12

Chapitre

Limites de fonctions

Résumé

On étend dans ce chapitre la notion de limite de suite au cas plus général des limites de fonctions. Cela permettra de commencer les études de fonctions, en étudiant le comportement asymptotique de celles-ci.

Plan du cours

> « *Celui qui reconnaît consciemment ses limites est le plus proche de la perfection.* »

Johann Wolfgang von Goethe (1749 – 1832). *Sentences en prose*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition des limites :

- Connaître les limites usuelles et les croissances comparées . . . . ☐
- Savoir utiliser les théorèmes d'addition, multiplication, quotient de limites . . . . ☐
- Savoir calculer la limite d'une composée de fonction . . . . ☐
- Reconnaître les limites liées au taux d'accroissement . . . . ☐

② Savoir lever les indéterminations classiques :

- polynômes et fractions rationnelles . . . . ☐
- fonctions avec des radicaux . . . . ☐
- les cas "∞/∞" ou "$0/0$" . . . . ☐

③ Savoir appliquer les théorèmes d'existence de limites (théorème d'encadrement, de comparaison) . . . . ☐

④ Savoir déterminer le comportement asymptotique d'une fonction (limites, asymptotes) . ☐

I. Quelques définitions

Avant de commencer ce chapitre, nous allons introduire deux objets que l'on utilisera naturellement : la notion de voisinage, et de restriction d'une fonction.

1. Voisinage

Définition 12.1. Voisinage

Soit a un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. On dit que I est un **voisinage** de a dans $\mathbb{R}$ si :
- Cas $a \in \mathbb{R}$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon,\, a+\varepsilon[\subset I$.
- Cas $a = +\infty$: il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]A,\, +\infty[\subset I$.
- Cas $a = -\infty$: il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty,\, A[\subset I$.

Ainsi, un voisinage de a est un domaine qui contient un intervalle ouvert autour de a.

Exemple 12.1

Notons $I =]1,\, 2]$. Alors I est un voisinage de $1,5$ et $1,25$. En revanche, il n'est pas un voisinage de 3, ni de 2.

Solution

En effet, $]1,25\,;\, 1,75[\subset I$ et $]1,1\,;\, 1,35[\subset I$. En revanche, quel que soit $\varepsilon > 0$, $]3-\varepsilon,\, 3+\varepsilon[\cap I = \varnothing$ donc il ne peut pas être un voisinage de 3. De même, $]2-\varepsilon,\, 2+\varepsilon[\cap I =]2-\varepsilon,\, 2]$ et donc $]2-\varepsilon,\, 2+\varepsilon[\not\subset I$.

Remarque

Par abus de langage, dans la suite du cours, lorsqu'on dit qu'une propriété est vraie « au voisinage de a », cela signifiera qu'elle est vraie sur un intervalle qui est un voisinage de a.

2. Restriction

Définition 12.2. Restiction

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction et $A \subset E$. On appelle **restriction** de f à A la fonction, notée $f|_A$, définie par :

$$\begin{aligned} f|_A : A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Exemple 12.2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. La restriction de f à $\mathbb{R}^+$ est la fonction :

$$\begin{aligned} f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 1 \end{aligned}$$

Remarque

Restreindre une fonction permet de ne l'étudier que sur un sous-ensemble de son domaine de définition (par exemple, parce qu'elle est paire ou impaire).

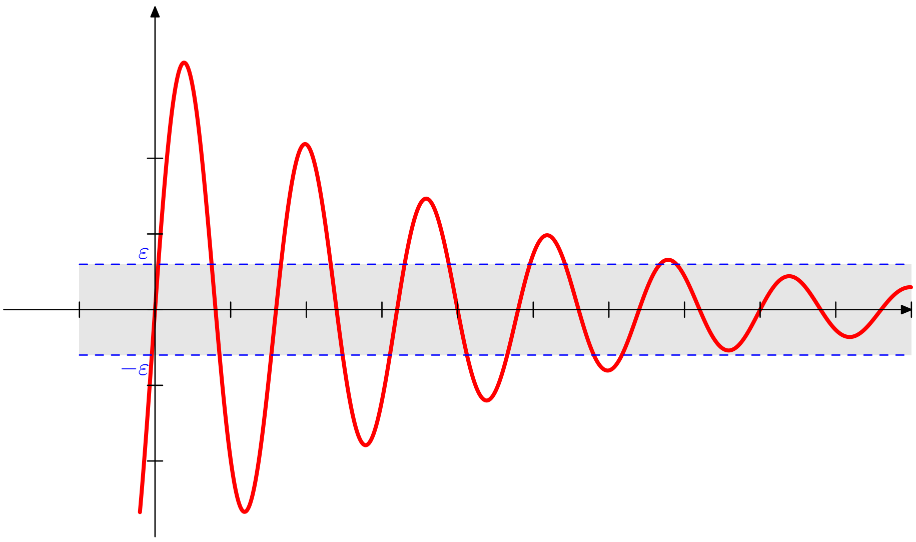
II. Limites à l'infini

1. Limites nulles

Définition 12.3.

Si, pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit qu'on veut), la fonction f est comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ (c'est-à-dire $|f(x)| \leqslant \varepsilon$) lorsque x est suffisamment grand , on dit que f **a pour limite** 0 quand x tend vers $+\infty$. On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = 0 \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$



Remarque

Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ M,\ \forall\ x, x > M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Remarque

On définit de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$:

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ M,\ \forall\ x, x < M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

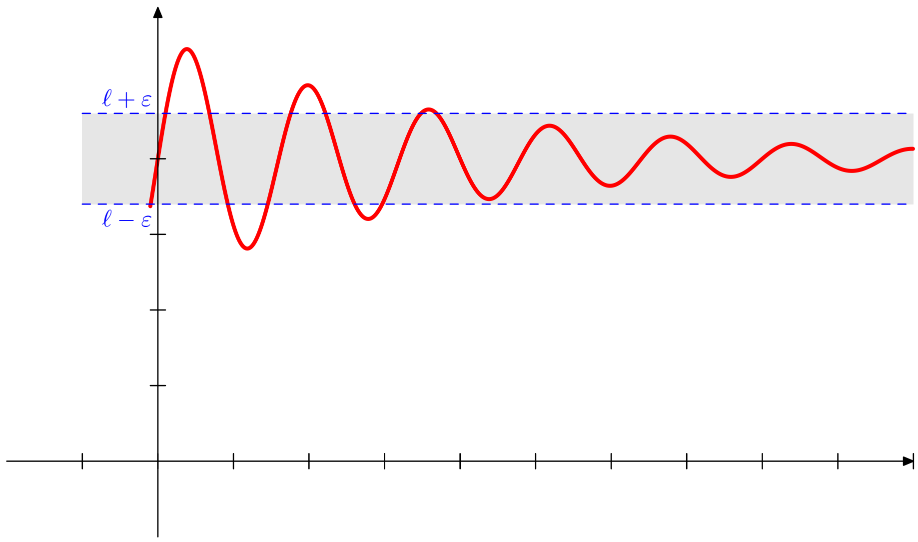
Exemple 12.3

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2. Limites finies : $\ell \in \mathbb{R}$

Définition 12.4.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f **a pour limite** ℓ quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) si $f(x) - \ell$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).



Remarque

Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ M,\ \forall\ x, x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

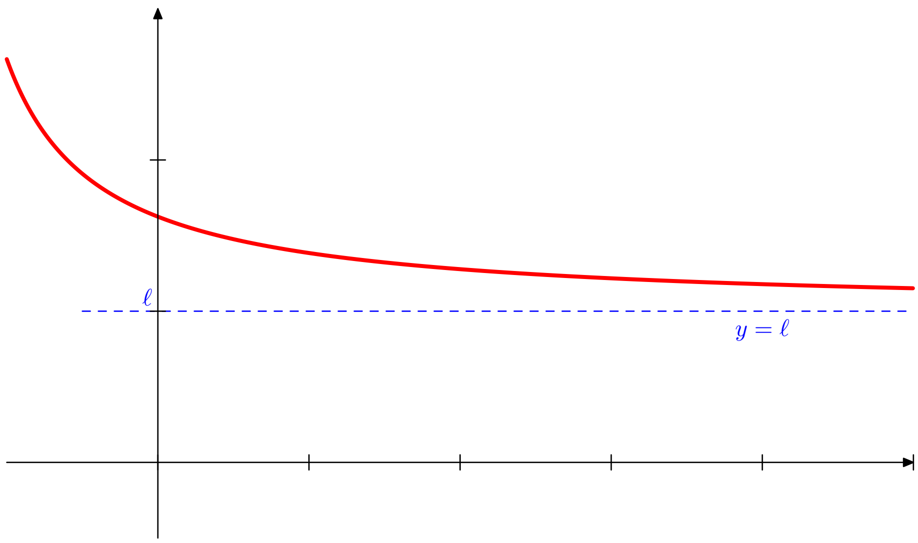
Cette définition rigoureuse est due à **Karl Weierstrass**, considéré comme le « père de l'analyse moderne », même si **Bernard Bolzano** avait déjà défini la notion de limite, certes de manière moins rigoureuse..

Exemple 12.4

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2$

Définition 12.5. Asymptote horizontale

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (où $\ell \in \mathbb{R}$). Alors, la droite d'équation $y = \ell$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (même chose en $-\infty$).



On dispose ici d'une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.

Remarque

Pour étudier la position de la courbe de f par rapport à l'asymptote $y = \ell$, on étudie le signe de $f(x) - \ell$.

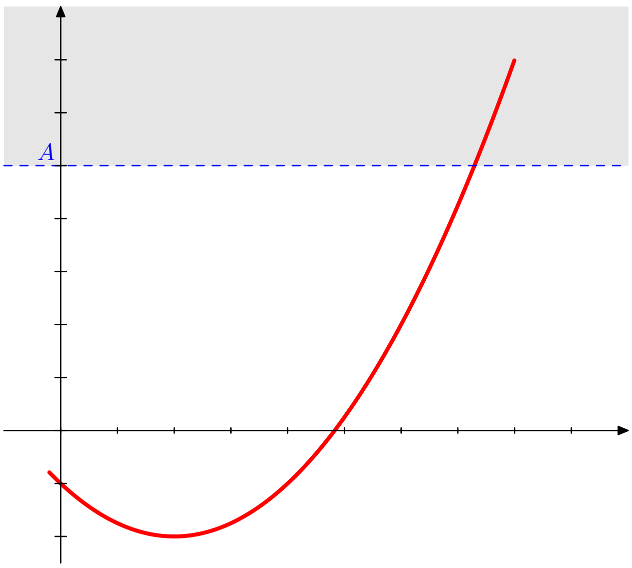
- Si $f(x) - \ell \geqslant 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote.
- Si $f(x) - \ell \leqslant 0$, la courbe est en dessous de son asymptote.

3. Limites infinies

Définition 12.6.

Si, pour tout nombre A (aussi grand qu'on veut), $f(x)$ est toujours supérieur ou égal à A dès que x est suffisamment grand, on dit que f **a pour limite** $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$



Remarque

Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\ A > 0,\ \exists\ M,\ \forall\ x, x > M \Rightarrow f(x) > A$$

Remarque

On définit de même $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

III. Limites en $a \in \mathbb{R}$

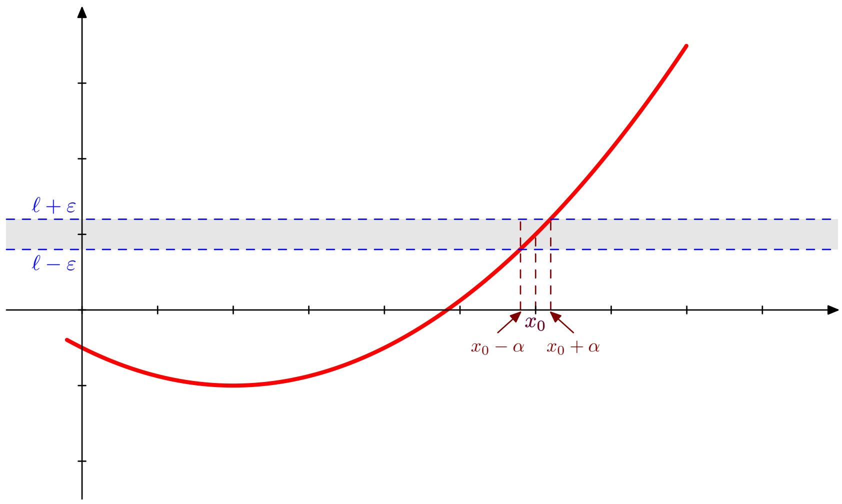
Ici, on s'intéresse au comportement d'une fonction f quand x tend vers $a \in \mathbb{R}$.

1. Limite réelle en un point

Définition 12.7.

Soient x_0 et ℓ deux réels.
Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès lors que x est proche de x_0, on dit que f **a pour limite** ℓ quand x tend vers x_0. On note

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = \ell \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$$



Remarque

Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ \forall\ x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Proposition 12.1.

Il y a unicité de la limite. On peut donc bien parler de la limite en x_0.

Démonstration

Supposons que f admette deux limites ℓ et ℓ' en x_0 et on suppose, par l'absurde, que $\ell \neq \ell'$.
On pose alors $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{4} > 0$. Il existe $\alpha > 0$ et $\alpha' > 0$ tels que, pour tout $x \in I$,

$$|x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leqslant \alpha' \implies |f(x) - \ell'| < \varepsilon.$$

On prend $y \in I$ tel que $|y - y_0 l \leqslant \min(\alpha, \alpha')$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} |\ell - \ell'| &= |(\ell - f(y)) + (f(y) - \ell')| \\ &\leqslant |\ell - f(y)| + |\ell' - f(y)| \leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $|\ell - \ell'| \leqslant \frac{|\ell-\ell'}{2}$: c'est absurde.

Exemple 12.5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Soit $x_0 = 2$. Montrer que, quand x tend vers x_0, $f(x)$ va tendre vers $5 = f(2)$.

Solution
On peut le démontrer rigoureusement :

$$|f(x) - 5| = |2x + 1 - 5| = |2x - 4| = 2|x - 2|$$

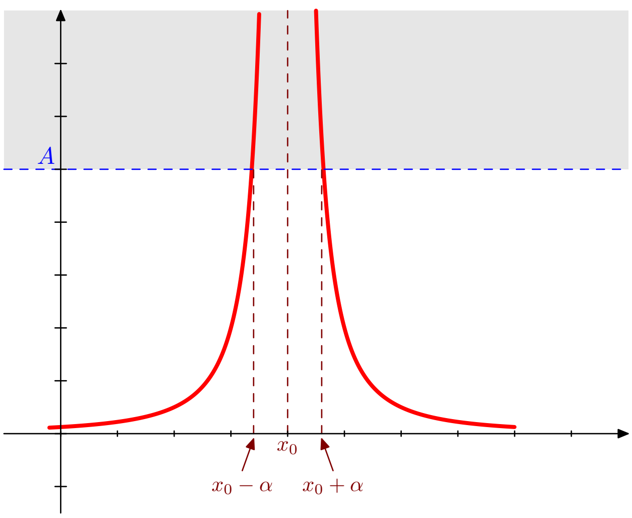
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors $|f(x) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$. On pose alors $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.

2. Limite infinie en un point

Définition 12.8.

Soit x_0 un réel.
Si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès lors que x est proche de x_0, on dit que f **a pour limite** $+\infty$ quand x tend vers x_0. On note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = +\infty \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$$



Remarque
Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall \ A > 0, \ \exists \ \alpha > 0, \ \forall \ x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

Remarque
Il y a unicité de la limite. On peut donc bien parler de la limite en x_0.
On définit également $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ de la même manière.

Remarque
Les définitions données sont correctes, que x_0 soit dans le domaine de définition de f ou non. Dans ce dernier cas, on excluera la valeur x_0 ; par exemple, $f : I \to \mathbb{R}$ tend vers ℓ en $x_0 \notin I$ si

$$\forall \ \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, x \in I \cap (]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[) \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

3. Limite à gauche et à droite

Définition 12.9.

Soit x_0 un réel.

- Si on s'intéresse à la limite en x_0 de f, en imposant $x < x_0$, on parle de la **limite à gauche** en x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$.
- Si on s'intéresse à la limite en x_0 de f, en imposant $x > x_0$, on parle de la **limite à droite** en x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.

Mathématiquement, f admet ℓ pour limite à gauche en x_0 si

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall\ x \in I,\ x \in \left]x_0 - \delta, x_0\right[\implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque

Une fonction peut avoir des limites à gauche et à droite en x_0 différentes ! Par exemple

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Proposition 12.2.

Soit f une fonction et x_0 un réel. Alors f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet des limites à gauche et à droite en x_0 et que ces limites sont les mêmes.
Dans ce cas,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Démonstration

Si f admet une limite en x_0, par définition elle admet également une limite à droite et à gauche qui sont égales à la limite.
Réciproquement, on suppose que f admet des limites à droite et à gauche en x_0 égales à ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\alpha_d > 0$ et $\alpha_g > 0$ tels que, pour tout $x \in I$:

$$x \in \left]x_0 - \alpha_g, x_0\right[\implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad x \in \left]x_0, x_0 + \alpha_d\right[\implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

En prenant $\alpha = \min(\alpha_d, \alpha_g)$, on a, pour tout $x \in I$:

$$x \in \left]x_0 - \alpha, x_0\right[\cup \left]x_0, x_0 + \alpha\right[\implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

et donc $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$.

Exemple 12.6

Ainsi, la fonction inverse n'admet pas de limite en 0, puisque ses limites à droite et à gauche en 0 sont différentes.

Méthode

On est souvent amené à étudier des limites à droite et à gauche lorsque la fonction est définie de deux manières différentes selon les intervalles.

Exemple 12.7

Etudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Solution

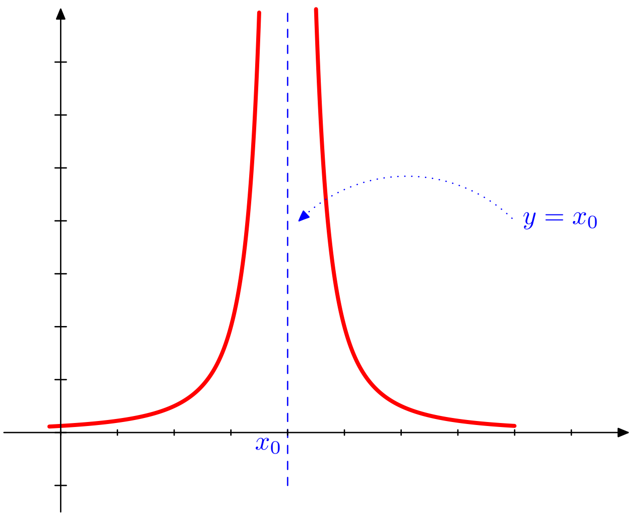
On remarque que :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 = f(0)$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$

Puisque les limites à droite et à gauche sont égales, on en déduit que f admet une limite en 0, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Définition 12.10. Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{x\to a^+(\text{ou } a^-)} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe de f.



IV. Théorèmes d'existence et de comparaison

1. Fonctions monotones

Les fonctions monotones possèdent des propriétés intéressantes concernant les limites :

Théorème 12.3.

Soit f une fonction monotone sur un segment $[a, b]$. Alors f admet des limites à gauche et à droite en tout point.

Théorème 12.4.

Soit f une fonction monotone sur $I =]a, b[$.

- Si f est croissante et majorée sur I, alors f admet une limite finie en b^-.
- Si f est croissante et minorée sur I, alors f admet une limite finie en a^+.
- Si f est décroissante et minorée sur I, alors f admet une limite finie en b^-.

- Si f est décroissante et majorée sur I, alors f admet une limite finie en a^+.

Remarque

Si f est croissante sur $I =]a, b[$ mais non majorée sur I, alors f admet une limite en b^- qui vaut $+\infty$.
De manière générale, une fonction monotone sur $]a, b[$ admet toujours des limites en a^+ et en b^-, finie ou infinie.

2. Limites et inégalités

Théorème 12.5.

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions définies sur I, sauf éventuellement en x_0, mais possédant une limite en x_0. Alors, si pour tout x de $I \backslash \{x_0\}$, $f(x) \geqslant g(x)$, on a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geqslant \lim_{x \to x_0} g(x)$$

En particulier, si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \neq x_0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0$.

Attention

Le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes. Si $f(x) > g(x)$ pour tout $x \neq x_0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Par exemple, pour tout x, $1 + \frac{1}{x} > 1$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 1$.

3. Théorème d'encadrement

Théorème 12.6. Théorème d'encadrement ou théorème « des gendarmes »

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soient f, g, h trois fonctions définies sur I sauf éventuellement en x_0. Si, pour tout x de $I \backslash \{x_0\}$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si f et h ont la même limite ℓ en x_0, alors la limite de g en x_0 existe, et

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

Démonstration

Admis. Idée de démonstration dans le chapitre sur les suites.

Exemple 12.8

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{[x]}{x}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

Solution

On a, pour tout x de $]0, +\infty[$, $x - 1 \leqslant [x] \leqslant x$, donc, en divisant par $x > 0$,

$$\frac{x-1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x}{x} = 1$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$, on en déduit donc, par encadrement, que la limite de

g en $+\infty$ existe, et
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

Théorème 12.7. Conséquence du théorème d'encadrement

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et ℓ un réel. Soient f et g deux fonctions définies sur I sauf éventuellement en x_0. Si, pour tout réel $x \in I\backslash\{x_0\}$ on a $|f(x)-\ell| \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Démonstration

C'est une conséquence directe du théorème d'encadrement, puisque $|f(x)-\ell| \leqslant g(x)$ est équivalent à $\ell-g(x) \leqslant f(x) \leqslant \ell+g(x)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème d'encadrement.

Remarque

On en déduit que si f tend vers 0 en x_0, $|f|$ également. En effet, pour tout $x\in I$:
$$-f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant f(x)$$
et on procède par encadrement.

Proposition 12.8.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un réel (ou l'infini), et f et g deux fonctions définies sur I. Si f est bornée sur I (ou sur un voisinage de x_0) et si g a pour limite 0 en x_0, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$.

Démonstration

f étant bornée, il existe M tel que, pour tout $x\in I$ (ou sur un voisinage de x_0, ce qui sera suffisant), on a
$$|f(x)| \leqslant M$$
et donc
$$|f(x)g(x)| \leqslant M|g(x)|.$$
Cette dernière limite, par hypothèse, tend vers 0, et donc fg également.

4. Comparaison à l'infini

Théorème 12.9. Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur $I=]a,+\infty[$ (avec $a\in\mathbb{R}$). Si pour tout x de I :

- $f(x) \geqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- $f(x) \leqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Démonstration

Soit M un réel. Par définition, à partir d'un certain réel b, on a $g(x)>M$. Or $f(x) \geqslant g(x)$, donc $f(x)>M$ pour tout $x \geqslant b$: par définition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Exemple 12.9

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{[x]+1}{\sqrt{x}}$.

Solution

Pour tout réel x, on a $[x] \leqslant x \leqslant [x]+1$. Ainsi, pour tout réel $x>0$ (puisque $\sqrt{x}>0$) on a

$$\frac{x}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{[x]+1}{\sqrt{x}}$$

soit

$$\sqrt{x} \leqslant \frac{[x]+1}{\sqrt{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, par comparaison,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]+1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

5. Asymptote oblique

Définition 12.11. Asymptote oblique

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère donné. Soit (d) une droite d'équation $y = ax+b$ $(a \neq 0)$. On dit que la droite (d) est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

Exemple 12.10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Solution

En effet, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) - x = \frac{x^2+1}{x} - x = \frac{1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Ainsi la droite d'équation $y = x$ est bien asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

V. Opérations sur les limites et limites usuelles

Avant de donner les résultats sur les opérations, on donne une définition de tendre vers 0^+ et 0^- :

Définition 12.12.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet 0^+ pour limite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0^+$, si f admet 0 pour limite en x_0, et est strictement positive sur un voisinage de x_0.

···

- On dit que f admet 0^- pour limite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0^-$, si f admet 0 pour limite en x_0, et est strictement négative sur un voisinage de x_0.

1. Opérations sur les limites

On suppose connues les limites de deux fonctions f et g.

a. Limite de $f+g$

$\lim g$ / $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Exemple 12.11

$$\lim_{x \to +\infty} (x+\sqrt{x}) = +\infty$$

Solution

En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+\sqrt{x}) = +\infty$.

b. Limite de $f \times g$

$\lim g$ / $\lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell.\ell'$	signe$(\ell').\infty$	-signe$(\ell').\infty$
$+\infty$	signe$(\ell).\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	-signe$(\ell).\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

Si $\ell = 0$ (et/ou $\ell' = 0$), seul le résultat $\lim(fg) = \ell.\ell' = 0$ est déterminé. Toutes les autres limites (du type « $0 \times \infty$ ») sont **indéterminées**.

Exemple 12.12

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\sqrt{x}) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} 3x\mathrm{e}^x = 0$

Solution

En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\sqrt{x}) = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{x \to 0} 3x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$. Par produit, $\lim\limits_{x \to 0} 3x\mathrm{e}^x = 0$.

c. Limite de $\frac{f}{g}$

$\lim g$ / $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	signe$(\ell').\infty$	-signe$(\ell').\infty$
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

Si $\lim g = 0$, il faut tout d'abord préciser si $\lim g = 0^+$ (g tend vers 0 en restant positif) ou si $\lim g = 0^-$, et on applique :

$\lim g$ / $\lim f$	0	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	signe$(\ell).\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	-signe$(\ell).\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 12.13

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$

Solution

En effet, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$ par somme, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par quotient, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$.

De même, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2+1 = 1$ par somme et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$.

☞ *Exercice 1.*

2. Limite d'une fonction composée

Théorème 12.10.

Soient f, g, h trois fonctions telles que $f = g\circ h$ sur un intervalle I. Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R}\cup\{+\infty;-\infty\}$.
Si $\displaystyle\lim_{x\to a} h(x) = b$ et $\displaystyle\lim_{x\to b} g(x) = c$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

Démonstration

Admis.

Méthode

Pour déterminer la limite d'une fonction composée $f(x) = g(h(x))$ en x_0 :

- On pose $X = h(x)$.
- On détermine la limite b de X en x_0.
- On détermine la limite c de g en b, et on conclut : la limite de f en x_0 vaut c.

Exemple 12.14

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}$.

Solution

- On pose $X = x^2-x+1$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$

- On a
$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Par composée, on a donc
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1} = +\infty$$

Exercice 12.15

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$.

Solution

Posons $X = 3x-1$. Alors :

- On a $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} 3x-1 = 0^+$.
- De plus, $\displaystyle\lim_{X\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$ par quotient.

Par composée,
$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$$

☞ *Exercice* ??.

3. Limites usuelles

a. Limites classiques

On dispose d'un ensemble de limites usuelles.

Proposition 12.11. Fonctions usuelles

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ sinon.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty$$

Proposition 12.12. Fonctions puissances

$$\begin{array}{rl}
\text{Pour tout } \ \alpha > 0, & \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0 \\
\text{Pour tout } \ \alpha < 0, & \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = +\infty \\
\text{Pour tout } \ a > 1, & \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0 \\
\text{Pour tout } a \text{ tel que } \ 0 < a < 1 & \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty
\end{array}$$

b. Croissances comparées

Théorème 12.13. Croissances comparées

Pour tout $\alpha > 0$, $p > 0$ et $q > 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{q^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln^p(x)} = +\infty$$

Conséquence 12.14.

Par passage à l'inverse,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^p(x)}{x^\alpha} = 0$$

Théorème 12.15. Conséquence des croissances comparées

Pour tout $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$$

Démonstration

Posons $X = \frac{1}{x}$. Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} X = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{\ln(X)}{X^\alpha} = 0$ d'après ce qui précède.

Théorème 12.16.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$$

Démonstration

Se démontre de la même manière que précédemment (en posant $X = -x$).

Méthode

Pour utiliser les croissances comparées, il faut souvent faire un changement de variable pour s'y ramener.

Exemple 12.16

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^3}$.

Solution

On pose $X = 2x$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{(X/2)^3} = \lim_{X\to+\infty} 2^3 \frac{e^X}{X^3} = +\infty \text{ par croissance comparée.}$$

☞ *Exercice 3.*

4. Autres limites

Théorème 12.17. Taux d'accroissement

On dispose des limites suivantes :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad \lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

Démonstration

Nous verrons la démonstration de ces limites dans le chapitre dédié à la Dérivation.

Exemple 12.17

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^3}$.

Solution

On remarque que, pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x^3} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{x^2}$$

Or

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Par produit,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^3} = +\infty$$

5. Quelques indéterminations classiques

a. Polynômes et fractions rationnelles

Méthode (Règle du plus haut degré)

En $+\infty$ ou en $-\infty$, il y a une méthode classique dite du terme du plus haut degré.

- Si $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ est un polynôme, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$.
- Si $g : x \mapsto \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} \cdots + b_0}$ est une fraction rationnelle, alors

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$$

Exemple 12.18

Soient $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ et $g : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x^2-3x+1}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

Solution

D'après la règle du terme du plus haut degré,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

De même,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Attention

Cette méthode ne s'applique qu'aux limites en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Racines

Méthode (Quantité conjuguée)

Lorsqu'une fonction contient des radicaux, on utilise la quantité conjuguée.

Exemple 12.19

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution

On constate que la limite en $+\infty$ de f est indéterminée. Alors, pour tout réel x, on a

$$f(x) = (\sqrt{x^2+1} - x)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

et donc, par composée et quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

c. « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ »

Méthode

Dans les cas « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ », on commence par mettre au numérateur et au dénominateur le terme prépondérant (en utilisant les croissances comparées).

Exemple 12.20

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{e^x - 1}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution

Alors

$$\forall\ x > 0, \quad \frac{x+1}{e^x-1} = \frac{x}{e^x}\,\frac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}}$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \,(\text{croissance comparée}) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = 1 \text{ par quotient}$$

Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

☞ *Exercice 2.*

VI. Négligeabilité et équivalence

Nous allons introduire les concepts déjà vus avec les suites de négligeabilité et équivalence, afin de simplifier certaines limites. Nous reviendrons plus en détail sur ces notions dans un chapitre ultérieur.
Dans toute cette partie, x_0 désignera ou bien un nombre réel, ou bien $+\infty$, ou bien $-\infty$.

1. Négligeabilité

Définition 12.13. Cas des fonctions

Soient f et g définies au voisinage de x_0, avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0. Alors, on dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de x_0, et on note $f = o_{x_0}(g)$, si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$f = o_{x_0}(g)$ peut se noter également $f(x) = o_{x_0}(g(x))$ ou encore $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ et se lit « f est un petit o de g au voisinage de x_0 ».

Exemple 12.21

Par exemple, $x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exercice 12.22

Montrer que $\sin(x) \underset{0}{=} o\left(\sqrt{x}\right)$

Solution

En effet, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} &= \frac{\sin(x)\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}\\ &= \sqrt{x}\frac{\sin(x)}{x}\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$ et $\sqrt{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, par produit

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

et donc $\sin(x) \underset{0}{=} o\left(\sqrt{x}\right)$.

On dispose d'un ensemble de négligeabilités usuelles, qui découlent des limites vues ou des méthodes usuelles vues précédemment.

Théorème 12.18. Négligeabilités usuelles – fonctions

Soient α et β deux réels strictement positifs. On a

- Si $\alpha < \beta$, on a
$$x^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left(x^\beta\right) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{0}{=} o\left(x^\alpha\right)$$
- Si $\alpha < \beta$,
$$(\ln(x))^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left((\ln(x))^\beta\right) \quad \text{et} \quad |\ln(x)|^\alpha \underset{0^+}{=} o\left(|\ln(x)|^\beta\right).$$
- Si $0 < p < q$, alors $p^x \underset{+\infty}{=} o(q^x)$.

Théorème 12.19. Croissances comparées – fonctions

Soient α et β deux réels strictement positifs.

- Si $q > 1$, on a
$$x^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left(q^x\right)$$
et en particulier $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$.
- Si $q > 1$ alors
$$|x|^\alpha \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{q^x}\right).$$
- On a
$$(\ln(x))^\alpha = o_{+\infty}\left(x^\beta\right) \quad \text{et} \quad |\ln(x)|^\alpha \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$
- Si $0 < q < 1$, alors
$$q^x \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

2. Equivalence

Définition 12.14. Équivalence de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. On dit que f est **équivalente** à g en x_0 si, au voisinage de x_0, on a
$$f - g \underset{x_0}{=} o(g)$$
ce qu'on note $f \underset{x_0}{\sim} g$. Ainsi, puisque g ne s'annule pas au voisinage de x_0, on a
$$f \underset{x_0}{\sim} g \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Remarque

Il y a bien équivalence entre les deux définitions. En effet, puisque g ne s'annule pas au voisinage de x_0
$$f - g \underset{x_0}{=} o(g) \iff \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 1.$$

Exemple 12.23

On a les équivalents suivants :

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \quad \text{et} \quad x^2 - x^3 \underset{+\infty}{\sim} -x^3.$$

En effet

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2 - x^3}{-x^3} = -\frac{1}{x} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

On dispose également d'équivalences usuelles, qui permet de déterminer efficacement des limites. Leurs démonstrations seront vues ultérieurement.

Théorème 12.20. Polynômes et puissances

Soient α et β deux réels tels que $0 \leqslant \alpha < \beta$. Alors

$$(x^\alpha + x^\beta) \underset{+\infty}{\sim} x^\beta \quad \text{et} \quad (x^\alpha + x^\beta) \underset{0}{\sim} x^\alpha.$$

De plus, si α et β sont des entiers, alors

$$(x^\alpha + x^\beta) \underset{-\infty}{\sim} x^\beta$$

Ainsi, si $p < q$ et si $(a_p, \dots, a_q)$ sont des réels tels que $a_p \neq 0$ et $a_q \neq 0$, alors

$$\sum_{k=p}^{q} a_k x^k \underset{+\infty}{\sim} a_q x^q, \quad \sum_{k=p}^{q} a_k x^k \underset{0}{\sim} a_p x^p, \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{q} \frac{a_k}{x^k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_p}{x^p}.$$

Enfin, des équivalences qui découlent des limites de taux d'accroissement :

Théorème 12.21. Equivalences usuelles

On dispose des équivalents suivants :

- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$,
- $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$,
- Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$,
- $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$,
- $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$,
- $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

VII. Caractérisation séquentielle

Connaître la limite d'une fonction peut permettre, dans certains cas, de déterminer la limite d'une suite.

Théorème 12.22. Caractérisation séquentielle de la limite

Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et (u_n) une suite. On suppose que (u_n) converge vers $\ell \in I$ ou à une extrémité de I, et que $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = a$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = a$$

Exemple 12.24

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et u la suite définie pour tout n par $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} = 1$$

Exercice 12.25
Déterminer, de la même manière,
$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

Solution
On pose $f : x \mapsto \ln(x)$ et pour tout n, $u_n = \frac{n}{n^2+1}$. On a rapidement
$$u_n \sim \frac{n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
et $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$. On en déduit donc que
$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = -\infty$$

VIII. Etude des limites d'une fonction

1. 1ère étape : limites

Lorsqu'on se donne une fonction, on commencera toujours par déterminer ses limites au borne de l'intervalle de définition :

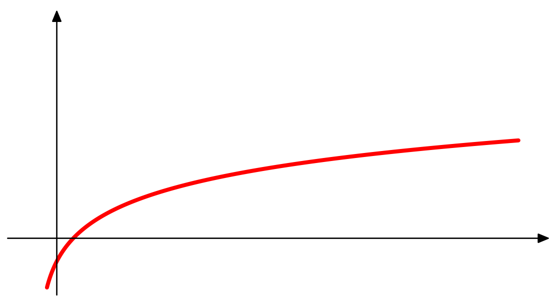
- Si f est définie sur $\mathbb{R}$, on déterminera $\lim\limits_{x\to+\infty} f$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f$.
- Si f est définie sur $]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$, il faut déterminer 4 limites : en $+\infty$, $-\infty$, a^+ et a^-.

On notera directement les asymptotes horizontales (limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$) et les asymptotes verticales (limite infinie en a^+ ou a^-).

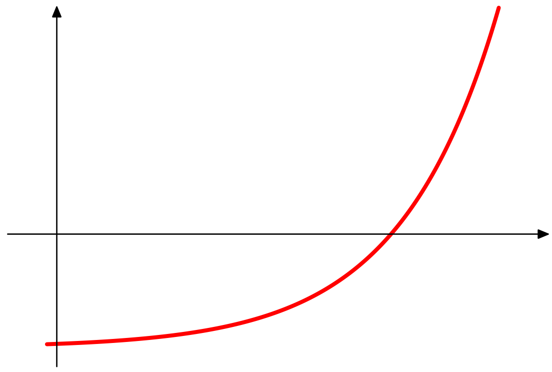
2. 2ème étape : branches infinies

Si les limites en $+\infty$ et/ou $-\infty$ sont infinies, on cherche une éventuelle asymptote oblique. Pour cela on détermine
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

- Si cette limite est nulle, on dit que la courbe de f possède une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses** en $+\infty$.

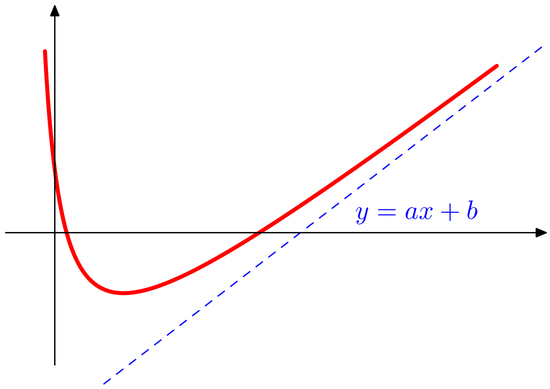


  L'exemple classique est la fonction logarithme népérien.
- Si cette limite est infinie, on dit que la courbe de f possède une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** en $+\infty$.

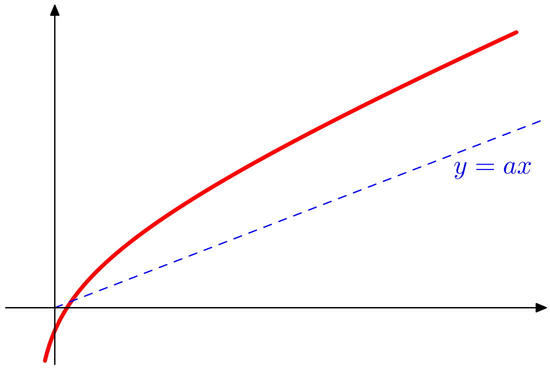


L'exemple classique est la fonction exponentielle.

- Si cette limite est un nombre réel a, on dit que la courbe de f admet une direction asymptotique d'équation $y = ax$. Il reste alors à calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$.
  - Si cette limite est un réel b, la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe de f en $+\infty$.



  - Si cette limite est infinie, on dit que la courbe de f possède une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.



(bien sûr, tout ceci est valable en $-\infty$.)

☞ *Exercice 8.*

Exercices
12

Exercices

Limites simples

●○○ **Exercice 1** Limites de somme, produit, quotient (30 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+\dfrac{1}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}+x$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^5-2x^{-3}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\times(2+x)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\times\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}+1}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x-1}{\frac{1}{x}}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{x^{-2}+1}$

●○○ **Exercice 2** Limites de composée (30 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2-7x+1}{-2x+4}\right)^3$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{2x^2-x-1}{-x^2+1}\right|$

●○○ **Exercice 3** *Melting pot* (30 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x^2+1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3x-\dfrac{1}{2x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x^2-2x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3+1}{x^2-1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{2x+1}{x}$
7. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{3x^2+2x+1}{x-2}$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$
9. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{-2x-3}{\sqrt{x-3}}$

●○○ **Exercice 4** Croissances comparées et encadrement (30 min.)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-x}{e^x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-x}{e^x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^5)^x}{(5^x)^5}$
4. $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{(x^5)^x}{(5^x)^5}$
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1+x^2}{2^x}$
6. $\lim\limits_{x\to0^+} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}}$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{e^x-1}$

11. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{x^2\ln(x)}$

12. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln(x)}$

Limites de fonctions

●○○ Exercice 5 Fonction (5 min.)

Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par

$$\forall\ x\in\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

●●○ Exercice 6 Fonctions et partie entière (10 min.)

1. Montrer que, pour tout réel x,

$$\frac{1}{2}\leqslant \frac{1}{2-(x-[x])}\leqslant 1$$

2. Déterminer alors

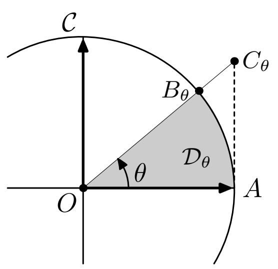
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-(x-[x])}$$

●○○ Exercice 7 Calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ (10 min.)

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé et $\mathcal{D}$ le disque, d'aire π, dont il est la frontière.

Soit A le point de coordonnées $(1,0)$. Soit $\theta\in\,]0,\frac{\pi}{2}[$. On note alors

- B_θ le point du cercle de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB_\theta})=\theta$.
- C_θ le point d'intersection de la droite (OB_θ) avec la droite d'équation $x=1$.
- $\mathcal{D}_\theta$ le secteur angulaire délimité par $\mathcal{C}$ et par les deux rayons $[OA]$ et $[OB_\theta]$.



1. Déterminer l'aire du secteur angulaire $\mathcal{D}_\theta$.
2. Calculer l'aire des triangles AOB_θ et AOC_θ.
3. En remarquant que $AOB_\theta\subset\mathcal{D}_\theta\subset AOC_\theta$, en déduire que

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}=1.$$

Comportement asymptotique

●○○ Exercice 8 Fonctions (20 min.)

Déterminer le domaine de définition, les limites aux bornes et le comportement asymptotique aux bornes des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 14 \qquad g : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad h : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad i : x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 2}{x - 1}$$

●○○ **Exercice 9 Des branches infinies** (20 min.)

Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \ln\left(e^x + e^{-x}\right), \qquad g : x \mapsto x + \sqrt{x+1}\ln(x+1), \qquad h : x \mapsto \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}}.$$

Pour aller plus loin

●●○ **Exercice 10 La croissance a ses limites** (10 min.)

Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, telle que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Donner un contre-exemple lorsque f n'est pas croissante.

●●● **Exercice 11 Périodique, mais régulière** (15 min.)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique, et admettant une limite finie en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

Les trois première se traitent par somme, les trois suivantes par produit, et enfin les trois dernières par quotient.

1. Puisque $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}$, par somme, $\lim_{x\to-\infty} x^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$.
2. De même, $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et par somme, $\sqrt{x} + x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
3. Enfin, $x^5 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et $x^{-3} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. Par somme, $\lim_{x\to-\infty} 3x^5 - 2x^{-3} = -\infty$.
4. On a $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} 2 + x = -\infty$, par produit, $\lim_{x\to-\infty} x^2(2+x) = -\infty$.
5. De même, $x^3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} x^3 = +\infty$ et $1 - \frac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ par somme. Par produit,
$$x^3\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$
6. Enfin, par somme, on a
$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{x^2} = 2$$
Par produit, $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(2 + \frac{1}{x^2}\right) = 2$.
7. Par somme, $\frac{1}{x} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. De plus, $x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Par quotient, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{x^2} = 0$.
8. De même, $-x - 1 \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^-$. Par quotient,
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x-1}{\frac{1}{x}} = -\infty.$$
9. Enfin, par somme, $\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$ et $x^{-2} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Par quotient,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{x^{-2}+1} = -1.$$

Exercice 2

1. Par la règle du terme de plus haut degré,
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - x = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$$
Par composée,
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x} = +\infty.$$
2. De même
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 7x + 1}{-2x + 4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-2x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}x = +\infty.$$
Par composée,
$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2 - 7x + 1}{-2x + 4}\right)^3 = +\infty.$$

3. Enfin,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - x - 1}{-x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2.$$

Par composée,

$$\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{2x^2 - x - 1}{-x^2+1}\right| = |-2| = 2.$$

Exercice 3

Pour les polynômes ou fractions rationnelles en $+\infty$ ou $-\infty$, on utilise la règle du terme de plus haut degré. Ainsi,

1. $\lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ d'après la règle du terme de plus haut degré.
2. $\lim_{x\to-\infty} 2x + 1 = -\infty$ donc par quotient $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x+1} = 0$. Enfin, par la règle du terme de plus haut degré,

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 + 3x = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

Par somme, $\lim_{x\to-\infty} x^2 + 3x - \frac{1}{2x+1} = +\infty$

3. Par la règle du terme de plus haut degré,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4. De même,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$

5. La limite étant indéterminée, même en factorisant, on utilise la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$

En posant $X = x+1$, on constate que $\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$. Ainsi, par composée, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$. Par somme, on en déduit donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = +\infty$$

6. On constate que $\lim_{x\to0^-} 2x + 1 = 1$ et $\lim_{x\to0^-} x = 0^-$. Par quotient,

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{2x+1}{x} = -\infty$$

7. De même, $\lim_{x\to2^+} 3x^2 + 2x + 1 = 17$ et $\lim_{x\to2^+} x - 2 = 0^+$. Par quotient,

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{3x^2+2x+1}{x-2} = +\infty$$

8. On constate que $\lim_{x\to2^-} x^2 - 5x + 6 = 0$. On a donc une indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ». Au numérateur, nous avons un trinôme du second degré dont 2 est donc une racine. Après factorisation, on obtient $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Ainsi,

$$\frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{x-3}{x-2}$$

en utilisant la parité de la fonction carrée. Ainsi, puisque $\lim_{x\to2^-} x - 3 = -1$ et $\lim_{x\to2^-} x - 2 = 0^-$, par quotient

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2} = +\infty$$

9. On constate que $\lim\limits_{x\to 3^+} -2x-3=-9$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{x-3}=0^+$ car la fonction racine est toujours positive. Par quotient,

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \frac{-2x-3}{\sqrt{x-3}}=-\infty$$

Exercice 4

Remarque

⚠ La méthode du terme de plus haut degré ne s'applique que sur des polynômes ou des fractions rationnelles. Si des fonctions du type exponentielle ou logarithme sont présentes, il faut utiliser les croissances comparées en factorisant par la fonction qui est la plus importante.

1. On constate que

$$\frac{\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}^x}}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ et par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x}=0$. Par somme et quotient,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}^x-1}=1$$

2. En $-\infty$, il n'y a pas d'indétermination ! $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ donc par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x-x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x-1=-1$. Par quotient,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}^x-1}=-\infty$$

3. Quand on a des fonctions puissances, la seule méthode acceptable est de repasser à la notation exponentielle.

$$\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5}=\frac{\mathrm{e}^{x\ln(x^5)}}{\mathrm{e}^{5\ln(5^x)}}=\frac{\mathrm{e}^{5x\ln(x)}}{\mathrm{e}^{5\ln(\mathrm{e}^{x\ln(5)})}}=\frac{\mathrm{e}^{5x\ln(x)}}{\mathrm{e}^{5x\ln(5)}}=\mathrm{e}^{5x(\ln(x)-\ln(5))}$$

On peut également utiliser les propriétés des fonctions puissances, dans le cas où $x>0$:

$$\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5}=\frac{x^{5x}}{5^{5x}}=\left(\frac{x}{5}\right)^{5x}=\mathrm{e}^{5x(\ln(x)-\ln(5))}$$

On pose $X=5x(\ln(x)-\ln(5))$.
◇ En 0^+ : puisque $X=5x\ln(x)-5x\ln(5)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}X=0$ par somme et croissance comparée. Puisque $\lim\limits_{X\to 0}\mathrm{e}^X=1$, par composée

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5}=1$$

◇ En $+\infty$: puisque $X=5x(\ln(x)-\ln(5))$, $\lim\limits_{x\to+\infty}X=+\infty$ par produit. Puisque $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^X=+\infty$, par composée

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5}=+\infty$$

5. Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+}1+x^2=1$ et par composée, $\lim\limits_{x\to 0^+}2^x=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln(2)}=1$. Par quotient,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x^2}{2^x}=1$$

6. Quand il faut calculer une limite avec la partie entière, on passera souvent par le théorème d'encadrement.

$$\text{Pour tout } x>0,\ \frac{1}{x}-1\leqslant\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant\frac{1}{x}$$

En multipliant par $x>0$,

$$\text{Pour tout }\ x>0,\ 1-x \leqslant x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 1$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-x = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$, par encadrement, la limite existe et

$$\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 1$$

7. Avant d'envisager la quantité conjuguée, on peut essayer de factoriser, ici par $\sqrt{x}$:

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}+1\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

En posant $X = 1+\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $Y = 1+\frac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} X = \lim\limits_{x\to+\infty} Y = 1$. Puisque $\lim\limits_{X\to 1}\sqrt{X} = 1$, par composée,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

Par quotient, on en déduit donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = 2$$

8. On constate que

$$\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}} = \frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{x^{1/4}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/4} = 0^+$, par quotient

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}} = -\infty$$

9. En utilisant la même écriture que précédemment, et par croissance comparée, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}} = 0$$

10. Pour tout réel $x>0$, on a

$$\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{\sqrt{x}}{x}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$, par quotient et produit, on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x-1} = +\infty$$

11. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0^-$ (car $x^2>0$ et $\ln(x)<0$). Puisque $\lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1$, par quotient, on a

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^2\ln(x)} = -\infty$$

12. Pour tout réel $x>0$, on a

$$(1+x)^{\ln(x)} = \mathrm{e}^{\ln(x)\ln(1+x)} = \mathrm{e}^{x\ln(x)\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ (croissance comparée), et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, par produit

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)\frac{\ln(1+x)}{x} = 0$$

et par composée,

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln(x)} = 1$$

Exercice 5

Pour déterminer la limite en 0 d'une fonction f, on calcule la limite en 0^- et en 0^+.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Ainsi, f admet une limite en 0, et

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Exercice 6

1. Pour tout x, on a $[x] \leqslant x \leqslant [x]+1$, donc $0 \leqslant x-[x] \leqslant 1$. On a alors :

$$-1 \leqslant -(x-[x]) \leqslant 0$$

$$\text{puis } 1 \leqslant 2-(x-[x]) \leqslant 2$$

soit $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2-(x-[x])} \leqslant 1$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

2. On utilise le résultat précédent, pour $x>0$ et on mutliplie par x : on obtient

$$\frac{x}{2} \leqslant \frac{x}{2-(x-[x])} \leqslant x$$

Or $\frac{x}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-(x-[x])} = +\infty$$

Exercice 7

1. L'aire du disque vaut π (car rayon 1). Par proportionnalité, l'aire du secteur angulaire de disque d'angle θ vaut $\pi \times \frac{\theta}{2\pi}$, c'est-à-dire $\frac{\theta}{2}$.
2. Le triangle AOB_θ est un triangle isocèle en O. La hauteur issue de B_θ a pour longueur $OB_\theta \sin(\theta) = \sin(\theta)$. Ainsi, l'aire du triangle OAB_θ vaut $\frac{OA\times\sin(\theta)}{2} = \frac{\sin(\theta)}{2}$.
L'aire du triangle OAC_θ vaut $\frac{OA\times AC_\theta}{2}$ car le triangle est rectangle en A. De plus, $AC_\theta = OA\tan(\theta) = \tan(\theta)$. Donc l'aire du triangle OAC_θ vaut $\frac{OA\times\tan(\theta)}{2} = \frac{\tan(\theta)}{2}$.
3. Les inclusions indiquées dans l'énoncé nous permettent d'en déduire les inégalités sur les aires

$$\mathcal{A}_{AOB_\theta} \leqslant \mathcal{A}_{\mathcal{D}_\theta} \leqslant \mathcal{A}_{OAC_\theta}$$

soit

$$\sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta).$$

Puisque $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut alors écrire

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} \leqslant 1 \leqslant \frac{\sin(\theta)}{\theta\cos(\theta)}$$

ou encore (car $\cos(\theta)>0$) :

$$\cos(\theta) \leqslant \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leqslant 1.$$

Puisque $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos(\theta) = 1$, par théorème d'encadrement, on en déduit

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.}$$

Exercice 8

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ (fonction racine). Par somme, on a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 14 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Puisque la limite en $+\infty$ est infinie, on déterminer le comportement asymptotique :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2\sqrt{x}+14}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{14}{x}$$

Par somme, on a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Ainsi, la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

- Puisque pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on a $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > 0$: la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x, on a

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-2x})} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$$

Par composée, $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$. Par somme et quotient

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = 1$$

La courbe de g admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
De même, on a pour tout x,

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x}-1)}{\mathrm{e}^{-2x}(\mathrm{e}^{2x}+1)} = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$$

Par composée, $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$. Par somme et quotient

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = -1$$

La courbe de g admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $-\infty$.

- Rapidement : h est définie sur $\mathbb{R}^*$, on obtient par somme

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} h(x) = 0$$

La droite d'équation $y = 0$ est donc asymptote horizontale à la courbe de h au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
En 0, on écrit $h(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Alors, par quotient et sans difficulté :

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$$

- i est définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. En 1, par quotient :

$$\lim_{x\to 1^-} i(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} i(x) = +\infty$$

Par règle des termes du plus haut degré, on a respectivement

$$\lim_{x\to +\infty} i(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{i(x)}{x} = 1$$

Enfin,

$$\lim_{x\to +\infty} i(x) - x = 3$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x+3$ est asymptote oblique à la courbe de i au voisinage de $+\infty$.
On obtient la même asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

Exercice 9

Par composée, on a tout d'abord que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Déterminons le comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)}{x}\\ &= \frac{\ln\left(\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)\right)}{x}\\ &= \frac{x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)}{x}\\ &= 1 + \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1\end{aligned}$$

Enfin, en reprenant le calcul précédent

$$f(x) - x = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On peut en déduire que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
De la même manière, on montre que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.
Par composée, produit et somme, on constate tout d'abord que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{x} &= 1 + \frac{\sqrt{x+1}\,\ln(x+1)}{x}\\ &= 1 + \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\ln(x+1)}{x}\\ &= 1 + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \text{ par composée et croissance comparée}\end{aligned}$$

Enfin,

$$g(x) - x = \sqrt{x+1}\,\ln(x+1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Ainsi, la courbe de g admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.
h est définie sur $]-\infty - 1[\cup [1, +\infty[$. Par composée

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

Pour tout $x \in]-\infty - 1[\cup [1, +\infty[$,

$$\frac{h(x)}{x} = \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}}$$

Puisque, par croissance comparée

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)} = 1,$$

par composée

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = 1.$$

Enfin, toujours pour $x \in]-\infty - 1[\cup [1, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
h(x) - x &= \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}} - x \\
&= \frac{\sqrt{(x-1)^3} - x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{\sqrt{(x-1)^3}^2 - \left(x\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{(x-1)^3} + x\sqrt{x+1}\right)} \\
&= \frac{-4x^2 + 3x - 1}{\sqrt{(x^2-1)(x-1)^2} + x\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{x^2\left(-4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\left|1 - \frac{1}{x}\right| + \frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -4 \text{ par composée et quotient}
\end{aligned}$$

La droite d'équation $y = x - 4$ est asymptote oblique à la courbe de h au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 10

Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque $f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall\ n \geqslant n_0, \quad f(n) > A.$$

Mais alors, pour tout réel $x \in [n_0, +\infty[$, par croissance de f, on a

$$f(n_0) \leqslant f(x) \implies A < f(n_0) \leqslant f(x)$$

et finalement, pour tout $x \in [n_0, +\infty[$, $f(x) > A$, ce qui signifie que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
Comme contre-exemple, prenons par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n \xrightarrow[n \to +\infty]{}$, et pourtant f n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 11

On note $T > 0$ la période de f, et $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a, par périodicité,

$$f(x + nT) = f(x).$$

Or, puisque $T > 0$, $x + nT \xrightarrow[n \to +\infty]{} = +\infty$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, on en déduit alors que

$$\lim_{n \to +\infty} f(x + nT) = \lim_{y \to +\infty} f(y) = \ell$$

c'est-à-dire, puisque $f(x) = f(x + nT)$, par unicité de la limite, $f(x) = \ell$.
Ainsi, la fonction f est constante.