Chapitre 8

Ensembles et applications

Résumé

Nous *allons reprendre les notions d'ensembels et d'applications vues dans les chapitres précédents, en approfondissant. Nous verrons ainsi la notion de produit cartésien d'ensemble, et d'applications injectives, surjectives et bijectives.*

Plan du cours

Chapitre 8. **Ensembles et applications**

> « *Les honneurs déshonorent ; Le titre dégrade ; La fonction abrutit.* »
>
> Gustave Flaubert (1821–1880) – *Correspondance*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les ensembles :

- Savoir décrire par extension et par compréhension un ensemble .... ☐
- Connaître la définition et les propriétés du produit cartésien .... ☐
- Connaître la définition et les propriétés de l'union et de l'intersection .... ☐
- Savoir déterminer l'ensemble des parties d'un ensemble et son cardinal .... ☐
- Savoir déterminer le complémentaire d'un ensemble et ses propriétés .... ☐

② Concernant les applications :

- Savoir les éléments de base d'une fonction (domaine de définition, courbe représentative, ...) .... ☐
- Connaître les différentes opérations sur les fonctions .... ☐
- Savoir démontrer qu'une fonction est injective, n'est pas injective .... ☐
- Savoir démontrer qu'une fonction est surjective, n'est pas surjective .... ☐
- Savoir démontrer qu'une fonction est bijective, n'est pas bijective .... ☐
- Savoir déterminer l'application réciproque d'une application bijective .... ☐

I. Ensembles

Nous avons, dans le chapitre 1, introduit la notion d'ensemble. Rappelons quelques définitions :

1. Ensembles et éléments

Définition 8.1.

On appelle **ensemble** toute *collection* d'objets, appelés **éléments** de cet ensemble.
Pour signifier que l'élément x appartient à un ensemble E, on note $x \in E$. Si x n'appartient pas à E, on écrit $x \notin E$.

Définition 8.2.

L'ensemble constitué d'aucun élément est appelé **ensemble vide**, et est noté $\varnothing$.
Un ensemble ayant un seul élément x est appelé **singleton**, et est noté $\{x\}$.

⚠ **Attention**

On note $\varnothing$ et non $\{\varnothing\}$. $\{\varnothing\}$ représente l'ensemble contenant l'ensemble vide.

Un ensemble peut être défini de deux manières :

- par *extension*, en listant tous ses éléments entre accolades. L'orde dans lequel les éléments sont listés n'a pas d'importance, et chaque élément figure une seule fois dans la liste.
- par *compréhension* : si P est une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E, alors on note $\{x \in E,\ P(x)\}$ l'ensemble des éléments x de E tels que $P(x)$ est vraie.

Exemple 8.1 (Exemples importants)

On note $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles qui sont continues, et $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles qui sont dérivables. Par exemple, $\sin \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, mais abs : $x \mapsto |x| \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

2. Inclusion, sous-ensemble

Définition 8.3.

Soit E un ensemble. On dit que F est **inclus** dans E, et on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E. On dit alors que F est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de E.
Si E n'est pas inclus dans F, on note $E \not\subset F$. Si $E \subset F$ et $E \neq F$, on dit que l'inclusion est stricte et on note $E \subsetneq F$.

Proposition 8.1.

Soient E, F et G trois ensembles.

- Réflexivité : un ensemble est inclus dans lui-même : $E \subset E$.
- Transitivité : Si $E \subset F$ et $F \subset G$ alors $E \subset G$.

Exemple 8.2

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}$.

Méthode (Inclusion)

Pour montrer que E est inclus dans F, on se donne x de E, et on montre que x est un élément de F.

✎ On écrira « Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$. ».

Méthode (Double inclusion)

Soient E et F deux ensembles. On a :

$$E = F \quad \Longleftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

3. Produit cartésien

Définition 8.4.

Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, l'ensemble formé des couples (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$.

Exemple 8.3

Si $E = \{a, b\}$ et $F = \{-1, 1\}$ alors $E \times F = \{(a, -1), (a, 1), (b, -1), (b, 1)\}$.

Remarque

- Si $E = F$, on note en général $E \times E = E^2$.
- On peut généraliser à un produit fini d'ensemble $E_1 \times \dots \times E_n = \prod_{k=1}^{n} E_k$. Si $E_1 = \dots = E_n$, notera $E^n = \prod_{k=1}^{n} E_k$.

Exemple 8.4

Les deux exemples classiques sont $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ et

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi, par exemple, $(1,\ -4\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ et $(0,\ 0,\ 1) \in \mathbb{R}^3$.

On peut généraliser la notion de produit cartésien avec la notion de famille d'éléments :

Définition 8.5. Famille d'éléments d'un ensemble

Soit I un ensemble non vide (appelé ensemble d'indices), et E un ensemble non vide. On appelle **famille d'éléments de E indexée par I** la donnée, pour tout $i \in I$, d'un unique élément x_i de E. On la note $(x_i)_{i \in I}$.

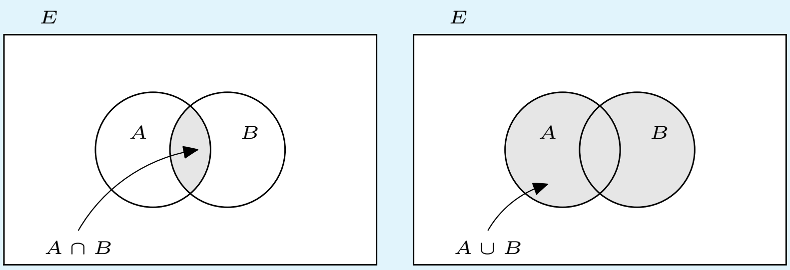
4. Union, intersection

Définition 8.6.

Soient A et B deux ensembles.

- On appelle **intersection** de A et de B, noté $A \cap B$, l'ensemble constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.
- On appelle **réunion** (ou **union**) de A et de B, noté $A \cup B$, l'ensemble constitué des …

éléments qui sont dans A ou dans B (voire dans les deux).



Remarque

On a donc

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B, \quad \text{et} \quad x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B.$$

Exemple 8.5

Si $A = \{1; 2; 4\}$ et $B = \{2; 4; 5\}$ alors

$$A \cup B = \{1; 2; 4; 5\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{2; 4\}$$

Définition 8.7.

Deux parties A et B sont dits **disjoints** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$. Dans ce cas, on dit que l'union $A \cup B$ est une **union disjointe**.

Propriété 8.2.

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

- Commutativité : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
- Associativité : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- Distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Idempotence : $A \cap A = A$ et $A \cup A = A$.
- $\varnothing \cap A = \varnothing$ et $\varnothing \cup A = A$.
- $E \cap A = A$ et $E \cup A = E$.
- On a les inclusions $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$.

On peut, plus généralement, définir l'union et l'intersection d'une famille de partie de E.

Définition 8.8.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E indexée par un ensemble non vide I. On définit

- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E, \exists\, i \in I,\ x \in A_i\}$ l'union de la famille $(A_i)_{i \in I}$.
- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E, \forall\ i \in I,\ x \in A_i\}$ l'intersection de la famille $(A_i)_{i \in I}$.

Si $I = [\![p, n]\!]$, avec p et n deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$, on notera plutôt $\displaystyle\bigcup_{i=p}^{n}$ au lieu de $\displaystyle\bigcup_{i \in I}$, et $\displaystyle\bigcap_{i=p}^{n}$ au lieu de $\displaystyle\bigcap_{i \in I}$.

Exercice 8.6

Montrer que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{k+1},\,\frac{1}{k}\right]=\left]0,\,1\right]$$

Solution

On raisonne par double inclusion.

- Soit $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{k+1},\,\frac{1}{k}\right]$. Alors il existe un entier $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $x\in\left[\frac{1}{k+1},\,\frac{1}{k}\right]$. Ainsi, $0<\frac{1}{k+1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{k}\leqslant 1$ et donc $x\in\left]0,\,1\right]$. On a ainsi montré que
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{k+1},\,\frac{1}{k}\right]\subset\left]0,\,1\right].$$
- Réciproquement, soit $x\in\left]0,\,1\right]$. Alors $\frac{1}{x}\geqslant 1$, et donc $\ell=\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\in\mathbb{N}^*$. Comme $\ell\leqslant\frac{1}{x}<\ell+1$, on en déduit que $\frac{1}{\ell+1}<x\leqslant\frac{1}{\ell}$. Ainsi,
$$x\in\left[\frac{1}{\ell+1},\,\frac{1}{\ell}\right]\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{k+1},\,\frac{1}{k}\right].$$
Ainsi,
$$\left]0,\,1\right]\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{k+1},\,\frac{1}{k}\right].$$

On peut conclure quant à l'égalité des deux ensembles.

Propriété 8.3. Distributivité

Soit B une partie de E, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Alors :

- Distributivité de $\cap$ sur $\cup$:
$$\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cap B=\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B).$$
- Distributivité de $\cup$ sur $\cap$:
$$\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\cup B=\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B)$$

Démonstration

Montrons le premier point (le deuxième se démontrant de la même manière).

$$\begin{aligned}x\in\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cap B&\iff(\exists\, i\in I,\, x\in A_i)\text{ et }(x\in B)\\&\iff\exists\, i\in I,\,(x\in A_i\text{ et }x\in B)\\&\iff\exists\, i\in I,\, x\in A_i\cap B\\&\iff x\in\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)\end{aligned}$$

5. Ensemble des parties

Définition 8.9.

Soit E un ensemble. On appelle **ensemble des parties** de E, et on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble formé des sous-ensembles de E.
Ainsi, $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

Remarque

L'ensemble vide possède un seul sous-ensemble : lui-même.
Pour tout ensemble E, $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple 8.7

On a $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

Exercice 8.8

Déterminer $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$.

Solution

Si $E = \{a,b,c\}$, alors
$$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Remarque (En probabilités)

Lorsqu'on lance un dé à 6 faces, le résultat est un élément de l'ensemble $\Omega = [\![1, 6]\!]$, appelé univers associé à l'expérience aléatoire.
On appellera toute partie de Ω un événement. Par exemple, $\{1,2,3,4\}$ correspond à l'événement « obtenir un chiffre inférieur ou égal à 4 ». Ainsi, $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements.

Exercice 8.9

Montrer que $\{x\} \in \mathcal{P}(E) \iff x \in E$.

Solution

En effet, $\{x\} \in \mathcal{P}(E) \iff \{x\} \subset E \iff x \in E$.

Théorème 8.4.

Soit E un ensemble possédant n éléments (avec $n \geqslant 1$). Alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments.

Démonstration

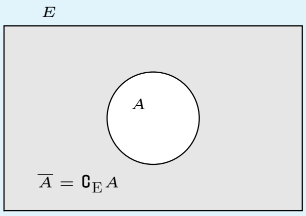
Pour construire un sous-ensemble de E, il faut prendre certains éléments de E et pas d'autres. Si on note $x_1, \dots, x_n$ les éléments de E, alors pour chaque élément x_k, on peut soit le prendre, soit ne pas le prendre ; il y a donc 2 possibilités pour chaque élément. Puisqu'il y a n éléments, et que le choix se fait de manière indépendante, il y a donc
$$\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n \text{ sous-parties}$$

☞ *Exercice 4.*

6. Complémentaire

Définition 8.10.

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle **complémentaire** de A, et on note $\overline{A}$ ou $\complement_E A$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A : $\overline{A} = E \backslash A$.



Remarque

Ainsi, pour tout x de E, $x \in \overline{A}$ si et seulement si $x \notin A$.

Exemple 8.10

Si $E = \{1;2;3;4;5\}$ et $A = \{1;2;4\}$ alors $\overline{A} = \{3;5\}$.

Théorème 8.5. Lois de de Morgan

Soit E un ensemble, et soient A, B deux sous-ensembles de E.

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Démonstration

On raisonne par double inclusion.

- Soit $x \in \overline{A \cup B}$. Cela veut dire qu'il n'est pas dans $A \cup B$. Donc il n'est ni dans A, ni dans B : il est donc dans $\overline{A} \cap \overline{B}$.
- Soit $\in \overline{A} \cap \overline{B}$. Il n'est donc pas dans A, et il n'est pas dans B : il n'est donc pas dans $A \cup B$. Ainsi, $x \in \overline{A \cup B}$.

L'autre égalité se montre de la même manière.

Propriété 8.6.

Soient A et B deux parties de E.

$$\overline{\varnothing} = E, \qquad \overline{E} = \varnothing, \qquad \overline{\overline{A}} = A, \qquad A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Définition 8.11. Différence de deux ensembles

Soient A et B deux parties de E. On appelle **différence** de A par B, ou encore « A privé de B », l'ensemble

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Attention

$A \setminus B \neq B \setminus A$ (on a même mieux : $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont disjoints).

☞ *Exercice 3.*

II. Applications

1. Définition

Définition 8.12.

Soient E et F deux ensembles. Une **application** (ou **fonction**) f de E vers F est une transformation qui, à chaque élément x de E, associe un unique élément y de F. L'élément y de F est alors noté $f(x)$ et est appelé **image** de x par f. x est alors un **antécédent** de $y = f(x)$ par f.
L'ensemble E est appelé **ensemble (ou domaine) de définition**.

Notation

On note $f : E \to F$ pour signifier que f est une application de E vers F.
L'ensemble des fonctions de E vers F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E.

Exemple 8.11

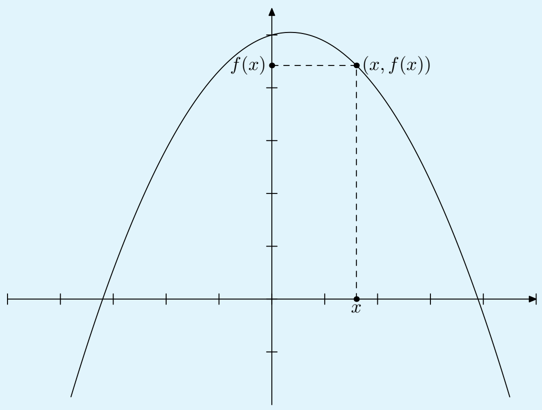
$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x^2} \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x+y}{1+x^2+y^2} \end{array}\right.$ sont des applications.

Remarque

Il y a, en réalité, une différence entre application et fonction. On peut parler généralement de la fonction logarithme népérien, sans indiquer qu'elle n'a pas de sens sur $\mathbb{R}^-$. En revanche, on parlera de l'application logarithme népérien définie sur $\mathbb{R}_*^+$. Dans la pratique, on utilisera quasi-systématiquement le mot fonction.

Définition 8.13.

L'ensemble des points du plan cartésien de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un élément du domaine de définition de f est appelé **courbe représentative** de la fonction f.



Remarque

Si l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas indiqué, il est convenu que cet ensemble de définition est le **plus grand ensemble** sur lequel $f(x)$ existe.

Exercice 8.12

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$.

Solution

La fonction f est définie si et seulement si $x^2-4 \geqslant 0$. Puisque $x^2-4=(x-2)(x+2)$, et après tableau de signe rapide, on obtient $\mathcal{D}_f =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$.

2. Opérations sur les fonctions

Définition 8.14. Égalité de fonctions

Deux applications f et g sont égales si et seulement si elles ont le même espace de départ, le même ensemble d'arrivée, et si, pour tout x de l'espace de départ, $f(x)=g(x)$.

⚠ **Attention**

Il faut que les fonctions aient le même espace de départ. Par exemple, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$ et $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=x^2$ ne sont pas égales.

Définition 8.15.

Soient f et g deux fonctions définies sur le <u>même ensemble</u> E. Soit λ un réel.

- On appelle $f+g$ la fonction définie sur E par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
- On appelle $f\times g$ la fonction définie sur E par $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$.
- On appelle λf la fonction définie sur E par $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$.
- On appelle $f+\lambda$ la fonction définie sur E par $(f+\lambda)(x)=f(x)+\lambda$.
- Si g **ne s'annule pas** sur E, on appelle $\frac{f}{g}$ la fonction définie sur E par $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple 8.13

Soient f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^x+1$. Déterminer $f+g$ et $\frac{f}{g}$.

Solution

Par définition, $f+g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(f+g)(x)=x^2+\mathrm{e}^x+1$ et $\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\frac{f}{g}(x)=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x+1}$.

Définition 8.16.

Soit f une fonction définie sur E et prenant ses valeurs dans F.
Soit g une fonction définie sur F et à valeur dans G.
La fonction qui, à tout réel x de E, fait correspondre le réel $g(f(x))$ est appelée **fonction composée** de f suivie de g. On a ainsi

$$\begin{array}{rccl} E \to & F & \to G \\ x \mapsto & f(x) & \mapsto g(f(x)) \end{array}$$

Cette fonction est notée $g\circ f$.

Exemple 8.14

Soit $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^2\end{array}\right.$ et $g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x-1\end{array}\right.$. Déterminer $f\circ g$ et $g\circ f$.

Solution

On a, pour tout réel x,

$$g \circ f(x) = x^2 - 1 \text{ et } f \circ g(x) = (x-1)^2$$

Remarque

Dans le résultat précédent, on remarque que $g \circ f \neq f \circ g$. On dit que la composée n'est pas **commutative**.

Méthode

Pour déterminer la composée de deux fonctions, on étudiera d'abord les domaines de définition pour déterminer le domaine de définition de la fonction composée.

Exemple 8.15

Soit $f : x \mapsto x^2 - 1$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$. Déterminer $g \circ f$.

Solution

$g \circ f(x)$ n'est définie que si $f(x) \geqslant 0$ (car g est la fonction racine, définie sur $\mathbb{R}^+$). Or

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

Ainsi, $g \circ f$ est définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Proposition 8.7. Associativité

Si $f : E \to F,\ g : F \to G,\ h : G \to H$ sont trois fonctions, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

3. Injection, surjection

a. Injection

Définition 8.17.

On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est **injective** si f ne prend jamais deux fois la même valeur :

$$\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Remarque

On dispose également de la formulation équivalente suivante (il s'agit de la contraposée de la précédente) :

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Méthode

Pour montrer qu'une fonction est injective, on prend deux éléments x et x' de E vérifiant $f(x) = f(x')$. On montre alors que nécessairement $x = x'$.

Exemple 8.16
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x+1}$ est injective.

Solution
En effet, soient $x, x' \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = f(x')$. On a donc $e^{x+1} = e^{x'+1}$, c'est-à-dire $x + 1 = x' + 1$ en composant par la fonction logarithme népérien. On a donc bien $x = x'$.

Remarque
$f : E \to F$ n'est pas injective si et seulement si

$$\exists\ (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x'$$

Méthode
Pour montrer qu'une fonction n'est pas injective, on cherche un contre-exemple.

Exemple 8.17
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas injective.

Solution
En effet, $1 \neq -1$ et pourtant $1^2 = (-1)^2 = 1$.

Théorème 8.8.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications injectives, alors $g \circ f : E \to G$ est aussi injective.

Démonstration
Soient x et x' deux éléments de E tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Alors, puisque $g(f(x)) = g(f(x'))$, et comme g est injective, on a nécessairement $f(x) = f(x')$. Or, f est aussi injective : on a donc $x = x'$. $g \circ f$ est bien injective.

Proposition 8.9.
Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (avec I intervalle non vide de $\mathbb{R}$) strictement monotone sur I est injective.

Démonstration
Soient x et y dans I tels que $x \neq y$. Alors on a $x < y$ ou $x > y$, mais puisque f est strictement monotone, on en déduit que $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$ et f est injective.

b. Surjection

Définition 8.18.
On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est **surjective** si tout élément de F possède au moins un ···

antécédent par f dans E :

$$\forall\ y \in F, \exists\ x \in E, y = f(x)$$

Méthode

Pour prouver qu'une fonction f est surjective, il suffit donc de trouver une solution x à l'équation $f(x) = y$ pour tout élément y de F.

Exemple 8.18

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout x par $f(x) = 2x - 1$ est surjective.

Solution

En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$. Il existe donc au moins un antécédent à y par la fonction f.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction n'est pas surjective, on exhibe une valeur qui ne peut être atteinte par la fonction.

Exemple 8.19

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^x$ n'est pas surjective.

Solution

Puisque, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, la valeur 0 n'est jamais atteinte par f. Ainsi, f n'est pas surjective.

Remarque

On constate cependant que la fonction précédente est surjective sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 8.10.

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications surjectives, alors $g \circ f : E \to G$ est aussi surjective.

Démonstration

Soit z un élément de G. Puisque g est surjective, il existe un élément $y \in F$ tel que $g(y) = z$. De plus, f est surjective, donc il existe un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Mais alors

$$g(f(x)) = g(y) = z$$

Donc x est un antécédent de z par la fonction $g \circ f$.

c. Bijection

Définition 8.19.

On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. ...

Ainsi, f est bijective si, et seulement si, chaque élément de F possède un **unique antécédent** par f dans E :

$$\forall\ y \in F, \exists!\ x \in E, y = f(x)$$

Méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : E \to F$ est bijective, il faut montrer que, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède une **unique** solution dans E.

Exemple 8.20

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 4$ est bijective.

Solution

En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = y \Leftrightarrow x - 4 = y \Leftrightarrow x = y + 4$$

Il existe donc bien un unique antécédent à y par f.

Définition 8.20.

On dit que deux ensembles E et F sont **en bijection** s'il existe une bijection de E dans F ou une bijection de F dans E.

Exemple 8.21

Par exemple, $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ sont en bijection, par exemple par l'application $x \mapsto -x$.

d. Application réciproque

Exemple 8.22

L'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ définie pour tout x de E par $\mathrm{id}_E(x) = x$ est une bijection de E dans E.

Proposition 8.11.

La fonction id_E est le neutre pour la composition :

$$\forall\ f \in \mathcal{F}(E, F),\ \forall\ g \in \mathcal{F}(F, E), \quad f \circ \mathrm{id}_E = f \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_E \circ g = g$$

Démonstration

En effet, pour tout $x \in E$:

$$f \circ \mathrm{id}_E(x) = f(\mathrm{id}_E(x)) = f(x) \text{ car } \mathrm{id}_E(x) = x$$

et pour tout $x \in F$:

$$\mathrm{id}_E \circ g(x) = \mathrm{id}_E(g(x)) = g(x) \text{ car } \mathrm{id}_E(u) = u \text{ avec ici } u = g(x)$$

Théorème 8.12.

Soit $f : E \to F$ une fonction. f est bijective si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : F \to E$, telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

…

La fonction g est appelée **fonction réciproque** de f, et est notée $g = f^{-1}$.

Exemple 8.23

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 2x - 1$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto \frac{x+1}{2}$. Montrer que f et g sont bijectives, et réciproques l'une de l'autre.

Solution

On constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f \circ g(x) = 2\frac{x+1}{2} - 1 = x \text{ et } g \circ f(x) = \frac{(2x-1)+1}{2} = x$$

Ainsi, f est bijective, et sa bijection réciproque est la fonction g.

Méthode

Pour déterminer la fonction réciproque d'une fonction f, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x. On obtiendra $x = g(y)$ et g représente alors la fonction réciproque.

Exemple 8.24

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x+1}$. Déterminer f^{-1}.

Solution

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+1} = y \Leftrightarrow x = \ln(y) - 1$$

qui a un sens car $y > 0$. Ainsi $x = g(y)$ avec $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x > 0$ par $g(x) = \ln(x) - 1$. Donc $f^{-1} = g$.

Méthode

Lorsqu'on donne f et g et qu'on demande de montrer que $g = f^{-1}$, il suffit de montrer que $f \circ g = \mathrm{id}$ et $g \circ f = \mathrm{id}$.

Exemple 8.25

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 2$. Montrer que f^{-1} est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{4}$.

Solution

Notons $g : y \mapsto \frac{y+2}{4}$. Alors, pour tous réels x et y, on a

$$f \circ g(y) = f\left(\frac{y+2}{4}\right) = 4\left(\frac{y+2}{4}\right) - 2 = y$$

$$g \circ f(x) = g(4x-2) = \frac{(4x-2)+2}{4} = x$$

Ainsi, on a bien $f \circ g = Id_{\mathbb{R}}$ et $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$: $g = f^{-1}$.

Théorème 8.13.

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f : E \to G$ est bijective, et on a
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration

En effet,
$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$$
et
$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_G$$
D'après le théorème précédent, $g \circ f$ est bijective, d'application réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.

☞ *Exercice 7.*

Exercices

8

Exercices

Ensemble

●○○ **Exercice 1 Système hexadécimal** (5 min.)

Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$ l'ensemble des chiffres du système hexadécimal. On considère les trois parties suivantes :

$$X = \{A, B, C, D\}, \qquad Y = \{0, 2, 4, 6, 8, A, C, E\} \qquad \text{et} \quad Z = \{3, 5, 7, 9, B\}$$

Donner en extension les parties suivantes :

$$\overline{X}, \quad \overline{Y}, \quad \overline{Z}, \quad X \cap Y, \quad Y \cup \overline{X}, \quad X \setminus Y, \quad \overline{\left(\overline{Y} \cap X\right) \cup Z} \setminus Y.$$

●●○ **Exercice 2 Lois de de Morgan et distributivités** (10 min.)

Soient E un ensemble, et A, B et C des sous-ensembles de E. Montrer par double inclusion les résultats suivants :

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

●○○ **Exercice 3 Ensemble des parties** (5 min.)

Déterminer les éléments de $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ et de $\mathcal{P}(\{A, C, G, T\})$.

●○○ **Exercice 4 Sur les ensembles de suites** (20 min.)

On se place dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On note :

- I_0 l'ensemble des suites réelles de terme initial nul.
- M l'ensemble des suites réelles majorées.
- B l'ensemble des suites réelles bornées.
- L l'ensemble des suites réelles convergentes.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, L_k l'ensemble des suites réelles qui convergent vers un réel de $[k,\, k+1[$.
- C l'ensemble des suites réelles croissantes.
- G l'ensemble des suites géométriques.

1. Écrire ces ensembles en compréhension, ainsi que l'ensemble $\overline{L}$.
2. Montrer que $B \subsetneq M$, $L \subsetneq B$, $(C \cap M) \subsetneq L$.
3. Décrire $L \cap G$.
4. Montrer que $(L_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille de partie non vides de F qui sont deux à deux disjoints, et dont l'union est L.

●●○ **Exercice 5 Des propriétés sur les ensembles** (20 min.)

Soit E un ensemble, et A, B, D des parties non vides de E. Montrer que :

1. $(A \cup B = B \cap D) \implies (A \subset B \subset D)$.
2. $(\overline{A} \subset B) \iff (A \cup B = E)$.

3. $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$.
4. $A \cup B = A \cup D$ et $A \cap B = A \cap D \iff B = D$.
5. $((A \times B) \cup (B \times A) = D^2) \iff (A = B = D)$.

●○○ Exercice 6 La différence symétrique (10 min.)

Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on note $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ la différence symétrique de A et B.

1. Déterminer $A \Delta A$ et $A \Delta \varnothing$.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Montrer que $\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})$.
4. Soit D une partie de A. Montrer que $A \Delta B = A \Delta D$ si et seulement si $B = D$.

●●○ Exercice 7 Unions nous, incluons nous (10 min.)

Expliciter les trois ensembles suivants :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[, \qquad \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{p}, \frac{2p+1}{p}\right[, \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\left[-k, -\frac{1}{k}\right[\cup \left]\frac{1}{k}, k\right]\right).$$

Fonctions

●●○ Exercice 8 Injectivité, surjectivité, bijectivité (15 min.)

Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
- $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = \mathrm{e}^{3+\ln(x)}$
- $h : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}^*$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$

●○○ Exercice 9 Encore des injections, des surjections, des bijections (15 min.)

Pour chacun des applications suivantes, justifier si elles sont injectives, surjectives, bijectives. Si elles sont bijectives, déterminer la bijection réciproque.

1. $f : k \in \mathbb{N} \longmapsto 3k+1 \in \mathbb{N}^*$.
2. $g : \mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $g(x) = \dfrac{3+2x}{x-5}$.
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $h(y) = \sqrt{y^2+y+1}$.
4. $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $i(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1}$.
5. $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $j(x, y) = (x + 2y, 5y - 3x)$.

●○○ Exercice 10 Image directe, image réciproque (5 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \ln(x^2+1)$.
Déterminer l'image directe par f de $[-1, 1]$. Déterminer l'image réciproque par f de $\mathbb{R}^+$ et de $[1, \ln(10)]$.

●●○ Exercice 11 Image directe et image réciproque d'intersection (15 min.)

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que, pour toutes parties A et B de F, on a
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$
2. a) Montrer que, pour toutes parties A et B de E, on a
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

b) On suppose que f est injective. Montrer alors que
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

●●○ Exercice 12 Des ensembles en bijection (10 min.)

Montrer que les ensembles suivants sont en bijection, en explicitant une telle bijection :
1. $[0, 1]$ et $[a, b]$.
2. $]0, 1]$ et $[0, +\infty[$.
3. $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers naturels pairs.
4. $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers naturels impairs.

●●○ Exercice 13 Des composées et des propriétés (15 min.)

Soient E, F, G et H des ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications.
1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. Qu'en est-il de g ? Montrer que g l'est si f est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. Qu'en est-il de f ? Montrer que f l'est si g est injective.
3. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives. La réciproque est-elle vraie ?

Pour aller plus loin

●●● Exercice 14 $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables (20 min.)

Définition 8.21.

On dit qu'un ensemble A est **dénombrable** s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.
2. a) Montrer que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sont en bijection.
   b) Montrer que l'application $(j, k) \in \mathbb{N}^2 \longmapsto 2^j(2k+1)$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$.
   c) En déduire que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sont dénombrables.
3. Soient A et B deux ensembles tels que B est dénombrable. On suppose qu'il existe une injection de A dans B. Montrer que A est dénombrable.
4. Construire une injection de $\mathbb{Q}$ dans une partie infinie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

●●○ Exercice 15 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable (15 min.)

Montrer qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
On pourra raisonner par l'absurde en introduisant une telle surjection f et en posant $A = \{x \in \mathbb{N}, \quad x \notin f(x)\}$.

●●● Exercice 16 Des bijectivités compliquées (15 min.)

1. On note E l'ensemble des suites (u_n) géométriques, telles que $u_0 \neq 0$.
   Montrer que l'application $f : E \to \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ définie par
   $$f((u_n)) = (u_0, u_1)$$
   est bijective.
2. Soit E un ensemble, A, B deux sous-ensembles de E. Soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par
   $$f(X) = (A \cap X, B \cap X).$$

a) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
b) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
c) À quelle condition sur A et B f est-elle bijective ? Si tel est le cas, déterminer f^{-1}.

●●● Exercice 17 Les intervalles sont en bijection ?!? (20 min.)

On note $f : [0,\, 1] \to [0,\, 1[$ définie par

- Si x s'écrit $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f(x) = \frac{1}{n+1}$;
- Sinon, $f(x) = x$.

Montrer que f est bijective ; en déduire que $[0,\, 1]$ et $[0,\, 1[$ sont en bijection.

On pourra écrire que $[0,\, 1] = A \cup \overline{A}$*, où* $A = \left\{ \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

Sans difficulté :

$$\overline{X} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,E,F\} \quad \overline{Y} = \{1,3,5,7,9,B,D,F\} \quad \text{et} \quad \overline{Z} = \{0,1,2,4,6,8,A,C,D,E,F\}$$

$$X \cap Y = \{A,C\} \quad Y \cup \overline{X} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,C,E,F\} \quad X \setminus Y = \{B,D\}$$

et enfin

$$\overline{\left(\overline{Y} \cap X\right) \cup Z} \setminus Y = \{1,F\}$$

Exercice 2

On raisonne par double inclusion : si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$.

- $[\subset]$: si $x \in \overline{A \cup B}$, cela veut dire que x n'est pas dans $A \cup B$, dont il n'est ni dans A, ni dans B. Il est ainsi dans $\overline{A}$ et $\overline{B}$: donc $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
$[\supset]$: si $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, cela veut dire que x n'est pas dans A et x n'est pas dans B. Il n'est donc ni dans A, ni dans B, donc pas dans $A \cup B$. Ainsi, $x \in \overline{A \cup B}$
- $[\subset]$: si $x \in \overline{A \cap B}$, cela veut dire que x n'est pas dans $A \cap B$, donc il n'est pas dans A, ou pas dans B. Donc il est dans $\overline{A}$ ou dans $\overline{B}$: donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
$[\supset]$: si $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, cela veut dire que x est dans $\overline{A}$ ou dans $\overline{B}$. Ainsi, il n'est pas dans A ou pas dans B. Dans tous les cas, il n'est pas dans $A \cap B$: $x \in \overline{A \cap B}$.
- $[\subset]$: si $x \in A \cup (B \cap C)$, cela veut dire que x est dans A, ou dans $B \cap C$, donc dans A ou dans B et C. Dans tous les cas, il est dans $A \cup B$ et dans $A \cup C$: $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
$[\supset]$: si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, cela veut dire que x est dans$A \cup B$ et dans $A \cup C$. Donc x est dans A, ou alors il est dans B et C, donc dans A ou dans $B \cap C$: $x \in A \cup (B \cap C)$.
- $[\subset]$: si $x \in A \cap (B \cup C)$, cela veut dire que x est dans A et dans $B \cup C$, donc dans A et dans B ou C. Donc x est dans A et B, ou dans A et C : $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. $[\supset]$: si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, cela veut dire que x est dans $A \cap B$ ou dans $A \cap C$, donc dans A et B, ou dans A et C. Dans tous les cas, x est dans A et dans B ou C : $x \in A \cap (B \cup C)$.

Exercice 3

On doit déterminer tous les sous-ensembles de $\{0,1,2\}$:

- à 0 élément, il n'y a que $\varnothing$.
- à 1 éléments, il y a $\{0\}, \{1\}$ et $\{2\}$.
- à 2 éléments, il y a $\{0,1\}, \{0,2\}$ et $\{1,2\}$.
- à 3 éléments, il n'y a que $\{0,1,2\}$.

Ainsi,

$$\mathcal{P}(\{0,1,2\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

On obtient bien $2^3 = 8$ sous ensembles.

De la même manière :

$$\mathcal{P}\left(\{A,C,G,T\}\right) = \{\varnothing, \{A\}, \{C\}, \{G\}, \{T\}, \{A,C\}, \{A,G\}, \{A,T\}, \{C,G\}, \{C,T\}, \{G,T\}, \{A,C,G\}, \{A,C,T\}, \{A,G,T\}, \{C,G,T\}, \{A,C,G,T\}\}.$$

Exercice 4

1. $I_0 = \{(u_n), \quad u_0 = 0\}$,

$$\begin{aligned}
M &= \{(u_n), \quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall\ n, u_n \leqslant M\} \\
B &= \{(u_n), \quad \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall\ n, |u_n| \leqslant M\} \\
L &= \{(u_n), \quad \exists \ell \in \mathbb{R}, \lim u_n = \ell\} \\
\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad L_k &= \{(u_n), \quad \exists \ell \in [k,\, k+1[, \lim u_n = \ell\} \\
C &= \{(u_n), \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}\} \\
G &= \{(u_n), \quad \exists q \in \mathbb{R}, \forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n\} \\
\overline{L} &= \{(u_n), \quad \forall\, \ell \in \mathbb{R}, \lim u_n \neq \ell\}
\end{aligned}$$

2. Les inclusions sont immédiates (une suite bornée est majorée, une suite convergente est bornée, et une suite croissante majorée est convergente d'après le théorème de convergence monotone). Pour les non égalités :
- La suite u définie pour tout n par $u_n = -n$ est majorée (par 0) mais pas bornée.
- La suite u définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée mais pas convergente.
- La suite u définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente mais pas monotone.

3. $L \cap G$ est composée des suites géométriques qui convergent dans $\mathbb{R}$. D'après le cours, il s'agit des suites géométriques de raison $q \in]0,\, 1]$.
4. Par définition et unicité de la limite, les (L_k) sont deux à deux disjoints. Elles sont non vides (les suites constantes égales à k, avec $k \in \mathbb{Z}$, convergent vers k). Intuivivement,

$$L = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} L_k$$

On le montre par double inclusion.
Si $u \in L_k$ alors la suite converge donc $u \in L$. Ainsi,

$$L \supset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} L_k$$

Réciproquement, soit $u \in L$. Puisque u converge, notons ℓ sa limite. Par définition, en notant $k = \lfloor \ell \rfloor$, $\ell \in [k,\, k+1[$ et donc $u \in L_{\lfloor \ell \rfloor}$. On a bien l'autre inclusion.

Exercice 5

1. Supposons $A \cup B = B \cap D$, et montrons les deux inclusions :
- Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$ et donc $x \in B \cap D$. On peut donc en déduire que $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$.
- Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$ et donc $x \in B \cap D$. Donc $x \in B$ et $x \in D$, c'est-à-dire $x \in D$. Ainsi, $B \subset D$.

2. Supposons que $\overline{A} \subset B$. D'une part, $A \cup B \subset E$ puisque A et B sont des sous-ensembles de E. Montrons l'inclusion inverse.
Soit $x \in E$ et procédons par disjonction de cas :
- Soit $x \in A$, et alors $x \in A \cup B$.
- Soit $x \notin A$, mais alors $x \in \overline{A}$. Or $\overline{A} \subset B$ donc $x \in B$ et finalement $x \in A \cup B$.

Ainsi, dans tous les cas, $x \in A \cup B$ et finalement $E \subset A \cup B$: on a bien l'égalité des ensembles.

3. Soit $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A$ et $x \notin B$. Ainsi, $x \notin \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$, et finalement $x \in \overline{B} \setminus \overline{A}$.
Réciproquement, soit $x \in \overline{B} \setminus \overline{A}$. Alors $x \in \overline{B}$ et $x \notin \overline{A}$, et donc $x \notin B$ et $x \in A$, c'est-à-dire $x \in A \setminus B$.
4. Supposons que $A \cup B = A \cup D$ et $A \cap B = A \cap D$. Soit $x \in B$. Alors faisons une disjonction de cas :

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B = A \cap D$ et donc $x \in D$.
- Si $x \notin A$, alors $x \in A \cup B = A \cup D$, donc $x \in A \cup D$ et mais $x \notin A$, donc $x \in D$.

Dans tous les cas $x \in D$ et finalement $B \subset D$. L'autre inclusion se fait de la même manière, et $B = D$.
Réciproquement, si $B = D$, alors on a rapidement $A \cup B = A \cup D$ et $A \cap B = A \cap D$.
5. Si $A = B = D$ alors imédiatement $(A \times B) \cup (B \times A) = (D \times D) \cup (D \times D) = D^2$.
Réciproquement, supposons que $(A \times B) \cup (B \times A) = D^2$.
Soit $x \in D$. Alors $(x, x) \in D^2$ et donc $(x, x) \in (A \times B) \cup (B \times A)$, c'est-à-dire $(x, x) \in A \times B$ ou $(x, x) \in B \times A$: dans tous les cas $x \in A$ et $x \in B$: $D \subset A$ et $D \subset B$.
Soit $x \in A$ et $y \in B$. Alors $(x, y) \in A \times B$ et donc $(x, y) \in D^2$: ainsi, $x \in D$ et $y \in D$. On a donc $A \subset D$ et $B \subset D$.
Par double inclusion, on en déduit donc que $A = D$ et $B = D$.

Exercice 6

1. Par définition, $A \Delta A = \varnothing$ et $A \Delta \varnothing = A$.
2. Procédons par double inclusion.
Soit $x \in A \Delta B$. Alors $x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$. Donc $x \in A$ ou $x \in B$ mais $x \notin A \cap B$, donc $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Réciproquement, soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Alors, $x \in A \cup B$ donc soit $x \in A$ mais alors $x \notin A \cap B$ donc $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in A \setminus B$; ou bien $x \in B$ mais alors $x \notin A$ et donc $x \in B \setminus A$.
Dans tous les cas, $x \in A \Delta B$.
3. Par définition de la différence, on a $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$ d'après la question précédente.
D'après les lois de de Morgan :

$$\begin{aligned}
\overline{A \, \Delta B} &= \overline{(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})} \\
&= \overline{A \cup B} \cup (\overline{\overline{A \cap B}}) \\
&= \overline{A \cup B} \cup (A \cap B)
\end{aligned}$$

4. Si $B = D$ alors $A \Delta B = A \Delta D$. Réciproquement, supposons que $A \Delta B = A \Delta D$ avec $D \subset A$.
Soit $x \in B$. Alors on procède par disjonction de cas :

- si $x \notin A$, alors $x \in A \Delta B$, et donc $x \in A \Delta D$ et puisque $x \notin A$, alors $x \in D$.
- si $x \in A$, alors $x in A \cap B$ et donc $x \in \overline{A \Delta B} = \overline{A \Delta D}$. Ainsi, $x \in A \cap D$ et donc $x \in D$.

Dans tous les cas, $x \in D$ et $B \subset D$. L'autre inclusion se traite de la même manière et finalement $B = D$.

Exercice 7

On va démontrer, par double inclusion, que :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}, \qquad \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{p}, \frac{2p+1}{p} \right[= [0, 2], \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\left[-k, -\frac{1}{k} \right[\cup \left] \frac{1}{k}, k \right] \right) = \mathbb{R}^*.$$

- Tout d'abord, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \in \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ donc

$$\{0\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[.$$

Réciproquement, si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, alors, pour tout n

$$-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$$

soit par passage à la limite, $x = 0$. Ainsi, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\subset \{0\}$ et on conclut quant à l'égalité.

- Remarquons que, pour tout entier $p \geqslant 1$ et pour tout $x \in [0, 2]$, on a

$$-\frac{1}{p} \leqslant x < 2 + \frac{1}{p} = \frac{2p+1}{p}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 2]$,

$$x \in \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{p}, \frac{2p+1}{p}\right[\implies [0, 2] \subset \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{p}, \frac{2p+1}{p}\right[$$

Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{p=1}^{+\infty} [-\frac{1}{p}, \frac{2p+1}{p}[$. Alors, pour tout $p \geqslant 1$, on a

$$-\frac{1}{p} \leqslant x < \frac{2p+1}{p}$$

soit, par passage à la limite

$$0 \leqslant x \leqslant 2$$

et finalement $x \in [0, 2]$ et donc

$$[0, 2] \supset \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{p}, \frac{2p+1}{p}\right[$$

On peut alors conclure, par double inclusion, que

$$[0, 2] = \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{p}, \frac{2p+1}{p}\right[$$

- Tout d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left[-k, -\frac{1}{k}\right[\cup \left]\frac{1}{k}, k\right] \subset \mathbb{R}^*$$

Ainsi,

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\left[-k, -\frac{1}{k}\right[\cup \left]\frac{1}{k}, k\right]\right) \subset \mathbb{R}^*$$

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}^*$. Si $x > 0$, puisque $k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ et $\frac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, il existe un entier p tel que $\frac{1}{p} < x \leqslant p$. Mais alors $x \in]\frac{1}{p}, p]$ et donc x est dans l'union. Le cas $x < 0$ se traite de la même manière.

Exercice 8

- **Injectivité**. *Rappel de la méthode : pour montrer qu'une fonction est injective, on écrit $f(x) = f(x')$ et on essaie de montrer que $x = x'$. Pour montrer qu'elle n'est pas injective, on exhibe un contre-exemple.*

f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$. En effet, $-1 \neq 1$ et pourtant $f(-1) = f(1) = 2$.

g est injective sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, soient x et x' deux réels strictement positifs. Alors

$g(x) = g(x') \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3+\ln(x)} = \mathrm{e}^{3+\ln(x')} \Leftrightarrow 3+\ln(x) = 3+\ln(x')$ car exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\ln(x) = \ln(x')$ puis $x = x'$ car la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
h est injective sur $\mathbb{R}$. En effet, soient x et x' deux réels. Alors

$$h(x) = h(x') \Leftrightarrow \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{x'^3+1} \Leftrightarrow x^3 + 1 = x'^3 + 1 \text{ en appliquant la fonction inverse}$$

donc $x^3 = x'^3$ puis $x = x'$ car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- **Surjectivité**. *Rappel de la méthode : pour montrer qu'une fonction est surjective sur un ensemble, on prend y un élément de cet ensemble, et on lui cherche au moins un antécédent. Pour montrer qu'elle n'est pas surjective, on exhibe un élément y de cet ensemble qui n'est pas atteint par la fonction.*

f n'est pas surjective. En effet, pour tout réel x, $x^2 + 1 \geqslant 1$, donc (par exemple) 0 n'est jamais atteint par la fonction f. *En revanche, elle est surjective sur* $[1; +\infty[$.
g n'est pas surjective. En effet, pour tout réel $x > 0$, $g(x) > 0$ (car une exponentielle est toujours positive), donc (par exemple) -1 n'est jamais atteint par la fonction g. *En revanche, elle est surjective sur* $]0; +\infty[$.
h est surjective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}^*$. Alors $h(x) = y$ nous donne $\frac{1}{x^3+1} = y$ puis $x^3 = \frac{1}{y} - 1$ ($y \neq 0$) et enfin $x = \sqrt[3]{\frac{1}{y} - 1}$ (fonction qui est bien définie sur $\mathbb{R}$).

- **Bijectivité**. f n'étant pas injective, elle n'est a fortiori par bijective. De même, g n'étant pas surjective, elle n'est pas bijective. Enfin, h étant à la fois injective et surjective, elle est bijective.

Exercice 9

1. L'application f est injective mais pas surjective. En effet, soient $(k, k') \in \mathbb{N}^2$. Alors

$$f(k) = f(k) \implies 3k + 1 = 3k' + 1 \implies k = k'$$

et la fonction est injective. En revanche, f n'est pas surjective car (par exemple) 2 n'est pas atteint. En efft :

$$f(k) = 2 \implies k = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$$

2. g est bijective. On peut démontrer l'injective puis la surjectivité, mais montrons directement la bijectivité. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On cherche $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ tel que $g(x) = y$. Alors :

$$\begin{aligned} g(x) = y &\Leftrightarrow \frac{3+2x}{x-5} = y \\ &\Leftrightarrow 3 + 2x = y(x-5) \text{ avec } x \neq 5 \\ &\Leftrightarrow x(2-y) = -5y - 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-5y-3}{2-y} \text{ car } y \neq 2 \end{aligned}$$

Ainsi, g est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, de bijection réciproque

$$g^{-1} : x \mapsto \frac{-5x-3}{2-x}$$

3. h n'est ni injective, ni surjective. Constatons tout d'abord que $y \mapsto y^2 + y + 1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$, donc h est bien définie. De plus, pour tout y, $y^2 + y + 1 \neq 0$ donc h ne s'annule jamais : h n'est pas surjective car 0 n'est pas atteint. Pour l'injectivité, soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $h(a) = h(b)$. Alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+a+1} = \sqrt{b^2+b+1} &\implies a^2 + a + 1 = b^2 + b + 1 \\ &\implies a^2 - b^2 + a - b = 0 \\ &\implies (a-b)(a+b) + a - b = 0 \\ &\implies (a-b)(a+b+1) = 0 \end{aligned}$$

On a alors deux possibilités : $a = b$ ou $a = -1 - b$, ce qui semble indiquer qu'elle n'est pas injective. On prend alors un contre exemple : $b = 0$ et $a = -1$. Alors $h(0) = 1 = h(-1)$: h n'est pas injective.

4. Remarquons que i est dérivable sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions exponentielles dont le dénominateur ne s'annule pas) et on a

$$\forall\ t \in \mathbb{R},\ i'(t) = \frac{\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^t+1) - (\mathrm{e}^t-1)\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2} = \frac{2\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2} > 0$$

La fonction i est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et donc injective. De plus :

$$\lim_{t\to-\infty} i(t) = -1 \text{ par quotient} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} i(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t(1-\mathrm{e}^{-t})}{\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^{-t})} = 1.$$

Ainsi, par stricte monotonie, on a $\forall\ t \in \mathbb{R}, -1 \leqslant i(t) \leqslant 1$ et donc i n'est pas surjective (2, par exemple, n'est pas atteint).

5. Soient (x, y) et (x', y') deux couples de $\mathbb{R}^2$ tels que $j(x, y) = j(x', y')$. On a alors $(x+2y, 5y-3x) = (x'+2y', 5y'-3x')$. On résout le système :

$$\begin{cases} x + 2y = x' + 2y' \\ -3x + 5y = 5y' - 3x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y = 11y' \\ -3x + \ 5y = 5y' - 3x' \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}.$$

Ainsi, $(x, y) = (x', y')$: la fonction j est injective.

Pour la surjectivité, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $j(x, y) = (a, b)$. Alors :

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ -3x + 5y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y = 3a + b \\ -3x + \ 5y = b \end{cases}$$
$$= \begin{cases} y = \frac{3}{11}a + \frac{1}{11}b \\ x = \frac{5}{11}a - \frac{2}{11}b \end{cases}.$$

Ainsi, j est surjective, et même bijective, d'application réciproque

$$(a, b) \mapsto \left(\frac{5}{11}a - \frac{2}{11}b, \frac{3}{11}a + \frac{1}{11}b\right).$$

Exercice 10

On raisonne par inégalité :

$$\begin{aligned} -1 \leqslant x \leqslant 1 &\iff 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \\ &\iff 1 \leqslant x^2 + 1 \leqslant 2 \\ &\iff \ln(1) \leqslant \ln(x^2+1) \leqslant \ln(2) \text{ car ln est bijective.} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f([-1,\ 1]) = [0,\ \ln(2)].$$

Réciproquement :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant f(x) \leqslant \ln(10) &\Leftrightarrow 1 \leqslant \ln(x^2+1) \leqslant \ln(10) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e} \leqslant x^2 + 1 \leqslant 10 \text{ car exp est bijective} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e} - 1 \leqslant x^2 \leqslant 9 \\ &\Leftrightarrow x \in [-3,\ -\sqrt{\mathrm{e}-1}] \cup [\sqrt{\mathrm{e}-1},\ 3] \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f^{-1}\left([1,\ \ln(10)]\right) = \left[-3,\ -\sqrt{\mathrm{e}-1}\right] \cup \left[\sqrt{\mathrm{e}-1},\ 3\right].$$

Pour $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} f(x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \ln(x^2+1) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x^2+1 \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 \geqslant 0 \text{ ce qui est vrai pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f^{-1}\left(\mathbb{R}^+\right) = \mathbb{R}.$$

Exercice 11

1. On procède par double inclusion. Soient A et B deux parties de F.
- $[\subset]$ Soit $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Alors, par définition $f(x) \in A \cap B$. Ainsi, $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$, et donc $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$: on peut conclure que $\boxed{x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)}$.
- $[\supset]$ Soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Alors, $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$. Par définition, $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$, et donc $f(x) \in A \cap B$. On en déduit ainsi que $\boxed{x \in f^{-1}(A \cap B)}$.

2. a) Soit $y \in f(A \cap B)$. Par définition, il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. Puisque $x \in A \cap B$, $x \in A$ et $x \in B$. Ainsi, $y = f(x)$ avec $x \in A$, c'est-à-dire $y \in f(A)$, mais $y = f(x)$ également avec $x \in B$: $y \in f(B)$. Finalement, $\boxed{y \in f(A) \cap f(B)}$.

b) Montrons l'autre inclusion dans le cas où f est injective. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Par définition :
- $y \in f(A)$: il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$
- $y \in f(B)$: il existe $b \in A$ tel que $y = f(b)$

> **Remarque**
> À ce niveau là, on ne peut pas conclure, parce qu'en théorie, ni a ni b ne sont dans $A \cap B$. On va utiliser l'hypothèse.

Ainsi, $y = f(a) = f(b)$. Mais f est injective, donc $a = b$. Ainsi, $a \in A$ mais $a = b \in B$, donc finalement $a \in A \cap B$.
On peut conclure : $y = f(a)$ avec $a \in A \cap B$, et donc $y \in f(A \cap B)$, ce qui démontre l'autre inclusion.

Exercice 12

Pour chacun des cas, il faut d'une part déterminer une fonction puis montrer qu'elle est bijective.
1. Soit $a < b$. Prenons $f : [0,\, 1] \to [a,\, b]$ définie par $f : x \mapsto (b-a)x + a$. Alors f est strictement croissante (car $b - a > 0$) donc injective. De plus, soit $y \in [a,\, b]$:

$$\begin{aligned} (b-a)x + a = y &\Leftrightarrow (b-a)x = y - a \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y-a}{b-a} \in [0,\, 1] \text{ car } y \in [a,\, b] \end{aligned}$$

2. Soit $f :]0,\, 1] \to [0,\, +\infty[$ définie par $f : x \mapsto \frac{1}{x} - 1$. f est bijective ; en effet, soit $y \in [0,\, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 = y \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} = y + 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{y+1} \text{ car } y \geqslant 0 \end{aligned}$$

On remarque que, si $y \in [0,\, +\infty[$, $y + 1 \in [1,\, +\infty[$ et donc $\frac{1}{y+1} \in]0,\, 1]$. f est bien bijective.

3. Prenons $f : \mathbb{N} \to \{2p,\, p \in \mathbb{N}\}$ définie par $f(n) = 2n$. f est bijective. Soit $y \in \{2p,\, p \in \mathbb{N}\}$; on écrit $y = 2p$ pour $p \in \mathbb{N}$. Alors

$$f(n) = y \Leftrightarrow 2n = 2p \Leftrightarrow n = p \in \mathbb{N}$$

Ainsi, f est bijective.
4. De la même manière, on introduit $f : \mathbb{N} \to \{2p+1,\, p \in \mathbb{N}\}$ définie par $f(n) = 2n+1$.

Exercice 13

1. Supposons $g \circ f$ injective. Soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Alors, en appliquant g :

$$g(f(x)) = g(f(x')) \implies x = x'$$

puisque $g \circ f$ est injective. Ainsi, f est bien injective.
En revanche, g ne l'est pas forcément. Par exemple, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, définie par $g : x \mapsto x^2$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$. $g \circ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est égale à $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}^+$ et est donc injective. Or g ne l'est pas.
Si f est surjective, montrons que g est injective. Soient $y, y' \in F^2$ tels que $g(y) = g(y')$. f étant surjective, il existe $x, x' \in E^2$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Mais alors

$$g(y) = g(y') \implies g(f(x)) = g(f(x'))$$

et par injectivité de $g \circ f$, $x = x'$. En appliquant g, $g(x) = g(x')$, c'est-à-dire $y = y'$: g est injective.
2. Supposons $g \circ f$ surjective. Montrons que g est surjective : soit $y \in G$. $g \circ f$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$. Ce qu'on peut écrire $g(a) = y$ avec $a = f(x)$: g est bien surjective.
En revanche, f ne l'est pas forcément. Par exemple, prenons $f : R+ \to R$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x^2$. $g \circ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est définie par $g \circ f(x) = x$ est surjective, mais f ne l'est pas.
Si g est injective, montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. $g(y) \in G$. $g \circ f$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = g(y)$, c'est-à-dire $g(f(x)) = g(y)$. g étant injective, $f(x) = y$ et on a bien prouvé que f est surjective.
3. On utilise ce qui précède. $g \circ f$ est bijective, donc injective et surjective. On peut donc conclure que g est surjective.
$h \circ g$ est bijective, donc injective et surjective. Ainsi, g est injective.
On a donc déjà que g est bijective. Puisque $g \circ f$ est bijective également, par composée $g^{-1} \circ (g \circ f) = f$ est bijective. De même, $h \circ g$ est bijective, donc $(h \circ g) \circ g^{-1} = h$ est bijective.
Bilan : f, g et h sont bijectives. La réciproque est bien sûr vraie, si f, g et h sont bijectives, leurs composées le sont.

Corrigés des exercices approfondis

Exercice 14

1. Les applications suivantes sont bijectives :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

ce qui nous permet de conclure que $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection, et que $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.

2. a) On utilise les deux bijections précédentes : l'application $h : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ définie par $h(n,p) = (g(n), f(p))$ est une bijection.
b) Remarquons tout d'abord que tout nombre $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire sous la forme $2^j(2k+1)$: en mettant la plus grande puissance de 2 en facteur, le reste n'est pas un multiple de 2, donc est impair. L'application donnée est donc surjective. Pour l'injectivité, soient $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ ayant la même image. On a donc

$$2^j(2k+1) = 2^m(2n+1)$$

Si $j \geqslant m$ (l'autre cas étant similaire), on peut écrire

$$2^{j-m}(2k+1) = 2n+1$$

Or, $2n+1$ est un nombre impair, donc non divisible par 2. Nécessairement, $j-m=0$, c'est-à-dire $j=m$. Mais alors, on en déduit rapidement que $2k+1 = 2n+1$, c'est-à-dire $k=n$. L'application est bien injective, et finalement bijective.
c) D'après ce qui précède, $\mathbb{N}^*$ étant dénombrable, $\mathbb{N}^2$ l'est également. Mais alors, par la question (a), on en déduit que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est également dénombrable.
3. On note f l'injection de A dans B. Par définition, f est une bijection de A dans $f(A) \subset B$. B étant dénombrable, il existe une bijection g de B dans une partie $\mathbb{N}$. Notons alors $h : A \to \mathbb{N}$ définie par $h = g \circ f$. Par composition, h est bien définie et est injective (composée de deux fonctions injectives). Donc h est une bijection de A dans $h(A) \subset \mathbb{N}$: on a bien une bijection de A dans une partie de $\mathbb{N}$, ce qui permet de conclure que A est dénombrable.
4. Pour construire une bijection de $\mathbb{Q}$ dans une partie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on va simplement partir de la définition de $\mathbb{Q}$. Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on peut l'écrire de manière unique $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q sont premiers entre eux (c'est-à-dire que la fraction est irréductible). Alors, on définit l'application L par $L(r) = (p,q)$. On montre que c'est une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, et donc, puisque $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable, en vertu de la question précédente, $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 15

Supposons qu'il existe une telle surjection, que l'on note f. Notons

$$A = \{x \in \mathbb{N}, \quad x \notin f(x)\}.$$

Remarquons que A est bien définie (puisque $f(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$) et est une partie de $\mathbb{N}$.
Puisque f est une surjection sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, il existe $x_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_0) = A$. Montrons que ceci est une contradiction :

- Si $x_0 \in A$, alors $x_0 \in f(x_0) = A$ et donc, par définition de A, $x_0 \notin A$. C'est absurde.
- Si $x_0 \notin A$, alors $x_0 \notin f(x_0) = A$ et donc, par définition de A, $x_0 \in A$. C'est absurde.

Dans tous les cas, l'existence de x_0 est impossible, d'où la contradiction : il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Mais alors, il ne peut exister de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: ainsi, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

> **Remarque**
> Cette démonstration, et cette manière de raisonner, est due à **Georg Cantor** (1845–1918).

Exercice 16

1. Soient deux suites u et v de E tels que $f(u) = f(v)$. Par définition

$$(u_0, u_1) = (v_0, v_1) \iff u_0 = v_0 \quad \text{et} \quad u_1 = v_1.$$

Remarquons donc que les suites u et v ont le même premier terme, mais également la même raison ; en effet, puisque $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $v_0 \in \mathbb{R}^*$, on constate que

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{u_1}{u_0}.$$

Ce quotient donnant la raison des suites géométriques, on peut conclure que u et v ayant même premier terme et même raison, elles sont égales. f est donc injective.
Elle est également surjective. Prenons deux réels $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Posons la suite géométrique u de premier terme $u_0 = a \in \mathbb{R}^*$ et de raison $q = \frac{b}{a}$ (qui a un sens car $a \neq 0$). Par construction, $u \in E$ et on a bien

$$f(u) = (u_0, u_1) = (u_0, qu_0) = (a, b).$$

Finalement f est bien surjective, et donc bijective.
2. a) Soient X et Y tels que $f(X) = f(Y)$. Alors

$$A \cap X = A \cap Y \quad \text{et} \quad B \cap X = B \cap Y.$$

Si $A \cup B = E$, alors les résultats précédents donnent

$$(A \cap X) \cup (B \cap X) = (A \cap Y) \cup (B \cap Y)$$

soit par distributivité :

$$(A \cup B) \cap X = (A \cup B) \cap Y \implies E \cap X = E \cap Y \implies X = Y.$$

f est injective.
Supposons maintenant que $A \cup B \neq E$. Soit $C = E \backslash (A \cup B) \neq \varnothing$. Alors

$$f(C) = (\varnothing, \varnothing) \quad \text{et} \quad f(\varnothing) = (\varnothing, \varnothing).$$

Ainsi, $f(C) = f(\varnothing)$ et pourtant $C \neq \varnothing$: f n'est pas injective.
b) Supposons $A \cap B = \varnothing$. Soit $Y \in \mathcal{P}(A)$ et $Z \in \mathcal{P}(B)$. Notons $X = Y \cup Z \in \mathcal{P}(E)$. Par distributivité :

- $X \cap A = (Y \cap A) \cup (Z \cap A) = Y$ car $Y \subset A$ et $Z \subset B$ avec $A \cap B = \varnothing$.
- $X \cap B = (Y \cap B) \cup (Z \cap B) = Z$ car $Z \subset B$ et $Y \subset A$ avec $A \cap B = \varnothing$.

Ainsi, $f(X) = (Y, Z)$: f est donc surjective.
Supposons $A \cap B \neq \varnothing$. Soit $x \in A \cap B$, et notons $Y = \{x\}$. $Y \in \mathcal{P}(A)$. Prenons $Z \in \mathcal{P}(B)$ tel que $x \notin Z$. Alors le couple (Y, Z) n'a pas d'antécédent par f. En effet, s'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = (Y, Z)$, cela implique que

$$X \cap A = Y \quad \text{et} \quad X \cap B = Z.$$

Puisque $x \in Y$, nécessairement, puisque $X \cap A = Y$, $x \in X$. Mais alors $x \in X \cap B$ puisque $x \in B$: c'est absurde puisque $x \notin Z$. f n'est donc pas surjective.
c) D'après les résultats précédents, f est bijective si elle est à la fois injective et surjective. Donc f est bijective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$, c'est-à-dire si A et B sont complémentaires : $B = \overline{A}$.
f s'écrit alors $f : X \longmapsto (A \cap X, \overline{A} \cap X)$. Soit alors $(Y, Z) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}\overline{A}$. Alors

$$f(X) = (Y, Z) \iff A \cap X = Y \quad \text{et} \quad \overline{A} \cap X = Z \iff X = Y \cup Z.$$

Ainsi,

$$\boxed{f^{-1} : (Y, Z) \longmapsto Y \cup Z.}$$

Exercice 17

Montrons que f est injective. On utilise l'indication : $[0,1] = A \cup \overline{A}$ où $A = \left\{\frac{1}{n},\quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Soient $(x,x') \in [0,1]^2$ tels que $f(x) = f(x')$. Raisonnons par disjonction de cas :

- Si x et x' sont dans A. Il existe deux entiers non nuls n et p tels que $x = \frac{1}{n}$ et $x' = \frac{1}{p}$. Alors $f(x) = \frac{1}{n+1}$ et $f(x') = \frac{1}{p+1}$. Puisque $f(x) = f(x')$, on en déduit que $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{p+1}$, c'est-à-dire $n = p$: on en déduit donc que $x = x'$.
- Si x est dans A et x' est dans $\overline{A}$ (le cas x dans $\overline{A}$ et x' dans A est symétrique). Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{1}{n}$. Alors

$$f(x) = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad f(x') = x'.$$

Or on ne peut pas avoir $f(x) = f(x')$, puisque dans ce cas $x' = \frac{1}{n+1} \in A$, ce qui est absurde car $x' \in \overline{A}$. Ce cas n'est pas possible.
- Enfin, si x et x' sont des éléments de $\overline{A}$, alors $f(x) = x$ et $f(x') = x'$, et alors $f(x) = f(x') \implies x = x'$.

Dans tous les cas possibles, $f(x) = f(x') \implies x = x'$: f est injective.
Montrons que f est surjective. Soit $y \in [0,\ 1[$. Deux possibilités à nouveau :

- si $y \in A$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = \frac{1}{n}$. Par ailleurs, puisque $y \in [0,\ 1[$, $y \neq 1$ et donc $n \geqslant 2$. Mais alors

$$f\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n} = y$$

et $\frac{1}{n-1} \in [0,\ 1]$.
- si $y \notin A$, alors $f(y) = y$ et $y \in [0,\ 1]$.

Dans tous les cas il existe au moins un antécédent à $y \in [0,\ 1[$: f est surjective.
Bilan : f est bijective ; ainsi, $[0,\ 1]$ et $[0,\ 1[$ sont en bijection.