or $x \in I = \mathbb{R}^+$, donc $x = x_2$.
Ainsi,

$$\boxed{f^{-1} : y \longmapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).}$$

4. f est définie si et seulement si $x^{3/4} - 1 > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x > 1$. Sur $]1, +\infty[$, f est dérivable comme composé de fonctions puissances et logarithme. Pour tout réel $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{4}x^{-1/4}}{x^{3/4} - 1} > 0$$

f est donc strictement croissante sur $I =]1, +\infty[$ et le théorème de la bijection garantit que f établit une bijection de I dans $J = f(I) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ (les limites s'obtenant par composée).
Enfin, pour tout $x \in I$ et $y \in J$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \ln\left(x^{3/4} - 1\right) = y \\ &\iff x^{3/4} - 1 = \mathrm{e}^y \\ &\iff x^{3/4} = \mathrm{e}^y + 1 \\ &\iff x = (\mathrm{e}^y + 1)^{4/3} \in I. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{f^{-1} : y \longmapsto (\mathrm{e}^y + 1)^{4/3}.}$$

Exercice 10

Les deux premiers se traitent de la même manière que nous avons traiter la fonction arctan :

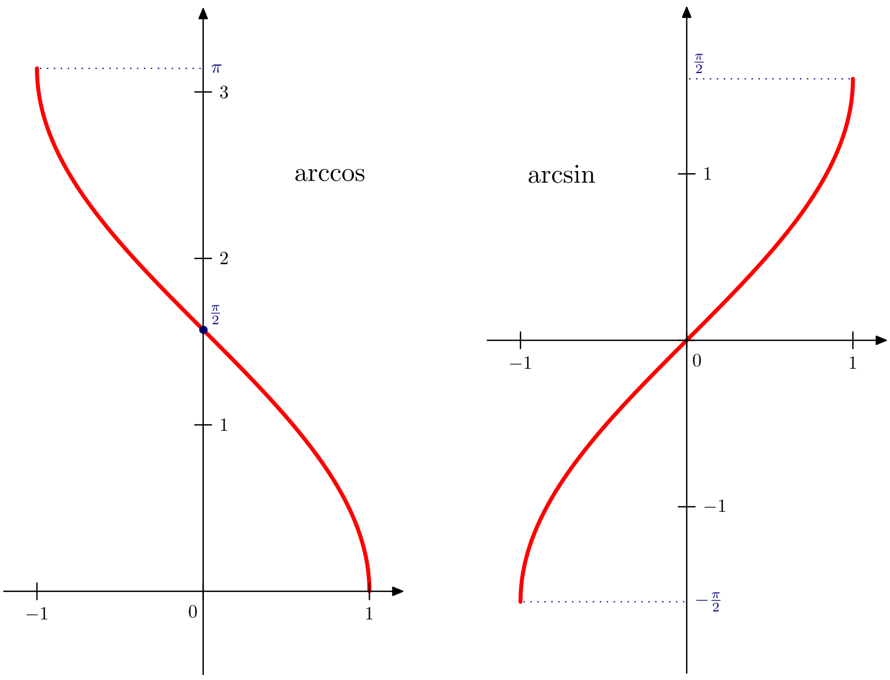
- Sur $[0,\,\pi]$, la fonction cos est continue et strictement décroissante. Le théorème de la bijection nous garantit que la fonction cos est bijective de $[0,\,\pi]$ dans $[\cos(\pi),\,\cos(0)] = [-1,\,1]$. En notant arccos la fonction réciproque, celle-ci est strictement décroissante et on a ce tableau :

x	-1		1
$\arccos(x)$	π	$\searrow$	0

- Sur $[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}]$, la fonction sin est continue et strictement croissante. Le théorème de la bijection nous garantit que la fonction sin est bijective de $[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}]$ dans $[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)] = [-1,\,1]$. En notant arcsin la fonction réciproque, celle-ci est strictement décroissante et on a ce tableau :

x	-1		1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

En utilisant la symétrie par rapport à la droite $y = x$, on obtient les graphes suivants :



Par définition, pour tout $x \in [-1,\,1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$ et $\sin(\arcsin(x)) = x$. On utilise alors la formule fondamentale

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

soit pour $x \in [-1,\,1]$:

$$\cos^2(\arccos(x)) + \sin^2(\arccos(x)) = 1 \quad \text{et} \quad \cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$$

ou encore

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2 \quad \text{et} \quad \cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$$

- Si $x \in [-1,\, 1]$, $\arccos(x) \in [0,\, \pi]$ et donc $\sin(\arccos(x)) \geqslant 0$. On peut alors conclure que

$$\boxed{\forall\, x \in [-1,\, 1], \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}}.$$

- Si $x \in [-1,\, 1]$, $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\cos(\arcsin(x)) \geqslant 0$. On peut alors conclure que On peut alors conclure que

$$\boxed{\forall\, x \in [-1,\, 1], \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 11

1. Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\tan(\arctan(x)) = x.$$

Ensuite, rappelons que si $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}[$ et donc $\cos(\arctan(x)) \geqslant 0$. Enfin, si $x \leqslant 0$, $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2},\, 0]$ et donc $\sin(\arctan(x)) \leqslant 0$ et de même si $x \geqslant 0$, $\sin(\arctan(x)) \geqslant 0$. Une fois cela écrit, on utilise les relations connues entre cos et tan :

$$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2} \iff \cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2}.$$

On applique en $\arctan(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Par positivité du cosinus, on peut conclure que

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

Enfin, puisque $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on peut écrire

$$\cos^2(\arctan(x)) + \sin^2(\arctan(x)) = 1$$

ou encore

$$\sin^2(\arctan(x)) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

En utilisant le signe vu précédemment, on peut alors conclure que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^-, \quad \sin(\arctan(x)) = -\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad \sin(\arctan(x)) = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

ce qu'on peut résumer en :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

2. Sur l'intervalle donné, tan et arctan sont réciproques l'une de l'autre. Ainsi, par définition, $\arctan(\tan(x)) = x$ sur $]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}[$.
3. Si on calcule la tangente de la différence proposée, on n'arrive pas forcément à conclure. Calculons plutôt, en utilisant la formule sur la tangente d'une somme :

$$\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

Or, pour tout réel y dans le bon domaine de définition

$$\tan(2y) = \frac{2\tan(y)}{1-\tan^2(y)}$$

et donc

$$\begin{aligned}\tan(4y) &= \tan(2\times 2y)\\ &= \frac{2\tan(2y)}{1-\tan^2(2y)}\\ &= \frac{2\frac{2\tan(y)}{1-\tan^2(y)}}{1-\left(\frac{2\tan(y)}{1-\tan^2(y)}\right)^2}\\ &= \frac{4\tan(y)\times(1-\tan^2(y))^2}{(1-\tan^2(y))\left((1-\tan^2(y))^2-4\tan^2(y)\right)}\\ &= \frac{4\tan(y)(1-\tan^2(y))}{1-6\tan^2(y)+\tan^4(y)}\end{aligned}$$

Appliqué en $y=\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$, et puisque $\tan(y)=\frac{1}{5}$:

$$\begin{aligned}\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) &= \frac{4\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{25}\right)}{1-6\frac{1}{25}+\frac{1}{625}}\\ &= \frac{\frac{96}{125}}{\frac{476}{625}} = \frac{120}{119}\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}\\ &= \frac{\frac{1}{119}}{\frac{239}{119}} = \frac{1}{239}\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239} = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right)$$

Pour conclure, il faut démontrer que

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Or :

$$0<\frac{1}{5}<\frac{1}{\sqrt{3}}\implies 0<\arctan\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{\pi}{6}$$

et finalement

$$-\frac{\pi}{4}<4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}<\frac{4\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$$

On peut donc conclure, par bijectivité de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ que

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}=\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

soit

$$\boxed{4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}.}$$

Exercice 12

1. La fonction $x \longmapsto \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{(1-x)(1+x)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Par composée, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = \,]-\infty - 1[\, \cup \,]1, +\infty[$. Par quotient

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{1-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0.$$

Par quotient,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

On veut la rendre continue à gauche. On calcule les limites à gauche :

$$\lim_{x \to (-1)^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty.$$

Par composée,

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

On peut alors prolonger la fonction f en posant $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi définie, elle est continue à gauche.

2. Remarquons que, pour $x \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, avec $x \neq \pm\frac{\pi}{4}$ (pour éviter les valeurs -1 et 1) :

$$\begin{aligned} \frac{2g(x)}{1-(g(x))^2} &= \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} \\ &= \tan(2x) \end{aligned}$$

et finalement

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f, \quad f \circ g(x) = \arctan(\tan(2x))$$

Attention : on a $\arctan(\tan(u)) = u$ si et seulement si $u \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- Si $x \in \,]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $2x \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et donc $f \circ g(x) = 2x$. En posant $x = \arctan(y)$, on en déduit

$$\forall\, y \in \,]-1, 1[, \quad f(y) = 2\arctan(y).$$

- Si $x \in \,]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, $2x \in \,]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et donc $f \circ g(x) = \arctan(\tan(2x-\pi)) = 2x-\pi$ car $2x-\pi \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. En posant $x = \arctan(y)$, on en déduit que

$$\forall\, y \in \,]1, +\infty[, \quad f(y) = 2\arctan(y) - \pi.$$

- Par le même raisonnement, si $x \in \,]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}[$,

$$\arctan(\tan(2x)) = \arctan(\tan(2x+\pi)) = 2x + \pi$$

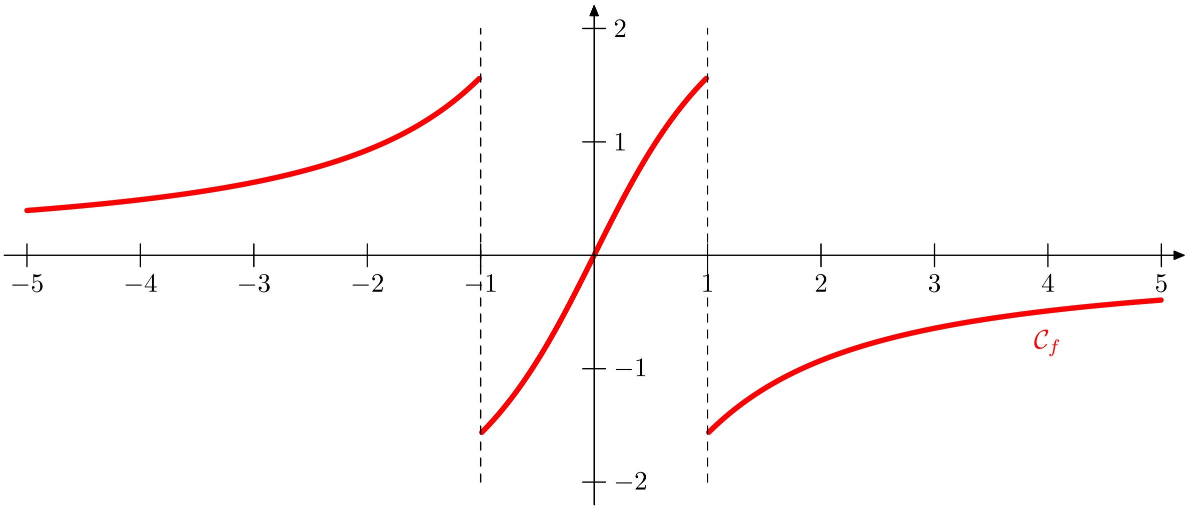
car $2x + \pi \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Finalement

$$\forall\, y \in \,]-\infty - 1[, \quad f(y) = 2\arctan(y) + \pi.$$

On peut donc conclure que

$$\boxed{f : x \mapsto \begin{cases} 2\arctan(x) + \pi & \text{si} \quad x \in \,]-\infty - 1[\\ 2\arctan(x) & \text{si} \quad x \in \,]-1, 1[\\ 2\arctan(x) - \pi & \text{si} \quad x \in \,]1, +\infty[\end{cases}}$$

3. On en déduit la représentation graphique suivante :



Exercice 13

1. Puisque $x^2+5>0$ pour tout réel x, f est définie et dérivable comme somme et quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. On a alors

$$\forall \ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+5)^2}$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $-2x$. Par quotient, rapidement, on a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{5}{6}$$

On obtient donc le tableau suivant, sachant que $f(0) = \frac{5}{6} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$\frac{5}{6}$	$\nearrow$	$\frac{31}{30}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}$

On remarque que sur $[0,2]$, f est décroissante. De plus, $f(0) = \frac{31}{30} \in [0,2]$ et $f(2) = \frac{5}{6} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18} \in [0,2]$. Par décroissance de f, on en déduit que $f([0,\,2]) \subset [0,\,2]$ et $[0,\,2]$ est un intervalle stable de f.

2. Récurrence classique. Pour l'hérédité, puisque $u_n \in [0,\,2]$ et que $[0,\,2]$ est stable par f, alors $f(u_n) \in [0,\,2]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0,\,2]$.

3. On constate que $u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{31}{30} > 0 = u_0$. Puisque u_0 et u_1 sont dans $[0,\,2]$, et que sur cet intervalle, f est strictement décroissante, alors :

$$u_1 > u_0 \implies f(u_1) < f(u_0) \text{ soit } u_2 < u_1$$

Ainsi, la suite n'est ni croissante, ni décroissante.

4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Toute limite ℓ de u vérifiera le théorème du point fixe,

c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\Leftrightarrow \frac{5}{6} + \frac{1}{\ell^2+5} = \ell \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{6}(\ell^2+5) + 1 = \ell(\ell^2+5) \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{6}\ell^2 + \frac{25}{6} + 1 = \ell^3 + 5\ell \\ &\Leftrightarrow \ell^3 - \frac{5}{6}\ell^2 + 5\ell - \frac{31}{6} \end{aligned}$$

1 est une racine de $\ell^3 - \frac{5}{6}\ell^2 + 5\ell - \frac{31}{6}$. On obtient, après factorisation

$$\ell^3 - \frac{5}{6}\ell^2 + 5\ell - \frac{31}{6} = (\ell - 1)\left(\ell^2 + \frac{1}{6}\ell + \frac{31}{6}\right)$$

Le trinôme du second degré qui apparait n'a pas de racine (son discriminant vaut $\Delta = \frac{-743}{36} < 0$). On a donc montré que $f(\ell) = \ell$ si et seulement si $\ell = 1$. La seule limite possible est 1.

> ⚠ **Attention**
> Ce n'est pas parce qu'on a qu'une seule limite qu'on est sûr que la suite converge vers 1. Il faut d'abord montrer la convergence !

Exercice 14

1. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (*on y reviendra dans un prochain chapitre*) et sa dérivée est donnée par

$$\forall\ x > 0,\ f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$$

Puisque $x > 0$, on constate que le numérateur est positif sur $[n, +\infty[$ et négatif sur $]0, n]$. La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $]0, n]$ puis strictement croissante sur $[n, +\infty[$. De plus

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - n\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty \text{ par croissance comparée}$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f_n(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$n - \ln(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Pour $n \geqslant 3$, $n - n\ln(n) = n(1 - \ln(n)) < 0$. Ainsi, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement décroissante sur $]0; n]$ et strictement croissante sur $[n; +\infty[$. De plus,

$$f_n(]0; n]) =]n - n\ln(n); +\infty[\text{ et } f_n([n; +\infty[) =]n - n\ln(n); +\infty[\text{ avec } 0 \in]n - n\ln(n); +\infty[$$

D'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]0; n]$, que l'on note u_n, et une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $[n; +\infty[$, que l'on note v_n. Ainsi,

$$0 < u_n \leqslant n \leqslant v_n$$

Or, $f_n(n) = n - n\ln(n) \neq 0$ pour tout $n \geqslant 3$. Ainsi

$$0 < u_n < n < v_n$$

3. Puisque, pour tout $n \geqslant 3$, $n < v_n$ et que $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, par théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

4. Pour $n \geqslant 3$, on a $1 \in]0; n[$ et $e \in]0; n[$. De plus,

$$f_n(1) = 1 - n\ln(1) = 1 > 0 \text{ et } f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0 \text{ si } n \geqslant 3$$

Par stricte décroissance de f_n sur $]0; n[$, on en déduit donc

$$f(e) < f_n(u_n) < f(1) \Rightarrow 1 < u_n < e$$

5. Par définition de u_{n+1}, on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. Ainsi,

$$u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$$

Ainsi,

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) = (n+1)\ln(u_{n+1}) - n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$$

D'après la question précédente, $1 < u_{n+1} < e$ donc $\ln(u_{n+1}) > 0$. Donc

$$f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$$

Par stricte décroissance de f_n sur $]0; n]$, on en déduit donc que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 3.
6. La suite u étant décroissante à partir du rang 3, et minorée par 1 d'après la question 3., elle converge donc par le théorème de convergence monotone. On sait que

$$f_n(u_n) = u_n - n\ln(u_n) = 0 \Leftrightarrow \ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$$

Puisque $1 < u_n < e$, on obtient $0 < \frac{u_n}{n} < \frac{e}{n}$. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n} = 0$$

d'après le théorème d'encadrementn, la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge, et sa limite vaut 0. Or, $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$. Donc $(\ln(u_n))$ converge également vers 0. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(u_n)} = 1$$

Exercice 15

Partie I

1. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles (exponentielle, polynôme). Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x(2+x).$$

$\varphi'(x)$ est donc du signe de $x(2+x)$. De plus, par croissance comparée en $-\infty$ et par produit :

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = -1, \quad \varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de φ	-1	$\nearrow$	$\varphi(2)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Remarquons que, pour $x > 0$, $\mathrm{e}^x = \frac{1}{x^2}$ si et seulement si $x^2\mathrm{e}^x - 1 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\varphi(x) = 0$.
D'après la question précédente, φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. φ établit donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $f(\mathbb{R}_+^*) =]-1, +\infty[$. Or $0 \in]-1, +\infty[$. Ainsi, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
Bilan : l'équation $\mathrm{e}^x = \frac{1}{x^2}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{1/2} - 1$$
$$\varphi(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$$

Puisque $\mathrm{e} < 4$, $\mathrm{e}^{1/2} < 2$ et donc $\frac{\mathrm{e}^{1/2}}{4} < 1$: ainsi, $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. Par stricte croissance de φ :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(1) \implies \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Partie II

Constatons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \longmapsto x^2(3+x)\mathrm{e}^x$. f' est strictement positive sur $]-3, +\infty[$ donc f y est strictement croissante. De plus, $f(1) = \mathrm{e}$.
3. Puisque $f(1) = \mathrm{e} \geqslant 1$, l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par f. Le résultat découle alors de ce résultat, par récurrence. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n:« $u_n \geqslant 1$ ».
- Pour $n = 0$, $u_0 = 1 \geqslant 1$: P_0 est vérifiée.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé. Mais alors, par hypothèse de récurrence : $u_n \geqslant 1$ et donc $u_n \in [1, +\infty[$. L'intervalle $[1, +\infty[$ étant stable par f, $f(u_n) \in [1, +\infty[$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 1$: P_{n+1} est ainsi vérifiée.

Le principe de récurrence nous garantit alors que la proposition P_n est vraie pour tout entier n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 1.}$$

4. Notons P la proposition définie pour tout entier n par P_n : « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».
- Pour $n = 0$, $u_1 = f(u_0) = \mathrm{e} \geqslant 1 = u_0$: ainsi, P_0 est vérifiée.
- Supposons la proposition P_n vérifiée pour un certain entier n fixé. Mais alors, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Puisque f est croissante sur $[1, +\infty[$, intervalle où se trouve u_n et u_{n+1}, on en déduit que

$$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \implies u_{n+1} \leqslant u_{n+2}.$$

Ainsi, P_{n+1} est vérifiée.
Le principe de récurrence nous garantit alors que la proposition P_n est vraie pour tout entier n : $\boxed{(u_n) \text{ est une suite croissante.}}$

5. La suite (u_n) étant croissante, d'après le théorème de la limite monotone, soit elle admet une limite finie dans $[1, +\infty[$, soit elle tend vers $+\infty$. Supposons qu'elle admette une limite finie $\ell \in [1, +\infty[$. Mais alors, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, et que f est continue sur $\mathbb{R}$, ℓ est un point de f. Or, pour $x > 0$,

$$f(x) = x \implies x^2\mathrm{e}^x = 1 \implies \varphi(x) = 0.$$

Or, le seul point fixe de φ est dans $]\frac{1}{2}, 1[$. Ainsi, sur $[1, +\infty[$, f n'admet pas de point fixe : la convergence de (u_n) est donc absurde.
Bilan : $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \longmapsto 1 + \sqrt{x}\ln(x)$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et y est également dérivable, comme produit de fonction dérivable. Pour tout réel $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) + \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(x)+2}{2}\right) \end{aligned}$$

Remarquons que $\ln(x) + 1 > 0$ si et seulement si $x > \mathrm{e}^{-2}$.
De plus,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \text{ par croissance comparée} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	‖ 1	↘	$1-2\mathrm{e}^{-1}$	↗	$+\infty$

Remarquons que $1 - 2\mathrm{e}^{-1} < 1$. Ainsi, sur $]0, \mathrm{e}^{-2}]$, l'équation $f(x) = n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ n'admet pas de solutions.
D'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $[\mathrm{e}^{-2}, +\infty[$ dans $[1 - 2\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \in [1 - 2\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$; ainsi, il existe un unique réel $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_n) = n$.

- #### Sens de variation

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n < n + 1$, c'est-à-dire

$$f(x_n) < f(x_{n+1}) .$$

f étant strictement croissante sur $[1 - 2\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$, on en déduit que

$$x_n < x_{n+1}.$$

Bilan : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

- #### Limite

(x_n) étant croissante, d'après le théorème de la limite monotone, soit elle admet une limite finie, soit elle tend vers $+\infty$.
Supposons par l'absurde que (x_n) admette une limite finie $\ell \geqslant 1$. Mais alors, par continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. Or, $f(x_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: c'est absurde.

Bilan : $\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 17

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. g est continue comme somme de deux fonctions continue. De plus :

- $g(0) = f(0) \geqslant 0$ car $f([0;1]) \subset [0;1]$.
- $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car pour tout réel $x \in [0;1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant f(x) - 1 \leqslant 0$.

Ainsi, g est continue, $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0;1]$, que l'on note α. Ainsi, $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$: f admet au moins un point fixe.

Exercice 18

1. La fonction f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f admet des limites en $+\infty$ et $-\infty$, telles que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Par somme, on en déduit alors que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.}$$

2. La fonction g est continue. De plus, $x \mapsto -x$ est strictement décroissante et f est croissante sur $\mathbb{R}$. Par somme, la fonction g est elle-même strictement décroissante. En effet, soient a et b deux réels tels que $a < b$. Alors

$$-a > -b \implies f(a) - a > f(a) - b \geqslant f(b) - b \implies g(a) > g(b).$$

D'après le théorème de la bijection, g établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ d'après la première question.
Puisque $0 \in \mathbb{R}$, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Bilan : f admet un unique point fixe.
3. Prenons $f : x \mapsto x$. La fonction est continue et croissante sur $\mathbb{R}$ et admet une infinité de point fixe. De même, $x \mapsto 1 + x$ est continue et croissante, et n'admet aucun point fixe.

Exercice 19

Puisque, pour tout entier k entre 1 et n, $a_k \in [0;1]$, on a $|a_k| = a_k$ et $|1 - a_k| = 1 - a_k$. Ainsi,

$$f_n(0)+f_n(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |-a_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |1-a_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |1-a_k|) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (a_k + 1 - a_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n} \times n = 1$$

Ainsi, $f_n(0) = 1 - f_n(1)$. Ainsi, si $f_n(0) \leqslant \frac{1}{2}$, nécessairement $f_n(1) = 1 - f_n(0) \geqslant \frac{1}{2}$. Réciproquement, si $f_n(0) \geqslant \frac{1}{2}$ alors $f_n(1) = 1 - f_n(0) \leqslant \frac{1}{2}$. Dans tous les cas, l'un des deux est inférieur à $\frac{1}{2}$ et l'autre est supérieur à $\frac{1}{2}$. La fonction f étant continue sur $[0;1]$, comme somme de fonctions continues, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel u tel que $f(u) = \frac{1}{2}$.

Exercice 20

1. Soit $x \in I$ fixé. Pour tout $y \in I$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \xrightarrow[y\to x]{} 0$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{y\to x} f(y) = f(x).$$

La fonction f est donc continue sur I.

2. a) **Existence** : tout d'abord, f est continue sur I, et I est un segment, que l'on note $I = [u,\ v]$. Notons g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - x$. Puisque $f(I) \subset I$, on a

$$f(u) \geqslant u \quad \text{et} \quad f(v) \ \leqslant v$$

soit

$$g(u) = f(u) - u \geqslant 0 \quad \text{et} \quad g(v) = f(v) - v \leqslant 0.$$

g est continue sur I, $g(u) \geqslant 0$ et $g(v) \leqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution, c'est-à-dire que f admet au moins un point fixe.

Unicité : soient a et b deux points fixes de f. Alors $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Mais

$$|f(a) - f(b)| \leqslant k|a - b|$$

soit $|a - b| \leqslant k|a - b$, puis $|a - b|(1 - k) \leqslant 0$. Or, $1 - k > 0$, donc $|a - b| \leqslant 0$, c'est-à-dire $a = b$: il y a un unique point fixe.

b) Se démontre par récurrence sur n. Pour l'hérédité, on utilise le caractère k-lipschitzien de f :

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \ell| &= |f(x_n) - f(\ell)| \text{ car } f(\ell) = \ell \\ &\leqslant k|x_n - \ell| \\ &\leqslant k \times k^n|x_0 - \ell| \text{ par hyp. de récurrence.} \end{aligned}$$

c) Puisque $k \in\ ]0,\ 1[$, $k^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

d) Pour que x_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-3}, il faut que $|x_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$. D'après le b), il suffit que $k^n|x_0 - \ell| \leqslant 10^{-3}$, c'est-à-dire

$$n \geqslant \frac{\ln(|x_0 - \ell|)}{\ln(k)} \text{ car } k \in\ ]0,\ 1[\text{ donc } \ln(k) < 0.$$

Exercice 21

1. Question déjà vue en cours. Supposons f est strictement monotone et soient x, y deux éléments de I tels que $x \neq y$. Alors $x < y$ ou bien $x > y$ et par stricte monotonie de f, on en déduit que $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$, ce qui garantit que f est injective.

2. a) Puisque f n'est pas strictement croissante par hypothèse sur I, il existe deux éléments x et y de I tels que $x < y$ et pourtant $f(x) \geqslant f(y)$ (ce qui contredit ainsi la stricte croissance). Dit autrement, $x < y$ et $f(y) - f(x) \leqslant 0$.

b) Plusieurs démonstrations possibles. La plus simple : si $u < v$ alors

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \implies 0 \leqslant t(v - u) \leqslant v - u \implies u \leqslant u + t(v - u) \leqslant u + v - u = v$$

et si $u \geqslant v$:

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \implies 0 \geqslant t(v - u) \geqslant v - u \implies u \geqslant u + t(v - u) \geqslant u + v - u = v$$

et dans tous les cas, $u + t(v - u)$ est compris entre u et v.

c) Tout d'abord, remarquons que φ est bien définie. En effet, d'après la question 2b), $t \mapsto b + t(y - b)$ est compris entre y et b, et $t \mapsto a + t(x - a)$ est compris entre x et a. Puisque I est un intervalle, que x, y, a et b sont des éléments de I, on est sûr que l'intervalle de borne x et a, ainsi que celui de borne y et b est inclus dans I, où f est bien définie.

De plus, f étant continue sur I, φ est continue sur $[0,\ 1]$ par composée.

Enfin, puisque $f(a) < f(b)$ et $f(y) - f(x) \leqslant 0$:

$$\varphi(0) = f(b) - f(a) > 0 \quad \text{et} \quad \varphi(1) = f(y) - f(x) \leqslant 0.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous garantit que toute valeur comprise entre $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ est atteinte. Or, $0 \in [\varphi(1),\ \varphi(0)]$. Il existe donc un réel $c \in [0,\ 1]$ tel que $\varphi(c) = 0$.

d) Puisque $\varphi(c) = 0$, on peut écrire que

$$f(b + c(y - b)) - f(a + c(x - a)) = 0 \implies f(b + c(y - b)) = f(a + c(x - a)).$$

Par injectivité de f, on peut en déduire que

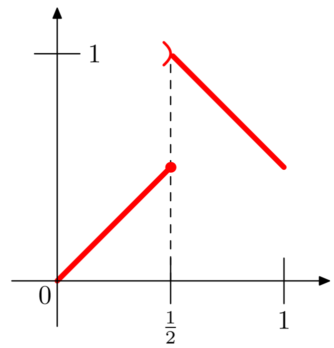
$$\begin{aligned} b + c(y - b) = a + c(x - a) &\implies b - a + c(a - b) = c(x - y) \\ &\implies (1 - c)(b - a) = -c(y - x) \end{aligned}$$

Or, $b > a$ donc $b - a > 0$, $y > x$ donc $y - x > 0$, et $-c \leqslant 0$ et $1 - c \geqslant 0$. Cela implique que

$$(1 - c)(b - a) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad -c(y - x) \leqslant 0.$$

Enfin, $1-c = 0$ quand $c = 1$ et $-c = 0$ quand $c = 0$. Les deux termes ne s'annulent pas en même temps, et donc il est impossible d'avoir un $c \in [0,\, 1]$ vérifiant $\varphi(c) = 0$: c'est donc absurde et notre hypothèse de départ est fausse : f est bien strictement croissante sur $[a,\, b]$. Ceci étant vrai pour tous a, b de I tels que $a < b$, on en déduit que f est strictement croissante sur I.
3. La fonction $x \mapsto -x$ est injective sur $[0,\, 1]$ mais n'est pas strictement croissante. Remarquons que, d'après ce qui précède, si la fonction est continue, elle est strictement monotone. On peut donc proposer une fonction non continue sur $[0,\, 1]$ et injective, qui n'est pas strictement monotone. Par exemple :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,\, \frac{1}{2}] \\ \frac{3}{2} - x & \text{si} \quad x \in]\frac{1}{2},\, 1] \end{cases}$$



Exercice 22

1. On fixe $u \in \mathbb{R}$. La fonction $g_u : x \mapsto ux - f(x)$ est continue sur $[-1,\, 1]$ comme somme de deux fonctions continues (affine et la fonction f). D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction g_u admet un maximum, que l'on note $M(u)$.
2. Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fixés, et $x \in E_u, y \in E_v$. Par définition de x :

$$\forall\, z \in [-1,\, 1], \quad g_u(z) \leqslant g_u(x) = M(u)$$

soit

$$\forall\, z \in [-1,\, 1], \quad uz - f(z) \leqslant M(u)$$

en particulier, en $z = y$

$$uy - f(y) \leqslant M(u) \implies (u - v)y + vy - f(y) \leqslant M(u)$$

soit, par définition de $y \in M(v)$:

$$(u - v)y + M(v) \leqslant M(u) \implies M(v) - M(u) \leqslant (v - u)y.$$

En reprenant le même raisonnement dans l'autre sens :

$$\begin{aligned} \forall\, z \in [-1,\, 1], \quad vz - f(z) \leqslant M(v) & \\ &\implies (v - u + u)x - f(x) \leqslant M(v) \\ &\implies (v - u)x + M(u) \leqslant M(v) \\ &\implies M(u) - M(v) \leqslant (u - v)x \end{aligned}$$

Si $u \geqslant v$, on peut réécrire :

$$M(u) - M(v) \leqslant (u-v)x \leqslant (u-v) \text{ car } x \leqslant 1$$

et

$$M(v) - M(u) \leqslant (v-u)y \implies -(v-u)y \leqslant M(u) - M(v) \implies -(u-v) \leqslant M(u) - M(v) \text{ car } y \geqslant -1.$$

On a donc

$$-(u-v) \leqslant M(u) - M(v) \leqslant (u-v) \implies |M(u) - M(v)| \leqslant |u-v|.$$

Le même raisonnement est valable quand $u < v$ et finalement

$$\boxed{|M(u) - M(v)| \leqslant |u-v|.}$$

3. Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé. D'après ce qui précède, pour tout $v \in \mathbb{R}$, $|M(u) - M(v)| \leqslant |u-v|$. Or, quand v tend vers u, $|u-v| \xrightarrow[v \to u]{} 0$. Par encadrement

$$\lim_{v \to u} |M(u) - M(v)| = 0 \implies \lim_{v \to u} M(v) = M(u).$$

Ainsi, M est continue en u. Ceci étant valable pour tout réel u, on peut conclure que M est contnue.

Remarque
On a en réalité démontré, en 2, que la fonction M est lipschitzienne. Étant lipschitzienne, elle est continue, comme on l'a vu dans l'exercice 20.