Chapitre 9

Combinatoire

Résumé

On introduit des notions de base sur le dénombrement : cardinal, liste, combinaison et nombres combinatoires.

Plan du cours

> *« Il n'y a donc qu'à débrouiller le revenu de chacun, et le mettre en évidence, afin de voir comment il doit être taxé.*
> *Ce que je dois dire à cet égard suppose un dénombrement exact de toutes les personnes qui habitent le royaume. »*

Sébastien Le Prestre de Vauban (1633 – 1707). *Les Oisivetés de Monsieur de Vauban*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître les formules liées au cardinal d'un ensemble . . . . □

② Connaître la différence entre une permutation, une liste sans répétition et une liste avec répétition . . . . □

③ Savoir dénombrer les différents ensembles précédents . . . . □

④ Connaître la définition d'une combinaison . . . . □

⑤ Savoir l'expression du nombre de combinaison $\binom{n}{p}$ . . . . □

⑥ Connaître les formules liées aux nombres de combinaisons . . . . □

⑦ Connaître la formule du binôme de Newton et savoir la démontrer . . . . □

I. Cardinaux

Définition 9.1.

Un ensemble E est dit **fini** s'il est soit vide, soit composé d'un nombre fini d'éléments distincts $e_1, \dots, e_n$. Dans ce cas, on appelle n son **cardinal** (i.e. son nombre d'éléments), que l'on note $|E|$ ou $\text{card}(E)$.
Par convention, $\text{card}(\varnothing) = 0$.

Remarque

Faire du dénombrement, c'est déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble, sans avoir à connaître la liste des éléments de E.

Propriété 9.1.

Soient E et A deux ensembles, tels que $A \subset E$ et E est un ensemble fini. Alors

- A est également fini ;
- $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(E)$.

Si, de plus, $\text{card}(A) = \text{card}(E)$, alors $A = E$

⚠ **Attention**

Si $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ sans avoir $A \subset E$ on ne peut pas conclure ! Par exemple $A = \{1, 2\}$, $E = \{2, 3\}$. Alors $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ mais $A \neq E$

Théorème 9.2. Formule du Crible de Poincaré

- Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors
$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$
- Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors
$$\begin{aligned}\text{card}(A \cup B \cup C) = {} & \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) \\ & + \text{card}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$
- Soient $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles d'un ensemble fini E deux à deux disjoints. Alors
$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(A_k)$$

Proposition 9.3.

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. On note $A \backslash B$ l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B.
Alors
$$\text{card}(A \backslash B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$$

Démonstration

Remarquons que les ensembles $A \backslash B$ et $A \cap B$ sont disjoints, de réunion A. D'après le théorème précédent
$$\text{card}(A) = \text{card}\left((A \cap B) \cup (A \backslash B)\right) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \backslash B)$$

Proposition 9.4.

Soient E et F deux ensembles finis. Alors

$$\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(F)$$

Démonstration

On note n le cardinal de E et p celui de F. $E \times F$ est constitué des couples $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$. Pour chaque élément x de E, il y a p couples possibles (un couple par élément de F). Puisqu'il y a n éléments dans E, on a donc

$$\underbrace{p + \ldots + p}_{n \text{ fois}} = np \text{ éléments dans } E \times F$$

☞ *Exercices 1 et 2.*

II. Dénombrement

Dans cette partie, nous allons considérer des listes et des ensembles.

Définition 9.2.

On appelle **liste** de p éléments d'un ensemble E une suite ordonnée de p éléments.

Exemple 9.1

Ainsi, les listes $(1; 2; 3)$ et $(1; 3; 2)$ sont deux listes distinctes, et les ensembles $\{1; 2; 3\}$ et $\{1; 3; 2\}$ sont identiques.

1. Permutation

Définition 9.3.

Soit E un ensemble non vide à n éléments. On appelle **permutation** de E une liste (sans répétition) des n éléments de E.

Exemple 9.2

Si $E = \{a; b; c\}$, alors $(a; c; b)$ et $(b; a; c)$ sont deux permutations de E.

Définition 9.4.

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des permutations de l'ensemble E. En particulier, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Théorème 9.5.

Le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments, $n \geqslant 1$, est égal à

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Démonstration

Supposons qu'on dispose de n cases, numérotées de 1 à n. Dans la case numéro 1, on peut mettre un des n éléments de E. Une fois la case 1 remplie, il ne reste que $n-1$ éléments à choisir. On en prend un qu'on met dans la case 2. Il ne reste alors que $n-2$ éléments. Et on réitère.

Exercice 9.3

On dispose de 4 personnes , à disposer sur 4 chaises. Combien y a-t-il de possibilités ?

Solution

On doit placer 4 personnes sur 4 chaises. Il faut donc faire une permutation de ces 4 personnes. Il y a donc

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ possibilités}$$

2. Liste sans répétitions de p éléments de E

Définition 9.5.

Une **liste sans répétitions** (ou **arrangement**) de p éléments de E est une liste de p éléments de E deux à deux distincts ($1 \leqslant p \leqslant n$).

Théorème 9.6.

Soit E un ensemble à n éléments, $n \geqslant 1$ et p un entier $1 \leqslant p \leqslant n$. Le nombre de listes sans répétitions de p éléments de E est égal à

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration

On utilise le même raisonnement avec les cases, sauf qu'au lieu de mettre les n éléments de E, on n'en met que p, en utilisant p cases.

Exercice 9.4

Une association ayant 20 membres souhaite élire leur bureau, composé d'un président, d'un vice-président et d'un trésorier. Combien de bureaux est-il possible de composer ?

Solution

Dans cet exercice, l'ordre est important (on ne choisit pas 3 personnes parmi les 20, on choisit très exactement un président, un vice-président et un trésorier parmi les 20). Quand l'ordre compte, on parle donc d'arrangement.
Ici, on veut donc des listes de 3 éléments d'un ensemble à 20 éléments. Il y en a donc

$$A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840 \text{ bureaux possibles}$$

Exercice 9.5

Toujours dans la même association, il y a 12 hommes et 8 femmes. On impose que le trésorier soit une femme. Combien y a-t-il de bureaux possibles ?

Solution

Le poste de trésorier est une femme. Il faut donc choisir une femme parmi les 8, soit 8

possibilités.
Pour les deux autres postes, comme ce qui précède, on a $A_{19}^2 = 19 \times 18 = 342$ bureaux possibles (sachant que la personne trésorière n'aura pas d'autres postes). Cela donne donc

$$8 \times A_{19}^2 = 2736 \text{ bureaux possibles}$$

3. Liste avec répétitions de p éléments de E

Théorème 9.7.

Soit $p \geqslant 1$. Il y a n^p listes avec répétitions de p éléments de E.

Démonstration

En effet, si on possède p cases, on peut mettre dans chacune des cases l'un des n éléments de E.

Exercice 9.6

Dans une classe de 30 élèves, on décide que chaque jour pendant 3 jours, une personne va nettoyer le tableau, sachant qu'une personne ayant déjà été de corvée peut y retourner. Combien y a-t-il de possibilités ?

Solution

Il faut donc choisir 3 élèves, avec répétition. Il y a donc

$$30^3 = 27000 \text{ possibilités}$$

III. Combinaisons

1. Définition

Définition 9.6.

Soit E un ensemble à n éléments, et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une **combinaison** de p éléments de E est un sous-ensemble (ou une partie) de E qui contient p éléments.

Exemple 9.7

Si $E = \{a; b; c\}$ et $p = 2$, les combinaisons de deux éléments de E sont les parties $\{a; b\}$, $\{a; c\}$ et $\{b; c\}$.

Notation

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$ et on lit « p parmi n ». On note aussi C_n^p

Exemple 9.8

D'après l'exemple précédent, $\binom{3}{2} = 3$.

Remarque

Pour tout entier n, on obtient rapidement :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

☞ *Exercice 3.*

2. Nombre de combinaisons

Théorème 9.8.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

Pour $p > n$, on a $\binom{n}{p} = 0$.

Démonstration

- Pour $p = 0$, il n'existe qu'une seule partie sans élément : la partie vide. Donc
$$\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0!(n-0)!}$$
- Supposons $p > 0$. Prenons une partie F de p éléments de E. On constate qu'il y a $p!$ permutations de F, et une permutation de F est une liste sans répétition de p éléments. Si on fait de même avec toutes les parties de E à p éléments, on va décrire toutes les listes sans répétition de p éléments, et une seule fois (deux parties distinctes de E vont engendrer des listes distinctes nécessairement). On a donc
$$(\text{nb de partie à } p \text{ éléments de } E) \times p! = \text{nb de listes sans répétition de } p \text{ éléments}$$
soit
$$\binom{n}{p} \times p! = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Remarque

On retrouve la définition vue dans le chapitre 3 du nombre combinatoire, ce qui est rassurant.

Exemple 9.9

Le nombre de partie à 4 éléments d'un ensemble à 21 éléments est

$$\binom{21}{4} = \frac{21!}{4!(21-4)!} = 5985$$

Exercice 9.10

Dans une association de 12 hommes et 8 femmes, on crée un comité Hygiène et Sécurité, composé de 3 personnes.

- Combien y a-t-il de comités possibles ?

- Combien y a-t-il de comités sachant qu'une des personnes doit être une femme ?

Solution

- Il nous faut choisir (sans ordre) 3 personnes parmi 20. Il y a donc
$$\binom{20}{3} = 1140 \text{ comités possibles}$$
- On veut au moins une femme.

⚠ Il n'y a pas $\binom{8}{1}\binom{19}{2}$ comités possibles avec au moins une femme, car en comptant ainsi, certains comités sont comptés plusieurs fois !

Notons A l'ensemble des comités ayant au moins une femme, B l'ensemble des comités n'ayant que des hommes, et C l'ensemble de tous les comités possibles. Alors $A \cup B = C$ et $A \cap B = \varnothing$. Or
$$\operatorname{card}(B) = \binom{12}{3} = 220 \text{ comités}$$
$$\operatorname{card}(C) = \binom{20}{3} = 1140 \text{ comités}$$
Donc
$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(C) - \operatorname{card}(B) = 920 \text{ comités}$$

Méthode

Dans un exercice, il faut déterminer en premier lieu si on va devoir utiliser les listes sans répétition, avec répétition ou les combinaisons. On retiendra que :

- si on s'intéresse à un choix ordonné (par exemple, un classement à un jeu, ou bien le choix de différents postes dans une association), on utilisera les *listes*, sans répétition (cas général où une personne ne peut pas être à deux endroits en même temps), ou avec répétition (si au contraire on l'accepte).
- si on s'intéresse à la sélection **simultanée** (donc on ne tient pas compte de l'ordre), on utilisera *les combinaisons*.

☞ *Exercices 4, 5, 6 et 7.*

IV. Formules

1. Formules de base

Théorème 9.9.

Pour tous naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a
$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$
(*Formule du triangle de Pascal*) Pour tous naturels n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$ on a
$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration

- En effet,

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

- On a

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$$

En mettant au dénominateur commun $p!(n-p)!$, on a alors

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!\,[p+(n-p)]}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}\end{aligned}$$

Remarque

La deuxième formule nous permet d'obtenir tous les nombres combinatoires de proche en proche, dans le **Triangle de Pascal** :

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Proposition 9.10.

Pour tout entier n strictement positif, et tout entier k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration

On a, en effet :

$$n\binom{n-1}{k-1} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

soit

$$n\binom{n-1}{k-1} = \frac{k\times n!}{k\times(k-1)!(n-k)!} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k\binom{n}{k}$$

2. Formule de Vandermonde

Une première formule intéressante liant les nombres combinatoires est la formule de Vandermonde, formule que l'on va démontrer de manière purement combinatoire.

Théorème 9.11. Formule de Vandermonde

Soient m et n deux entiers strictement positifs. Pour tout entier k tel que $k \leqslant m$ et $k \leqslant n$, on a

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

Démonstration

On dispose de n jetons blancs, et m jetons noirs, tous indiscernables au toucher. On tire simultanément k jetons et on note E l'ensemble des tirages possibles.
Par définition de E, on a

$$\operatorname{card}(E) = \binom{m+n}{k}$$

Notons alors E_j (pour j entier entre 0 et k) l'ensemble des tirages de k jetons ayant j jetons noirs. Puisqu'il y a j jetons noirs, il y a $k-j$ jetons blancs dans E_j. Ainsi

$$\operatorname{card}(E_j) = \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

Constatons enfin que, par définition, $E = \bigcup_{j=0}^{k} E_j$ et les E_j sont deux-à-deux disjoints. Ainsi,

$$\operatorname{card}(E) = \sum_{j=0}^{k} \operatorname{card}(E_j)$$

ce qui donne

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

La formule de Vandermonde, nommée d'après **Alexandre-Théophile Vandermonde**, est utilisée en probabilité pour déterminer l'espérance d'une loi particulière, appelée loi **hypergéométrique**.

Exercice 9.11

En utilisant la formule de Vandermonde, déterminer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$.

Solution

En appliquant la formule de Vandermonde au cas particulier $k = m = n$, on obtient

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j}$$

Or, $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$. Donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$$

3. Formule du binôme de Newton

Une autre formule est une relation importante qui servira avec les matrices.

Théorème 9.12. Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres réels a et b, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

soit

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration

Soit P_n la proposition « $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$ » définie pour tout entier $n \geqslant 1$ (*le résultat est également vrai pour* $n=0$).

- Pour $n=1$ le résultat est vrai car $(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$, et calculons $(a+b)^{n+1}$:
  - **Méthode 1 : symbole somme**

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^{n-(j-1)}b^j \quad \text{en posant } j=k+1 \text{ dans la 2e somme} \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^{n+1-j}b^j + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \quad \text{par Chasles} \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \quad \text{variable muette} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} \quad \text{par le triangle de Pascal}
\end{aligned}$$

$$= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \quad \text{car } \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

– **Méthode 2 : en extension**

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \dots + \binom{n}{p} a^{n-p+1} b^p + \dots + \binom{n}{n} ab^n \\ &\qquad + \binom{n}{0} a^n b + \dots + \binom{n}{p-1} a^{n-p+1} b^p + \dots + \binom{n}{n-1} ab^n + \binom{n}{n} b^{n+1}\end{aligned}$$

Or pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ (formule du triangle de Pascal), donc

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \dots + \binom{n+1}{p} a^{n-p+1} b^p + \dots \binom{n+1}{n} ab^n + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

ce qui donne le résultat annoncé, puisque $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$.

Exercice 9.12

Calculer

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Solution

- Prenons $a = b = 1$ et appliquons la formule du binôme de Newton :
$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$
Donc $A_n = (1+1)^n = 2^n$.
- Prenons $a = 2$ et $b = 1$ et appliquons la formule du binôme de Newton :
$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$
Donc $B_n = (1+2)^n = 3^n$.

☞ *Exercice 8.*

Exercices 9

Exercices

Dénombrement

●○○ **Exercice 1 Dénombrement** (10 min.)

On possède un jeu de 32 cartes et on en tire deux. On note A l'ensemble "les deux cartes tirées sont rouges", B l'ensemble "les deux cartes tirées sont un valet et un dix" et C l'ensemble "les deux cartes tirées sont un personnage".

Que représente $\overline{A}, A \cap B \cap \overline{C}$ et $(A \cap B) \cap C$?

Ecrire à l'aide des ensembles A, B et C les ensembles F : "les deux cartes tirées sont des personnages et ne sont pas toutes les deux rouges", et G : "on obtient au plus un personnage rouge".

●○○ **Exercice 2 Dénombrement** (5 min.)

Parmi 40 étudiants, 8 connaissent le portugais, 15 le chinois, et 9 le russe. D'autres part, 4 parlent chinois et russe, 5 chinois et portugais, 2 russe et portugais et 2 parlent les 3 langues. Combien d'étudiants ne connaissent aucune de ces trois langues ?

●○○ **Exercice 3 Arrangement et combinaison** (5 min.)

Soit $E = \{1; 2; 3; 4\}$. Ecrire

1. Les combinaisons de 3 éléments de E.
2. Les arrangements de 3 éléments de E.

●○○ **Exercice 4 Dénombrement** (5 min.)

Au menu d'un restaurant, il y a 3 entrées 2 plats et 4 desserts possibles. Combien de menus (une entrée, un plat, un dessert) sont possibles ?

●○○ **Exercice 5 Anagramme** (10 min.)

Un anagramme est un mot (ou une succession de lettres) formés des mêmes lettres, dans un ordre différent. Combien d'anagrammes peut on former avec le mot GLACE ? le mot ELEVE ?

●○○ **Exercice 6 Des chaussettes** (10 min.)

Un sac possède 5 paires de chaussettes noires, 2 paires de chaussettes vertes et 3 paires de chaussettes rouges. On choisit au hasard deux chaussettes simultanément.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ? de résultats possibles ?
2. Combien de tirages amènent deux chaussettes vertes ? deux chaussettes de même couleur ?

●○○ **Exercice 7 Asseyez-vous !** (10 min.)

Sept personnes sont debout, et on possède trois chaises. De combien de manière peut on asseoir les gens ?

On dispose ensuite de trois chaises et deux bancs d'une place. Même question, en considérant qu'un banc et une chaise sont deux objets différents.

●○○ **Exercice 8 Formule du binôme** (10 min.)

Calculer
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$$

●●○ **Exercice 9 Paradoxe des anniversaires** (10 min.)

On considère une classe de 25 élèves. On suppose qu'aucun élève n'est né un 29 février et que, pour chaque élève, tous les autres jours de l'année ont la même probabilité d'être le jour de son anniversaire. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour ?

●●○ **Exercice 10 Retour de Vandermonde** (10 min.)

En constatant que $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$, démontrer de manière analytique la formule de Vandermonde.

●○○ **Exercice 11 Démonstration combinatoire** (10 min.)

Démontrer, de manière combinatoire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\forall\ p \in [\![0,\, n]\!], \qquad \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Dénombrement en probabilité

●●○ **Exercice 12 Tirage sans remise, tirage avec remise** (15 min.)

Une urne contient 9 boules distinctes et indiscernables au toucher : 2 boules rouges, 3 boules vertes et 4 boules blanches. On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité
   a) D'obtenir au moins une boule rouge.
   b) D'obtenir des boules de la même couleur.
   c) D'obtenir une boule rouge et une boule verte.
3. Reprendre les questions précédentes dans le cas d'un tirage simultané, et dans le cas d'un tirage successif avec remise.

●○○ **Exercice 13 Des cartes** (10 min.)

On tire, au hasard, 3 cartes dans un jeu de 32 cartes classique. Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 couleurs (pique, trèfle, carreau et coeur) et pour chaque couleur, des cartes 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As.

1. Quel est l'univers ? Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 cartes de même hauteur ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 cartes exactement de la même couleur ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 ou 3 cartes de même couleur ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un coeur ou un roi ?

Pour aller plus loin

●●● **Exercice 14 Un peu de reflexion** (10 min.)

On dispose d'une urne disposant de n boules blanches et n boules noires. On tire deux par deux, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité que l'on tire deux boules de chaque couleur à chaque tirage ?

●●● Exercice 15 Du dénombrement (20 min.)

Soient n et p deux entiers non nuls. Dénombrer :

1. le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes.
2. le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes, de sorte qu'aucune poche ne soit vide.
3. le nombre de tirages successifs et avec remise de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, sans prendre en compte l'ordre.
4. le nombre de n-uplets $(r_1, \dots, r_n)$ d'éléments de $[\![0, p]\!]$ tels que $r_1 + \dots + r_n = p$.
5. le nombre d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

●●● Exercice 16 Du poker (20 min.)

On dispose d'un jeu de $4r$ cartes ($r = 13$ pour un jeu de 52 cartes, $r = 8$ pour un jeu de 32 cartes). Toute carte possède une couleur (pique, trèfle, carreau et coeur), et un rang (de 2 à 10 pour 52 cartes, de 7 à 10 pour 32 cartes, ainsi que Valet, Dame, Roi et As – classés dans cet ordre).

On tire 5 cartes d'un jeu de $4r$ cartes : on dispose ainsi d'une main.

1. Calculer le nombre total de mains possibles.
2. Combien y a-t'il de mains possibles avec :
   a) une **quinte flush** (cinq cartes de rangs consécutifs, et de la même couleur) ?
   On introduira s_r le nombre de suites de rangs consécutifs possibles. On a $s_{13} = 9$ et $s_8 = 4$.
   b) un **carré** (quatre cartes de même rang, et une cinquième quelconque) ?
   c) un **full** (trois cartes de même rang, et deux autres cartes de même rang) ?
   d) une **couleur** (cinq cartes de même couleur dont les rangs ne sont pas consécutifs) ?
   e) une **quinte** (cinq cartes de rangs consécutifs mais pas toutes de la même couleur) ?
   f) un **brelan** (trois cartes de même rang, deux cartes de rangs distincts également distincts des trois premières cartes) ?

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

En français, $\overline{A}$ représente l'ensemble "au moins une des deux cartes n'est pas rouge", $A\cap B\cap \overline{C}$ représente l'ensemble "les deux cartes sont rouges, sont un valet et un dix et au moins un des deux n'est pas un personnage", ce qui se simplifie en "les deux cartes sont un valet rouge et un dix rouge". Enfin $A\cap B\cap C$ est l'ensemble vide : en effet, il est impossible que les deux cartes soient un valet et un dix, et en même temps, deux personnages.
À l'aide des ensembles A, B et C, on a

$$F = C\cap \overline{A} \text{ et } G = \underbrace{A\cap \overline{C}}_{\text{si les deux sont rouges, on a au plus un personnage}} \cup \overline{A}$$

Exercice 2

Notons P l'ensemble des élèves parlant portugais, C ceux parlant chinois, et R ceux parlant russe. Notons A l'ensemble des élèves ne parlant aucunes des trois langues. Alors $\overline{A}$ désigne l'ensemble des élèves parlant au moins une langue. Ainsi

$$\overline{A} = P\cup C\cup R$$

Par la formule du crible de Poincaré, on a

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(P)+\text{card}(C)+\text{card}(R)-\text{card}(P\cap C)-\text{card}(P\cap R)-\text{card}(R\cap C)+\text{card}(P\cap C\cap R)$$

soit, d'après l'énoncé

$$\text{card}(\overline{A}) = 8+15+9-5-2-4+2 = 23$$

Il y a donc $40-23 = 17$ élèves ne parlant aucune langue.

Exercice 3

1. Les combinaisons de 3 éléments sont les sous-ensembles de E composés de 3 éléments. Il y en a 4 :

$$\{1;2;3\},\ \{1;2;4\},\ \{1;3;4\},\ \{2;3;4\}$$

2. Les arrangements de 3 éléments sont les listes ordonnées de E composés de 3 éléments. Il y en a 24 :

$$(1;2;3),(1;3;2),(2;1;3),(2;3;1),(3;1;2),(3;2;1)$$
$$(1;2;4),(1;4;2),(2;1;4),(2;4;1),(4;1;2),(4;2;1)$$
$$(1;3;4),(1;4;3),(3;1;4),(3;4;1),(4;1;3),(4;3;1)$$
$$(2;3;4),(2;4;3),(3;2;4),(3;4;2),(4;2;3),(4;3;2)$$

Exercice 4

Pour composer un menu, il faut choisir une entrée parmi les 3, un plat parmi les 2 et un dessert parmi les 4. Il y a donc

$$\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{4}{1} = 3 \times 2 \times 4 = 24 \text{ menus possibles.}$$

Exercice 5

GLACE est composé de 5 lettres distinctes. Il faut placer 5 lettres distinctes à 5 places : il s'agit donc d'une permutation de l'ensemble des lettres $\{G, L, A, C, E\}$. Il y a donc $5! = 120$ anagrammes possibles.

Pour le mot ELEVE, il y a 3 lettres E et 2 autres lettres. On place d'abord les 3 lettres sur 5 places possibles. Il reste alors 2 lettres à poser dans les 2 places restantes. Cela donne donc

$$\binom{5}{3} \times 2 = 20 \text{ anagrammes possibles.}$$

Exercice 6

1. Il y a $\binom{20}{2}$ tirages possibles, mais pas $\binom{20}{2}$ résultats possibles. En effet, on compte dans ce dénombrement plusieurs fois le tirage "(rouge,rouge)" par exemple.
Il y a en réalité 6 résultats possibles : (noire, noire), (noire, rouge), (noire, verte), (rouge, verte), (rouge, rouge) et (verte, verte).
2. On tire deux chaussettes. Pour avoir deux chaussettes vertes, il faut donc choisir les deux chaussettes vertes parmi les 4 présentes dans le sac : il y a donc $\binom{4}{2} = 6$ tirages.
Pour avoir deux chaussettes rouges, il faut tirer deux chaussettes rouges parmi les 6 chaussettes rouges : il y a donc $\binom{6}{2} = 15$ tirages.
Enfin, pour avoir deux chaussettes noires, il y a de la même manière $\binom{10}{2} = 45$ tirages.
Il y a donc au total $6 + 15 + 45 = 66$ tirages amenant deux chaussettes de la même couleur.

Exercice 7

Dans cet exercice, tout dépend si on tient compte de l'ordre des chaises, ou non.

- Si non :

Dans le premier cas, on dispose de 7 personnes à placer sur 3 chaises. Il faut donc choisir 3 personnes pour les 3 chaises, soit $\binom{7}{3} = 35$ placements possibles.
Dans le deuxième cas, on place trois personnes sur les 7 sur les chaises, et 2 personnes parmi les 4 restants, soit

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} = 210 \text{ placements.}$$

- Si oui :

Dans le premier cas, il y a 7 possibilités pour la première chaise, 6 pour la deuxième, et 5 pour la troisième, soit $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ placements possibles.
Dans le deuxième cas, il y a 7 possibilités pour la première chaise, 6 pour la seconde, 5 pour la troisième, 4 pour le premier banc et 3 pour le deuxième banc. Soit un total de $A_7^3 \times A_4^2 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$ placements possibles.

Exercice 8

Dans tous les cas, on utilise la formule du binôme de Newton avec des réels bien choisis :

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ 1 = 1^n = ((1-x)+x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} x^k \\ 0 = (1-1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \\ 3^n = (1+2)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \end{aligned}$$

Exercice 9

Pour simplifier, on note de 1 à 365 les jours, et on considère que tous les jours ont la même probabilité d'apparaitre. On note A l'événement “au moins deux élèves sont nés le même jour”. On va déterminer $\mathbb{P}(\overline{A})$. $\overline{A}$ est donc l'événement “les élèves sont tous nés des jours différents”. L'univers Ω qui nous intéresse est constitué de l'ensemble des 25 jours de naissances des élèves. On a

$$\text{card}(\Omega) = 365^{25}$$

L'événement $\overline{A}$ est constitué des listes de 25 jours deux à deux distincts. Par définition,

$$\text{card}(\overline{A}) = A_{365}^{25}$$

Donc, par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{A_{365}^{25}}{365^{25}}$$

On trouve $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \approx 0,568699704$.

> **Remarque**
> Ce résultat est appelé *paradoxe des anniversaires*. A partir de 23 élèves, la probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour est supérieure à $\frac{1}{2}$, ce qui est contre l'intuition. A partir de 57 élèves, cette probabilité est supérieure à $0,99$.

Exercice 10

On utilise l'indication, et on développe par la formule du binôme de Newton. Pour tout réel x,

$(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$ et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k \times \sum_{\ell=0}^{q} \binom{q}{\ell} x^\ell && \text{formules du binôme}\\
&= \sum_{k=0}^{p} \left(\binom{p}{k} \sum_{\ell=0}^{q} \binom{q}{\ell} \right) x^{k+\ell} && \text{en développant}\\
&= \sum_{k=0}^{p} \left(\sum_{\ell=0}^{q} \binom{p}{k} \binom{q}{\ell} \right) x^{k+\ell} && \text{par linéarité}\\
&= \sum_{k=0}^{p} \left(\sum_{n=k}^{k+q} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} \right) x^{n} && \text{en posant } \ell = n-k
\end{aligned}$$

Par convention, $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$. Ainsi, si $n \in [\![k+q+1, n+q]\!]$, on a

$$\binom{q}{n-k} = 0 \text{ car } n-k > q$$

et si $k \in [\![p+1, p+q]\!]$, on a

$$\binom{p}{k} = 0 \text{ car } k > p.$$

On peut utiliser cette convention pour ajouter des termes nuls dans la somme et écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k &= \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{n=k}^{p+q} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} \right) x^{n}\\
&= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n \leqslant p+q} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} \right) x^{n} && \text{par le théorème de Fubini}\\
&= \sum_{n=0}^{p+q} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} \right) x^{n} && \text{par le théorème de Fubini à nouveau}
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout réel x, on peut en déduire que

$$\boxed{\forall\, n \in [\![0, p+q]\!], \quad \binom{p+q}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}.}$$

Exercice 11

On s'intéresse à l'ensemble $E = \{1, \dots n+1\}$ et on note, pour $k \in [\![p, , n]\!]$, A_k l'ensemble des parties de $p+1$ éléments de E dont le plus grand élément est $k+1$.

On note A l'ensemble des parties de E composées de $p+1$ éléments.

Alors

$$A = \bigcup_{k=p}^{n} A_k$$

et par définition les (A_k) sont deux à deux disjoints. Ainsi

$$\operatorname{card}(A) = \sum_{k=p}^{n} \operatorname{card}(A_k).$$

- Par définition, $\operatorname{card}(A) = \binom{n+1}{p+1}$.

- A_k est composé des ensembles qui contiennent $k+1$ et qui sont composés ensuite de p éléments dans $\{1, \dots, k\}$. Il y a $\binom{k}{p}$ tels ensembles. Ainsi

$$\mathrm{card}(A_k) = \binom{k}{p}.$$

On peut en déduire que

$$\boxed{\binom{p+1}{n+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.}$$

Exercice 12

1. On tire au hasard, successivement et sans remise 2 boules. Puisqu'on tire successivement, l'ordre a son importance. Ainsi, l'univers de cette expérience est (en notant "B_1" pour "boule rouge au premier tirage", ...) :

$$\Omega = \{(R_1, R_2), (R_1, V_2), (V_1, R_2), (V_1, V_2), (R_1, B_2), (B_1, R_2), (B_1, B_2), (V_1, B_2), (B_1, V_2)\}$$

2. a) Notons A l'événement "obtenir au moins une boule rouge". Alors $\overline{A}$ représente l'évènement "ne pas obtenir de boule rouge". Ainsi

$$\overline{A} = \{(V_1, V_2), (V_1, B_2), (B_1, V_2), (B_1, B_2)\}$$

et donc

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(V_1, V_2) + \mathbb{P}(V_1, B_2) + \mathbb{P}(B_1, V_2) + \mathbb{P}(B_1, B_2) = \frac{3}{9}\frac{2}{8} + \frac{3}{9}\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\frac{3}{8} + \frac{4}{9}\frac{3}{8} = \frac{42}{72} = \frac{7}{12}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{5}{12}$.

b) Notons C l'événement "obtenir deux boules de la même couleur'. Alors

$$C = \{(V_1, V_2), (B_1, B_2), (R_1, R_2)\}$$

et donc

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(V_1, V_2) + \mathbb{P}(B_1, B_2) + \mathbb{P}(R_1, R_2) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{4}{9}\frac{3}{8} + \frac{2}{9}\frac{1}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

c) Enfin, notons D l'événement "obtenir une boule rouge et une boule verte". Alors

$$D = \{(R_1, V_2), (V_1, R_2)\}$$

et donc

$$\mathbb{P}(D) = \frac{2}{9}\frac{3}{8} + \frac{3}{9}\frac{2}{8} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

3. Dans le cas où le tirage est simultanée, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi, l'univers est (où R désigne l'événement "obtenir une boule rouge")

$$\Omega = \{(R, R), (R, V), (R, B), (B, B), (B, V), (V, V)\}$$

En gardant les même notations :

$$\overline{A} = \{(V, V), (V, B), (B, B)\}$$

Remarquons alors que $\mathbb{P}(V, V) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}}$ car on choisit deux boules vertes parmi les 3 boules vertes, sans ordre. Donc $\mathbb{P}(V, V) = \frac{1}{12}$. En raisonnant de même, on a

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{1}{12} + \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{12} + \frac{12}{36} + \frac{1}{6} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Et donc $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{12}$ De même, on trouve

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

et

$$\mathbb{P}(D) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

4. Dans le cas où on tire avec remise, l'univers est le même que sans remise :

$$\Omega = \{(R_1, R_2), (R_1, V_2), (V_1, R_2), (V_1, V_2), (R_1, B_2), (B_1, R_2), (B_1, B_2), (V_1, B_2), (B_1, V_2)\}$$

Seules changent les probabilités, car on est avec remise :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(V_1, V_2) + \mathbb{P}(V_1, B_2) + \mathbb{P}(B_1, V_2) + \mathbb{P}(B_1, B_2) = \frac{3}{9}\frac{3}{9} + \frac{3}{9}\frac{4}{9} + \frac{4}{9}\frac{3}{9} + \frac{4}{9}\frac{4}{9} = \frac{49}{81}$$

et donc $\mathbb{P}(A) = \frac{32}{81}$.

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(V_1, V_2) + \mathbb{P}(B_1, B_2) + \mathbb{P}(R_1, R_2) = \frac{3}{9} \times \frac{3}{9} + \frac{4}{9}\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\frac{2}{9} = \frac{29}{81}$$

$$\mathbb{P}(D) = \frac{2}{9}\frac{3}{9} + \frac{3}{9}\frac{2}{9} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$$

Exercice 13

1. L'univers est constitué de tous les sous-ensembles (l'ordre ne compte pas) possibles de trois cartes (par exemple, {roi de coeur, 7 de pique, 9 de carreau}). On choisit 3 cartes simultanément parmi 32 cartes, il y a donc

$$\text{card}(\Omega) = \binom{32}{3} = 4960 \text{ tirages possibles.}$$

2. On peut choisir 3 cartes 7, 3 cartes 8, ... , ou 3 as. Pour chacun de ces 8 choix, nous avons $\binom{4}{3}$ possibilités. Il y a donc

$$\underbrace{8}_{\text{nb de hauteur}} \times \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{3 cartes dans cette hauteur}} = 32 \text{ tirages possibles.}$$

Donc, la probabilité de l'événement A : "obtenir trois cartes de la même hauteur" est

$$\mathbb{P}(A) = \frac{32}{4960} = \frac{1}{155}$$

3. On veut exactement 2 cartes de la même couleur. On veut donc soit exactement 2 piques, 2 trêfles, 2 carreaux ou 2 coeurs.
Pour chacune de ces couleurs, il faut donc choisir 2 cartes de la même couleur, et la troisième d'une couleur différente. Donc pour chacune de ces 4 couleurs, on a

$$\underbrace{\binom{8}{2}}_{\text{2 de même couleurs}} \times \underbrace{\binom{24}{1}}_{\text{1 autre couleur}} = 672$$

Donc la probabilité de l'événement B : "obtenir exactement 2 cartes de la même couleur" vaut

$$\mathbb{P}(B) = \frac{4 \times \binom{8}{2} \times \binom{24}{1}}{4960} = \frac{2688}{4960} = \frac{84}{155}$$

4. L'événement C : "obtenir 2 ou 3 cartes de même couleur" peut s'écrire

$$C = B \cup D$$

avec D : "obtenir 3 cartes de la même couleur".
Par le même raisonnement qu'en 2., on a

$$\mathbb{P}(D) = \frac{\underbrace{4}_{\text{nb de couleur}} \times \underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{3 cartes de même couleur}}}{4960} = \frac{224}{4960} = \frac{7}{155}$$

Puisque $C = B \cup D$ et que B et D sont incompatibles, on a

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D) = \frac{84}{155} + \frac{7}{155} = \frac{91}{155}$$

5. Notons E l'événement "avoir au moins un coeur ou un roi". Alors l'événement contraire $\overline{E}$ est l'événement "n'avoir aucun coeur et aucun roi". Il y a 32 cartes, dont $32-8-3=21$ cartes sans coeur ni roi (attention au roi de coeur !). Ainsi, il faut choisir, pour $\overline{E}$ dans coeur parmi ces 21 cartes. Donc

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = \frac{\binom{21}{3}}{4960} = \frac{1330}{4960}$$

Et donc

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{1330}{4960} = \frac{3630}{4960}$$

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 14

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note A_i l'événement "on tire une boule blanche et une boule noire au i^{me} lancer". On note E la probabilité recherchée. D'après la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Au tirage $i<n$, il reste $2n-2(i-1)$ boules, $n-(i-1)$ blanches, et $n-(i-1)$ noires. Ainsi, par équiprobabilité des tirages

$$\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots A_{i-1}}(A_i) = \frac{\binom{n-(i-1)}{1}\times\binom{n-(i-1)}{1}}{\binom{2n-2(i-1)}{2}} = \frac{(n-i+1)(n-i+1)}{\frac{(2n-2i+2)(2n-2i+1)}{2}} = \frac{2(n-i+1)(n-i+1)}{2(n-i+1)(2n-2i+1)} = \frac{n-i+1}{2n-2i+1}$$

Remarquons que

$$\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n) = \frac{n-n+1}{2n-2n+1} = 1$$

puisque il ne reste plus qu'une boule blanche et une boule noire dans cette situation.
Ainsi,

$$\mathbb{P}(E) = \prod_{i=1}^{n}\frac{n-i+1}{2n-2i+1} = \frac{n!}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}$$

ce qui s'écrit

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \frac{n!^2 2^n}{(2n)!} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}}$$

Exercice 15

Attention : dans l'ensemble de ces exercices, il ne faut pas totalement se fier à son intuition.

1. Prenons une représentation particulière. On note P pour signifier une pièce, et $-$ pour signifier un changement de poche. Par exemple

$$PP - P - PP - P - -P$$

signifie qu'on a mis deux pièces dans la première poche, une dans le deuxième, deux dans la troisième, une dans la quatrième, aucune dans la cinquième et une dans la sixième.
La question est donc de déterminer le placement des $-$. On doit donc placer $n-1$ signe $-$ dans un ensemble composé de $p+n-1$ symboles possibles (P et $-$). Cela donne

$$\boxed{\binom{p+n-1}{n-1} = \binom{p+n-1}{p} \text{ choix possibles.}}$$

2. Tout d'abord, si aucune poche ne doit être vide, il est nécessaire que $p \geqslant n$. On peut raisonner ainsi : on place une pièce dans chacune des poches, et on place les pièces restantes où on le souhaite. On place donc n pièces, puis il reste $p-n$ pièces à placer dans les n poches, ce qui, d'après le cas précédent, donne $\binom{p-n+n-1}{n-1}$ possibilités. Ainsi, il y a

$$\boxed{\binom{p-1}{n-1} \text{ choix possibles si } p \geqslant n, \quad 0 \text{ sinon.}}$$

3. Il s'agit en réalité du cas 1. On dispose de p boules numérotées de 1 à n (avec éventuelle répétition), ce qu'on peut représenter comme p boules que l'on met dans n poches numérotées de 1 à n. Tirer p boules numérotées revient à placer p boules dans les n poches. D'après le 1), cela donne

$$\boxed{\binom{n-p+1}{n-1} \text{ choix possibles.}}$$

4. Écrivons $p = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{p \text{ termes.}}$. Remarquons alors que un n-uplet $(r_1, \ldots r_n)$ vérifiant $r_1+\ldots+r_n = p$ peut s'écrire

$$r_1+\ldots+r_n = \underbrace{(1+\ldots+1)}_{r_1 \text{ termes}} + \ldots + \underbrace{(1+\ldots+1)}_{r_n \text{ termes}}.$$

Choisir un tel n-uplet revient donc à déterminer les n groupements de 1 consécutifs dans un ensemble de p 1. Cela revient ainsi à choisir n groupements d'un ensemble de p éléments ; d'après 1, il y a

$$\boxed{\binom{n-p+1}{n-1} \text{ cas possibles.}}$$

5. Il s'agit, à nouveau, du même résultat. Créer une fonction croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ revient à disposer de n poches $1, \ldots n$, et disposer les p pièces dans ces poches (on définit ainsi l'image de la pièce i comme étant la valeur écrite sur la poche). D'après 1), il y a ainsi

$$\boxed{\binom{n-p+1}{p} \text{ fonctions croissantes de } [\![1, p]\!] \text{ dans } [\![1, n]\!].}$$

Exercice 16

1. On choisit 5 cartes sans ordre dans un jeu à $4r$ cartes : il y a donc $\binom{4r}{5}$ mains possibles.

2. a) On note s_r le nombre de suites de rangs consécutifs. Remarquons que, pour avoir une suite de 5 cartes consécutives, on choisit la première carte de la suite (la plus haute valeur), puis les 4 autres cartes sont imposées (les quatre de valeur successivement inférieure). Il faut également s'assurer, si on note a la hauteur de la plus grande carte, que $a-1, a-2, a-3, a-4$ soient des valeurs autorisées. Si $a \in [\![1, r]\!]$, il faut que $a \leqslant r$ et $a - 4 \geqslant 1$, i.e. $a \in [\![5, r]\!]$.
Il y a donc $s_r = r - 5 + 1 = r - 4$.
Pour déterminer le nombre de quite flush, on constate qu'il faut une suite de rangs consécutifs, et choisir une couleur parmi les 4 possibles. Il y a donc

$$\boxed{4(r-4) \text{ quite flush possibles.}}$$

b) On choisit tout d'abord les 4 cartes de même rang : il y a r possibilités. Il reste alors à choisir une autre carte parmi les $4r-4$ restantes. Ainsi, il y a

$$\boxed{r \times \binom{4r-4}{1} = 4r(r-1) \text{ carrés possibles.}}$$

c) Même raisonnement : on choisit 3 cartes de même rang, soit $\binom{4}{3} \times r$ possibilités, et 2 cartes de même rang différentes des précédentes, c'est-à-dire $\binom{4}{2} \times (r-1)$. Au final, il y a

$$\boxed{\binom{4}{3} r \times \binom{4}{2} \times (r-1) = 24r(r-1) \text{ full possibles.}}$$

d) On choisit une couleur parmi les 4 possibles, puis les 5 cartes. On enlève enfin les suites consécutives calculée en a). Cela donne

$$\boxed{4 \times \left(\binom{r}{5} - s_r\right) = 4 \times \left(\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{5!} - (r-4)\right) \text{ couleurs.}}$$

e) On a déjà déterminé le nombre de tirage de cinq cartes de rangs consécutifs (s_r en 2)a)). Pour chaque carte, on choisit une couleur quelconque (soit 4^5 possibilités) On soustrait alors le nombre de quinte flush. Cela donne donc

$$\boxed{4^5(r-4-4(r-4) = 1020(r-4) \text{ quintes possibles.}}$$

f) On choisit tout d'abord les 3 cartes de même rang, c'est-à-dire $\binom{4}{3}$ pour chaque rang possible : cela donne $\binom{4}{3} r = 4r$ possibilités. On choisit ensuite les 2 cartes restantes parmi les $4r-4$ cartes possibles (4, car on ne veut pas de carré, donc pas une carte identique aux 3 choisies), c'est-à-dire $\binom{r-4}{2}$. Enfin, on enlève le nombre de full possibles. Au final, il y a

$$\boxed{4r\binom{4r-4}{2} - 24r(r-1) = 32r(r-1)(r-2) \text{ brelans possibles.}}$$