Chapitre 11

Variables aléatoires finies

Résumé

Dans ce chapitre, on fait des rappels sur les paramètres concernant les variables aléatoires. On s'intéresse ensuite aux variables aléatoires de référence : uniforme, Bernoulli, binomiale.

Plan du cours

> « *Tout l'ordre social, pour aléatoire et injuste qu'il soit, si absurde et même si scandaleux qu'il puisse être, n'est fondé que sur une ordinaire, diffuse et commune persuasion.* »

Nicolas Grimaldi (1933 –). *Le Travail. Communion et excommunication*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les paramètres d'une variable aléatoire :

- connaître la définition de l'espérance .... ☐
- savoir utiliser la formule de transfert .... ☐
- connaître la définition de la variance .... ☐
- savoir utiliser la formule de Koenig-Huygens .... ☐

② Concernant les lois usuelles, il faut connaître

- la définition et les paramètres de la loi certaine .... ☐
- la définition et les paramètres de la loi uniforme .... ☐
- la définition et les paramètres de la loi de Bernoulli .... ☐
- la définition et les paramètres de la loi binomiale .... ☐

③ Savoir générer avec PYTHON les différentes lois .... ☐

Dans l'ensemble de ce chapitre, on se donne un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

I. Variables aléatoires

1. Définition

Définition 11.1.

On appelle **variable aléatoire réelle finie** sur Ω toute application X définie sur Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$.
$X(\Omega) = \{X(\omega), \quad \omega \in \Omega\}$ est appelé l'**univers image** de la variable aléatoire X.

Remarque

Cette définition n'est valable que dans le cas d'un espace probabilisé fini. On verra, au second semestre, une définition plus générale dans le cas d'un espace proababilisé infini.
On pourra abréger « variable aléatoire réelle » par « v.a.r ».

Remarque

Puisque Ω est fini, $X(\Omega)$ est également fini, et on a

$$\mathrm{card}(X(\Omega)) \leqslant \mathrm{card}(\Omega).$$

Exemple 11.1

On lance une pièce ; si on tombe sur Pile, on donne $X(\text{Pile}) = 1$ et sinon, $X(\text{Face}) = 0$. X est une variable aléatoire, appelée variable aléatoire de Bernoulli.

Exercice 11.2

On dispose de deux dés que l'on lance, et on note X la somme des deux résultats obtenus. Déterminer l'espace probabilisable et l'univers image de X.

Solution

Rapidement, $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, $X : (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mapsto \omega_1 + \omega_2$ est telle que $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.

2. Parties définies par X

Définition 11.2.

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. On définit les événements suivants :

$$\begin{array}{ll}
[X = a] = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) = a\} & [X \leqslant a] = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leqslant a\} \\
[X < a] = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) < a\} & [X \geqslant a] = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \geqslant a\} \\
[X > a] = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) > a\} & [a \leqslant X \leqslant b] = \{\omega \in \Omega, \quad a \leqslant X(\omega) \leqslant b\} \dots
\end{array}$$

et de manière générale, si $A \subset \mathbb{R}$, on note

$$[X \in A] = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \in A\}.$$

Remarque

Ces ensembles sont bien des événements. En effet :

- Si $a \in X(\Omega)$, $[X = a]$ est l'ensemble des antécédents par X de a, et est donc une partie de Ω ;
- Si $a \notin X(\Omega)$, alors $[X = a] = \varnothing \in \mathcal{P}(\Omega)$;
- Enfin, on peut écrire
$$[X \in A] = \bigcup_{a \in A} [X = a]$$
qui est une union disjointe d'ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Remarque

En définissant ces événements ainsi, on peut se permettre d'oublier l'univers probabilisable sur lequel on se place, et se concentrer sur les paramètres de la variable aléatoire elle-même.

Exercice 11.3

En reprenant la variable aléatoire définie dans l'exercice 11.2, déterminer les événements suivants :
$$[X \geqslant 10], \quad [X = 8], \quad [X \leqslant 1], \quad \text{et} \quad [X < 100]$$

Solution

En cherchant toutes les possibilités, on obtient
$$\begin{aligned}
[X \geqslant 10] &= \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\} \\
[X = 8] &= \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} \\
[X \leqslant 1] &= \varnothing \\
[X < 100] &= \Omega
\end{aligned}$$

Proposition 11.1. Système complet d'événements associé à une v.a.r.

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. Alors, l'ensemble $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé **système complet d'événements associé à** X.
Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $([X = x_i])_{i \in [\![1,n]\!]}$ est le système complet associé à X.

Démonstration

Pour tout $x \in X(\Omega)$, $[X = x] \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Soient $(x, y) \in X(\Omega)^2$ tels que $x \neq y$. Alors, $[X = x] \cap [X = y] = \varnothing$, donc les événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ sont deux à deux incompatibles.
Enfin, par définition, $\Omega = [X \in X(\Omega)]$ et donc
$$\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x].$$

3. Loi d'une variable aléatoire réelle finie

a. Définition

Définition 11.3.

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω.

On appelle **loi de probabilité de la variable aléatoire** X, l'application $\mathcal{L}_X$ qui à tout élément $x \in X(\Omega)$ fait correspondre la probabilité de l'événement $[X = x]$:

$$\mathcal{L}_X : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0, 1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}([X = x]) \end{array}.$$

Remarque

Pour simplifier les notations, on écrira $\mathbb{P}(X = x)$ plutôt que $\mathbb{P}([X = x])$. De même, on écrira $\mathbb{P}(X \in A)$, $\mathbb{P}(X \leqslant x)$, ..., plutôt que $\mathbb{P}([X \in A])$, $\mathbb{P}([X \leqslant x])$, ...

Remarque

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est donner l'ensemble des probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$, sous la forme d'un tableau, d'un diagramme en bâton, ou d'une formule générale.

Exemple 11.4

On lance un dé équilibré. On gagne 1 euro si on tombe sur 1 ou 6, et on perd 1 euro sinon. Déterminer le support et la loi de probabilité de la variable aléatoire représentant le gain.

Solution

En notant X le gain, alors les valeurs possibles de X sont 1 et -1. On a donc

$$(X = 1) = \{1; 6\} \text{ et } (X = -1) = \{2; 3; 4; 5\}$$

et donc $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Exercice 11.5

On reprend la variable aléatoire réelle finie X de l'exercice 11.2, et on suppose que les dés sont équilibrés. Déterminer la loi de X.

Solution

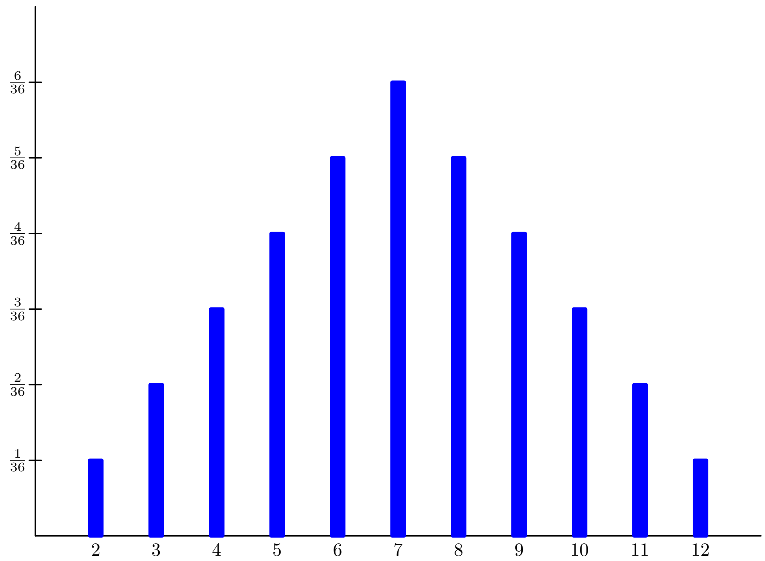
On munit $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ de la probabilité uniforme (chaque tirage a une probabilité $\frac{1}{36}$). Alors :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}$$
$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$
$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \dots$$

On peut alors écrire :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ce que l'on peut représenter ainsi :



b. Égalité en loi

Définition 11.4.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies, définies sur des espaces probabilisés (pas nécessairement les mêmes).

On dit que X et Y ont même loi si $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$. On notera alors $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$.

Exemple 11.6

On lance une pièce bien équilibré, et on pose $X = 1$ si la pièce tombe sur Pile, $X = 0$ sinon. On lance aussi un dé à 6 faces bien équilibrés, et on pose $Y = 1$ si le chiffre de la face obtenue est paire, $Y = 0$ sinon.

Alors $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$.

Solution

On note $\Omega_1 = \{Pile, Face\}$, muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_1$, et $\Omega_2 = [\![1, 6]\!]$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_2$.

Alors $X(\Omega_1) = Y(\Omega_2) = \{0, 1\}$, et rapidement

$$\mathbb{P}_1(X = 0) = \mathbb{P}_2(Y = 0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_1(X = 1) = \mathbb{P}_2(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$.

c. Propriétés des variables aléatoires réelles finies

Proposition 11.2.

Soit X une variable aléatoire réelle finie, définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

Démonstration

Nous avons vu que $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Alors
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in X(\Omega)} [X=x]\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x).$$

Remarque
Lorsqu'on se donne la loi d'une variable aléatoire, c'est la première condition à vérifier.

Théorème 11.3. Existence d'une variable aléatoire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ des réels deux à deux distincts.
Alors, il existe un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et une variable aléatoire réelle finie X sur Ω tels que

- $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$,
- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$.

Démonstration
On considère $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$,
$$\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & [0, 1] \\ x_i & \mapsto & p_i \end{array} \quad \text{et} \quad X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$
Les hypothèses du théorème garantissent que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$.

Remarque
Il n'y a unicité ni de l'espace probabilisé, ni de la variable aléatoire.

⚠ **Attention**
L'univers Ω peut contenir des événements élémentaires de probabilité nulle, et donc la probabilité que X prenne certaines valeurs soit nulle. Mais, dans la plupart des cas, on suppose que Ω est tel que, pour tout $x \in \Omega$, $\mathbb{P}(X = x) > 0$.

Exercice 11.7
Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe une variable aléatoire réelle finie X, à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, telle que
$$\forall\ k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$

Solution
D'après le théorème précédent, il suffit de montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 1.$$

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \frac{1}{2^n}(1+1)^n = 1.$$

D'après les théorèmes précédents, connaissant $\mathcal{L}$ vérifiant les hypothèses, on détermine une variable aléatoire X, et réciproquement connaissant une variable aléatoire réelle finie X, on connait $\mathcal{L}$:

Définition 11.5.

Soit $\mathcal{L}$ une application définie sur $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}(x_i) = 1$. On dit que $\mathcal{L}$ est une loi de probabilité finie sur $\mathbb{R}$.
Si X est une variable aléatoire réelle finie dont la loi est $\mathcal{L}$, alors on dit que X suit la loi $\mathcal{L}$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{L}$.

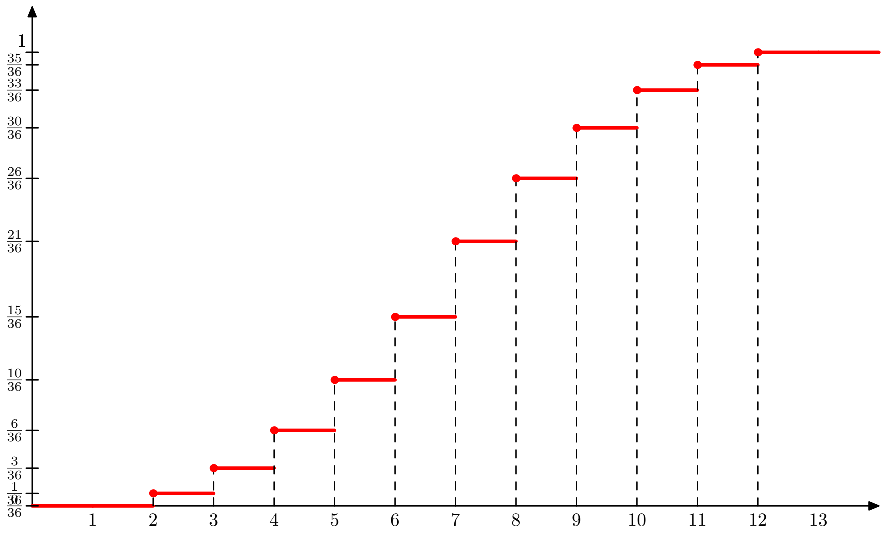
4. Fonction de répartition

Définition 11.6. Fonction de répartition d'une variable aléatoire finie

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. L'application $F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0, 1] \\ t & \mapsto & \mathbb{P}(X \leqslant t) \end{array}$ est appelée **fonction de répartition** de X.

Exemple 11.8

On reprend la variable aléatoire de l'exercice 11.2. Sa fonction de répartition est la suivante :



Proposition 11.4.

Soit X une variable aléatoire réelle finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Alors :

- F_X est nulle sur $]-\infty, x_1[$ et constante égale à 1 sur $[x_n, +\infty[$.
- Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}[$, F_X est constante égale à

$$F_X(x_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i).$$

- Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\mathbb{P}(X < x_k) = \mathbb{P}(x \leqslant x_{k-1}) = F_X(x_{k-1})$.
- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
- F_X est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant t) = 1 - F_X(t)$.

Démonstration

On utilise la définition de X et de F_X :

- $\forall\ t < x_1$, $\mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\forall\ t \geqslant x_n$, $\mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$, car $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, et $t \in [x_k, x_{k+1}[$. Puisque $x_k < t < x_{k+1}$, alors $\mathbb{P}(X \in]x_k, t]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$. Ainsi,
$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}([X \leqslant x_k] \cup [X \in]x_k, t]]) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant x_k) + \mathbb{P}(x_k < X \leqslant t) \text{ (union disjointe)} \\ &= F_X(x_k) + 0 \end{aligned}$$
- Par le même raisonnement,
$$\mathbb{P}(X < x_k) = \mathbb{P}([X \leqslant x_{k-1}] \cup [x_{k-1} < X < x_k]) = \mathbb{P}(X \leqslant x_{k-1}) + \underbrace{\mathbb{P}(x_{k-1} < X < x_k)}_{=0}.$$
- Soient s et t deux réels tels que $s < t$. Alors :
$$\begin{aligned} F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) &= \mathbb{P}([X \leqslant s] \cup [s < X \leqslant t]) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant s) + \underbrace{\mathbb{P}(s < X \leqslant t)}_{\geqslant 0} \text{ (union disjointe)} \\ &\geqslant \mathbb{P}(X \leqslant s) = F_X(s) \end{aligned}$$
- D'après les premiers et deuxième points, sur tout intervalle $[x_k, x_{k+1}[$, $]-\infty, x_1[$ et $[x_n, +\infty[$, la fonction F_X est constante, donc continue.
- Par définition, $\overline{[X \leqslant t]} = [X > t]$. Ainsi,
$$\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant t) = 1 - F_X(t).$$

Remarque (Cas d'une variable aléatoire à valeur entière)

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, on peut utiliser les propriétés suivantes : pour tout $k \in \mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1) = F_X(k) - F_X(k-1) \\ \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X < k+1) - \mathbb{P}(X < k) \\ \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1) \\ \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) \end{aligned}$$

Enfin, on dispose d'un théorème fondamental : pour connaître une variable aléatoire réelle finie sur Ω, il suffit de connaître sa fonction de répartition :

Théorème 11.5.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies ayant la même fonction de répartition. Alors $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$.

Démonstration

On utilise la remarque précédente qui permet de déterminer $\mathbb{P}(X = x_i)$ en fonction de F_X. On verra, dans un chapitre ultérieur, la démonstration dans un cas plus général.

5. Transfert d'une variable aléatoire

Le principe du transfert est simple : connaissant une variable aléatoire X, on créé une nouvelle variable aléatoire, qui est une fonction de X.

Définition 11.7.

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit g une fonction à valeurs réelles telle que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_g$.
On appelle **transfert** de X par g la fonction, notée $g(X)$, définie par

$$g(X) : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & g(X(\omega)) \end{array}.$$

$g(X)$ est une variable aléatoire réelle finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Connaissant la loi de la variable aléatoire X, on peut en déduire la loi de $g(X)$ en se ramenant à X.
Traitons le cas de plusieurs exemples. On se donne X une variable aléatoire réelle finie, avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et dans chacun des cas suivant, on pose $Y = g(X)$.

- Soit $g : x \mapsto ax + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Alors $Y(\Omega) = \{ax_i + b, \quad i \in [\![1, n]\!]\}$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = y) &= \mathbb{P}(aX + b = y) \\ &= \mathbb{P}\left(X = \frac{y - b}{a}\right) \end{aligned}$$
- Soit $g : x \mapsto |x|$. Alors $Y(\Omega) = \{|x_i|, \quad i \in [\![1, n]\!]\}$. Si $y \in \mathbb{R}$ avec $y < 0$, $\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(|X| = y) = 0$; $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(|X| = 0) = \mathbb{P}(X = 0)$; et, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = y) &= \mathbb{P}(|X| = y) \\ &= \mathbb{P}([X = y] \cup [X = -y]) \\ &= \mathbb{P}(X = y) + \mathbb{P}(X = -y) \text{ (union disjointe)} \end{aligned}$$
- Soit $g : x \mapsto x^2$. Alors $Y(\Omega) = \{x_i^2, \quad i \in [\![1, n]\!]\}$. Si $y \in \mathbb{R}$, avec $y < 0$, $\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X^2 = y) = 0$; $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X^2 = 0) = \mathbb{P}(X = 0)$; et, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = y) &= \mathbb{P}(X^2 = y) \\ &= \mathbb{P}([X = \sqrt{y}] \cup [X = -\sqrt{y}]) \\ &= \mathbb{P}(X = \sqrt{y}) + \mathbb{P}(X = -\sqrt{y}) \text{ (union disjointe)} \end{aligned}$$
- Soit $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Alors $Y(\Omega) = \{\mathrm{e}^{x_i}, \quad i \in [\![1, n]\!]\}$. Si $y \leqslant 0$, $\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(\mathrm{e}^X = y) = 0$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = y) &= \mathbb{P}(\mathrm{e}^X = y) \\ &= \mathbb{P}\left(X = \ln(y)\right) \end{aligned}$$
- Soit $g : x \mapsto \ln(x)$, et on suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$. Alors $Y(\Omega) = \{\ln(x_i), \quad i \in [\![1, n]\!]\}$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = y) &= \mathbb{P}(\ln(X) = y) \\ &= \mathbb{P}\left(X = \mathrm{e}^y\right) \end{aligned}$$

Quand g est bijective, il suffit d'utiliser la bijection réciproque pour déterminer la loi de $g(X)$; dans le cas général, pour déterminer la probabilité de $[g(X) = y]$, il faudra faire la somme sur tous les antécédents de y par g.

Exercice 11.9

On lance deux dés à 6 faces bien équilibrés. On note X la somme des chiffres des faces obtenues, et Y la différence des chiffres du premier dé avec le second. On pose également $Z = X - 7$. Montrer que $Y \overset{\mathcal{L}}{=} Z$.

Solution

On note $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Par définition, $Y(\Omega) = [\![-5, 5]\!]$ et $Z(\Omega) = [\![-5, 5]\!]$. On part du tableau définissant X :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

et on obtient alors

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Z = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Enfin, on constate par exemple que :

$$\mathbb{P}(Y = -5) = \mathbb{P}(\{1, 6\}) = \frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}(Y = -4) = \mathbb{P}(\{2, 6\}, \{1, 5\}) = \frac{2}{36} \dots$$

et finalement

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Y = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ainsi, $Y \overset{\mathcal{L}}{=} Z$.

Exercice 11.10

En reprenant les notations de l'exercice 11.9, on pose $U = |Y| + 1$. Déterminer la loi de U.

Solution

On constate que $U(\Omega) = [\![1, 6]\!]$. On a, par exemple :

$$\mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(|Y| + 1 = 1) = \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{6}{36}$$

$$\mathbb{P}(U = 2) = \mathbb{P}(|Y| + 1 = 2) = \mathbb{P}(|Y| = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$\dots$$

et finalement, on obtient la loi :

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y = x)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

☞ *Exercice 1.*

II. Paramètres d'une variable aléatoire

1. Espérance mathématiques

Définition 11.8.

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
On appelle **espérance** (ou **moyenne**) de X le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x).$$

Remarque

Puisque $X(\Omega)$ est fini, X admet toujours une espérance. Nous verrons au second semestre une définition dans un cas plus général.

Exemple 11.11

On dispose d'un dé non truqué qu'on lance une fois. On note X la variable aléatoire qui vaut 5 si on tombe sur 6, 1 si on tombe sur 5 ou 1, et -3 sinon. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Solution

On a $X(\Omega) = \{-3, 1, 5\}$, et

$$\mathbb{E}(X) = -3.\frac{3}{6} + 1.\frac{2}{6} + 5.\frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

Exercice 11.12

On reprend la variable aléatoire X de l'exercice 11.2. Déterminer l'espérance de X.

Solution

On a :

$$\mathbb{E}(X) = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + 5\frac{4}{36} + 6\frac{5}{36} + 7\frac{6}{36} + 8\frac{5}{36} + 9\frac{4}{36} + 10\frac{3}{36} + 11\frac{2}{36} + 12\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7.$$

Ainsi, la somme moyenne des chiffres des faces obtenues en lançant deux dés vaut 7.

Propriété 11.6.

Si $X(\Omega) \subset [p, q]$ et si X admet une espérance, alors $p \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant q$.
En particulier, si X est positive, $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

Démonstration

Si $X(\Omega) \subset [p, q]$ et si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, alors pour tout $i \in I$,

$$p \leqslant x_i \leqslant q \Rightarrow p\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant x_i \mathbb{P}(X = x_i) \leqslant q\mathbb{P}(X = x_i)$$

les probabilités étant positives. En additionnant,

$$\sum_{i \in I} p\mathbb{P}(X = x_i) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \sum_{i \in I} q\mathbb{P}(X = x_i)$$

et on peut conclure car $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

On dispose d'un cas particulier de variable aléatoire d'espérance nulle :

Proposition 11.7. Variable aléatoire réelle positive d'espérance nulle

Soit X une variable aléatoire réelle finie positive (c'est-à-dire $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$). $\mathbb{E}(X) = 0$, si et seulement si X est nulle presque sûrement, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

Démonstration

Supposons $\mathbb{E}(X) = 0$ et on écrit $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ qu'on ordonne $0 \leqslant x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Puisque $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ et que tous les termes sont positifs, cela signifie que

$$\forall\ i \in [\![1, n]\!], \quad x_i \mathbb{P}(X = x_i) = 0$$

Puisque, pour $i \in [\![2, n]\!]$, $x_i \neq 0$, alors $\mathbb{P}(X = x_i) = 0$. On en déduit alors

$$\mathbb{P}(X = x_1) = 1 - \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X = x_k) = 1.$$

et puisque $\mathbb{E}(X) = 0$, on en déduit que $x_1 \mathbb{P}(X = x_1) = 0$, c'est-à-dire $x_1 = 0$.
Réciproquement, si $\mathbb{P}(X = 0) = 1$, alors $\mathbb{P}(X \neq 0) = 0$ et donc, pour tout $x \in X(\Omega) \setminus \{0\}$,

$$0 \leqslant \mathbb{P}(X = x) \leqslant \mathbb{P}(X \neq 0) = 0,$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = x) = 0$. On peut alors calculer l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{x \in X(\Omega) \setminus \{0\}} x \mathbb{P}(X = x) = 0.$$

Propriété 11.8. Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires finies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ admettant une espérance. Soient a et b deux réels.

- la variable aléatoire $aX + b$ admet une espérance, et $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.
- la variable aléatoire $X + Y$ admet une espérance, et $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration

On démontre le premier point. On écrit $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et on note $Y = aX + b$. Alors, $Y(\Omega) = \{ax_1 + b, \dots, ax_n + b\}$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b)\mathbb{P}(Y = ax_i + b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b)\mathbb{P}(aX + b = ax_i + b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b)\mathbb{P}(X = x_i) \\
&= a \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)}_{=\mathbb{E}(X)} + b \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)}_{=1} = a\mathbb{E}(X) + b
\end{aligned}$$

Le deuxième se démontre de même, mais on va prendre une définition de l'espérance légèrement différente ; on note $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Alors, on peut écrire

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\{\omega_i\})\mathbb{P}(\{\omega_i\})$$

Mais alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n}(X+Y)(\{\omega_i\})\mathbb{P}(\{\omega_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}X(\{\omega_i\})\mathbb{P}(\{\omega_i\}) + \sum_{i=1}^{n}Y(\{\omega_i\})\mathbb{P}(\{\omega_i\}) \\ &= \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

Remarque

En combinant les deux relations précédentes, on a la formule plus générale : pour toutes variables aléatoires finies X et Y, et réels a et b, on a

$$\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y).$$

Définition 11.9.

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

- On dit que X est **centrée** si $\mathbb{E}(X)=0$.
- Si elle n'est pas centrée, la variable aléatoire $Y = X-\mathbb{E}(X)$ est centrée, et est appelée **variable aléatoire centrée associée** à X.

Démonstration

En effet, si $Y = X-\mathbb{E}(X)$, alors $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)=0$ en utilisant la linéarité de l'espérance ($a=1$ et $b=-\mathbb{E}(X)\in\mathbb{R}$).

2. Formule de transfert

La formule de transfert permet de calculer l'espérance du transfert d'une variable aléatoire uniquement en utilisant la loi de la variable aléatoire de départ :

Théorème 11.9. Formule de transfert

Soit X une variable aléatoire fini sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On écrit $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$. Soit g une fonction définie sur I contenant $X(\Omega)$. Alors l'espérance de la variable aléatoire $g(X)$ vaut

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\mathbb{P}(X=x_i) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X=x)$$

Démonstration

Ce théorème est admis.

Exemple 11.13 (Exemple fondamental)

En utilisant les fonctions $x\mapsto |x|$ et $x\mapsto x^2$, alors

$$\mathbb{E}(|X|) = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\mathbb{P}(X=x_i) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\mathbb{P}(X=x_i).$$

Exercice 11.14

On reprend les notations de l'exercice 11.9, et on note $U=|Y|+1$. Déterminer l'espérance de U.

Solution

Tout d'abord, $Y(\Omega) = [\![-5, 5]\!]$ et la loi est donnée par

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(Y=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

D'après la formule de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U) &= \sum_{k=-5}^{5}(|k|+1)\mathbb{P}(Y=k)\\ &= 6\frac{1}{36}+5\frac{2}{36}+4\frac{3}{36}+\ldots+5\frac{2}{36}+6\frac{1}{36}\\ &= \frac{106}{36} = \frac{53}{18}.\end{aligned}$$

3. Variance

La variance permet de mesurer la dispersion d'une variable aléatoire par rapport à son espérance :

Définition 11.10.

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On appelle

- **moment d'ordre** 2 de X le nombre
$$m_2(X) = \mathbb{E}(X^2)$$
- **variance** de X le nombre mesurant l'écart entre X et son espérance :
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2]$$

Remarque

La formule de transfert permet d'écrire, si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)}(x-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=x_i).$$

En pratique, on utilise l'écriture précédente dans le cas d'une variable aléatoire simple ; on préférera, dans la plupart des cas, utiliser la formule suivante :

Théorème 11.10. Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Démonstration

Constatons que
$$(X-\mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2$$

Par linéarité de l'espérance, on remarque que
$$\mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Ainsi $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2]$ existe si et seulement si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, et dans ce cas, toujours par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Cette formule est due à **Johann Samuel König** (1712–1757), mathématicien allemand, et **Christian Huygens** (1629–1695), mathématicien néerlandais.

Propriété 11.11.

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ admettant une variance. Alors, pour tous réels a et b, $aX + b$ admet une variance, et

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$$

Démonstration

On utilise la formule de Koenig-Huygens. Constatons que $(aX + b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$ et $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$. Donc $aX + b$ admet une variance si X en admet une, et

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX+b) = \mathbb{E}[(aX+b)^2] - (\mathbb{E}(aX+b))^2 = a^2\mathbb{E}[X^2] + 2ab\mathbb{E}[X] + b^2 - a^2\mathbb{E}(X)^2 - 2ab\mathbb{E}(X) - b^2$$

Donc

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX + b) = a^2(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) = a^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$$

4. Écart-type

Proposition 11.12.

Pour toute variable aléatoire réelle finie sur Ω, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \geqslant 0$.

Démonstration

En effet, la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$ est positive ; d'après un résultat précédent, on peut garantir que son espérance est positive.

Cela permet de définir l'écart-type :

Définition 11.11.

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. On appelle **écart-type** de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$.

Définition 11.12.

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

- On dit que X est **réduite** si $\sigma(X) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 1$.
- Si X admet une variance, et que $\sigma(X) \neq 0$, la variable aléatoire

  $$Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

  est centrée et réduite, et est appelée **variable centrée réduite associée** à X. On la note en général X^*.

Démonstration

Calculons la variance de X^* :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X^*) &= \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right)\\ &= \frac{1}{\sigma(X)^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X-\mathbb{E}(X)\right)\\ &= \frac{1}{\sigma(X)^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{\sigma(X)^2}{\sigma(X)^2} = 1\end{aligned}$$

☞ *Exercices 2, 3, 4 et 5.*

III. Lois usuelles finies

1. Loi certaine

Définition 11.13.

On dit que la variable aléatoire X suit la **loi certaine** si et seulement s'il existe un réel a tel que l'événement $(X=a)$ soit presque sûr. Ainsi

$$X(\Omega) = \{a\} \text{ et } \mathbb{P}(X=a) = 1$$

On dit également que X est une variable aléatoire certaine. Le réel a est appelé le paramètre de la loi.

Exemple 11.15

Une urne contient n boules, indiscernables au toucher, de couleurs différentes et portant toutes le numéro 2 et on tire une boule. On note X le numéro tiré. Alors X est une variable aléatoire suivant la loi certaine, et $(X=2)$ est un événement certain.

Théorème 11.13.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire suivant la loi certaine égale à a. Alors

$$\mathbb{E}(X) = a \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 0$$

Démonstration

Par définition de X, puisqu'elle ne prend qu'une seule valeur, on a

$$\mathbb{E}(X) = a.\mathbb{P}(X=a) = a \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = (a-a)^2.\mathbb{P}(X=a) = 0$$

Théorème 11.14. Caractérisation de la loi certaine

Nous avons une réciproque au théorème précédent : si X est une variable aléatoire finie telle que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 0$ alors X suit une loi certaine.

Démonstration

En effet, si $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 0$, alors $\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = 0$ et puisque la variable $(X-\mathbb{E}(X))^2$ est positive, on en déduit que $\mathbb{P}((X-\mathbb{E}(X))^2 = 0) = 1$, et donc que $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.

2. Loi uniforme

La loi uniforme est la loi que l'on rencontre lorsqu'on est dans une situation d'équiprobabilité : toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobable.

Définition 11.14.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ si

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall\ k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\operatorname{card}([\![1,\ n]\!])}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Exemple 11.16

On dispose d'un dé à six faces bien équilibré qu'on lance une fois. On note X le chiffre obtenu après le lancer. Alors X suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$.

Théorème 11.15.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Démonstration

Par définition,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \frac{n^2 - 1}{12}
\end{aligned}$$

Définition 11.15.

On peut également définir la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$: pour tout $k \in [\![a, b]\!]$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1} = \frac{1}{\operatorname{card}([\![a,\ b]\!])}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$. Dans ce cas, on peut montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$$

Démonstration

Ces formules sont à démontrer systématiquement, en remarquant que si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$ alors $X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; b-a+1 \rrbracket)$. En effet, si on note $Y = X - a + 1$, $Y(\Omega) = \llbracket 1, b-a+1 \rrbracket$ et si $y \in \llbracket 1, b-a+1 \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X - a + 1 = y) = \mathbb{P}(X = y + a - 1) = \frac{1}{b-a+1}.$$

Mais alors, par linéarité

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y + a - 1) = \mathbb{E}(Y) + a - 1 = \frac{(b-a+1+1)}{2} + a - 1 = \frac{a+b}{2}$$

et

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y + a - 1) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12} = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$

Remarque

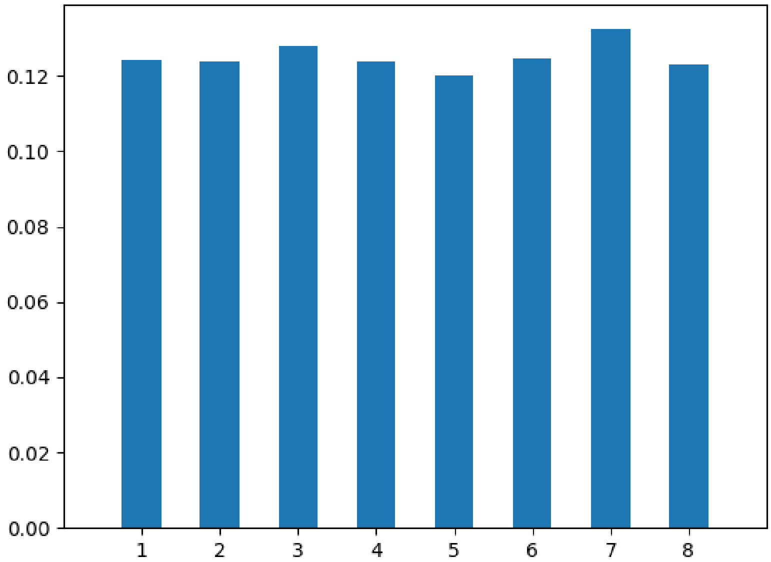
On peut simuler une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec `random.randint` du module `numpy`.

Code Python

```python
import matplotlib.pyplot as plt # Pour représenter l'histogramme
import pylab                    # Pour améliorer la présentation
import numpy as np              # Pour l'aléatoire

# On simule une loi uniforme avec np.random.randint
# np.random.randint(n,p, nb) simule nb tirages
# suivant la loi uniforme sur ⟦n__piton_breakable_space:, p−1⟧.
data=np.random.randint(1,9,10000)
# On compte les apparitions de chaque valeur
counts = np.bincount(data)/10000
# On dresse l'histogramme
plt.bar(range(9), counts, width=0.5, align='center')
# On rend l'histogramme plus propre
plt.xlim(0,9)
pylab.xticks(range(1,9))
# On enregistre dans un fichier
plt.savefig('loi_uniforme.png')
# On affiche
plt.show()
```

ce qui donne, après exécution sur Python, le graphique suivant. On constate que l'aléatoire, et la taille de l'échantillon, font que les barres de l'histogramme ne sont pas toutes rigoureusement de même taille.



Il arrive d'importer l'aléatoire pour raccourcir l'écriture. Par exemple :

```python
import numpy.random as rd

data = rd.randint(1,9,10000)
```

3. Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli est la loi que l'on rencontre lorsqu'il n'y a que deux issues possibles : un succès ou un échec. Par convention, on note 1 pour le succès, et 0 pour l'échec.

Définition 11.16.

Soit $p \in]0,1[$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p si

$$X(\Omega) = \{0,1\} \text{ et } \mathbb{P}(X=1) = p \quad \mathbb{P}(X=0) = q = 1-p$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
p est appelé probabilité de succès, et $q = 1-p$ est appelé probabilité d'échec.

Exemple 11.17

On dispose d'une pièce truquée, dont la probabilité d'obtenir Pile est de $\frac{1}{3}$. Soit X la variable aléatoire valant 1 si on fait Pile, et 0 sinon. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Théorème 11.16.

Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Alors

$$\mathbb{E}(X) = p \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(X) = pq = p(1-p)$$

Démonstration

Par définition,

$$\mathbb{E}(X) = 1.\mathbb{P}(X=1) + 0.\mathbb{P}(X=0) = 1.p = p$$

et

$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = (1-p)^2.\mathbb{P}(X=1)+(0-p)^2.\mathbb{P}(X=0) = (1-p)^2p+p^2(1-p) = p(1-p)((1-p)+p) = (1-p)p$

Exemple 11.18 (Exemple important)
Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \in \,]0,\,1[$. On note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire définie sur Ω par

$$\forall\ \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin A \end{cases}$$

Cette variable aléatoire ne prend que deux valeurs, et suit donc une loi de Bernoulli, de paramètre

$$p = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A).$$

On obtient alors la formule suivante, qui relie probabilité d'un événement et espérance d'une variable aléatoire :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A).$$

Théorème 11.17. Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,\,1[$ est

$$F_X : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1-p & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

Démonstration
$X(\Omega) = \{0,1\}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall\ t \in \,]-\infty,\,0[, &\qquad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \\ \forall\ t \in [0,\,1[, &\qquad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}(X=0) = 1-p \\ \forall\ t \in [1,\,+\infty[, &\qquad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1) = 1 \end{aligned}$$

4. Loi binomiale

a. Définition

Définition 11.17.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres (n,p) si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } \forall\ k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
p est appelé probabilité de succès, et $q = 1-p$ est appelé probabilité d'échec.

Remarque

- Il s'agit bien d'une loi de probabilité. En effet, en utilisant la formule du binôme de

Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1$$

- Dans le cas $n=1$, on retrouve la loi de Bernoulli de paramètre p. Ainsi, $\mathcal{B}(1,p)$ représente également la loi de Bernoulli de paramètre p.

b. Interprétation

Une variable aléatoire suivant la loi binomiale compte le nombre de succès dans une répétition successive et indépendante d'épreuves de Bernoulli.

Définition 11.18. Schéma de Bernoulli

Soit $p \in \,]0,\,1[$. On appelle **schéma (ou épreuve) de Bernoulli** de paramètre p toute expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles : l'une, appelée succès, et dont la probabilité vaut p, et l'autre, appelée échec, de probabilité $1-p$.

Exemple 11.19

On lance une pièce de monnaie truquée, qui tombe sur Face avec probabilité $p \in \,]0,\,1[$, et on gagne si on obtient Face. Il s'agit d'une épreuve de bernoulli de paramiètre p.

Proposition 11.18. Succession d'épreuves de Bernoulli

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une épreuve de Bernoulli, de paramètre $p \in \,]0,\,1[$. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de succès dans n répétitions indépendantes de cette épreuve de Bernoulli. Alors X suite une loi binomiale de paramètres n et p.

Démonstration

Pour $k \in [\![1,\,n]\!]$, on note S_k l'événement « obtenir un succès au k-ième lancer ».

Tout d'abord, on pose l'espace probabilisé : $\Omega = \{0,\,1\}^n$, et $\mathbb{P}$ la probabilité telle que la famille des (S_i) est mutuellement indépendante et chacune des S_i est de probabilité p.

Puisque X compte le nombre de succès dans un n-uplet, on a $X(\Omega) = [\![0,\,n]\!]$. Soit $k \in [\![0,\,n]\!]$. On note $A_k = [X=k]$ l'événement « obtenir k succès ». On a

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(A_k) = \sum_{\omega \in A_k} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Si $\omega \in A_k$, ω est composé de k chiffres 1 (succès) et $n-k$ chiffres 0 (échecs). On note J la partie de $[\![1,\,n]\!]$ contenant les coordonnées de ω où il y a un 1. On a alors

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j\in J} S_j\right) \cap \left(\bigcap_{j\in \overline{J}} \overline{S_j}\right)\right).$$

Les événements (S_i) étant mutuellement indépendants, et de même probabilité, on a

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(S_j) \prod_{j\in\overline{J}} \mathbb{P}(\overline{S_j}) = \prod_{j\in J} p \prod_{j\in\overline{J}} (1-p) = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{\omega\in A_k} p^k(1-p)^{n-k} = \mathrm{card}(A_k) p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Remarque

Ainsi, pour montrer qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale, on a deux possibilités :

- On calcule explicitement la loi ;
- On justifie que X compte le nombre de succès dans n **répétitions indépendantes** d'épreuves de Bernoulli de paramètre p.

Exemple 11.20

- On lance n dés équilibrés, et on note X le nombre de 6 obtenus. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$.
- Un avion possède deux moteurs identiques. Ces moteurs tombent en panne avec probabilité p. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de moteurs tombés en panne. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(2, p)$.
- Une urne contient a boules rouges et b boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. On note X le nombre de boules noires obtenues. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{b}{a+b})$.

Théorème 11.19.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre (n, p). Alors
$$\mathbb{E}(X) = np \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = np(1-p)$$

Démonstration

Par définition,
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} pp^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} \\
&\underbrace{=}_{i=k-1} np\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i}(1-p)^{n-1-i} \\
&= np(p+(1-p))^{n-1} = np \text{ en reconnaissant la formule du binôme}
\end{aligned}$$

Pour la variance, remarquons tout d'abord que, pour $k \in [\![2, n]\!]$:
$$k(k-1)\binom{n}{k} = (k-1)n\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

en appliquant deux fois la même formule. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k(k-1)+k)\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} + \mathbb{E}(X) \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k(1-p)^{n-k} + np \\
&\underbrace{=}_{j=k-2} n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j} p^{j+2}(1-p)^{n-(j+2)} + np \\
&= n(n-1)p^2(p+(1-p))^{n-2} + np = n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}$$

mais alors d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

Remarque

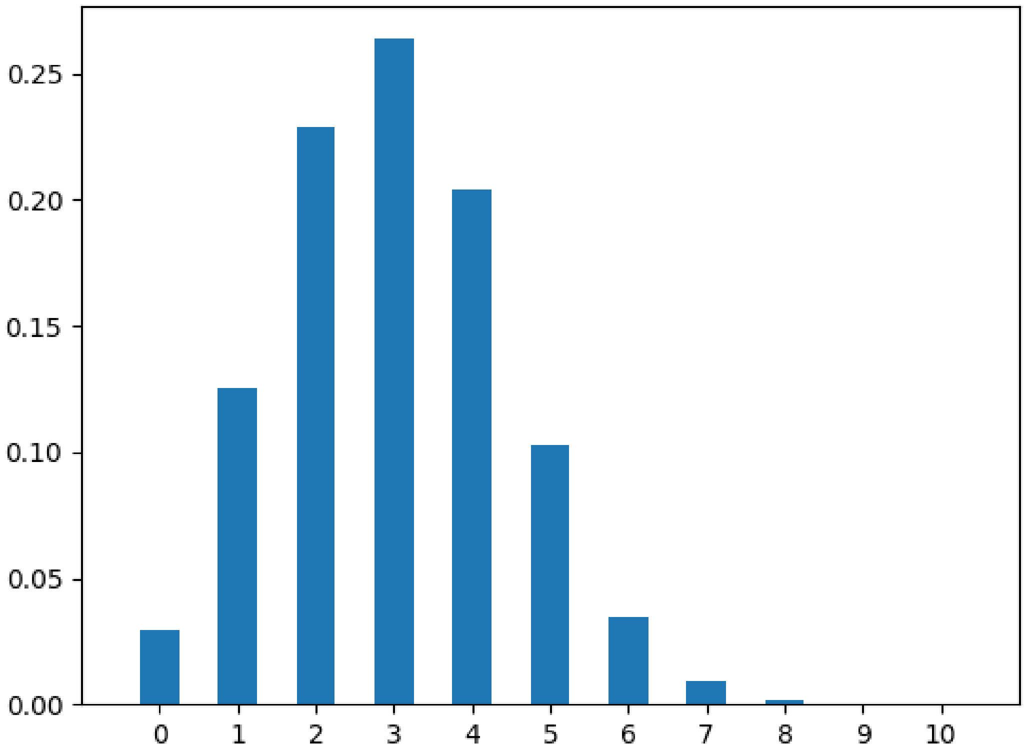
On peut simuler une loi binomiale de paramètre n et p avec `random.binomial` du module `numpy`.

Code Python

```python
import matplotlib.pyplot as plt # Pour représenter l'histogramme
import pylab                    # Pour améliorer la présentation
import numpy as np              # Pour l'aléatoire

# On simule une loi uniforme avec np.random.binomial
# np.random.binomial(n,p, nb) simule nb tirages suivant
# la loi binomiale de paramètres n et p.
data=np.random.binomial(10,0.3,10000)
# On compte les apparitions de chaque valeur
counts = np.bincount(data)/10000
# On dresse l'histogramme
plt.bar(range(11), counts, width=0.5, align='center')
# On rend l'histogramme plus propre
plt.xlim(-1,11)
pylab.xticks(range(0,11))
# On enregistre dans un fichier
plt.savefig('loi_binomiale.png')
# On affiche
plt.show()
```

ce qui donne, après exécution sur Python, le graphique suivant.



☞ *Exercices 6, 7, 8, 9, 10 et 11.*

Exercices
11

Exercices

Généralités sur les variables aléatoires finies

●○○ **Exercice 1** Lançons encore des dés (10 min.)

On joue à un jeu : on lance deux dés équilibrés à 6 faces. Si aucune des faces ne vaut 6, on gagne le produit des deux chiffres obtenus en euros. Si au moins une des faces vaut 6, alors on ne gagne rien.

Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise ce jeu et définir une variable aléatoire X qui donne le gain de ce jeu. Donner la loi de X sous la forme d'un tableau et tracer la fonction de répartition de X.

●○○ **Exercice 2** Une variable à condition (10 min.)

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Soit X la variable aléatoire finie, à valeurs dans $[\![1, ab]\!]$, vérifiant

$$\forall\ k \in [\![1, ab]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que X soit bien une variable aléatoire finie ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ et déterminer a et b afin que $\mathbb{E}(X) = 3,5$.

●○○ **Exercice 3** Variables aléatoires - I (20 min.)

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules rouges restants à ce moment dans l'urne, et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
3. Trouver un lien entre Z et X et en déduire la loi de Z.

●○○ **Exercice 4** Variables aléatoires - II (15 min.)

Soit $n \geqslant 1$ fixé. On jette n fois une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est p. Soit X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut $n+1$ sinon.

1. Déterminer la loi de X et vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
2. Déterminer l'espérance de X.

●○○ **Exercice 5** Espérance et probabilité (10 min.)

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k).$$

Lois usuelles

●○○ **Exercice 6 Loi usuelle - I** (5 min.)

On considère une pièce dont la probabilité d'avoir pile est de $0,3$. On lance la pièce 10 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 piles ?

●○○ **Exercice 7 Loi usuelle - II** (10 min.)

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n > 0$ et $p \in]0,1[$. On pose $Y = n - X$. Donner la loi de Y.

●○○ **Exercice 8 Des boules simultanées** (10 min.)

Une urne contient dix boules rouges et cinq boules bleues. On pioche simultanément six boules et on note R (resp. B), le nombre de boules rouges (resp. bleues) obtenues. Déterminer Ω et son cardinal, puis la loi et l'espérance R (resp. B).

●○○ **Exercice 9 Une puce et des cases** (10 min.)

On dispose de $n+1$ cases contigües, numérotées de 0 à n de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de 1 ou 2 cases, au hasard à chaque saut.

Au départ, la puce se situe sur la case 0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire représentant le numéro de la case où se situe la puce après k sauts, et Y_k la variable aléatoire représentant le nombre de saut d'une seule case effectués au cours des k premiers sauts.

1. Déterminer la loi de Y_k, son espérance et sa variance.
2. Exprimer X_k en fonction de Y_k. En déduire la loi de X_k.
3. Calculer espérance et variance X_k.

●○○ **Exercice 10 Bouge tes boules** (15 min.)

On dispose de deux urnes : l'urne U_1 contient 6 boules bleues et 5 boules rouges, et l'urne U_2 contient 4 boules bleues et 8 boules rouges. On tire au hasard, et simultanément, deux boules dans l'urne U_2, que l'on transfère dans l'urne U_1. Ensuite, on tire une boule au hasard dans l'urne U_1 et on relève sa couleur.

1. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules bleues transférées. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la probabilité que la boule tirée dans l'urne U_1 soit bleue.
3. Calculer la probabilité que l'une au moins des boules transférées soit bleue sachant que la boule tirée est bleue.

●○○ **Exercice 11 Loi hypergéométrique** (20 min.)

Soient n, r et N dans $\mathbb{N}^*$ avec $r < N$ et $n \leqslant N$. Une urne contient N boules dont r rouges et $b = N - r$ bleues. On pose $p = \frac{r}{N}$.

1. On tire successivement, avec remise, n boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues. Montrer que R suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Désormais, on tire successivement et sans remise n boules dans l'urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues.
   a) Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience et déterminer $X(\Omega)$.
   b) Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$:
   $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$
   On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p. On la note $\mathcal{H}(N, n, p)$.
   c) En utilisant la formule de Vandermonde, montrer que $\mathbb{E}(X) = np$.

●●○ **Exercice 12 Des sommes avec des variables** (15 min.)

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant des paramètres de variables aléatoires usuelles bien choisies, calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}3^k$;
2. $\displaystyle \sum_{k=0}^{n}(k^2+k)\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^n}$.

Pour aller plus loin

●●● **Exercice 13 Un gardien alcoolisé** (25 min.)

Un gardien doit ouvrir une porte dans le noir, à l'aide d'un trousseau de dix clés dont une seule convient. Deux cas se passent :

- Lorsqu'il est sobre, il essaie les clés l'une après l'autre.
- Lorsqu'il est ivre, il essaie une clé, agite le trousseau, puis recommence au plus dix fois. S'il n'a pas ouvert la porte, il retourne se coucher.

On note X_A (respectivement X_B) le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte quand il est sobre (resp. quand il est ivre). On pose $X_B = 11$ s'il n'arrive pas à ouvrir la porte après dix essais.

1. Déterminer la loi de X_A et calculer $\mathbb{P}(X_A > 8)$ et $\mathbb{E}(X_A)$.
2. Déterminer la loi de X_B et calculer $\mathbb{P}(X_B > 8)$.
3. Un cambrioleur caché à l'intérieur sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Le gardien a déjà échoué huit fois à ouvrir la porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

●●● **Exercice 14 Urnes de Pòlya** (30 min.)

Soient r_0, b_0 et d des entiers strictement positifs. Une urne contient b_0 boules bleues et r_0 boules rouges. Une boule est choisie au hasard uniformément dans l'urne. On note sa couleur et on la remet dans l'urne en ajoutant un nombre d de boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la procédure aussi souvent que nécessaire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 (respectivement 0) si la k-ième boule tirée est rouge (resp. bleue).

1. a) Donner la loi de X_1.
   b) Déterminer la loi de X_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons S_n le nombre de boules rouges tirées lors des n premiers tirages.
   a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}_{[S_n=k]}(X_{n+1} = 1)$.
   b) En déduire que $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{r_0 + d\mathbb{E}(S_n)}{r_0 + b_0 + dn}$.
   c) Exprimer $\mathbb{E}(S_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(S_n)$ et de $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$.
3. En déduire la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Commenter ce résultat.

●●● **Exercice 15 Encore des urnes, toujours des urnes** (30 min.)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on obtient un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Justifier que Y_n est une variable aléatoire réelle finie telle que $Y_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.
2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Justifier qu'il y a $\dbinom{n}{k} n^{n+1-k}$ tirages de $n+1$ boules successivement avec remise dans cette urne tels que les k premières sont dans l'ordre strictement décroissant.
3. Déterminer alors $\mathbb{P}(Y_n > k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

4. En déduire que, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$,
$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}.$$
5. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.

●●● Exercice 16 EDHEC 2005 (60 min.)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant $n+1$:

- il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec une probabilité p $(0 < p < 1)$
- il sera sur le point 0 avec une probabilité $1-p$.

Pour tout n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n, et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors $T = 1$. Si les abscisses successives sont $1, 2, 3, 0, 0, 1$ alors $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

1. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.
   b) Donner la loi de X_1.
   c) En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.
2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ pour montrer que : $P(X_n = 0) = 1-p$
3. a) Etablir que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, k \in \{1, 2, \cdots, n+1\}, P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$$
   b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\},\ P(X_n = k) = p^k(1-p)$.
   En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
   c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.
4. a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
$$\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$$
   b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.
5. a) Montrer en utilisant la question 3a) que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1)$$
   b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}(X_n^2) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$ Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.
   c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de p et n.
   d) Montrer enfin que
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$$

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

On lance deux dés bien équilibrés. On fixe alors $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ muni de la probabilité d'équiprobabilité (les dés étant indépendants et bien équilibrés). On définit X par :

$$\forall \ (\omega_1, \omega_2) \in \ \Omega, \quad X(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \omega_1 \times \omega_2 & \text{si} \quad \omega_1 \neq 6 \text{ et } \omega_2 \neq 6 \\ 0 & \text{si} \quad \omega_1 = 6 \text{ ou } \omega_2 = 6 \end{cases}.$$

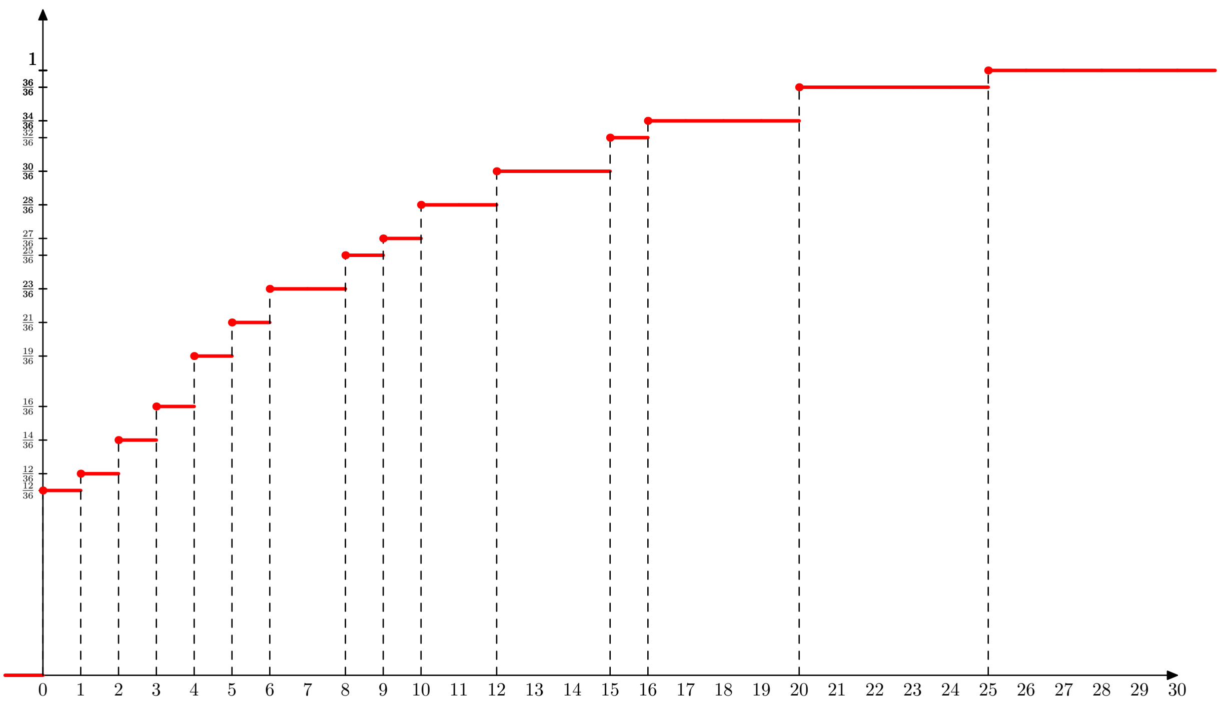
On peut représenter par un tableau à double entrée les valeurs possibles de X :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	0
2	2	4	6	8	10	0
3	3	6	9	12	15	0
4	4	8	12	16	20	0
5	5	10	15	20	25	0
6	0	0	0	0	0	0

ce qui permet de déterminer $X(\Omega)$ et la loi de X par équiprobabilité :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	20	25
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

La fonction de répartition donne alors :



Exercice 2

Tout d'abord, pour que ce soit une loi de probabilité, il faut que $\mathbb{P}(X=k) \geqslant 0$ pour tout k, ce qui donne ici $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geqslant 0$, et donc $b \geqslant a$.

Ensuite, il faut que $\displaystyle\sum_{k=1}^{ab} \mathbb{P}(X=k) = 1$. Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{ab} \mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{ab} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \\ &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) ab \text{ car la probabilité ne dépend pas de } k \\ &= b - a\end{aligned}$$

Ainsi, il faut que $b - a = 1$, soit $b = a + 1$.

Bilan : pour tout $a \in \mathbb{N}$, le couple $(a, a+1)$ convient. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{ab} k\mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{ab} k\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\frac{ab(ab+1)}{2} = \frac{(b-a)(ab+1)}{2} = \frac{a(a+1)+1}{2} \text{ car } b = a+1\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}(X) = 3,5$ équivaut à $\frac{a^2+a+1}{2} = \frac{7}{2}$, soit $a^2 + a - 6 = 0$. Après résolution, on obtient deux valeurs -3 et 2 ; or, $a \in \mathbb{N}$ donc une seule valeur convient : $a = 2$ et le couple (a, b) est donc $(2, 3)$.

Exercice 3

1. X prend des valeurs dans $[\![1, n-1]\!]$. On note R_i l'événement : « une boule rouge est tirée au i-ième lancer ».

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Première méthode : formule des probabilités composées Par définition de X, on a

$$(X = k) = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}$$

D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-2}}(R_{k-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(\overline{R_k}).$$

Par équiprobabilité de chacun des tirages :

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)} \times \frac{2}{n-(k-1)}$$

soit, après simplification

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

Deuxième méthode : dénombrement. Si $(X = k)$ est réalisé, on a donc obtenu $k-1$ boules rouges puis une boule blanche. Par équiprobabilité des tirages, le nombre de tirage de k boules amenant $k-1$ boules rouges puis une boule blanche est :

$$\text{card}(X=k) = \underbrace{A_{n-2}^{k-1}}_{\substack{\text{choix de } k-1 \text{ boules rouges} \\ \text{(successifs) parmi } n-2 \text{ boules rouges}}} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{choix d'une boule blanche sur 2}}$$

avec un ensemble de A_n^k tirages possibles (tirage ordonné de k boules dans un ensemble de n boules). Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \frac{A_{n-2}^{k-1}\times\binom{2}{1}}{A_n^k}\\ &= \frac{\frac{(n-2)!}{(n-2-(k-1))!}\times 2}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{2(n-2)!(n-k)!}{(n-k-1)!n!} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

$X(\Omega)$ étant fini, X admet une espérance, et par définition,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2n}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{2n}{n(n-1)}\frac{(n-1)n}{2} - \frac{2}{n(n-1)}\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}\\ &= n - \frac{2n-1}{3} = \frac{n+1}{3}.\end{aligned}$$

2. Il y a $n-2$ boules rouges au total. Si X désigne le nombre de tirages nécessaires avant d'obtenir une boule blanche, on a donc tiré $X-1$ boules rouges (la dernière étant blanche). Ains, on a

$$Y = n-2-(X-1) = n-1-X$$

et

$$\mathbb{E}(Y) = n-1-\mathbb{E}(X) \text{ par linéarité de l'espérance}$$

Bilan : $\mathbb{E}(Y) = n-1-\frac{n+1}{3} = \frac{2n-4}{3}$.

3. Notons déjà que Z prend des valeurs dans $[\![2;n]\!]$. Soit $j\in[\![2;n]\!]$. $(X=i)_{i\in[\![1;n-1]\!]}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Z=j) = \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}_{(X=i)}(Z=j)$$

Remarquons que si $i\geqslant j$, $\mathbb{P}_{(X=i)}(Z=j)=0$ (on ne peut pas obtenir la deuxième boule au j-ième lancer si la première boule a été prise au i-ième lancer avec $i\geqslant j$). La somme s'écrit alors

$$\mathbb{P}(Z=j) = \sum_{i=1}^{j-1}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}_{(X=i)}(Z=j).$$

Avec le même raisonnement que précédemment, si $j>i$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X=i)}(Z=j) &= \mathbb{P}_{(X=i)}(R_{i+1}\cap\cdots\cap R_{j-1}\cap\overline{R_j})\\ &= \mathbb{P}_{(X=i)}(R_{i+1})\mathbb{P}_{(X=i)\cap R_{i+1}}(R_{i+2})\times\ldots\times\mathbb{P}_{(X=i)\cap\ldots\cap R_{j-2}}(R_{j-1})\times\mathbb{P}_{(X=i)\cap\ldots\cap R_{j-1}}(\overline{R_j})\\ &= \frac{n-i-1}{n-i}\times\frac{n-i-2}{n-i-1}\times\ldots\times\frac{n-2-(j-3)}{n-2-(j-2)}\times\frac{1}{n-(j-1)} = \frac{1}{n-i}\end{aligned}$$

Ou alors, par dénombrement : il faut $j-1-(i+1)+1 = j-i-1$ boules rouges, ordonnés, puis une boule blanche dans un ensemble de $n-i$ boules dont $n-i-1$ boules rouges, soit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X=i)}(Z=j) &= \frac{A_{n-i-1}^{j-i-1}\times\binom{1}{1}}{A_{n-i}^{j-i}}\\ &= \frac{\frac{(n-i-1)!}{(n-i-1-(j-i-1)}}{\frac{(n-i)!}{(n-i-(j-i))!}}\\ &= \frac{(n-i-1)!(n-j)!}{(n-i)!(n-j)!} = \frac{1}{n-i}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![2; n]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=j) &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \times \frac{1}{n-i} + \sum_{i=j}^{n} 0 \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}(j-1)\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall\ j \in [\![2; n]\!],\quad \mathbb{P}(Z=j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}}$$

Exercice 4

1. On note P_k l'événement « obtenir pile au k-ième lancer » pour $k \in [\![1, n]\!]$. D'après l'énoncé, on a

$$\forall\ k \in [\![1, n]\!],\quad \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \ldots \cap \overline{P_{k-1}} \cap P_k)$$

ce qui, par indépendance des lancer

$$\forall\ k \in [\![1, n]\!],\quad \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\overline{P_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(\overline{P_{k-1}}) \times \mathbb{P}(P_k)$$

soit

$$\forall\ k \in [\![1, n]\!],\quad \boxed{\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}.}$$

Enfin, par le même raisonnement :

$$\mathbb{P}(X=n+1) = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \ldots \cap \overline{P_{n-1}} \cap \overline{P_n}) = (1-p)^n.$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} + (1-p)^n$$

soit

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X=k) = p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} + (1-p)^n = 1-(1-p)^n + (1-p)^n = 1$$

2. $X(\Omega)$ étant fini, X admet une espérance, et par définition,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1} + (n+1)(1-p)^n$$

Or, en dérivant la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ valable pour tout $x \neq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n(1-x) - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

On en déduit donc

$$\mathbb{E}(X) = p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} + (n+1)(1-p)^n = p\frac{1-(n+1)p(1-p)^n - (1-p)^{n+1}}{(1-(1-p))^2} + (n+1)(1-p)^n$$

soit, après simplification,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p}}$$

Exercice 5

Nous avons vu que $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X\geqslant k)-\mathbb{P}(X\geqslant k+1)$ pour $k\geqslant 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)&=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X=k)\\&=\sum_{k=1}^{n}k(\mathbb{P}(X\geqslant k)-\mathbb{P}(X\geqslant k+1))\\&=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X\geqslant k)-\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X\geqslant k+1)\\&=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X\geqslant k)-\sum_{j=2}^{n+1}(j-1)\mathbb{P}(X\geqslant j)\\&=1\mathbb{P}(X\geqslant 1)+\sum_{k=2}^{n}(k-(k-1))\mathbb{P}(X\geqslant k)-(n+1)\underbrace{\mathbb{P}(X\geqslant n+1)}_{=0}\\&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k)\end{aligned}$$

Exercice 6

Soit X la variable aléatoire dénombrant le nombre de pile obtenu sur 10 lancers. Puisqu'il s'agit d'une répétition successive et indépendante d'une loi de Bernoulli de paramètre $0,3$, on en déduit que $X\hookrightarrow\mathcal{B}(10;0,3)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X=3)=\binom{10}{3}(0,3)^3(1-0,3)^{10-3}\approx 0,2668$$

Exercice 7

Remarquons que, puisque X prend ses valeurs dans $[\![0;n]\!]$, Y prend également ses valeurs dans $[\![0;n]\!]$. Enfin, pour $k\in[\![0;n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(n-X=k)=\mathbb{P}(X=n-k)=\binom{n}{n-k}p^{n-k}(1-p)^k$$

En utilisant les propriétés des nombres combinatoires, on a donc

$$\mathbb{P}(Y=k)=\binom{n}{k}(1-p)^kp^{n-k}$$

Ainsi,

$$\boxed{Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n,1-p)}$$

Exercice 8

On tire simultanément 6 boules, donc l'univers est un peu difficile à énoncer. On va simplement écrire que Ω est composé de toutes les combinaisons possibles de 6 boules parmi ces 15 boules de couleurs. On en déduit, puisqu'on tire 6 boules parmi 15, que

$$\mathrm{card}(\Omega)=\binom{15}{6}=5005$$

R prend des valeurs dans $[\![1;6]\!]$ (puisqu'on est obligé de prendre une boule rouge), et B prend des valeurs dans $[\![0;5]\!]$. Par dénombrement, on obtient

$$\forall\ k\in[\![1;6]\!],\quad \mathbb{P}(R=k)=\frac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{5005}$$

$$\forall\ k \in [\![0;5]\!],\quad \mathbb{P}(B=k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{10}{6-k}}{5005}$$

Après calcul, on obtient

$$\mathbb{E}(R) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(R=k) = \frac{20020}{5005} = 4$$
$$\mathbb{E}(B) = \sum_{k=0}^{5} k\mathbb{P}(B=k) = \frac{10010}{5005} = 2$$

Exercice 9

1. On choisit au hasard une ou deux cases à chaque saut. On note Y_k le nombre de saut d'une seule case lors des k premiers sauts. On dispose d'une épreuve de Bernoulli, de succès « effectuer un saut d'une case », de probabilité $\frac{1}{2}$. On répète k fois, de manière indépendante, cette épreuve de Bernoulli. Ainsi, Y_k, variable aléatoire qui compte le nombre de succès, suit une loi binomiale, de paramètres k et $p = \frac{1}{2}$.
Ainsi, $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{k}{2}$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_k) = k\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{4}$.
2. Par définition, si Y_k désigne le nombre de saut d'une case, $k - Y_k$ désigne le nombre de saut de deux cases. Ainsi, puisqu'au départ $X_0 = 0$, on a

$$X_k = Y_k \times 1 + (k - Y_k) \times 2 = 2k - Y_k.$$

Puisque on saute d'une ou deux cases, on a $X(\Omega) = [\![k,\, 2k]\!]$, mais attention, il y a $n+1$ cases, donc $X_k(\Omega) \subset [\![0,\, n]\!]$. Ainsi, cette formule n'est valable que si $2k \leqslant n$ (car sinon on peut atteindre la case n et alors on ne bouge plus).
Si $i \in [\![k,\, 2k]\!] \cap [\![0,\, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_k = i) &= \mathbb{P}(2k - Y_k = i) \\
&= \mathbb{P}(Y_k = 2k - i) \\
&= \binom{k}{2k-i} p^{2k-i}(1-p)^{k-(2k-i)} = \binom{k}{2k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

3. Traitons deux cas : $2k \leqslant n$ et $2k \geqslant n$.
- Si $2k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_k) &= \sum_{i=k}^{2k} i\mathbb{P}(X=i) \\
&= \sum_{i=k}^{2k} i\binom{k}{2k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\underset{j=i-k}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{j=0}^{k}(j+k)\binom{k}{k-j} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\sum_{j=0}^{k} j\binom{k}{j} + k\sum_{k=0}^{k}\binom{k}{j}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\sum_{j=1}^{k} k\binom{k-1}{j-1} + k2^k\right) \quad \text{formule du chef et binôme} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(k\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j} + k2^k\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^k (k2^{k-1} + k2^k) = \frac{3k}{2}
\end{aligned}$$

Autre méthode : on utilise la linéarité de l'espérance. Si $2k \leqslant n$, alors $2k - Y_k \in [\![0, n]\!]$ et donc
$$\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(2k - Y_k) = 2k - \mathbb{E}(Y_k) = \frac{3k}{2}.$$

- Si $2k \geqslant n$, l'idée est la même mais la somme s'arrête à n. On ne peut cette fois-ci pas utiliser la linéarité de l'espérance, puisque la formule $X_k = 2k - Y_k$ n'est pas valable dans ce cas.

Exercice 10

1. On note Ω le nombre de combinaisons de deux boules dans un ensemble de 12 boules. Par définition de l'expérience, $X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$. On a :
$$\text{card}(\Omega) = \binom{12}{2}.$$
Par équiprobabilité des tirages des boules :
$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} \text{ car on tire 2 boules parmi les 8 boules rouges}$$
$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} \text{ car on tire 1 boule parmi les rouges et 1 boule parmi les bleues}$$
$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} \text{ car on tire 2 boules parmi les 4 boules rouges}$$
Après simplification,
$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{28}{66}, \quad \mathbb{P}(X=1) = \frac{32}{66} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=2) = \frac{6}{66}.$$
2. Le nombre de boules de l'urne U_1 dépend du premier tirage. On va donc appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X=k)_{k\in[\![0,2]\!]}$.
On note B l'événement « on tire une boule bleue lors du tirage dans l'urne U_1 ».
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}((X=k)\cap B)\\ &= \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}_{(X=0)}(B) + \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}_{(X=1)}(B) + \mathbb{P}(X_2)\mathbb{P}_{(X=2)}(B)\end{aligned}$$
D'après l'énoncé, si on ne tire aucune boule bleue lors du premier tirage, on a alors dans l'urne U_1 6 boules bleues et 7 boules rouges. Ainsi,
$$\mathbb{P}_{(X=0)}(B) = \frac{6}{13}$$
Par le même raisonnement :
$$\mathbb{P}_{(X=1)}(B) = \frac{7}{13} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{(X=2)}(B) = \frac{8}{13}.$$
Alors
$$\mathbb{P}(B) = \frac{28}{66}\times\frac{6}{13} + \frac{31}{66}\times\frac{7}{13} + \frac{6}{66}\times\frac{8}{13} = \frac{433}{858}$$
3. On souhaite calculer $\mathbb{P}_B(X \geqslant 1)$. Calculons plutôt $\mathbb{P}_B(X=0)$, la probabilité de l'événement contraire, en appliquant la formule de Bayse :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_B(X=0) &= \frac{\mathbb{P}_{(X=0)}(B)\times\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(B)}\\ &= \frac{\frac{6}{13}\times\frac{28}{66}}{\frac{433}{858}} = \frac{28}{143}\end{aligned}$$

La probabilité recherchée est alors

$$\mathbb{P}_B(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}_B(X = 0) = \frac{115}{143}.$$

Exercice 11

1. On dispose d'une épreuve de Bernoulli, de succès « obtenir une boule rouge », de probabilité $p = \frac{r}{N}$. On répète n fois, de manière successive et indépendante, cette épreuve de Bernoulli. R, qui compte le nombre de succès, suit alors une loi binomiale, de paramètre n et p.

2. a) On note Ω l'ensemble des tirages possibles de n boules ordonnées, c'est-à-dire les arrangements de n boules d'un ensemble à N boules. On munit cet univers d'une loi d'équiprobabiltié de chaque tirage : $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est alors l'espace probabilisé associé. On a alors $X(\Omega) = [\![0, r]\!]$ (puisqu'au maximum il y a r boules rouges).

b) On a équiprobabilité. Par définition,

$$\operatorname{card}(\Omega) = A_N^n.$$

Pour $k \in [\![0, r]\!]$, $(X = k)$ correspond au tirage de k boules bleues et $n - k$ boules rouges lors d'un tirage sans remise. On a

$$\operatorname{card}(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{place des boules rouges}} \times \underbrace{A_r^k}_{\text{placement des rouges}} \times \underbrace{A_b^{n-k}}_{\text{placement des bleues}}.$$

En remarquant que $A_n^k = k!\binom{n}{k}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \frac{\binom{n}{k}k!\binom{r}{k}(n-k)!\binom{b}{n-k}}{n!\binom{N}{n}} \\ &= \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}}.\end{aligned}$$

c) On applique la définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{r} k\mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{r} k\frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{r} r\binom{r-1}{k-1}\binom{b}{n-k} \quad \text{par la formule du chef} \\ &= \frac{r}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j}\binom{b}{n-j-1} \quad \text{par changement d'indice } j = k-1 \\ &= \frac{r}{\binom{N}{n}} \binom{r-1+b}{n-1} \quad \text{par la formule de Vandermonde} \\ &= r\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = r\frac{n}{N} = np\end{aligned}$$

Exercice 12

Quand on voit des sommes avec des coefficients binomiaux, on réfléchit à une variable aléatoire suivant une loi binomiale. Pour la première, on constate que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}3^k &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\frac{3^k}{4^n}\\ &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\frac{1}{4^{n-k}}\\ &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}(X)\end{aligned}$$

où X suit une loi binomiale de paramètre n et $p=\frac{3}{4}$. D'après les résultats sur la loi binomiale, on en déduit que

$$\boxed{\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}3^k = np = \frac{3n}{4}.}$$

On procède de la même manière avec la deuxième :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k^2+k)\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^n} &= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}(Y=k) + \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{E}(Y^2)+\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

où Y suit une loi binomiale de paramètre n et $p=\frac{2}{3}$. Ainsi, $\mathbb{E}(Y)=np=\frac{2n}{3}$. Pour le moment d'ordre 2, on utilise la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)+\mathbb{E}(Y)^2 = np(1-p)+(np)^2\\ &= n\frac{2}{3}\frac{1}{3}+\left(\frac{2n}{3}\right)^2.\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(k^2+k)\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^n} = \frac{2n}{9}+\frac{4n^2}{9}+\frac{2n}{3} = \frac{4n(n+2)}{9}}$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 13

1. Tout d'abord, on a $X_A(\Omega)=[\![1,\,10]\!]$. On C_i l'événement « la bonne clé est utilisée au i-ième

essai ». Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_A = 1) &= \mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{10}\\
\mathbb{P}(X_A = 2) &= \mathbb{P}(\overline{C_1} \cap C_2)\\
&= \mathbb{P}(\overline{C_1})\mathbb{P}_{\overline{C_1}}(C_2) \quad \text{formule des probas composées}\\
&= \frac{9}{10}\frac{1}{9} = \frac{1}{10}\\
\forall\, k \in [\![1,\, 10]\!], \quad \mathbb{P}(X_A = k) &= \mathbb{P}(\overline{C_1} \cap \overline{C_1} \cap \ldots \cap \overline{C_{k-1}} \cap C_k)\\
&= \frac{\cancel{9}}{10} \times \frac{8}{\cancel{9}} \times \ldots \times \frac{\cancel{9-(k-1)}}{10-(k-1)} \times \frac{1}{\cancel{10-k}} = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Ainsi, $X_A \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![1,\, 10]\!]\right)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_A > 8) &= \mathbb{P}(X_A \in [\![9,\, 10]\!]) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}\\
\mathbb{E}(X_A) &= \frac{1+10}{2} = \frac{11}{2}
\end{aligned}$$

2. On applique le même raisonnement. $X_B(\Omega) = [\![1,\, 11]\!]$.
Pour tout $k \in [\![1,\, 10]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_B = k) &= \mathbb{P}(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \ldots \cap \overline{C_{k-1}} \cap C_k)\\
&= \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \ldots \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}\\
&= \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_B = 11) &= 1 - \sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}(X_B = k)\\
&= 1 - \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10}\\
&= 1 - \frac{1}{10}\frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}}{1 - \frac{9}{10}}\\
&= \left(\frac{9}{10}\right)^{10}
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_B > 8) &= \mathbb{P}(X_B = 9) + \mathbb{P}(X_B = 10) + \mathbb{P}(X_B = 11)\\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^8 + \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^9 + \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\\
&= \left(\frac{9}{10}\right)^8 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\frac{9}{10} + \frac{9^2}{10^2}\right)\\
&= \left(\frac{9}{10}\right)^8
\end{aligned}$$

3. On note I l'événement « le gardien est ivre » et X le nombre d'essais nécessaires au gardien pour ouvrir la porte. On a $\mathbb{P}(I) = \frac{1}{3}$. $(I, \overline{I})$ forme un système complet d'événements. D'après la

formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>8) &= \mathbb{P}((X>8)\cap I)+\mathbb{P}((X>8)\cap \overline{I})\\ &= \mathbb{P}(I)\mathbb{P}_I(X>8)+\mathbb{P}(\overline{I})\mathbb{P}_{\overline{(I)}}(X>8)\\ &= \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_B>8)+\frac{2}{3}\mathbb{P}(X_A>8)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^8+\frac{2}{3}\frac{1}{5}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^8+\frac{2}{15}\end{aligned}$$

On souhaite alors déterminer $\mathbb{P}_{(X>8)}(I)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X>8}(I) &= \frac{\mathbb{P}((X>8)\cap I)}{\mathbb{P}(X>8)}\\ &= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^8}{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^8+\frac{2}{15}}\approx 0,518\end{aligned}$$

Exercice 14

1. a) Par définition, $X_1(\Omega)=\{0,1\}$ et

$$\mathbb{P}(X_1=0)=\frac{b_0}{b_0+r_0}\quad \text{et}\quad \mathbb{P}(X_1=1)=\frac{r_0}{b_0+r_0}.$$

X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{r_0}{b_0+r_0}$.

b) La probabilité de tirer une boule au 2-ième tirage dépend du premier tirage. $((X_1=0),(X_1=1))$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2=0) &= \mathbb{P}((X_1=0)\cap(X_2=0))+\mathbb{P}((X_1=1)\cap(X_2=0))\\ &= \mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2=0)+\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2=0)\\ &= \frac{b_0}{b_0+r_0}\frac{b_0+d}{b_0+r_0+d}+\frac{r_0}{b_0+r_0}\frac{b_0}{b_0+r_0+d}\\ &= \frac{b_0(b_0+r_0+d)}{(b_0+r_0)(b_0+r_0+d)}=\frac{b_0}{b_0+r_0}\\ \mathbb{P}(X_2=1) &= \mathbb{P}((X_1=0)\cap(X_2=1))+\mathbb{P}((X_1=1)\cap(X_2=1))\\ &= \mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2=1)+\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2=1)\\ &= \frac{b_0}{b_0+r_0}\frac{r_0}{b_0+r_0+d}+\frac{r_0}{b_0+r_0}\frac{r_0+d}{b_0+r_0+d}\\ &= \frac{r_0(b_0+d+r_0)}{(b_0+r_0)(b_0+r_0+d)}=\frac{r_0}{b_0+r_0}\end{aligned}$$

Ainsi, X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{r_0}{b_0+r_0}$.

c) i. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Par définition, si $S_n=k$, on a tiré k boules rouges (et donc ajouté $k\times d$ boules rouges) et $n-k$ boules bleues (et on a donc ajouté $(n-k)\times d$ boules bleues). On a ajouté au total $n\times d$ boules. Ainsi :

$$\mathbb{P}_{[S_n=k]}(X_{n+1}=1)=\frac{r_0+kd}{r_0+b_0+nd}$$

ii. On applique alors la formule des probabilités totales au système complet d'événements $([S_n =$

$k])_{k\in[\![0,n]\!]}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=1) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}((S_n=k)\cap(X_{n+1}=1)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n=k)\mathbb{P}_{[S_n=k]}(X_{n+1}=1) \\
&= \frac{r_0 \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n=k) + d\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(S_n=k)}{r_0+b_0+nd} \\
&= \frac{r_0+d\mathbb{E}(S_n)}{r_0+b_0+nd} \text{ car } \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)=1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(S_n=k)=\mathbb{E}(S_n)
\end{aligned}$$

iii. $((X_{n+1}=0),(X_{n+1}=1))$ forme un système complet d'événements. Pour tout $k\in[\![0,\, n+1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1}=k) &= \mathbb{P}((X_{n+1}=0)\cap(S_{n+1}=k)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=1)\cap(S_{n+1}=k)) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1}=0)\mathbb{P}_{(X_{n+1}=0)}(S_{n+1}=k) + \mathbb{P}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}_{(X_{n+1}=1)}(S_{n+1}=k) \\
&= (1-\mathbb{P}(X_{n+1}=1))\mathbb{P}(S_n=k) + \mathbb{P}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(S_n=k-1)
\end{aligned}$$

en remarquant que, si $X_{n+1}=0$, on n'a pas tiré une bleue au $n+1$-ième tirage, et donc il faut avoir tirer les k boules bleues sur les n-ième tirages ; sinon, on a tiré une boule bleue, et il faut donc tirer $k-1$ boules bleues sur les n premiers tirages. Alors

$$k\mathbb{P}(S_{n+1}=k) = (1-\mathbb{P}(X_{n+1}=1))k\mathbb{P}(S_n=k) + \mathbb{P}(X_{n+1}=1)k\mathbb{P}(S_n=k-1)$$

soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k\mathbb{P}(S_{n+1}=k) = (1-\mathbb{P}(X_{n+1}=1))\sum_{k=0}^{n+1} k\mathbb{P}(S_n=k) + \mathbb{P}(X_{n+1}=1)\sum_{k=0}^{n+1} k\mathbb{P}(S_n=k-1)$

En constatant que $\mathbb{P}(S_n=-1)=0$ et $\mathbb{P}(S_n=n+1)=0$, on peut ré-écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}) &= (1-\mathbb{P}(X_{n+1}=1))\mathbb{E}(S_n) + \mathbb{P}(X_{n+1}=1)\sum_{k=0}^{n}(k+1)\mathbb{P}(S_n=k) \\
&= (1-\mathbb{P}(X_{n+1}=1))\mathbb{E}(S_n) + \mathbb{P}(X_{n+1}=1)\left(\mathbb{E}(S_n)+1\right) \\
&= \mathbb{E}(S_n) + \mathbb{P}(X_{n+1}=1)
\end{aligned}$$

d) On repart de la formule vue en d, et en utilisant la relation vue en 3. On a $\mathbb{E}(S_n)=\mathbb{E}(S_{n+1})-\mathbb{P}(X_{n+1}=1)$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = \frac{r_0+d\mathbb{E}(S_{n+1})-d\mathbb{P}(X_{n+1}=1)}{r_0+b_0+nd}$$

et donc

$$\mathbb{E}(S_{n+1}) = \frac{(r_0+b_0+(n+1)d)\mathbb{P}(X_{n+1}=1)-r_0}{d}$$

soit, au rang n :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{(r_0+b_0+nd)\mathbb{P}(X_n=1)-r_0}{d}$$

et en injectant dans la relation 2)b) :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = \frac{(r_0+b_0+nd)\mathbb{P}(X_n=1)}{r_0+b_0+nd} = \mathbb{P}(X_n=1)$$

La suite $(\mathbb{P}(X_n=1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc constante, égale à $\mathbb{P}(X_1=1)=\frac{r_0}{r_0+b_0}$. Enfin, $1-\mathbb{P}(X_n=1)=\mathbb{P}(X_n=0)=\frac{b_0}{b_0+r_0}$.

Bilan : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{r_0}{b_0+r_0}$.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

La dénomination fait référence au mathématicien **George Pólya** qui a proposé ce modèle. En s'intéressant au nombre de boules rouges tirées au bout de n tirages, on obtient une loi, appelée **loi de Markov-Pólya**.

Exercice 15

1. Au minimum, il faut tirer deux boules pour obtenir un numéro supérieur au précédent. Au maximum, il faut tirer les n boules dans l'ordre décroissant $n, n-1 \dots, 1$ avant de tirer une boule qui, nécessairement, aura un numéro supérieur ou égal au précédent. Cela donnera $n+1$ tirages. Toute valeur entre 2 et $n+1$ est atteignable, et ainsi

$$Y_n(\Omega) = [\![2,\, n+1]\!]$$

2. Soit $k \in [\![1,\, n]\!]$. Pour obtenir un tirage avec les k premiers décroissants, on commence par déterminer les k nombres en questions, qui seront nécessairement dans l'ordre décroissante. Il y en a $\binom{n}{k}$. On complète alors le tirage par des nombres quelconques entre 1 et n, soit n choix possibles pour les $n+1-k$ boules restantes. Ainsi, il y a bien

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{k \text{ premières st décroissantes}} \times \underbrace{n^{n+1-k}}_{\text{boules restantes}}$$

tirages de $n+1$ boules avec remises, tels que les k premières sont dans un ordre strictement décroissantes.

3. $[Y_n > k]$ est composé des tirages tels que le nombre de tirages effectués avant de s'arrêter est strictement supérieur à k. Dit autrement, lorsqu'on effectue un tirage de $n+1$ boules au maximum, les k premières, au moins, sont en ordre strictement décroissante. Il y a n^{n+1} cas possibles. Par équiprobabilité des tirages, et d'après ce qui précède :

$$\forall\, k \in [\![1,\, n]\!], \quad \mathbb{P}(Y_n > k) = \frac{\binom{n}{k} n^{n+1-k}}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$$

4. Soit $k \in [\![2,\, n+1]\!]$. On écrit $[Y_n = k] = [Y_n > k-1] \setminus [Y_n > k]$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n = k) &= \mathbb{P}(Y_n > k-1) - \mathbb{P}(Y_n > k) \\
&= \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \\
&= \frac{1}{n^k}\left(n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k}\right) \\
&= \frac{1}{n^k}\left((n+1)\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k-1} - \binom{n}{k}\right)
\end{aligned}$$

D'après la formule du chef,

$$(n+1)\binom{n}{k-1} = k\binom{n+1}{k}.$$

De plus, par la formule de Pascal,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n = k) &= \frac{1}{n^k}\left(k\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k}\right)\\ &= \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, k \in [\![2,\, n+1]\!], \quad \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}.}$$

5. Soit $n \geqslant 2$ fixé. Par définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= \sum_{k=2}^{n+1} k\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} k(k-1)\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k = (1+x)^{n+1}.$$

Ces termes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et en dérivant, on obtient pour tout réel x :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k}x^{k-1} = (n+1)(1+x)^n$$

En dérivant à nouveau, pour tout réel x :

$$\sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)\binom{n+1}{k}x^{k-2} = n(n+1)(1+x)^{n-1}$$

ou encore, en multipiant par x^2 :

$$\sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)\binom{n+1}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n+1} k(k-1)\binom{n+1}{k}x^k = n(n+1)x^2(1+x)^{n-1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= n(n+1)\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\end{aligned}$$

On a finalement

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 2, \quad \mathbb{E}(Y_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.}$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Par composée, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n) = \mathrm{e}.}$$

Exercice 16

> **Remarque**
> Cette exercice met en réalité en jeu des variables aléatoires discrètes mais non finies (théoriquement, le temps d'atteindre 0 peut être infini). On le traite ici avec des outils des chapitres sur les probabilités finies.

1.
a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $(T = k)$ représente l'événement où on retourne pour la première fois en 0 à l'instant k. Ainsi,

$$(T = k) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap \cdots \cap (X_{k-1} = k-1) \cap (X_k = 0) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = i)\right) \cap (X_k = 0)$$

b) D'après l'énoncé, $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$: $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Ainsi $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé, pour tout $i \leqslant n$, $\mathbb{P}_{(X_1=1)\cap\cdots\cap(X_{i-1}=i-1)}(X_i = i) = p$. Ainsi, d'après la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{(X_1=1)\cap\ldots\cap(X_{k-2}=k-2)}(X_{k-1} = k-1)\\ \times \mathbb{P}_{(X_1=1)\cap\ldots\cap(X_{k-1}=k-1)}(X_k = 0)\end{aligned}$$

soit, d'après la propriété tiré de l'énoncé :

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T = k) = p \times p \times \cdots \times p \times (1-p) = p^{k-1}(1-p).}$$

> **Remarque**
> On appellera cette loi plus tard la loi **géométrique** de paramètre p.

2.
a) Montrons par récurrence le résultat P_n : « $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ ».
Initialisation : pour $n = 0$, on a $X_0(\Omega) = \{0\}$ donc $X_0(\Omega) = [\![0, 0]\!]$: P_0 est vraie.
Hérédité : supposons le résultat vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie. Ainsi, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ par hypothèse de récurrence. Deux cas possibles pour X_{n+1} : soit le mobile retourne à 0, soit le mobile se déplace, et dans ce cas, il passe du point d'abscisse i au point d'abscisse $i + 1$, pour $i \in [\![0, n]\!]$: ainsi, il se retrouvera sur un point d'abscisse comprise dans $[\![1, n+1]\!]$.
Donc, $X_{n+1}(\Omega) = \{0\} \cup [\![1, n+1]\!] = [\![0, n+1]\!]$: P_{n+1} est donc vraie.
On a donc bien montré par récurrence que pour tout entier n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, $X_{n-1}(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$. Puisque X_{n-1} est une variable aléatoire discrète, l'ensemble $(X_{n-1} = k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est un système complet d'événement. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = k)\mathbb{P}_{(X_{n-1}=k)}(X_n = 0)$$

Or, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{(X_{n-1}=k)}(X_n = 0) = 1 - p$ car à chaque instant, il retourne au point d'abscisse 0 avec probabilité $1 - p$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = k)(1-p) = (1-p)\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = k)}_{=1 \text{ car s.c.e.}} = 1 - p$$

3.
a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1, \cdots, n+1\}$. Utilisons le système complet d'événements $(X_n = i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et appliquons la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = i)\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k)$$

Or, si $i \neq k-1$, $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k) = 0$ car il est impossible que le mobile soit à l'instant $n+1$ en k sans qu'il soit à l'instant n en $k-1$. De plus, $\mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) = p$ d'après l'énoncé. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_n = k-1)p$$

b) Démontrons le résultat par récurrence : soit P_n : “pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, $\mathbb{P}(X_n = k) = p^k(1-p)$”.
Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1 - p = p^0(1-p)$. Ainsi, P_0 est vraie.
Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$. D'après la question précédente, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = p\mathbb{P}(X_n = k-1)$. Par hypothèse de récurrence,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = p(p^{k-1}(1-p)) = p^k(1-p)$$

De plus, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = 1 - p = p^0(1-p)$ d'après l'énoncé. Donc P_{n+1} est vraie.
Ainsi, pour tout entier n et tout entier $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\mathbb{P}(X_n = k) = p^k(1-p)$.

Remarquons de plus que la relation vue en $3a$ amène que

$$\mathbb{P}(X_n = n) = p\mathbb{P}(X_{n-1} = n-1)$$

Ainsi, la suite u définie pour tout n par $u_n = \mathbb{P}(X_n = n)$ est une suite géométrique de raison p. Ainsi, on a

$$\forall\, n, \quad \mathbb{P}(X_n = n) = p^n\mathbb{P}(X_0 = 0) = p^n$$

ce qui est cohérent, car pour que au n^{ime} instant le mobile soit au point d'abscisse n, il faut qu'il ne soit jamais retourné au point d'abscisse 0.

c) X_n étant une variable aléatoire d'univers image $[\![0, n]\!]$, on doit avoir $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = 1$. Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}(X_n = n)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) + p^n = (1-p)\frac{1-p^n}{1-p} + p^n = 1\end{aligned}$$

4.
a)

> **Remarque**
> Cette démonstration est à retenir : elle tombe souvent au concours.

Pour tout $n \geqslant 2$, et tout $p \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} p^k = \frac{1-p^n}{1-p}$$

comme somme des termes d'une suite géométrique ($p \neq 1$).
Les deux fonctions étant dérivables (la première comme polynôme, la deuxième comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas), pour tout réel $p \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(-np^{n-1})(1-p) - (1-p^n)(-1)}{(1-p)^2}$$

soit

$$\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{np^n - np^{n-1} + 1 - p^n}{(1-p)^2} = \frac{p^n(n-1) - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$$

b) X_n étant une variable aléatoire finie, elle admet une espérance. On a, par définition,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} kp^k(1-p) + np^n \\ &= p(1-p)\sum_{k=0}^{n-1} kp^{k-1} + np^n\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question précédente, on a donc

$$\mathbb{E}(X_n) = p(1-p)\frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + np^n = \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p}{1-p} + np^n$$

Soit après mise au même dénominateur

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p + np^n - np^{n+1}}{1-p}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{p - p^{n+1}}{1-p} = \frac{p(1-p^n)}{1-p}}$$

5.

a) Les espérances existent car les variables aléatoires sont finies. D'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \sum_{k=0}^{n+1} k^2\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$$

D'après la question $3a$), on a donc

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = 0 + \sum_{k=1}^{n+1} k^2 p\mathbb{P}(X_n = k-1)$$

En posant $i = k-1$, on peut alors écrire

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p\sum_{i=0}^{n} (i+1)^2\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{i=0}^{n} (i^2 + 2i + 1)\mathbb{P}(X_n = i)$$

soit, en développant

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p\left(\sum_{i=0}^{n} i^2\mathbb{P}(X_n = i) + 2\sum_{k=0}^{n} i\mathbb{P}(X_n = i) + \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X_n = i)\right)$$

Or, d'après la formule de transfert, $\sum_{i=0}^{n} i^2\mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{E}(X_n^2)$. De plus, $\sum_{i=0}^{n} i\mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{E}(X_n)$ et $\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X_n = i) = 1$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1)$$

b) D'après la question précédente, on constate que

$$u_{n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1}^2) + (2(n+1)-1)\frac{p^{n+1+1}}{1-p} = p\mathbb{E}(X_n^2) + 2p\mathbb{E}(X_n) + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p}$$

soit

$$u_{n+1} = pu_n - p(2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} + 2p\mathbb{E}(X_n) + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p}$$

avec $\mathbb{E}(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$. On obtient donc

$$u_{n+1} = pu_n + \frac{-p(2n-1)p^{n+1} + 2p^2(1-p^n) + p(1-p) + (2n+1)p^{n+2}}{1-p}$$

et donc

$$u_{n+1} = pu_n + \frac{-2np^{n+2} + p^{n+2} + 2p^2 - 2p^{n+2} + p(1-p) + 2np^{n+2} + p^{n+2}}{1-p}$$

$$u_{n+1} = pu_n + \frac{2p^2 + p - p^2}{1-p} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$$

c) La suite (u_n) est donc une suite arithmético-géométrique. Après étude classique, on constate que la suite v définie pour tout n par $v_n = u_n - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$ est géométrique, de raison p, et de premier terme

$$v_0 = u_0 - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \underbrace{\mathbb{E}(X_0^2)}_{=0 \text{ car } X_0=0} - \frac{p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{-2p}{(1-p)^2}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{-2p}{(1-p)^2}p^n + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}}$$

et

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n^2) = u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} = \frac{-2p}{(1-p)^2}p^n + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}}$$

d) D'après la formule de Koenig-Huygens, puisque la variable aléatoire X_n est à support fini, elle admet une variance, qui est donnée par

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = \frac{-2p}{(1-p)^2}p^n + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} - \left(\frac{p(1-p^n)}{1-p}\right)^2$$

soit, après factorisation

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(-2p^n + (1+p) - (2n-1)p^n(1-p) - p(1-p^n)^2\right)$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(-2p^n + 1 + p - (2n-1)p^n(1-p) - p + 2p^{n+1} - p^{2n+1}\right)$$

et donc

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - 2p^n(1-p) - p^{2n+1} - (2n-1)p^n(1-p)\right)$$

soit

$$\boxed{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - p^n(1-p)(2n+1) - p^{2n+1}\right)}$$