

10

Chapitre

Probabilités sur un ensemble fini

Résumé

VOUS allons dans ce chapitre revoir les notions de base sur les probabilités, vues depuis la classe de troisième, en les rendant plus rigoureuses. Nous revenons également sur les probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales.

Plan du cours

Chapitre 10. Probabilités sur un ensemble fini

I. Espace probabilisé fini	3
II. Probabilités conditionnelles	8
III. Probabilités totales	11
IV. Indépendance de deux événements	14
Exercices	17
Corrigés	22

« Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ? »

Henri Poincaré (1854 – 1912)

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les généralités sur les probabilités :

- Déterminer des probabilités en situation d'équiprobabilité ☐
- Utiliser la formule du crible de Poincaré ☐
- Justifier qu'une famille est un système complet d'événements ☐
- Utiliser les formules des probabilités composées et des probabilités totales ☐
- Utiliser les formules de Bayes ☐

② Concernant l'indépendance :

- Démontrer que deux événements sont indépendants ☐
- Utiliser la mutuelle indépendance d'une famille d'événements ☐

I. Espace probabilisé fini

1. Introduction

L'objectif de la théorie des probabilités est d'étudier et modéliser les phénomènes dans lesquels intervient le hasard.

Définition 10.1.

On appelle **expérience aléatoire** une expérience que l'on peut répéter, dont le résultat ne peut être prévu à l'avance et tel que, lorsqu'on la répète dans des circonstances identiques, ne donne pas forcément le même résultat.

Exemple 10.1

Par exemple, le lancer d'un dé, le tirage d'une boule dans une urne, ou d'une carte dans un jeu de cartes sont des expériences aléatoires.



RÉFÉRENCE HISTORIQUE



Historiquement, la théorie des probabilités est apparue pour étudier des jeux de hasard. Elle s'est développée ensuite pour étudier des phénomènes trop complexes pour être analysés de manière classique. On utilise alors le hasard pour simplifier ces problèmes.

On utilise désormais le hasard pour étudier l'écoulement à travers un matériau poreux (la **percolation**), le comportant des molécules dans un aimant (le **modèle d'Ising**), l'évolution d'une population ou d'une espèce, ...

Mathématiquement, nous décrivons une expérience de probabilité à l'aide de trois éléments :

- Un ensemble Ω , que l'on appelle **univers**, qui contient tous les résultats possibles. Par exemple, pour un lancer de dé à 6 faces, $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.
- Un ensemble de phénomènes, appelés **événements**, qui peuvent ou non se produire lors de l'expérience. Ainsi, un événement est une partie de Ω . Par exemple, si on lance un dé à 6 faces, l'événement « obtenir un chiffre impair » est l'événement $\{1, 3, 5\}$. Si le dé tombe sur 1, 3 ou 5, on dit que cet événement est **réalisé**.
- Une fonction qui, à tout événement, associe la probabilité de celui-ci. Par exemple, si le dé est bien équilibré, on peut prendre la fonction qui à un événement $\{k\}$ (avec $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$) donne $\frac{1}{6}$.

Nous allons définir rigoureusement les concepts précédents, pour l'instant dans le cadre d'un univers fini, c'est-à-dire des expériences aléatoires n'ayant qu'un nombre fini de résultats possibles.

2. Espace probabilisable

Définition 10.2.

Soit Ω un ensemble fini, et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . On dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable fini**.

Ω est appelé l'**univers**, les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont appelés **événements**. On dit que l'événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est **réalisé** si le résultat de l'expérience est un élément de A .

Enfin les événements $\{\omega\}$ (pour $\omega \in \Omega$) sont appelés **événements élémentaires**.

Remarque

$\mathcal{P}(\Omega)$ vérifie les propriétés suivantes, que nous reverrons plus tard :

- $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \overline{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$
- $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega), A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Remarque

L'événement $\emptyset$ est appelé **événement impossible**, et l'événement Ω l'**événement certain**.

3. Opérations sur les événements

Définition 10.3. Opérations usuelles

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.

- L'événement $\overline{A} = \mathcal{C}_\Omega A$ est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé. On dit que $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A .
- $A \subset B$ signifie que la réalisation de A implique celle de B .
- L'événement $A \cup B$ est réalisé si et seulement si l'un des événements au moins A ou B est réalisé.
- L'événement $A \cap B$ est réalisé si et seulement si les deux événements A et B sont réalisés.
- L'événement $A \setminus B$ est réalisé si et seulement si A est réalisé mais pas B .

Exemple 10.2

On lance un dé à 6 faces. On note $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{1, 3, 5\}$. A est l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 » et B est l'événement « obtenir un nombre impair ».

Alors $A \cup B$ est l'événement $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ à savoir l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 », $A \cap B = \{1, 3\}$ et $A \setminus B = \{2, 4\}$.

Si on lance deux fois le dé en question, l'univers devient $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$. Si on note A l'événement « ne pas obtenir de 6 sur les deux lancers », l'événement $\overline{A}$ est l'événement « obtenir au moins un 6 ».

Exercice 10.3

On lance successivement n pièces de monnaies. On note $\Omega = \{P, F\}^n$ l'univers obtenu (où on note P pour pile et F pour face). Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_k l'événement « obtenir pile au k -ième lancer ».

Exprimer les événements « n'obtenir que des faces » et « obtenir pile pour la première fois au k -ième lancer » (avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) en fonction des $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Solution

L'événement « n'obtenir que des faces » est $\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}$ et l'événement « obtenir pile pour la première fois au k -ième lancer » (avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) s'écrit

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i} \right) \cap A_k$$

Définition 10.4. Incompatibilité

Deux événements A et B de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Toutes les propriétés vues sur les ensembles sont bien évidemment valables, dont les lois de Morgan et les distributivités.

4. Loi de probabilité**Définition 10.5.**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour tous événements incompatibles A et B , $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Remarque

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé fini**, et pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A)$ s'appelle la **probabilité** de l'événement A .

**Attention**

Si $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\omega)$ n'a pas de sens, puisque $\mathbb{P}$ est définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$. On devra écrire $\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Propriété 10.1.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et A, B deux événements. Alors, on a :

- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Ainsi, $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$.
- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
- $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$.
- Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Démonstration

- Par définition, A et $\bar{A}$ sont incompatibles, et $A \cup \bar{A} = \Omega$. Donc par définition

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$$

- Par définition de $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$. De plus, $\mathbb{P}(\bar{A}) \geq 0$ donc $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \leq 1$.
- $B \setminus A$ et $A \cap B$ sont incompatibles, et de réunion B . Ainsi

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B).$$

- $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles, et $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$. Par définition,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

- Si $A \subset B$, on peut écrire $B = A \cup (B \cap \bar{A})$. Les événements A et $B \cap \bar{A}$ étant incompatibles, par définition

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap \bar{A})) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) \geq \mathbb{P}(A)$$

- On constate que $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$. Puisque A et $B \cap \bar{A}$ sont incompatibles, par définition

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap \bar{A})) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) \stackrel{\text{d'après pt 2}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Propriété 10.2. Crible de Poincaré

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles ($k \geq 1$), on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$$

Et si A, B et C sont trois événements quelconques, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Démonstration

Ce résultat se démontre par récurrence sur n .

Concernant le cas plus général, le cas $n = 2$ est vu dans la propriété précédente (point 6). Pour le cas $n = 3$, prenons 3 événements A, B et C . On peut écrire $A \cup B \cup C = ((A \cup B) \setminus C) \cup C$ et par incompatibilité :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}((A \cup B) \setminus C) + \mathbb{P}(C)$$

D'après les propriétés (point 3) :

$$\mathbb{P}((A \cup B) \setminus C) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C).$$

En utilisant les distributivités et le cas $n = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) + \mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) - (\mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C))) + \mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(C) \end{aligned}$$

Remarque

Il existe un crible de Poincaré plus général : pour tous événements $(A_1, \dots, A_n)$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

5. Loi équiprobable

Définition 10.6.

Dans le cas où toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'elles sont **équiprobables**, ou que la loi de probabilité $\mathbb{P}$ est **uniforme**.

Si $\Omega = \{x_1; \dots; x_n\}$, alors la probabilité de chaque issue est

$$p = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$$

Théorème 10.3.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini en situation d'équiprobabilité. Alors la probabilité d'un événement A est donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exercice 10.4

On lance un dé à 12 faces bien équilibré. On note A l'événement "obtenir un multiple de 3" et B l'événement "obtenir un multiple de 4". Déterminer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Solution

Puisque le dé est bien équilibré, la loi de probabilité est uniforme. Ainsi, $\Omega = \llbracket 1; 12 \rrbracket$ et $\text{card}(\Omega) = 12$.

Puisque $A = \{3; 6; 9; 12\}$ et $B = \{4; 8; 12\}$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

 Exercice 1.

6. Aléatoire en PYTHON

Nous verrons dans différents chapitres comment générer des nombres aléatoires suivant certaines lois. Une instruction cependant qu'on utilise très régulièrement est celle qui permet de générer un nombre aléatoire (ou plutôt, *pseudo-aléatoire*) entre 0 et 1 :

</> Code Python

```
import numpy as np

np.random.rand() # Génère un nombre entre 0 et 1.
```

Cela peut servir pour créer des fonctions qui, suivant certains cas, renvoie un nombre. Prenons un exemple : soit une pièce possédant deux faces, la première notée 1 et la deuxième notée 2. La pièce est truquée, et la face numérotée 1 apparaît avec probabilité $\frac{1}{3}$.

On peut générer une fonction qui simule un tel lancer :

</> Code Python

```
import numpy as np

def maPiece():
    nb = np.random.rand() # Génère un nombre entre 0 et 1
    if nb < 1/3:           # Si le nombre est entre 0 et 1/3
        return 1          # La pièce donne 1
    else:                 # Sinon
        return 2          # La pièce donne 2
```

Exemple 10.5

Écrire une fonction PYTHON qui simule le lancer d'un dé à 4 faces, tel que la face 1 apparaît avec probabilité $\frac{1}{4}$, la face 2 avec probabilité $\frac{1}{2}$, et les faces 3 et 4 avec probabilité $\frac{1}{8}$.

Solution

On fait différents `if` afin de faire tous les cas :

</> Code Python

```
import numpy as np

def monDé():
    nb = np.random.rand()
    if nb < 1/4:
        return 1
    elif 1/4 <= nb < 3/4:
        return 2
    elif 3/4 <= nb < 7/8:
        return 3
    else:
        return 4
```

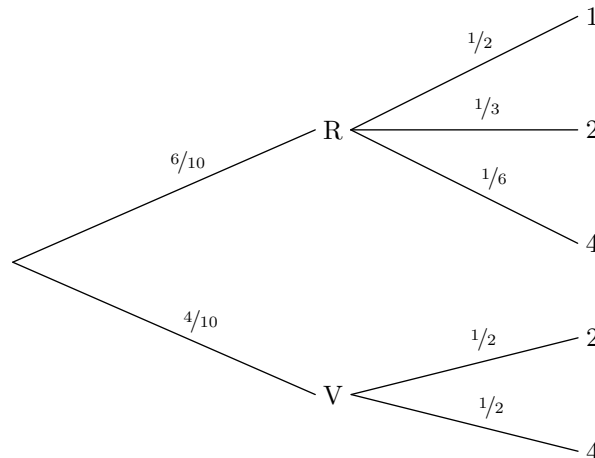
II. Probabilités conditionnelles

1. Exemple

Dans un sac, on possède 10 jetons : 6 jetons rouges, numérotés 1, 1, 1, 2, 2, 4 et quatre jetons verts, numérotés 2, 2, 4, 4. On tire au hasard un jeton du sac.

On note R l'événement « obtenir un jeton rouge », V l'événement « obtenir un jeton vert », 1 l'événement « obtenir un jeton 1 », ...

Cette expérience peut être représentée par un **arbre pondéré** :



De cet arbre, on peut lire ainsi que $\mathbb{P}(R) = \frac{6}{10}$, $\mathbb{P}(V) = \frac{4}{10}$.

La branche $-R-2$ indique que l'on a obtenu un jeton rouge **et** numéroté 2.

Propriété 10.4.

- Loi des noeuds : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Ainsi, la probabilité de $R \cap 2$ est égale à

$$\mathbb{P}(R \cap 2) = \frac{6}{10} \times \frac{1}{3} = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(2)$$

2. Probabilités conditionnelles

Définition 10.7.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit A un événement de probabilité non nulle. Alors, l'application $\mathbb{P}_A$ définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ appelée **probabilité sachant A** .

Démonstration

Il faut démontrer que $\mathbb{P}_A$ est une probabilité

- Tout d'abord, pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}_A(B) \geq 0$ par définition, et puisque $A \cap B \subset A$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$ et finalement $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leq \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.
- $\mathbb{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.
- Soient B et C deux événements incompatibles. Par distributivité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A(B \cup C) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C))}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} \end{aligned}$$

puisque $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C = \emptyset$. Ainsi, $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C)$.

Remarque

$\mathbb{P}_A(B)$ est également notée $\mathbb{P}(B|A)$. Puisque $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, toutes les propriétés des probabilités s'appliquent à $\mathbb{P}_A$.

Exemple 10.6

Dans l'exemple précédent, $\mathbb{P}_V(2) = \frac{1}{2}$.

Remarque

Dans la suite du cours, et plus généralement tout au long de l'année, on essaiera de se passer des arbres. D'une part, parce qu'il est plus important de comprendre les formules sous-jacentes ; et d'autre part parce que, souvent, les expériences aléatoires que l'on fera ne se modéliseront pas facilement avec un arbre.

3. Formule des probabilités composées

Théorème 10.5. Probabilités composées

On utilise souvent les probabilités conditionnelles pour déterminer la probabilité de l'intersection : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$.

On peut d'ailleurs généraliser cette formule : pour tous événements $A_1, \dots, A_n$, tels que

...

$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration

Tout d'abord, on constate que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $A_1 \cap \dots \cap A_n \subset A_1 \cap \dots \cap A_k$, donc

$$0 < \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leq \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k)$$

et les probabilités conditionnelles intervenant dans la formule sont bien définies.

On démontre celle-ci par récurrence sur $n \geq 2$.

- Pour $n = 2$, on a bien $\mathbb{P}_{A_1}(A_2) \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ par définition de la probabilité conditionnelle.
- Soit $n \geq 2$. On suppose que la formule est vraie au rang n . On se donne $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ dans $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) \neq 0$. Par définition des probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1})$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence à $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$ et on obtient

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1})$$

la formule est alors vraie au rang $n + 1$.

Exemple 10.7

Toujours dans l'exemple précédent, $\mathbb{P}(R \cap 4) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(4) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$.

Remarque

Cette formule est très importante. C'est celle qu'on utilisera souvent pour déterminer la probabilité d'une intersection.

Exercice 10.8

On dispose d'une urne qui contient 10 boules, dont 6 rouges et 4 bleues. On tire successivement 3 boules avec les règles suivantes :

- Si on tire une boule rouge, on la retire.
- Si on tire une boule bleue, on la remplace par une boule rouge.

Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue, une boule rouge puis une boule bleue dans cet ordre ?

Solution

Pour tout $n \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on note B_n l'événement « obtenir une boule bleue au n -ième tirage ». La probabilité que l'on souhaite calculer est $\mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3)$. On applique la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(\overline{B_2}) \mathbb{P}_{B_1 \cap \overline{B_2}}(B_3).$$

On utilise les règles de l'énoncé : $\mathbb{P}(B_1) = \frac{4}{10}$. Puis $\mathbb{P}_{B_1}(\overline{B_2}) = \frac{7}{10}$: en effet, on a obtenu une bleue au premier tirage, on a donc remplacée celle-ci par une boule rouge et il y a donc 7 rouges et 3 bleues avant le tirage. Enfin, et de même, $\mathbb{P}_{B_1 \cap \overline{B_2}}(B_3) = \frac{3}{9}$: en effet, on a obtenu une bleue puis une rouge, on a donc enlevé la rouge suite au deuxième tirage, et il y a donc 3 bleues et 9 boules au total.

Finalement, $\mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{14}{150}$.

4. Formule de Bayes

Théorème 10.6. Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}_B(A) \text{ et } \mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}_B(A)}$$

Démonstration

En effet,

$$\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(B)$$

Exemple 10.9

Dans l'exemple du début, la probabilité, sachant qu'on a eu un jeton 2, que celui-ci soit vert, vaut

$$\mathbb{P}_2(V) = \frac{\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(2)} \mathbb{P}_V(2) = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{4}{4}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

III. Probabilités totales

1. Système complet d'événements

Définition 10.8.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements. On dit que cette famille est un **système complet d'événements** si

- les événements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles ($\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$).
- $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$.

Exemple 10.10

On lance un dé à 6 faces, et on note A : "obtenir un nombre pair", et B : "obtenir un nombre impair". Alors $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \emptyset$. Donc (A, B) forme un système complet d'événements.

Remarque

Si A est un événement de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, alors $(A, \overline{A})$ est un système complet de deux événements.

De même, si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, alors la famille $(\{\omega_i\})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements.

2. Formules des probabilités totales

Théorème 10.7.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω , tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Alors, pour tout événement B , on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Démonstration

On peut écrire

$$B = B \cap \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n B \cap A_k$$

Or les événements $B \cap A_k$ sont des événements deux à deux incompatibles, puisque les A_k le sont. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n B \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

Propriété 10.8.

Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E .

Exemple 10.11

Dans l'exemple de début, (R, V) est un système complet d'événements. La probabilité de l'événement 2 vaut donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2) &= \mathbb{P}(R \cap 2) + \mathbb{P}(V \cap 2) \\ &= \mathbb{P}_R(2) \times \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}_V(2) \times \mathbb{P}(V) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

 Exercices 6 et 7.

Conséquence 10.9.

Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = 1$$

Démonstration

Il suffit de prendre $B = \Omega$ dans la relation précédente.

Conséquence 10.10. Cas des événements élémentaires

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ avec $n = \text{card}(\Omega)$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(A)$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \cap \{\omega_k\}) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

En particulier, $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$.

3. Construction de probabilités

Théorème 10.11.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ avec $n = \text{card}(\Omega)$. Soient $p_1, \dots, p_n$ des réels positifs tels que $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Alors il existe une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k$.

Démonstration

On définit $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ de la manière suivante :

$$\mathbb{P} : A \mapsto \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \omega_k \in A}} p_k.$$

Il s'agit bien d'une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$, les réels étant positifs.

On a, par définition de $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{1 \leq k \leq n} p_k = 1$ par hypothèse sur les (p_k) . Soient alors A et B deux événements disjoints. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \omega_k \in A \cup B}} p_k \\ &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \omega_k \in A}} p_k + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \omega_k \in B}} p_k \text{ sommation par paquet car ils sont disjoints} \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

L'unicité est garantie par la conséquence précédente, qui nous garantit l'unicité de l'écriture $\mathbb{P}(A)$ pour tout A en fonction des $\{\omega_k\}$ et donc des (p_k) .

4. Formule de Bayes et probabilités totales

Si A et B sont deux événements, tels que $\mathbb{P}(A) \in]0, 1[$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, la formule de Bayes peut s'écrire également

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)\mathbb{P}(\bar{A})}$$

De manière plus général, si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements tel que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$, alors pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k)}$$

Exemple 10.12 (Fiabilité d'un test)

On réalise un test sanguin pour détecter une maladie dont la probabilité d'occurrence est de 0,5%. Si le patient est malade, le test détecte la maladie dans 95% des cas. De plus, ce test déclare malade (à tort) 1% des personnes saines.

Quelle est la probabilité qu'un patient soit malade sachant que le test est positif ?

Remarque

Lorsqu'on dispose d'un test, on s'intéresse à deux éléments importants : la sensibilité, et la

spécificité.

- La sensibilité d'un test est la probabilité que le test soit positif sachant que le patient est malade. Plus la sensibilité est proche de 1, plus on a la garantie que le test détecte les patients malades ; ici, la sensibilité est de 0,95.
- La spécificité d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que le patient est sain. Plus il est proche de 1, plus on est sûr de ne pas détecter de faux positif. Ici, la spécificité vaut 0,99.

Solution

On introduit deux ensemble : T l'événement « le test est positif » et M l'événement « le patient est malade ».

On nous donne, dans l'énoncé, les valeurs suivante :

$$\mathbb{P}(M) = 0,005, \quad \mathbb{P}_M(T) = 0,95 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 0,01$$

On cherche $\mathbb{P}_T(M)$. On applique la formule de Bayes et la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_T(M) &= \frac{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)\mathbb{P}(\overline{M})} \\ &= \frac{0,95 \times 0,005}{0,95 \times 0,005 + 0,01 \times (1 - 0,005)} \approx 0,323 \end{aligned}$$

Ainsi, ce test n'est pas très fiable.

IV. Indépendance de deux évènements

1. Indépendance de deux événements

Définition 10.9.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exemple 10.13

Dans l'exemple du II., les événements V et R sont indépendants.

Propriété 10.12.

Si A et B sont des événements de probabilité non nulle, il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- A et B sont indépendants.
- $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$

Théorème 10.13.

Soient deux évènements indépendants A et B . Alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.

Démonstration

Puisque A et B sont indépendants, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Or, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

On a donc $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B)$.

2. Indépendance d'une famille d'événements**Définition 10.10.**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements.

- On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont **deux à deux indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

- On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si

$$\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

En particulier, $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n)$.

Proposition 10.14.

Soient A, B et C trois événements mutuellement indépendants. Alors

- A et $B \cap C$ sont indépendants ;
- A et $B \cup C$ sont indépendants.

Démonstration

- $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C)$ en utilisant la mutuelle indépendance. Ainsi, A et $B \cap C$ sont indépendants.
- En utilisant la distributivité et la mutuelle indépendance :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) &= \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C)) \text{ par la formule du crible} \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}(A) (\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)) \\ &= \mathbb{P}(A) (\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C) \end{aligned}$$

Théorème 10.15. Théorème des coalitions

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$. Soit $B_1, \dots, B_n$ des événements tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i = A_i$ ou $\bar{A}_i$. Alors les événements $B_1, \dots, B_n$ sont encore mutuellement indépendants.

 Exercices 12 et 13.

Exercices

10

Exercices

Probabilités générales

●○○ Exercice 1 Des événements (10 min.)

On considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A, B, C et D des événements. En utilisant les opérations ensemblistes, décrire les événements suivants :

- « L'un des événements A, B, C, D au moins est réalisé ».
- « Tous les événements A, B, C et D sont réalisés ».
- « Aucun des événements A, B, C, D n'est réalisé ».
- « B et C ne sont pas réalisés ».
- « L'un des événements B et D et un seul est réalisé ».
- « Si A est réalisé, alors B et D sont réalisés ou C n'est pas réalisé ».
- « Exactement deux événements parmi A, B, C, D sont réalisés ».

●○○ Exercice 2 Probabilités générales (10 min.)

Jean et Jeanne sont deux fous de mathématiques, qui possèdent un dé à 10 faces, numérotées de 0 à 9, légèrement truqué. Le dé suit ainsi la loi de probabilité suivante :

issue	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$

- Décrire un espace probabilisé qui modélise l'expérience.
- Calculer la probabilité des événements suivants :
 - A : "le dé tombe sur un chiffre impair".
 - B : "le dé tombe sur le chiffre 1, 4, 7, ou 9".
 - C : "le dé tombe sur un chiffre inférieur ou égal à 4".
- Déterminer la probabilité des événements $A \cup B$, $B \cap C$ et $A \cap C$.

●○○ Exercice 3 Une probabilité (5 min.)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathbb{P}$ la fonction définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(\{k\}) = \alpha k \binom{n}{k}.$$

À quelle condition sur α la fonction $\mathbb{P}$ définit-elle une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$?

●●○ Exercice 4 Problème du chevalier de Méré (10 min.)

En 1654, le chevalier de Méré posa le problème suivant au mathématicien Blaise Pascal : « Qu'est ce qui est le plus probable : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés ? ».

Étudier ce problème et répondre au chevalier.

●○○ Exercice 5 Une majoration (10 min.)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A_1, \dots, A_n$ des événements. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k).$$

Probabilités conditionnelles et exercices bilans

●○○ Exercice 6 Probabilités et suites I (15 min.)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n -ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n .

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
4. Déterminer l'expression de p_n puis déterminer la limite de la suite (p_n) .

●○○ Exercice 7 Probabilités et suites II (15 min.)

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsque le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n -ième sondage est positif » est noté V_n , on note p_n la probabilité de l'évènement V_n .

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
 - a) A : « les 2^e et 3^e sondages sont positifs » ;
 - b) B : « les 2^e et 3^e sondages sont négatifs ».
2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^e sondage soit positif.
3. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
4. Déterminer l'expression de p_n et en déduire la limite de la suite (p_n) .

●●○ Exercice 8 Des pièces (10 min.)

On dispose de 12 pièces numérotées de 1 à 12 et on suppose que, pour tout $k \in \llbracket 1, 12 \rrbracket$, la k -ième pièce tombe sur Face avec probabilité $\frac{k}{12}$. On lance une pièce choisie au hasard et on obtient Pile. Quelle est la probabilité d'avoir lancé la sixième pièce ?

●○○ Exercice 9 Des boules (15 min.)

On dispose de deux urnes U et V . L'urne U contient 3 boules rouges, 7 boules bleues et 2 boules jaunes. L'urne V contient 2 boules rouges, 5 boules bleues et 1 boule jaune. On considère

l'expérience suivante : on tire au hasard une boule de l'urne U et, sans la regarder, on la place dans l'urne V . On tire alors une boule dans V et on regarde sa couleur.

1. a) Calculer les probabilités respectives de piocher une boule rouge, bleue et jaune.
b) On a tiré une boule bleue dans l'urne V . Quelle est la probabilité d'avoir pioché aussi une boule bleue dans l'urne U ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On réalise n fois cette expérience dans les mêmes conditions et indépendamment. Quelle est la probabilité que l'on ait tiré une boule rouge dans l'urne V pour la première fois au n -ième tirage?

●●○ **Exercice 10 La télé, c'est sacré** (15 min.)

Les téléviseurs d'un magasin proviennent de deux fournisseurs A et B . 95% des téléviseurs fournis par A sont en état de fonctionnement, contre 99% des téléviseurs de la société B .

De plus, un téléviseur sur 48 est abîmé lors de la livraison au client. Enfin, la société A fournit 3 fois plus de téléviseurs que la société B .

Monsieur C. vient de se faire livrer un téléviseur défectueux. Quelle est la probabilité que le téléviseur ait été abîmé lors de la livraison? Quelle est la probabilité que le téléviseur ait été fourni déjà défectueux par la société A ?

●●○ **Exercice 11 Un sac de billes** (15 min.)

On dispose d'un sac de billes dont 9 rouges, 5 vertes et 7 bleues. On pioche cinq billes au hasard successivement et sans remise. Calculer la probabilité de piocher :

1. uniquement des billes d'une même couleur.
2. uniquement des billes bleues sachant que toutes les billes sont de la même couleur.
3. trois boules d'une couleur et deux d'une autre couleur.
4. au moins une bille de chaque couleur.
5. trois billes rouges sachant que les trois couleurs sont piochées.

Reprendre l'exercice avec des tirages avec remise.

Indépendance

●○○ **Exercice 12 Indépendance I** (5 min.)

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches. Une urne U_2 contient cinq boules noires, et cinq boules blanches. On choisit une urne au hasard (et de façon équiprobable), et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie. On note :

- B_1 l'évènement "obtenir une boule blanche au premier tirage"
- B_2 l'évènement "obtenir une boule blanche au deuxième tirage"

Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants?

●○○ **Exercice 13 Indépendance II** (10 min.)

Lorsqu'on choisit une moto aléatoirement dans une fabrique, elle peut présenter deux défauts : le pot d'échappement est mal fixé, ou le guidon n'est pas aligné.

On note A l'évènement : "le pot d'échappement est mal fixé" et B l'évènement : "le guidon n'est pas aligné". On suppose que $\mathbb{P}(A) = 0,1$ et $\mathbb{P}(B) = 0,2$, et que les évènements A et B sont indépendants.

Déterminer la probabilité que la moto ne présente aucun défaut (on dira qu'elle est fonctionnelle).

●●○ **Exercice 14 Incompatibilité et indépendance** (10 min.)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. Que dire sur deux événements A et B qui sont à la fois incompatibles et indépendants?

2. Montrer que, si A est un événement presque sûr (c'est-à-dire $\mathbb{P}(A) = 1$), ou négligeable (c'est-à-dire $\mathbb{P}(A) = 0$), alors A est indépendant de toute événement dans $\mathcal{P}(\Omega)$.
En particulier, un événement presque sûr ou négligeable est indépendant de lui-même.

●●○ **Exercice 15 Des paires de pile ou des piles pairs ?** (20 min.)

On lance indéfiniment une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$.

On note a_n la probabilité que le nombre de piles obtenus lors des n premiers lancers soit pair.

1. Calculer a_2 et a_3 .
2. Calculer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour aller plus loin

●●● **Exercice 16 Formule du crible** (30 min.)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. La formule du crible est une généralisation de la formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$: si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$$

1. Écrire cette formule pour $n = 4$.
2. En déduire une formule analogue pour $\text{card}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$ où $F_1, \dots, F_n$ sont des parties d'un ensemble fini E .
3. Soit n un entier tel que $n \geq 2$. À l'approche des fêtes de fin d'années, les élèves de la classe, composée de n élèves, ont décidé de s'offrir des cadeaux selon le protocole suivant : un sac contient les noms de tous les élèves (un morceau de papier par nom). Chacun leur tour, les élèves tirent un nom au hasard parmi les noms restants au moment du tirage. Chaque élève devra alors offrir un cadeau à l'élève dont il a tiré le nom. On cherche à calculer la probabilité qu'un élève ne tire son propre nom.
 - a) Déterminer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire. Que vaut $\text{card}(\Omega)$?
 - b) Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_j l'événement « le j -ième élève tire son nom ». Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et J une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal k . Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

- c) En déduire que la probabilité qu'aucun élève de la classe ne tire son nom est $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

On verra au second semestre que cette probabilité tend vers $\frac{1}{e}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Montrer la formule du crible par récurrence.

●●○ **Exercice 17 Problème de Monty Hall** (10 min.)

Il s'agit d'un casse-tête probabiliste, librement inspiré du jeu télévisé américain *Let's Make a Deal*, présenté pendant treize ans par Monty Hall.

Un candidat est placé devant trois portes. Derrière une des portes se trouve une voiture, derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le candidat choisit une des trois portes sans l'ouvrir. L'animateur (qui sait où se trouve le véhicule) ouvre alors l'une des portes restantes, derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat a alors le choix entre conserver la porte initiale ou changer pour prendre la porte fermée restante. Quel choix doit-il faire ?

●●○ Exercice 18 Paradoxe des anniversaires (10 min.)

On considère une classe de 25 élèves. On suppose qu'aucun élève n'est né un 29 février et que, pour chaque élève, tous les autres jours de l'année ont la même probabilité d'être le jour de son anniversaire. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour ?

Donner le résultat dans le cas général où il y a n élèves ($n \geq 2$), toujours en supposant qu'il n'y a que 365 jours dans l'année. Pour quelle valeur de n la probabilité dépasse 0,5 ? 0,9 ?

●●○ Exercice 19 Paradoxe des deux enfants (15 min.)

Un couple a deux enfants. On suppose que les enfants ne sont pas nés en même temps, et que le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du deuxième. Enfin, on suppose que chaque enfant est un garçon avec probabilité $\frac{1}{2}$ et une fille avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

1. L'aînée est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ?
2. L'un des enfants est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ?
3. On demande au couple d'indiquer le sexe de l'un des enfants et il répond qu'il a une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ?
4. L'un des enfants est une fille née un jeudi (on suppose qu'il y a équiprobabilité qu'un enfant soit né un jour dans la semaine). Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ?

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

Il suffit de décrire correctement :

1. $A \cup B \cup C \cup D$.
2. $A \cap B \cap C \cap D$.
3. $\overline{A \cup B \cup C \cup D}$.
4. $\overline{B \cup C}$.
5. $(B \cap \overline{D}) \cup (\overline{B} \cap D)$.
6. $A \cap ((B \cap D) \cup \overline{C})$.
7. $(A \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{D}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D}) \dots$

Exercice 2

Cet exercice est sans difficulté majeure.

1. On a par construction $\Omega = \llbracket 0, 9 \rrbracket$, et l'espace probabilisé est $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, avec $\mathbb{P}$ défini de manière unique connaissant sa valeur sur les événements élémentaires grâce au tableau.
2. Puisqu'on a $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $B = \{1; 4; 7; 9\}$ et $C = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{29}{48} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(C) = \frac{7}{16}$$

3. De même, $A \cup B = \{1; 3; 4; 5; 7; 9\}$, $B \cap C = \{1; 4\}$ et $A \cap C = \{1; 3\}$. Donc,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{11}{16} \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{5}{24} \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{3}{16}$$

Exercice 3

Connaissant la valeur de $\mathbb{P}$ sur les événements élémentaires, le cours nous garantit qu'il y a une unique probabilité qui convient, à la condition que la probabilité soit positive (ce qui est le cas ici, puisque $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$) et que la somme des probabilités sur les événements élémentaires soit égale à 1.

Ici,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{k\}) &= \sum_{k=1}^n \alpha k \binom{n}{k} \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \\ &= \alpha n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \text{ en posant } j = k-1 \\ &= \alpha n (1+1)^{n-1} \text{ par la formule du binôme.} \end{aligned}$$

Pour que la somme fasse 1, il faut et il suffit que $\alpha n 2^{n-1} = 1$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{1}{n 2^{n-1}}$.

Exercice 4

Comme souvent lorsqu'on cherche la probabilité d'un événement avec « au moins », on passe à l'événement contraire.

• Premier cas. On a $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^4$ et on note A l'événement « obtenir au moins un 6 en 4 lancers ». Alors, la probabilité de ne pas obtenir un 6 lors d'un lancer vaut $\frac{5}{6}$ et par indépendance des tirages :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

• Deuxième cas. On a $\Omega = (\llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket)^{24}$. On note B l'événement « obtenir au moins un double 6 en 24 lancers ». La probabilité de ne pas obtenir un double 6 est de $\frac{35}{36}$ et par indépendance des tirages

$$\mathbb{P}(\overline{B}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(A) \approx 0,5177$ et $\mathbb{P}(B) \approx 0,4914$. Il est ainsi plus probable d'avoir un 6 en 4 lancers qu'un double 6 en 24 lancers.



RÉFÉRENCE HISTORIQUE



Le chevalier de Méré était sûr que les deux événements avaient la même probabilité, raisonnant avec un argument d'homothétie, mais il s'est bien sûr trompé.

Selon une lettre de Pascal à Fermat (datant du 29 juillet 1654), le chevalier de Méré « avait très bon esprit, mais n'était pas géomètre ».

Exercice 5

On le démontre par récurrence sur n . Pour $n = 1$, il y a égalité.

Pour l'hérédité, on suppose la proposition vraie pour n événements $A_1, \dots, A_n$. On prend $n + 1$ événements $A_1, \dots, A_{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \cup A_{n+1}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \cap A_{n+1}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \text{ car une probabilité est positive} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

Exercice 6

1. $(G_1, \overline{G_1})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_2 = \mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(G_1 \cap G_2) + \mathbb{P}(\overline{G_1} \cap G_2)$$

Donc

$$p_2 = 0,1 \times 0,8 + (1 - 0,1) \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62$$

2. On cherche $\mathbb{P}_{G_2}(\overline{G_1})$. Ainsi

$$\mathbb{P}_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{\mathbb{P}(G_2 \cap \overline{G_1})}{\mathbb{P}(G_2)} = \frac{0,9 \times 0,6}{0,62} = \frac{27}{31}$$

3. Soit n un entier naturel non nul. $(G_n, \overline{G_n})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(G_{n+1}) = \mathbb{P}(G_n \cap G_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$$

soit

$$p_{n+1} = p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 = 0,2p_n + 0,6$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}}$$

4. La suite (p_n) est arithmético-géométrique. On pose la suite v définie pour tout entier n par

$$v_n = p_n - \frac{3}{4}$$

Alors, pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4}$$

donc

$$v_{n+1} = \frac{1}{5} \left(v_n + \frac{3}{4} \right) - \frac{3}{20} = \frac{1}{5}v_n$$

Ainsi, la suite v est géométrique, de premier terme $v_1 = p_1 - \frac{3}{4} = -0,65$ et de raison $\frac{1}{5}$.
Pour tout entier $n \geq 1$, on a donc

$$v_n = -0,65 \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = -0,65 \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} + \frac{3}{4}}$$

Puisque $-1 < \frac{1}{5} < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} = 0$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{4}}$$

Exercice 7

Remarquons tout d'abord que $p_1 = 1$. Donc $\mathbb{P}(V_2) = 0,6$ et $\mathbb{P}(\overline{V_2}) = 1 - \mathbb{P}(V_2) = 0,4$.

1. D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(V_2 \cap V_3) = \mathbb{P}(V_2) \cap \mathbb{P}_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$$

$$\mathbb{P}(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) = \mathbb{P}(\overline{V_2}) \mathbb{P}_{\overline{V_2}}(\overline{V_3}) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$$

2. $(V_2, \overline{V_2})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales

$$p_3 = \mathbb{P}(V_3) = \mathbb{P}(V_2 \cap V_3) + \mathbb{P}(\overline{V_2} \cap V_3)$$

ainsi

$$p_3 = \mathbb{P}(V_2) \mathbb{P}_{V_2}(V_3) + \mathbb{P}(\overline{V_2}) \mathbb{P}_{\overline{V_2}}(V_3) = 0,36 + 0,4 \times 0,1 = 0,40$$

3. Soit $n \geq 1$. $(V_n, \overline{V_n})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(V_{n+1}) = \mathbb{P}(V_n \cap V_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{V_n} \cap V_{n+1})$$

et d'après la formule des probabilités composées

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(V_n)\mathbb{P}_{V_n}(V_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{V_n})\mathbb{P}_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) = p_n \times 0,6 + (1 - p_n) \times 0,1 = 0,5p_n + 0,1$$

4. La suite $(p_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique. Par l'étude classique, en introduisant la suite v définie pour tout $n \geq 1$ par $v_n = p_n - 0,2$, on montre que la suite v est géométrique, de premier terme $v_1 = p_1 - 0,2 = 0,8$ et de raison $0,5$. Ainsi,

$$\forall n \geq 1, v_n = 0,8(0,5)^{n-1} \text{ et } p_n = 0,8(0,5)^{n-1} + 0,2$$

Puisque $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^{n-1} = 0$, et par somme

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,2}$$

Exercice 8

On note, pour $k \in \llbracket 1, 12 \rrbracket$, F_k l'événement « on obtient Face avec la k -ième pièce » et C_k l'événement « on a lancé la pièce k ». Enfin, on note F l'événement « on est tombé sur Face au lancer ».

D'après l'énoncé, le choix des pièces est équiprobable, donc pour $k \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(C_k) = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(F_k) = \frac{k}{12}$$

On souhaite calculer $\mathbb{P}_{\overline{F}}(C_6)$.

Les événements $(C_k)_{k \in \llbracket 1, 12 \rrbracket}$ forme un système complet d'événement. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{F}) &= \sum_{k=1}^{12} \mathbb{P}(\overline{F} \cap C_k) \\ &= \sum_{k=1}^{12} \mathbb{P}(C_k) \mathbb{P}_{C_k}(\overline{F}) \\ &= \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{12} \times \left(1 - \frac{k}{12}\right) \\ &= \frac{1}{12} \left(12 - \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{12} k\right) = 1 - \frac{1}{144} \frac{12 \times 13}{2} = \frac{11}{24} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\overline{F}}(C_6) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{F} \cap C_6)}{\mathbb{P}(\overline{F})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(C_6) \mathbb{P}_{C_6}(\overline{F})}{\mathbb{P}(\overline{F})} \\ &= \frac{\frac{1}{12} \left(1 - \frac{6}{12}\right)}{\frac{11}{24}} = \frac{1}{11} \end{aligned}$$

Exercice 9

On commence par introduire des événements : on note B_1 (respectivement R_1, J_1) l'événement « on tire une boule bleue (resp. rouge, jaune) dans l'urne U », et B (respectivement R, J) l'événement « on tire une boule bleue (resp. rouge, jaune) dans l'urne V ». Par hypothèse et équiprobabilité des boules :

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{7}{12}, \quad \mathbb{P}(R_1) = \frac{3}{12} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(J_1) = \frac{2}{12}.$$

1. a) On constate que (B_1, R_1, J_1) forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap B_1) + \mathbb{P}(B \cap R_1) + \mathbb{P}(B \cap J_1) \\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(B) + \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}_{J_1}(B) \\ &= \frac{7}{12} \times \frac{6}{9} + \frac{3}{12} \times \frac{5}{9} + \frac{2}{12} \times \frac{5}{9} \end{aligned}$$

puisque si on a réalisé B_1 , on a ajouté une boule bleue dans l'urne V , si on a réalisé R_1 c'est une boule rouge qu'on a ajouté, et enfin si on a réalisé J_1 c'est une boule jaune. On a alors

$$\mathbb{P}(B) = \frac{67}{108}.$$

Par le même raisonnement, on obtient

$$\mathbb{P}(R) = \frac{27}{108} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(J) = \frac{14}{108}.$$

b) On souhaite calculer $\mathbb{P}_B(B_1)$. Alors, d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B(B_1) &= \frac{\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}_{B_1}(B) \\ &= \frac{\frac{7}{12}}{\frac{67}{108}} \frac{6}{9} = \frac{42}{67} \end{aligned}$$

2. On note cette fois-ci R^i l'événement « obtenir une boule rouge à la i -ième répétition du jeu ». Les (R^i) forme une famille d'événements mutuellement indépendants puisque on répète l'expérience dans les mêmes conditions et indépendamment. On note E l'événement dont on souhaite déterminer la probabilité. Alors on souhaite calculer $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\overline{R^1} \cap \overline{R^2} \cap \dots \cap \overline{R^{n-1}} \cap R^n)$. Par mutuelle indépendance des tirages, on a

$$\mathbb{P}(\overline{R^1} \cap \overline{R^2} \cap \dots \cap \overline{R^{n-1}} \cap R^n) = \mathbb{P}(\overline{R^1}) \times \mathbb{P}(\overline{R^2}) \times \dots \times \mathbb{P}(\overline{R^{n-1}}) \times \mathbb{P}(R^n)$$

et finalement

$$\mathbb{P}(E) = \left(1 - \frac{27}{108}\right)^{n-1} \times \frac{27}{108}.$$

Exercice 10

On introduit plusieurs événements qui vont nous servir : on note A l'événement « le téléviseur vient de la société A », B l'événement « le téléviseur vient de la société B », C l'événement « le téléviseur est défectueux avant la livraison » et L l'événement « le téléviseur a été abîmé lors de la livraison ». Enfin, on note T l'événement « le téléviseur, une fois livré, est défectueux ».

On nous donne les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}_A(C) = 0,05, \quad \mathbb{P}_B(C) = 0,01 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(L) = \frac{1}{48}.$$

(A, B) forme un système complet d'événements. La formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(C) \\ &= \frac{3}{4} \frac{5}{100} + \frac{1}{4} \frac{1}{100} = \frac{16}{400} = \frac{1}{25}\end{aligned}$$

On souhaite d'abord déterminer la probabilité que le téléviseur ait été abîmé lors de la livraison, sachant qu'il est défectueux après livraison. Ainsi, on souhaite calculer $\mathbb{P}_T(L) = \frac{\mathbb{P}(T \cap L)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(L)}{\mathbb{P}(T)}$. Enfin, $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C \cup L) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(L) - \mathbb{P}(C \cap L) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(L) - \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(L)$ car il y a indépendance de C et L (le fait que le téléviseur soit abîmé pendant la livraison est indépendant de l'état avant la livraison). Ainsi

$$\mathbb{P}(T) = \frac{1}{25} + \frac{1}{48} - \frac{1}{25} \frac{1}{48} = \frac{3}{50}.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}_T(L) = \frac{\frac{1}{48}}{\frac{3}{50}} = \frac{25}{72} \approx 0,347.$$

La deuxième question demande de déterminer $\mathbb{P}_T(A \cap C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(T)}$.

D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(C) = \frac{3}{4} \frac{5}{100} = \frac{3}{80}.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}_T(A \cap C) = \frac{\frac{3}{80}}{\frac{3}{50}} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

Exercice 11

Remarque

Ce corrigé est à reprendre ; il y a différentes coquilles. 04/12/2023 AC.

Dans l'ensemble de l'exercice, on introduit, pour $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, R_i (respectivement V_i , B_i) l'événement « obtenir une boule rouge (resp. verte, bleue) au i -ième tirage ».

1. Notons A l'événement « obtenir uniquement des billes d'une même couleur ». Alors

$$A = \left(\bigcap_{i=1}^5 R_i \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^5 V_i \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^5 B_i \right).$$

Les événements étant incompatibles :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^5 R_i \right) + \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^5 V_i \right) + \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^5 B_i \right)$$

D'après la formule des probabilités composées (et par équiprobabilité des tirages) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^5 R_i \right) &= \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2) \dots \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4}(R_5) \\ &= \frac{9}{21} \times \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{6}{18} \times \frac{5}{17} = \frac{2}{17 \times 19}\end{aligned}$$

De même :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^5 V_i\right) = \frac{5}{21} \times \frac{4}{20} \times \frac{3}{19} \times \frac{2}{18} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{3 \times 17 \times 19 \times 21}$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^5 B_i\right) = \frac{7}{21} \times \frac{6}{20} \times \frac{5}{19} \times \frac{4}{18} \times \frac{3}{17} = \frac{1}{3 \times 17 \times 19}$$

Finalement

$$\boxed{\mathbb{P}(A)} = \frac{2}{17 \times 19} + \frac{1}{3 \times 17 \times 19 \times 21} \times \frac{1}{3 \times 17 \times 19} = \boxed{\frac{148}{20349}}$$

2. En utilisant les résultats de la question 2, notons B l'événement « obtenir uniquement des billes bleues ». On a

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3 \times 17 \times 19}.$$

On souhaite calculer $\mathbb{P}_A(B)$. Alors :

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbb{P}_A(B)} &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \text{ car } B \subset A \\ &= \frac{\frac{1}{3 \times 17 \times 19}}{\frac{148}{3 \times 17 \times 19 \times 21}} \\ &= \boxed{\frac{21}{148}} \end{aligned}$$

3. On applique le même raisonnement que la question 1. On calcule la probabilité des tirages possibles, en constatant par exemple que

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap V_5) = \mathbb{P}(R_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap V_5) \dots$$

On remarque qu'une fois un tirage choisi (par exemple $RRRVV$), il y a $\binom{5}{3}$ possibilités amenant au même tirage (le choix des tirages R).

Notons les tirages AB , où A est la couleur apparaissant 3 fois et B la couleur apparaissant 2 fois. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(RV) &= 10 \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 5 \times 4}{21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{40}{3 \times 17 \times 19} \\ \mathbb{P}(RB) &= 10 \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 7 \times 6}{21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{28}{17 \times 19} \\ \mathbb{P}(VR) &= 10 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 9 \times 8}{21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{40}{7 \times 17 \times 19} \\ \mathbb{P}(BR) &= 10 \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 9 \times 8}{21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{20}{17 \times 19} \\ \mathbb{P}(BV) &= 10 \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 5 \times 4}{21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{50}{9 \times 17 \times 19} \\ \mathbb{P}(VB) &= 10 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 7 \times 6}{21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{10}{3 \times 17 \times 19} \end{aligned}$$

Par incompatibilité des résultats, la probabilité recherchée est

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbb{P}(C)} &= \frac{40}{3 \cdot 17 \cdot 19} + \frac{28}{17 \cdot 19} + \frac{40}{7 \cdot 17 \cdot 19} + \frac{20}{17 \cdot 19} + \frac{50}{9 \cdot 17 \cdot 19} + \frac{10}{3 \cdot 17 \cdot 19} \\ &= \boxed{\frac{4544}{20349}} \end{aligned}$$

4. Le nombre de cas possible est très élevé. Notons D l'événement « au moins une bille de chaque couleur est tirée ». L'événement $\overline{D}$ est composée des événements ayant 1 seule couleur (dont la probabilité a été calculée en 1), ou 2 couleurs. Dans ce cas, deux possibilités : 3 billes d'une couleur et 2 de l'autre (probabilité calculée en 3), ou bien 4 d'une couleur et 1 d'une autre. Déterminons la probabilité de ce dernier événement qu'on note D_1 .

Par le même raisonnement qu'en 3), et en notant AB l'événement « 4 billes de couleur A et 1 de couleur B », alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_1) &= \mathbb{P}(RB) + \mathbb{P}(BR) + \mathbb{P}(RV) + \mathbb{P}(VR) + \mathbb{P}(VB) + \mathbb{P}(BV) \\ &= 5 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7}{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} + 5 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9}{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} + 5 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} + \\ &\quad 5 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 9}{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} + 5 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7}{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} + 5 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5}{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} \\ &= \frac{694}{6783}\end{aligned}$$

et finalement, par incompatibilité des différents tirages :

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{D})} = \frac{148}{20349} + \frac{4544}{20349} + \frac{694}{6783} = \boxed{\frac{2258}{6783}}$$

et donc $\boxed{\mathbb{P}(D)} = \boxed{\frac{4525}{6783}}$

5. On va tout d'abord calculer la probabilité d'obtenir 3 boules rouges R^3 . On doit choisir trois boules rouges, les deux autres sont quelconque autre que rouge. On a trois possibilités :

- Trois rouges, deux bleues, calculée en 3 ;
- Trois rouges, deux vertes, calculée en 3 ;
- Trois rouges, une verte, une bleue, cas que l'on note RVB .

Pour ce dernier cas, on choisit 3 boules rouges, 1 verte, 1 bleue. On a alors $\binom{5}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 20$ manière de les ordonner. Cela donne alors

$$\mathbb{P}(RVB) = \frac{20 \times \binom{9}{3} \times \binom{5}{1} \times \binom{7}{1}}{A_{21}^5} = \frac{70}{2907}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R^3) &= \mathbb{P}(RV) + \mathbb{P}(RB) + \mathbb{P}(RVB) \\ &= \frac{40}{3 \cdot 17 \cdot 19} + \frac{28}{17 \cdot 19} + \frac{70}{2907} = \frac{26}{171}\end{aligned}$$

Finalement, d'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_D(R^3) = \frac{\mathbb{P}(R^3)}{\mathbb{P}(D)} \mathbb{P}_{R^3}(D).$$

Remarquons finalement que, si on a trois boules rouges, la probabilité d'avoir une bille de chaque couleur nécessite de tirer exactement une bille verte et une bleue, dans un ensemble à $9 - 3 = 6$ rouges, 5 vertes et 7 bleues. On choisit donc une verte, une bleue, et on a deux possibilités pour les ordonner, ce qui donne

$$\mathbb{P}_{R^3}(D) = \frac{2 \times \binom{5}{1} \times \binom{7}{1}}{19 \times 18} = \frac{70}{342}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_D(R^3) = \frac{\frac{26}{171}}{\frac{4525}{6783}} \frac{70}{342} = \frac{21658}{464265}.$$

Dans le cas où le tirage est avec remise, le raisonnement est strictement identique, seules les probabilités sont modifiées. À chaque tirage, il y aura 9 rouges, 5 vertes et 7 bleues pour un totale de 21 boules.

Par exemple :

$$\mathbb{P}(A) = \underbrace{\left(\frac{9}{21}\right)^5}_{\text{que des rouges}} + \underbrace{\left(\frac{5}{21}\right)^5}_{\text{que des vertes}} + \underbrace{\left(\frac{7}{21}\right)^5}_{\text{que des bleues}} = \frac{3761}{21^4}$$

Exercice 12

On note A_1 (respectivement A_2) l'événement “choisir l'urne U_1 (resp. U_2)”. (A_1, A_2) forme un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap B_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

De même, par indépendance des tirages :

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(A_2 \cap B_2) = \frac{3}{5}$$

Enfin,

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(A_2 \cap B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{74}{200} = \frac{37}{100}$$

Constatons, pour terminer, que

$$\mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2) = \frac{9}{25} \neq \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$$

Ainsi, les événements ne sont pas indépendants.

Exercice 13

Notons F l'événement “la moto est fonctionnelle”. On constate que

$$\overline{F} = A \cup B$$

Or

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Puisque A et B sont indépendants, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. Donc

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,1 \times 0,2 = 0,28$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(F) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,72}$$

Exercice 14

1. Supposons A et B incompatibles et indépendants. Puisqu'ils sont indépendants, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Et puisqu'ils sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Cela donne donc

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0$$

et donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$, c'est-à-dire que A ou B est négligeable. Réciproquement, si l'un des deux sont négligeables, alors le produit $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ est nul, et $A \cap B \subset A$ donc si A est négligeable, $A \cap B$ aussi ; cela garantit l'indépendance et l'incompatibilité.

2. Soient A un événement négligeable et B un événement. Alors $\mathbb{P}(A) = 0$. Mais alors $A \cap B \subset A$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0$, soit

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Ainsi A et B sont indépendants, et par le lemme des coalitions, $\overline{A}$ et B aussi, c'est-à-dire que si A est presque sûr, A et B sont indépendants.

Exercice 15

Pour se simplifier les justifications, notons

- pour tout n , E_n l'événement « obtenir un nombre pair de piles en n lancers » ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_i^n l'événement « obtenir i piles sur n lancers » ;
- pour tout entier $i \geq 1$, P_i l'événement « obtenir pile au i sup*ime* lancer ».

1. Par définition, $a_2 = \mathbb{P}(E_2)$. Sur 2 lancers, pour obtenir un nombre pair de piles, il en faut 0 ou 2. Ainsi, et par incompatibilité des (A_i) :

$$\begin{aligned} a_2 &= \mathbb{P}(A_0^2 \cup A_2^2) \\ &= \mathbb{P}(A_0^2) + \mathbb{P}(A_2^2). \end{aligned}$$

Par définition des événements A_i :

$$a_2 = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2}) + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2).$$

Par indépendance des tirages

$$a_2 = \mathbb{P}(\overline{P_1}) \mathbb{P}(\overline{P_2}) + \mathbb{P}(P_1) \mathbb{P}(P_2) = (1-p)^2 + p^2.$$

Par le même raisonnement :

$$\begin{aligned} a_3 &= \mathbb{P}(A_0^3 \cup A_2^3) \\ &= \mathbb{P}(A_0^3) + \mathbb{P}(A_2^3) \end{aligned}$$

Pour A_0^3 , pour n'avoir aucun pile et toujours par indépendance des tirages :

$$\mathbb{P}(A_0^3) = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}) = (1-p)^3.$$

Pour A_2^3 : pour avoir 2 piles sur 3 lancers, il faut choisir 2 fois sur 3 où on obtient pile, dans l'autre cas on a forcément face. Ainsi

$$\mathbb{P}(A_2^3) = \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{place des piles}} \times \underbrace{p^2}_{\text{proba des piles}} \times \underbrace{(1-p)}_{\text{proba du face}}$$

Finalement

$$a_3 = 3p^2(1-p) + (1-p)^3.$$

2. On procède par le même raisonnement que pour a_3 . Tout d'abord, si $n = 0$, $a_0 = 1$. En effet, sur 0 lancer, on a forcément 0 pile, soit un nombre pair. Pour $n = 1$, on a

$$a_1 = \mathbb{P}(\overline{P_1}) = 1-p.$$

Soit $n \geq 2$. Constatons que pour avoir un nombre pair $2k$ de pile, il faut et il suffit que $k \leq \frac{n}{2}$. Puisque k est un entier, c'est équivalent à $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ainsi :

$$\begin{aligned} a_n &= \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{2k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathbb{P}(A_{2k}) \text{ par incompatibilité.} \end{aligned}$$

Par le même raisonnement que pour a_3 ,

$$\mathbb{P}(A_{2k}) = \underbrace{\binom{n}{2k}}_{\text{place des piles}} \times \underbrace{p^{2k}}_{\text{proba des piles}} \times \underbrace{(1-p)^{n-2k}}_{\text{proba des faces}}.$$

Finalement

$$\forall n \geq 2, \quad a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} p^{2k} (1-p)^{n-2k}.$$

Remarquons que le résultat est valable pour $n = 0$ (on obtient bien 1) et $n = 1$ (on obtient bien $\binom{0}{1} p^0 (1-p)^1 = 1-p$).

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 16

1. Pour $n = 4$, la formule donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

2. La formule est strictement identique, en remplaçant $\mathbb{P}$ par card :

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(J)=k}} \text{card} \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right)$$

3. a) On peut supposer que chaque élève a un numéro, de 1 à n . Chaque tirage correspond à associer à un élève un autre élève. On peut donc modéliser cette expérience par

$$\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^2$$

un tirage étant un couple (i, j) où l'élève i a tiré le nom de l'élève j . On a alors

$$\text{card}(\Omega) = n^2.$$

b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et J une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal k . L'événement $\bigcap_{j \in J} A_j$ correspond à l'événement « pour tout $j \in J$, l'élève j a tiré son nom ».

On se donne $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal k . On écrit $J = \{j_1, \dots, j_k\}$. La formule des probabilités composées nous donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) &= \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^j A_{j_i} \right) \\ &= \mathbb{P}(A_{j_1}) \mathbb{P}_{A_{j_1}}(A_{j_2}) \dots \mathbb{P}_{A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_{k-1}}}(A_{j_k}) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \dots \times \frac{1}{n-(k-1)} \end{aligned}$$

en remarquant que la probabilité de tirer son propre nom, si celui-ci n'est pas encore sorti, s'il y a m élèves restants est de $\frac{1}{m}$.

On peut alors écrire

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{(n-k) \times \dots \times 1}{n \times \dots \times (n-k+1) \times (n-k) \times \dots \times 1} = \frac{(n-k)!}{n!}$$

et on remarquera que ce résultat ne dépend pas de J mais uniquement de son cardinal k .

c) On va s'intéresser à son événement contraire. Notons A l'événement « aucun élève de la classe ne tire son nom ». $\overline{A}$ est donc l'événement « au moins un élève de la classe a tiré son nom », c'est-à-dire

$$\overline{A} = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

On applique la formule du crible et on utilise le point 3b. On remarquera qu'il y a $\binom{n}{k}$ parties de cardinal k de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{A}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(J)=k}} \frac{(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{n!} \times \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\cancel{n}!}{\cancel{n}!} \times \frac{\cancel{n}!}{k!(\cancel{n-k})!} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbb{P}(A)} &= 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+2} \frac{1}{k!} \\ &= (-1)^0 \frac{1}{0!} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \text{ car } (-1)^{k+2} = (-1)^k \text{ et } 0! = 1 \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}} \end{aligned}$$

4. On note P la proposition définie pour tout n par P_n : « pour tous événements $A_1, \dots, A_n$, on a

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$ ». Le point principal est l'hérédité, qui repose sur

la formule au rang 2 :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cup A_{n+1}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})\right)\end{aligned}$$

On applique l'hypothèse de récurrence deux fois :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j \cap A_{n+1}\right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+2} \sum_{\substack{n+1 \in J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(J)=k+1}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{n+1 \in J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)\end{aligned}$$

Remarquons que les deux sommes sur J parcourent tous les sous-ensembles de cardinal k de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, la première pour les sous-ensembles ne contenant pas $n+1$, la deuxième le contenant. La deuxième somme commence à $k=2$, mais pour $k=1$, cela donnerait $\mathbb{P}(A_{n+1})$ qui, justement, est présent. On peut finalement écrire :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n+1 \rrbracket \\ \text{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$$

Exercice 17

En première lecture, on a envie de dire que la probabilité d'une porte, après que le présentateur ait ouvert une porte perdante, est de $\frac{1}{2}$ et donc, on n'a pas de raison de changer. C'est mal raisonner.

On va partir du choix initial. On note C_1 l'événement « le candidat a choisi la porte avec la première chèvre », C_2 l'événement « le candidat a choisi la porte avec la deuxième chèvre » et V l'événement « le candidat a choisi la porte avec la voiture ».

Au début, nous avons équiprobabilité du choix des portes, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(V) = \frac{1}{3}$$

et on constate, de plus, que (C_1, C_2, V) forme un système complet d'événements.

On va noter désormais G_1 l'événement « le candidat gagne sans changer de porte » et G_2 l'événement « le candidat gagne en changeant de porte ». On a alors :

$$\mathbb{P}_{C_1}(G_1) = 0, \quad \mathbb{P}_{C_2}(G_1) = 0, \quad \mathbb{P}_V(G_1) = 1$$

puisque s'il ne change pas de porte, il gagne si et seulement s'il avait choisi la bonne porte ; de même

$$\mathbb{P}_{C_1}(G_2) = 1, \quad \mathbb{P}_{C_2}(G_2) = 1, \quad \mathbb{P}_V(G_2) = 0$$

car s'il n'avait pas choisi la voiture, il gagne à coup sûr en changeant de porte. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_1) &= \mathbb{P}(G_1 \cap C_1) + \mathbb{P}(G_1 \cap C_2) + \mathbb{P}(G_1 \cap V) \\ &= \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}_{C_1}(G_1) + \mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}_{C_2}(G_1) + \mathbb{P}(V)\mathbb{P}_V(G_1) \\ &= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(G_2) &= \mathbb{P}(G_2 \cap C_1) + \mathbb{P}(G_2 \cap C_2) + \mathbb{P}(G_2 \cap V) \\ &= \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}_{C_1}(G_2) + \mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}_{C_2}(G_2) + \mathbb{P}(V)\mathbb{P}_V(G_2) \\ &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a deux fois plus de chance de gagner la voiture si on change de porte.



RÉFÉRENCE HISTORIQUE



Ce paradoxe a dérangé plus d'un mathématicien dont la « logique » a été mise en défaut.

Marylyn von Savant, femme d'affaire et écrivaine, ayant l'un des QI les plus élevés au monde, a répondu comme nous l'avons fait, en 1990, au problème posé sous cette forme :

« Supposez que vous êtes sur le plateau d'un jeu télévisé, face à trois portes et que vous devez choisir d'en ouvrir une seule, en sachant que derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière les deux autres des chèvres. Vous choisissez une porte, disons la numéro 1, et le présentateur, qui sait, lui, ce qu'il y a derrière chaque porte, ouvre une autre porte, disons la numéro 3, porte qui une fois ouverte découvre une chèvre. Il vous demande alors : « désirez-vous ouvrir la porte numéro 2 ? ». Avez-vous intérêt à changer votre choix ? »



Voici deux citations de mathématiciens de l'époque :

« En tant mathématicien professionnel, je suis très inquiet du manque de compétences mathématiques du grand public. Je vous prie d'essayer d'y remédier en reconnaissant votre erreur ... » (Robert Sachs, Ph. D., université George Mason) ;

« Vous avez faux, archi-faux ! Je m'explique : une fois que l'animateur a dévoilé une chèvre, vous avez dès lors une chance sur deux d'avoir juste. Que vous modifiez ou non votre réponse, les chances sont les mêmes. Il y a suffisamment d'analphabétisme mathématique dans ce pays ; inutile que le Q.I. le plus élevé en sème davantage. C'est honteux ! » (Scott Smith, Ph. D., université de Floride).

Exercice 18

Pour simplifier, on note de 1 à 365 les jours, et on considère que tous les jours ont la même probabilité d'apparaître. On note A l'événement « au moins deux élèves sont nés le même jour ». On va déterminer $\mathbb{P}(\bar{A})$. $\bar{A}$ est donc l'événement « les élèves sont tous nés des jours différents ». L'univers Ω qui nous intéresse est constitué de l'ensemble des 25 jours de naissances des élèves. On a

$$\text{card}(\Omega) = 365^{25}$$

L'événement $\bar{A}$ est constitué des listes de 25 jours deux à deux distincts. Par définition,

$$\text{card}(\bar{A}) = A_{365}^{25}$$

Donc, par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{A_{365}^{25}}{365^{25}}$$

On trouve $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \approx 0,568699704$.

Dans le cas général, en notant toujours A l'événement « au moins deux élèves sont nés le même

jours », on a

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n}$$

On trouve alors que $\mathbb{P}(A)$ dépasse 0,5 pour $n \geq 23$ et $\mathbb{P}(A)$ dépasse 0,9 pour $n \geq 41$.

Remarque

Ce résultat est appelé *paradoxe des anniversaires*. A partir de 23 élèves, la probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour est supérieure à $\frac{1}{2}$, ce qui est contre l'intuition. A partir de 57 élèves, cette probabilité est supérieure à 0,99.

Exercice 19

Dans l'ensemble de l'exercice, on pose F_1 l'événement « l'aînée est une fille » et F_2 l'événement « la cadette est une fille ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2}$$

et les événements F_1 et F_2 sont indépendants.

1. On demande de calculer $\mathbb{P}_{F_1}(F_2)$. Par définition :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{F_1}(F_2) &= \frac{\mathbb{P}(F_1 \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} \text{ par indépendance de } F_1 \text{ et } F_2 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, comme l'intuition le laisse le présager, il y a une chance sur deux d'avoir une fille si l'aînée est une fille.

2. Cette fois-ci, on sait qu'un des enfants est une fille. On note F l'événement « l'un des enfants est une fille ». Ainsi

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F_1 \cup F_2) = \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F_2) - \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

On note enfin FF l'événement « les deux enfants sont des filles », et on a

$$\mathbb{P}(FF) = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \frac{1}{4}.$$

On peut répondre à la question : on veut calculer $\mathbb{P}_F(FF)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_F(FF) &= \frac{\mathbb{P}(F \cap FF)}{\mathbb{P}(F)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(FF)}{\mathbb{P}(F)} \text{ car } FF \subset F \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, il y a une chance sur 3 pour que le deuxième enfant soit également une fille.

3. En fait, cette question est la même que la première ; au lieu de considérer F_1 l'événement « l'aînée est une fille » on va introduire F_1 l'événement « le premier enfant montré par le couple est une fille ». Le raisonnement est alors le même et on trouve $\frac{1}{2}$.

△ 4. On a envie de dire que la probabilité vaut $\frac{1}{2}$, puisque l'information du jour de naissance est « inutile ». C'est bien sûr faux.

On note F_i^j l'événement « le i -ième enfant de la famille est une fille, né le jour j » (avec par convention $j = 1$ pour lundi et $j = 7$ pour dimanche), et F_i l'événement « le i -ième enfant de la famille est une fille ». Par équiprobabilité des sexes et des jours de la semaine, on a

$$\mathbb{P}(F_i^j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{14}$$

et la famille des $(F_i^j)_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 7}}$ est mutuellement indépendante.

On souhaite ici calculer $\mathbb{P}_{F_1^4 \cup F_2^4}(F_1 \cap F_2)$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_1^4 \cup F_2^4) &= \mathbb{P}(F_1^4) + \mathbb{P}(F_2^4) - \mathbb{P}(F_1^4 F_2^4) \\ &= \mathbb{P}(F_1^4) + \mathbb{P}(F_2^4) - \mathbb{P}(F_1^4) \mathbb{P}(F_2^4) \text{ par indépendance} \\ &= \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{196} = \frac{27}{196} \end{aligned}$$

De plus,

$$(F_1^4 \cup F_2^4) \cap (F_1 \cap F_2) = (F_1^4 \cap F_1 \cap F_2) \cup (F_2^4 \cap F_1 \cap F_2) = (F_1^4 \cap F_2) \cup (F_2^4 \cap F_1)$$

puisque $F_1^4 \subset F_1$ et $F_2^4 \subset F_2$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((F_1^4 \cup F_2^4) \cap (F_1 \cap F_2)) &= \mathbb{P}((F_1^4 \cap F_2) \cup (F_2^4 \cap F_1)) \\ &= \mathbb{P}(F_1^4 \cap F_2) + \mathbb{P}(F_2^4 \cap F_1) - \mathbb{P}((F_1^4 \cap F_2) \cap (F_2^4 \cap F_1)) \\ &= \mathbb{P}(F_1^4) \mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_2^4) \mathbb{P}(F_1) - \mathbb{P}(F_1^4 \cap F_2^4) \text{ par indépendance du choix des sexes} \\ &= \frac{1}{14} \frac{1}{2} + \frac{1}{14} \frac{1}{2} - \frac{1}{196} = \frac{13}{196} \end{aligned}$$

et finalement

$$\mathbb{P}_{F_1^4 \cup F_2^4}(F_1 \cap F_2) = \frac{\frac{13}{196}}{\frac{27}{196}} = \frac{13}{27} \approx 0,481$$

Ainsi, il y a un peu moins d'une chance sur deux que le deuxième enfant soit une fille.