Chapitre 7

Convergence d'une suite

Résumé

Nous allons généraliser la notion de limite, qui a été vue en classe de Terminale. Nous introduirons des méthodes pour déterminer les limites et des théorèmes permettant de montrer l'existence de limites.

Plan du cours

> *« Quand je regardais le tableau, j'éprouvais la même convergence en un seul et unique point : un bref instant touché par le soleil qui existait maintenant et pour toujours. C'est fortuitement que je remarquais ma chaîne à la cheville de l'oiseau, ou que je songeais combien la vie de cette petite créature, battant brièvement des ailes puis toujours forcée, sans espoir, d'atterrir au même endroit, avait dû être cruelle. »*

Donna Tartt (1963-) – *Le Chardonneret*

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les limites :

- Connaître la définition mathématique des limites
- Savoir déterminer des limites en utilisant les théorèmes (somme, produit, quotient)
- Savoir utiliser le théorème d'encadrement et les théorèmes de comparaison
- Connaître les croissances comparées
- Savoir appliquer le théorème de la limite monotone

② Savoir reconnaître les suites adjacentes

③ Savoir démontrer qu'un suite est négligeable devant une autre

④ Savoir démontrer que deux suites sont équivalentes

I. Généralités

1. Limite finie

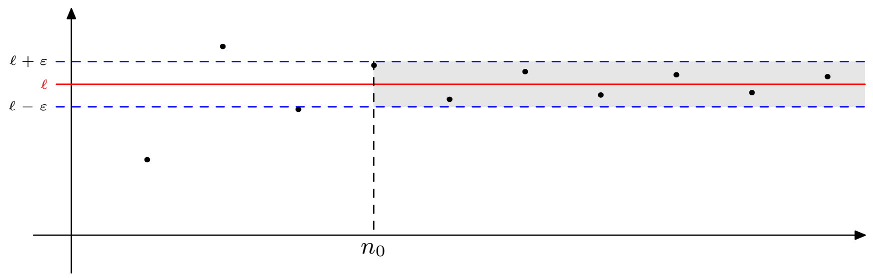
Définition 7.1.

Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel. Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** ℓ, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Mathématiquement, (u_n) a pour limite ℓ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$



Exemple 7.1

La suite u définie pour tout n par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0 :

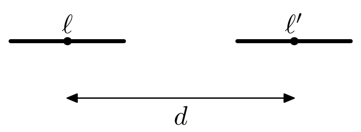
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Propriété 7.1.

Si une suite (u_n) a une limite finie, celle-ci est **unique**.

Démonstration

On suppose que (u_n) converge vers ℓ et ℓ' et que $\ell \neq \ell'$. Donc la distance entre ℓ et ℓ' est non nulle. On la note d, on prend $\varepsilon = \frac{d}{4}$ et on s'intéresse aux deux intervalles $]\ell - \frac{d}{4}, \ell + \frac{d}{4}[$ et $]\ell' - \frac{d}{4}, \ell' + \frac{d}{4}[$.



Par définition de la convergence de (u_n) vers ℓ, il existe un rang n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, on ait

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \implies u_n \in \left]\ell - \frac{d}{4}, \ell + \frac{d}{4}\right[$$

De même, il existe un rang n_2 tel que, pour tout $n \geqslant n_2$, on ait

$$|u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon \implies u_n \in \left]\ell' - \frac{d}{4}, \ell' + \frac{d}{4}\right[$$

Mais alors, pour tout $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, on a

$$u_n \in \left]\ell - \frac{d}{4}, \ell + \frac{d}{4}\right[\cap \left]\ell' - \frac{d}{4}, \ell' + \frac{d}{4}\right[= \varnothing$$

ce qui est absurde, les deux intervalles étant disjoints.

2. Limite infinie

Définition 7.2.

Soit (u_n) une suite.

- Si tout intervalle de la forme $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** $+\infty$, et on note

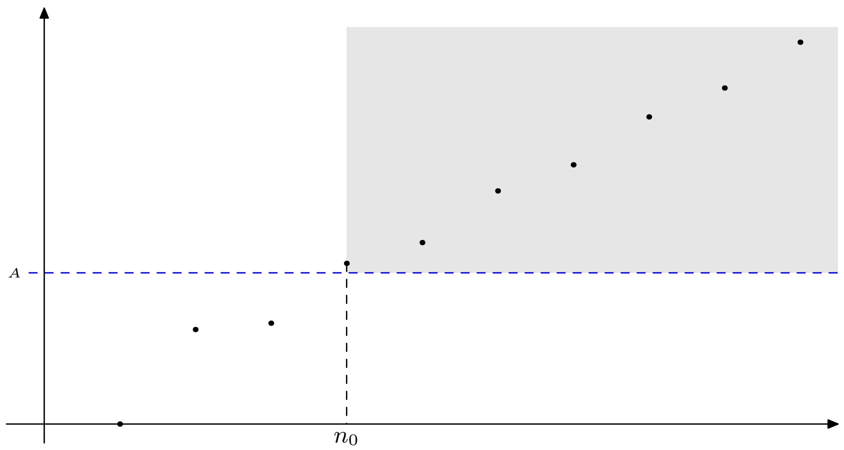
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

- Si tout intervalle de la forme $]-\infty, a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** $-\infty$, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Mathématiquement, (u_n) a pour limite $+\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > A$$



Exemple 7.2

La suite u définie pour tout n par $u_n = n$ a pour limite $+\infty$, et la suite v définie pour tout n par $v_n = -n^2$ a pour limite $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$$

Algorithme 7.2.

Si une suite **croissante** (u_n) a pour limite $+\infty$, on peut utiliser l'algorithme suivant pour déterminer le plus petit entier n vérifiant $u_n > A$ (où A est un réel positif quelconque) :

Algorithme 1 : SEUIL

Entrées : Saisir A (nombre positif)
Initialisation :
$n \leftarrow 0$
$U \leftarrow u_0$
Tant que $U \leqslant A$
  $n \leftarrow n+1$
  $U \leftarrow u_n$
FinTantque
Sorties : Afficher n

En Python, pour la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n,\ u_{n+1} = 1 + u_n^2 \end{cases}$$

on obtient :

Code Python

```python
def seuil(val):
    n=0
    u=1
    while u<val:
        n=n+1     # on passe au rang suivant
        u=1+u**2  # on calcule le terme suivant de la suite
    return n      # on renvoie le rang du premier dépassement
```

ce qui donne, par exemple :

Console Python

```
>>> seuil(1000)
5
```

3. Suite convergente

Définition 7.3.

On dit qu'une suite est **convergente** si elle possède une limite finie. On dit qu'elle est **divergente** dans le cas contraire.

4. Suite sans limite

Remarque

Certaines suites ne possèdent aucune limite, que ce soit finie ou infinie.

Exemple 7.3

La suite $((-1)^n)$ prend la valeur 1 aux termes pairs, et -1 aux termes impairs. Elle ne peut donc ni converger, ni tendre vers l'infini : elle ne possède donc pas de limite.

II. Théorèmes sur les limites

1. Théorème de comparaison

Théorème 7.3.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Si, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration

Supposons au contraire que $\ell > \ell'$. En notant d la distance (non nulle) entre ℓ et ℓ', et en prenant $\varepsilon = \frac{d}{4} > 0$, cela signifie qu'à partir d'un certain rang n_1, les termes de la suite (u_n) se trouve dans l'intervalle $]\ell - \frac{d}{4}, \ell + \frac{d}{4}[$.

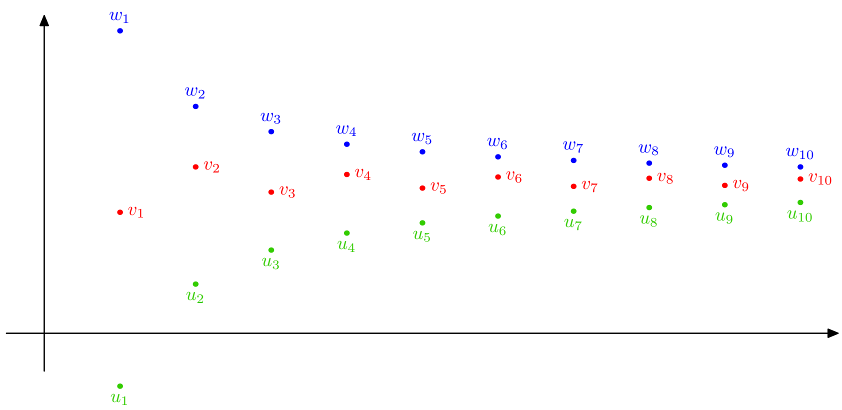
Or, $v_n \geqslant u_n$, donc, à partir d'un certain rang $v_n \geqslant \ell - \frac{d}{4} > \ell' + \frac{d}{4}$. Donc l'intervalle $]\ell' - \frac{d}{4}, \ell' + \frac{d}{4}[$ ne contient aucun élément de la suite (v_n) à partir d'un certain rang : absurde.

2. Théorème d'encadrement

Théorème 7.4. Théorème d'encadrement

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$. Alors, (v_n) converge et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$



Remarque

Ce théorème est également appelé théorème des gendarmes.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Par définition de la limite, il existe un rang n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. De même, il existe un rang n_2 tel que, pour $n \geqslant n_2$, $|w_n - \ell| < \varepsilon$.

Mais alors, pour tout n plus grand que n_1 **et** n_2, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et $|w_n - \ell| < \varepsilon$. Or, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, donc, pour $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, on en déduit

$$-\varepsilon < u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell < \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$|v_n - \ell| < \varepsilon$$

On en déduit bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Méthode

Pour déterminer la limite d'une suite où $(-1)^n$ apparait, on appliquera (quasi) systématiquement le théorème d'encadrement.

Exemple 7.4

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n>0$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n+2}{n}$$

Solution

Pour tout $n \neq 0$, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $1 \leqslant (-1)^n+2 \leqslant 3$ et puisque $n>0$, on a

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n+2}{n} \leqslant \frac{3}{n}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$. Par le théorème d'encadrement, la limite de (u_n) existe et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n+2}{n} = 0$$

Théorème 7.5.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ un réel. On suppose que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n-\ell| \leqslant v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Démonstration

Application du théorème d'encadrement.

Exemple 7.5

On constate que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi, d'après le théorème précédent, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et a pour limite 0.

Théorème 7.6. Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- Si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration

Démontrons le premier point. Soit A un réel strictement positif quelconque. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $v_n \geqslant a$. Or, puisque pour tout n, $u_n \geqslant v_n$,

on a également $u_n \geqslant a$ pour $n \geqslant n_0$.
Par définition de la limite infinie, cela signifie donc que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3. Suite extraite

On dispose d'une propriété importante, portant sur la notion de **suite extraite** d'une suite :

Proposition 7.7.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors (u_n) admet une limite ℓ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent toutes les deux ℓ comme limite.

Démonstration

On raisonne par double implication.

- Suposons que (u_n) tende vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant 0$, on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Mais alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $2n \geqslant n_0$ et $2n+1 \geqslant n_0$, donc
$$|u_{2n} - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$$
Ainsi, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent toutes les deux vers ℓ.
- Réciproquement, supposons que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers la même limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe un rang n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, on ait $|u_{2n} - \ell| < \varepsilon$. De même, il existe un rang n_2 tel que, pour tout $n \geqslant n_2$, on ait $|u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$.
Soit $n \geqslant N = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$.
  - Si n est pair, il s'écrit $n = 2p$ et puisque $n \geqslant N$, $n \geqslant 2n_0$ et donc $p \geqslant n_0$. On peut garantir alors que
$$|u_n - \ell| = |u_{2p} - \ell| < \varepsilon$$
  - Si n est impair, il s'écrit $n = 2p + 1$ et puisque $n \geqslant N$, $n \geqslant 2n_1 + 1$ et donc $p \geqslant n_1$. On peut garantir alors que
$$|u_n - \ell| = |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon$$

  Dans tous les cas, si $n \geqslant N$, alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$. On peut alors conclure que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Remarque

Il est intéressant d'utiliser la contraposée de cette proposition : si l'une des deux suites (u_{2n}) ou (u_{2n+1}) ne convergent pas, ou bien si elles n'ont pas la même limite, alors la suite initiale (u_n) ne converge pas.
Par exemple, la suite $((-1)^n)$ ne converge pas ; en effet, la suite $((-1)^{2n})$ est constante égale à 1, donc converge vers 1, et $((-1)^{2n+1})$ est constante égale à -1, donc converge vers -1.

4. Convergence des suites monotones

Théorème 7.8. Théorème de la limite monotone

Toute suite (u_n) croissante majorée converge, et sa limite est égale à $\sup\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.
Toute suite (u_n) décroissante minorée converge, et sa limite est égale à $\inf\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$..

Démonstration

Traitons le premier cas, et supposons (u_n) croissante et majorée. Notons $A = \{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.

Cette partie est non vide (car elle contient, au moins, u_0) et est majorée (puisque (u_n) l'est). D'après le théorème de la borne supérieure, A admet une borne supérieure, que l'on note ℓ.
Par définition, on a déjà que

$$\forall\, n,\ u_n \leqslant \ell$$

Soit $\varepsilon > 0$, et intéressons nous à $\alpha = \ell - \varepsilon$. Puisque ℓ est la borne supérieure de A, α ne l'est pas, et il existe donc un élément $a \in A$ tel que $a > \alpha$. Dit autrement, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a = u_{n_0} > \alpha = \ell - \varepsilon$. Mais alors, puisque (u_n) est croissante, on peut en déduire que

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n > \ell - \varepsilon \implies \ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell$$

et donc

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Attention

Une suite croissante majorée par M converge, mais pas forcément vers M ! Sa limite est en revanche inférieure ou égale à M.

Théorème 7.9.

Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Soit A un réel fixé. La suite étant non majorée, on peut trouver un terme u_N de la suite strictement supérieur à A. On a donc $u_N > A$.
Or, la suite u étant croissante, on a, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N > A$. Par définition, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Exemple 7.6

La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ est croissante, non majorée : sa limite est $+\infty$.
La suite v définie pour tout $n > 0$ par $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante, majorée (par 1) : elle converge donc.

Théorème 7.10.

Soit (u_n) une suite **croissante** de limite ℓ. Alors, pour tout entier n, on a $u_n \leqslant \ell$.

Démonstration

Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$. Notons $r = u_{n_0} - \ell > 0$. Par croissance de la suite u, on a donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$. Mais alors, l'intervalle $]\ell - r; \ell + r[$ ne contient aucun terme de la suite à partir de n_0. Cela contredit le fait que la suite u converge vers ℓ : ceci est absurde.

III. Opération sur les limites

1. Limites usuelles

Théorème 7.11.

On dispose des limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty \,(p\in\mathbb{N}^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (p\in\mathbb{N}^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} |n| = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty \,(\alpha\in\mathbb{R}_+^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0 \,(\alpha\in\mathbb{R}_-^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

2. Limite de $u_n + v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Exercice 7.7

Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\sqrt{n}$.

Solution

En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\sqrt{n} = +\infty$.

3. Limite de $u_n \times v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell.\ell'$	signe$(\ell').\infty$	-signe$(\ell').\infty$
$+\infty$	signe$(\ell).\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	-signe$(\ell).\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

On retiendra qu'on applique la règle des signes pour déterminer le signe du résultat.

Exercice 7.8

Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^n$.

Solution

En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^n = +\infty$.

4. Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) n'est pas nulle

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	signe$(\ell').\infty$	-signe$(\ell').\infty$
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

Exercice 7.9

Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}-1}$.

Solution

Par somme, on a les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} 2-\frac{1}{n} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}-1 = -1$$

Par quotient, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}-1} = -2$$

5. Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) est nulle

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	0	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	signe$(l).\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	-signe$(l).\infty$	$-\infty$	$+\infty$

6. Limite de (q^n)

Théorème 7.12.

Soit q un nombre réel. On s'intéresse à la suite (q^n).

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$.
- Si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) ne possède pas de limite.

Démonstration

Tout part de l'inégalité de Bernoulli, qui se démontre à l'aide d'une récurrence : pour tout $x > 0$, et pour tout entier n, on a

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

- Si $q > 1$, on peut écrire $q = 1+x$ avec $x = q-1 > 0$. D'après l'inégalité de Bernoulli

$$q^n \geqslant 1+nx = 1+n(q-1)$$

Or, puisque $q-1>0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} 1+n(q-1)=+\infty$$

Par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$$

- Si $q=1$, la suite (q^n) est la suite constante égale à 1. Elle converge donc vers 1.
- Si $-1<q<1$, posons $Q=\frac{1}{|q|}>1$. Alors, d'après ce qui précède

$$\lim_{n\to+\infty} Q^n=+\infty$$

Or, on a

$$0\leqslant |q|^n=\left(\frac{1}{Q}\right)^n=\frac{1}{Q^n}$$

Par théorème d'encadrement, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} Q^n=+\infty$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} |q|^n=0 \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} q^n=0$$

- Si $q=-1$, la suite $(-1)^n$ vaut 1 pour les termes pairs, et -1 pour les termes impairs. Elle ne peut donc converger.
- Si $q<-1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n=+\infty$. Donc la suite $(|q|^n)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut. Or, la suite (q^n) prend des valeurs positives pour les termes pairs, et négatives pour les termes impairs. Elle ne peut donc pas avoir de limite.

Méthode

Pour déterminer la limite d'une suite composée de puissances, on met les plus grandes puissances en facteur, et on utilise le résultat précédent.

Exercice 7.10

Soit u la suite définie pour tout entier n par

$$u_n=\frac{3^n+4^n}{3\times 4^n+2^n}$$

Déterminer la limite de la suite u.

Solution

Pour tout entier n, on a

$$u_n=\frac{4^n\left(1+\frac{3^n}{4^n}\right)}{4^n\left(3+\frac{2^n}{4^n}\right)}=\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{4}\right)^n}$$

Puisque $-1<\frac{3}{4}<1$ et $-1<\frac{2}{4}<1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^n=0$$

Par somme et quotient, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{3}$$

☞ *Exercices 1, 2, 3 et 4.*

7. Croissances comparées

Théorème 7.13. Croissances comparées

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^a} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{\ln^b(n)} = +\infty$$

et de manière générale, pour $q > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{q^n} = +\infty$$

Remarque

On note souvent de la manière suivante (avec $q > 1$ et $a > 0$) :

$$\ln^b(n) << n^a << q^n << n!$$

On donnera une notation rigoureuse à la fin de ce chapitre.

Démonstration

Voir chapitre Limite de fonctions.

Exemple 7.11

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

Exercice 7.12

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\ln(n)}{n+1}$.

Solution

On constate que, pour tout $n > 0$:

$$\frac{n+\ln(n)}{n+1} = \frac{n\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+\frac{\ln(n)}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Par somme, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{\ln(n)}{n} = 1$. On a également $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$. Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\ln(n)}{n+1} = 1$$

☞ *Exercice 5.*

IV. Suites adjacentes

Définition 7.4.

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Exemple 7.13

Les suites u et v définies pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = -\frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Solution

En effet, la suite u est croissante et v est décroissante : pour tout n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{-n+(n+1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Enfin, pour tout n,

$$v_n - u_n = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Théorème 7.14.

Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes, et elles ont la même limite.

Démonstration

Commençons par montrer que la définition des suites adjacentes entraîne que, pour tout n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

Soit (w_n) la suite définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - u_n$. Remarquons que, pour tout n :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\leqslant 0} - \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geqslant 0} \leqslant 0$$

La suite (w_n) est donc décroissante, et de limite 0 : cela implique que tous les termes de la suite (w_n) sont positifs et finalement, pour tout entier n, $v_n \geqslant u_n$.

En utilisant la croissance de (u_n) et la décroissance de (v_n), on peut alors écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$

La suite (u_n) est donc croissante majorée par v_0 : elle converge, vers une limite que l'on note ℓ. De même, la suite (v_n) est décroissante minorée par u_0 : elle converge, vers ℓ'. Or, par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Par opération sur les limites, cela implique $\ell - \ell' = 0$, soit $\ell = \ell'$.

Méthode

Pour montrer que deux suites sont adjacentes, on montre qu'une est croissante, l'autre est décroissante et que la différence des deux tend vers 0.

Exercice 7.14

Soient u et v deux suites définies pour tout $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Montrer que u et v sont adjacentes.

Solution

Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc la suite (u_n) est croissante. De même

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{nn!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{nn!}$$

Après mise au même dénominateur

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1).(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1).(n+1)!} < 0$$

donc la suite (v_n) est décroissante. Enfin $v_n - u_n = \frac{1}{n.n!}$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n.n!} = 0 \text{ par quotient}$$

Bilan : les suites u et v sont bien adjacentes.

Remarque

Etant adjacentes, elles convergent, et ont la même limite. On peut montrer que leur limite commune est e.

☞ *Exercice 9.*

V. Comparaison de suites

L'idée de cette section est d'introduire des méthodes de comparaison de suites, permettant de déduire certains résultats sur les limites.

1. Négligeabilité

Définition 7.5.

Soient u et v deux suites, v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que u est négligeable par rapport à v au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On note alors $u_n = o_{+\infty}(v_n)$, ou plus simplement $u_n = o(v_n)$, et on lit « u est un petit o de v au voisinage de $+\infty$ ».

Exemple 7.15

On a $n = o(n^2)$.

Solution

En effet, $\dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Propriété 7.15. Opérations sur la négligeabilité

Soient u, v et w trois suites non nulles à partir d'un certain rang.

① (Multiplication par un réel) Si $u_n = o(v_n)$ alors pour tout réel k, $ku_n = o(v_n)$.

② (Quotient) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$ et $\dfrac{u_n}{w_n} = o\left(\dfrac{v_n}{w_n}\right)$.

③ (Transitivité) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.

④ (Somme) Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n + w_n = o(v_n)$.

Démonstration

Démontrons par exemple le second point. Puisque les suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, on peut s'intéresser à leur quotient :

$$\frac{u_n w_n}{v_n w_n} = \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{\frac{u_n}{w_n}}{\frac{v_n}{w_n}} = \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Les autres se démontrent de la même manière.

Remarque

Attention : pour la somme, il faut que les suites soient négligeables par rapport à une même suite.

Exercice 7.16

Montrer que $\mathrm{e}^{-n} = o(n^4)$ et que $\ln(n) - 2n^2 = o(n^4)$.

Solution

Remarquons que

$$\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n^4} = \frac{1}{\mathrm{e}^n n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{par quotient.}$$

Enfin, $\ln(n) = o(n^4)$ et $n^2 = o(n^4)$ (par croissances comparées). Par somme, $\ln(n) - 2n^2 = o(n^4)$.

Remarque

Une suite vérifiant $u = o(1)$ est une suite qui tend vers 0.

Proposition 7.16. Croissances comparées

On peut écrire les croissances comparées ainsi : si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$n^\alpha = o(\mathrm{e}^n), \qquad (\ln n)^\alpha = o(n^\beta), \qquad \text{si } \alpha < \beta, \quad n^\alpha = o(n^\beta), \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^n = o(n!)$$

…

De manière générale, si $1 < q < p$:

$$n^\alpha = o(q^n), \quad q^n = o(p^n) \quad \text{et} \quad q^n = o(n!)$$

2. Équivalence

Définition 7.6.

Soient u et v deux suites, v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que u et v sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ si

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

Exercice 7.17

Montrer que $n^2 + n \sim n^2$.

Solution

En effet, pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{n^2+n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Remarque

On dispose d'une autre définition : u et v sont équivalentes si et seulement si

$$u_n = v_n + o_{+\infty}(v_n)$$

En effet,

$$\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Conséquence 7.17.

Soient deux suites u et v équivalentes. Alors

- Si u converge vers ℓ, v converge également vers ℓ.
- Si u est de signe constant à partir d'un certain rang, v est également de signe constant et de même signe à partir d'un certain rang.

Propriété 7.18. Opérations sur les équivalents

Soient u, v, w et x quatre suites non nulles à partir d'un certain rang.

① (Compatibilité avec la multiplication) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $u_n w_n \sim v_n x_n$.

② (Compatibilité avec le quotient) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{x_n}$.

③ (Compatibilité avec les puissances) Si les suites u et v sont strictement positives, et telles que $u_n \sim v_n$, alors pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, $u_n^p \sim v_n^p$.

Démonstration

Les preuves se font en utilisant la définition. Par exemple, remarquons que

$$\frac{u_n w_n}{v_n x_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{w_n}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Remarque

⚠ Attention : en général, on ne peut ni ajouter, ni soustraire des équivalents.

Exercice 7.18

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)+n^4}{1-n^4}$$

Solution

Puisque $\ln(n) = o(n^4)$, on a $\ln(n)+n^4 \sim n^4$. De même, $1-n^4 \sim -n^4$. Par quotient

$$\frac{\ln(n)+n^4}{1-n^4} \sim \frac{n^4}{-n^4} = -1$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)+n^4}{1-n^4} = -1$$

Proposition 7.19. Formule de Stirling

On dispose d'un équivalent de $n!$:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Remarque

On retrouve, grâce à ce résultat, que $q^n = o(n!)$.

☞ *Exercice 6.*

VI. Cas des suites récurrentes

1. Définition

On se donne une fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ avec $\mathcal{D}_f$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 7.7. Point fixe, intervalle stable

Soit I un intervalle non vide inclus dans $\mathcal{D}_f$.

- On dit que $x_0 \in I$ est un **point fixe** de f sur I si $f(x_0) = x_0$.
- On dit que I est **stable** par f si $f(I) \subset I$, c'est-à-dire si pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

On souhaite étudier une suite récurrente, c'est-à-dire une suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathcal{D}_f$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarque

Si f est une fonction affine, il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.

L'étude générale des suites récurrentes n'est pas au programme, et doit être accompagnée. Citons plusieurs résultats classiques, à redémontrer à chaque fois :

Proposition 7.20. Suite récurrente et intervalle stable

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, et $I \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle stable par f.
On note u la suite définie par $u_0 \in \mathcal{D}_f$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $u_0 \in I$, alors pour tout entier n, $u_n \in I$.

Démonstration

Il s'agit d'une récurrence à faire systématiquement.
Soit P la proposition définie, pour tout entier n, par P_n : « $u_n \in I$ ».

- Initialisation : pour $n = 0$, par définition de la suite u, $u_0 \in I$: P_0 est vraie.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé, et démontrons que P_{n+1} est vraie.
  Mais alors, par hypothèse de récurrence, $u_n \in I$. Puisque I est stable par f, on en déduit que $f(u_n) \in I$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in I$: P_{n+1} est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, on peut en déduire que, pour tout entier n, $u_n \in I$.

Proposition 7.21. Suite récurrente et limite

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, et $I \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle stable par f.
On note u la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) est convergente, de limite ℓ, et si f est continue sur I, alors la limite ℓ est un point fixe de f.

Démonstration

Il s'agit d'une démonstration à faire systématiquement.
Pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Puisque (u_n) converge vers ℓ, (u_{n+1}) également (il s'agit de la même suite, mais décalée d'un rang).
f étant continue sur I, et puisque, pour tout n, $u_n \in I$, on peut en déduire (il s'agit de la caractérisation séquentielle de la continuité) que

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Par unicité de la limite, on en déduit alors que $\ell = f(\ell)$.

Pour déterminer la monotonie de la suite u, on étudiera le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. En effet, pour tout entier n,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n).$$

Exemple 7.19

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + \frac{3}{5}u_n.$$

Étudier, selon la valeur de u_0, la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Solution

On introduit, dans la suite, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^2 + \frac{3}{5}x$ et la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$.
On étudie rapidement les variations de f et le signe de g. On obtient :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{20}$		$+\infty$
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{200}$	$\nearrow$	$+\infty$

et

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le tableau de signe de la fonction g nous apprend plusieurs choses :

- La fonction f a deux points fixes : 0 et $\frac{1}{5}$.
- Sur $[0, \frac{1}{5}]$ la fonction g est négative, et sur $[\frac{1}{5}, +\infty[$ la fonction g est positive.

On complète alors le tableau de variations de f pour ajouter les deux points fixes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{20}$		0		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{200}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après cette étude, on peut alors conclure que les intervalles $]0, \frac{1}{5}[$ et $]\frac{1}{5}, +\infty[$ sont stables par f.
On peut maintenant conclure par disjonction de cas :

- Si $u_0 = 0$ ou $u_0 = \frac{1}{5}$, les suites sont constantes et donc convergentes.
- Si $u_0 \in]0, \frac{1}{5}[$, puisque l'intervalle est stable, on en déduit que pour tout n, $u_n \in]0, \frac{1}{5}[$. Comme sur cet intervalle, g est négative, on en déduit que, puisque $u_n \in]0, \frac{1}{5}[$, alors

$$g(u_n) \leqslant 0 \implies u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

La suite (u_n) est donc décroissante, minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite u converge. En notant ℓ sa limite, et puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on a

$$u_{n+1} = f(u_n) \implies \ell = f(\ell) \implies \ell \in \left\{0, \frac{1}{5}\right\}$$

Or, $u_0 < \frac{1}{5}$ et la suite est décroissante : elle ne peut converger vers $\frac{1}{5}$ et finalement

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

- Si $u_0 \in \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$, puisque l'intervalle est stable, on en déduit que pour tout n, $u_n \in \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$. Comme sur cet intervalle, g est positive, on en déduit que, puisque $u_n \in \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$, alors
$$g(u_n) \geqslant 0 \implies u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$
La suite (u_n) est donc croissante. Intuitivement, si elle convergeait, ce sera vers $\frac{1}{5}$ mais étant croissante ce n'est pas possible. On le rédige rigoureusement.
Supposons par l'absurde que (u_n) converge. D'après le théorème du point fixe, puisque f est continue, u converge vers un point fixe, c'est-à-dire 0 ou $\frac{1}{5}$. Or, $u_0 > \frac{1}{5}$ et la suite (u_n) est croissante : c'est donc absurde. Ainsi, la suite u ne converge pas. Or, elle est croissante, donc si elle ne converge pas, c'est qu'elle tend vers $+\infty$.

On peut alors dresser le bilan final :

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 & \text{si } u_0 \in \left[0, \frac{1}{5}\right[\\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{5} & \text{si } u_0 = \frac{1}{5} \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty & \text{si } u_0 > \frac{1}{5}. \end{array}}$$

☞ *Exercices 10 et 11.*

Exercices

7

Exercices

Premières limites

●○○ **Exercice 1 Limites de somme** (10 min.)

Déterminer la limite (si elle existe) des suites (u_n) définies par

1. $u_n = 2^n - \dfrac{1}{n^2}$
2. $u_n = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1$
3. $u_n = 3n^5 - 2n^{-3}$

●○○ **Exercice 2 Limites d'un produit** (10 min.)

Déterminer la limite (si elle existe) des suites (u_n) définies par

1. $u_n = 2^n \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$
2. $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times \left(1 - \dfrac{5}{n^4}\right)$
3. $u_n = n^3 \times \left(2 + \left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right)$

●○○ **Exercice 3 Limites d'un quotient** (10 min.)

Déterminer la limite (si elle existe) des suites (u_n) définies par

1. $u_n = \dfrac{(5/6)^n - 7}{5n^2}$
2. $u_n = \dfrac{-2n - 7}{(1/2)^n}$
3. $u_n = \dfrac{(5/6)^n - 7}{5n^{-2} + 1}$

●○○ **Exercice 4 Limites d'un polynôme ou de fraction rationnelle** (10 min.)

Déterminer la limite (si elle existe) de chacune des suites (u_n) définies par

1. $u_n = -2n^5 + n^4 - 7n^3 + 8n + 2$
2. $u_n = \dfrac{-2n - 7}{n^2 + 2n - 6}$
3. $u_n = 3n + 1 + \dfrac{-3}{n^2 + 1}$

Limites générales

●○○ **Exercice 5 Limites** (15 min.)

Déterminer les limites des suites suivantes (sans utiliser les équivalents ou négligeabilités).

1. $u_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1$
2. $u_n = \dfrac{2n + 1}{1 - 4n}$
3. $u_n = \dfrac{2n^2 + 1}{n - 1}$
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n + 4}{n^2}$
5. $u_n = \dfrac{2(-1)^{n^3+1}}{n + 2}$
6. $u_n = 3n^3 + 4n^2 + 2n - 1$
7. $u_n = \dfrac{-3n + 1}{2 - 3n}$
8. $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 1}{2n + 1}$
9. $u_n = \dfrac{2^n + 4^n - 5^n}{3^n + 2 \times 5^n}$
10. $u_n = \dfrac{2 \times 3^n - 4^n}{7^n - 1}$

●○○ **Exercice 6 Limites - le retour** (15 min.)

Traiter les limites de l'exercice 5 en utilisant les négligeabilités et équivalences (sauf limites 4 et 5).

Suites monotones

●○○ Exercice 7 Monotonie et limite I (20 min.)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad u_2 = 1$$

1. Montrer que $\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$ puis donner la monotonie de la suite (u_n).
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Montrer que $\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n = \dfrac{n}{2(n-1)}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

●○○ Exercice 8 Monotonie et limite II (20 min.)

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 0$. En déduire la monotonie de (u_n). Que peut-on en conclure ?
2. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2u_n}{5}$.
3. En déduire que $\forall\, n \geqslant 0$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n u_0$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

Suites adjacentes

●○○ Exercice 9 Suites adjacentes I (15 min.)

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies, pour $n \geqslant 1$, par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on conclure ?

Suite, monotonie et point fixe

●○○ Exercice 10 Suites et point fixe I (30 min.)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$.

1. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Montrer que si $x \in [0;1]$, alors $f(x) \in [0;1]$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in [0;1]$.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $]-1;+\infty[$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

●○○ Exercice 11 Suites et point fixe II (30 min.)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + 3$; ainsi que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 2,5$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2. Montrer que l'intervalle $[2,3]$ est stable par f.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in [2;3]$.
4. Étudier le signe de $f(x) - x$.
5. Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
6. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente puis déterminer sa limite.

Suites et limites

●○○ Exercice 12 Exercice bilan I (15 min.)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leqslant u_n \leqslant 3$$
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout n par
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$
   a) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie pour tout n.
   b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   c) Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire la limite de (u_n).

●○○ Exercice 13 Exercice bilan II (15 min.)

On considère les suites u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
   a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme.
   b) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier n, $w_n > 0$
   d) Déterminer la limite de la suite (w_n).
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante, et que la suite (v_n) est décroissante.
3. En déduire que les suites (u_n) est (v_n) sont adjacentes, et qu'elles ont la même limite que l'on notera ℓ dans la suite du problème.
4. Soit t la suite définie pour tout entier naturel par $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   a) Montrer que la suite (t_n) est constante.
   b) Déterminer alors la valeur de ℓ.

●○○ Exercice 14 Exercice bilan III (15 min.)

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 20$, $v_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 5v_n}{6}$$

1. Pour tout entier n, on pose $w_n = u_n - v_n$.
   a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique, à termes positifs.
   b) Déterminer la limite de (w_n), et exprimer w_n en fonction de n.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. Pour tout entier n, on pose $t_n = 5u_n + 24v_n$.
   a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   b) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, et déterminer la limite de (u_n) et (v_n).

●●○ Exercice 15 Suites adjacentes II (20 min.)

On définit la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$, pour $n \geqslant 1$, par : $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que (h_n) est croissante. On note ℓ la limite, finie ou infinie, de (h_n). Justifier son existence.
2. Montrer que $h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = +\infty$.

Corrigés

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. Puisque $2>1$, $2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De plus $\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme,
$$\lim_{n\to+\infty} 2^n - \frac{1}{n^2} = +\infty$$
2. On a $\frac{5}{3} > 1$. Donc $\left(\frac{5}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De plus, $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme,
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = +\infty$$
3. Enfin, on remarque que $n^{-3} = \frac{1}{n^3}$. Donc $2n^{-3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, $3n^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par somme,
$$\lim_{n\to+\infty} 3n^5 - 2n^{-3} = +\infty$$

Exercice 2

1. Remarquons que $2>1$ et $\frac{5}{3} > 1$. Donc $2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\left(\frac{5}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par produit,
$$\lim_{n\to+\infty} 2^n \times \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$$
2. Puisque $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, $\frac{5}{n^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par somme
$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{5}{n^4} = 1$$
On en déduit alors, par quotient, que
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(1 - \frac{5}{n^4}\right) = 0$$
3. On a $-1 < \frac{5}{6} < 1$, donc $\left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme,
$$\lim_{n\to+\infty} 2 + \left(\frac{5}{6}\right)^n = 2$$
De plus, $n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par produit
$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \times \left(2 + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = +\infty$$

Exercice 3

1. Puisque $-1 < \frac{5}{6} < 1$, $\left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n - 7 = -7$$

De plus, $5n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(5/6)^n - 7}{5n^2} = 0$$

2. Puisque $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, par produit, $-2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Par somme

$$\lim_{n\to+\infty} -2n - 7 = -\infty$$

De plus, $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ (0^+ car pour tout n, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$). Par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n-7}{(1/2)^n} = -\infty$$

3. Puisque $-1 < \frac{5}{6} < 1$, $(5/6)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme

$$\lim_{n\to+\infty} (5/6)^n - 7 = -7$$

De plus, $n^{-2} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par somme

$$\lim_{n\to+\infty} 5n^{-2} + 1 = 1$$

Par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(5/6)^n - 7}{5n^{-2}+1} = -7$$

Exercice 4

On utilise la mise en facteur pour lever l'indétermination.

1. On met n^5 en facteur :

$$\begin{aligned} u_n &= n^5 \left(-2 + \frac{n^4}{n^5} - \frac{7n^3}{n^5} + \frac{8n}{n^5} + \frac{2}{n^5}\right) \\ &= n^5 \left(-2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2} + \frac{8}{n^4} + \frac{2}{n^5}\right) \end{aligned}$$

Par somme, on a

$$\lim_{n\to+\infty} -2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2} + \frac{8}{n^4} + \frac{2}{n^5} = -2$$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2. De même :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n\left(-2 - \frac{7}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n}\right)} \\ &= \frac{\left(-2 - \frac{7}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n}\right)} \end{aligned}$$

Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} -2 - \frac{7}{n} = -2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n} = 1$$

Puisque $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, par produit

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{2}{n}-\frac{6}{n}\right) = +\infty$$

Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Enfin, $n^2+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ par somme. Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{n^2+1} = 0$$

De plus, $3n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par somme. On conclut donc par somme que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 5

1. Pour tout entier $n \neq 0$,

$$u_n = n^3\left(-1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, par somme on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} -1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3} = -1$$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$. Par produit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Autre possibilité : d'après la règle du terme de plus haut degré,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$$

2. Pour tout entier $n \neq 0$,

$$u_n = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-4\right)} = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}-4\right)}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, par somme et produit

$$\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}-4 = -4$$

Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

3. Même méthode que précédemment. Pour $n \neq 0$, on a

$$u_n = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = n\frac{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, par somme et produit

$$\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n^2} = 2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n} = 1$$

Par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

Enfin, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, par produit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

4. **Réflexe** : lorsqu'il y a $(-1)^n$, on pense directement au théorème d'encadrement.
Pour tout n, on a
$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$$
Donc pour tout $n \neq 0$
$$3 \leqslant (-1)^n + 4 \leqslant 5$$
et donc
$$\frac{3}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{n^2} \text{ car } n^2 > 0.$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) converge, et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
5. Même réflexe que précédemment. Pour tout entier n,
$$-1 \leqslant (-1)^{n^3+1} \leqslant 1$$
donc
$$\frac{-2}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n+2} \text{ (car } n+2>0)$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n+2} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) convege, et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
6. Pour $n \neq 0$, on a
$$u_n = n^3\left(3 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)$$
Par somme,
$$\lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3} = 3$$
Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$. Par produit
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
7. Pour tout $n \neq 0$, on a
$$u_n = \frac{n\left(-3 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{2}{n} - 3\right)} = \frac{\left(-3 + \frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n} - 3\right)}$$
Par somme et produit,
$$\lim_{n\to+\infty} -3 + \frac{1}{n} = -3 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} - 3 = -3$$
Par quotient,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-3}{-3} = 1$$
8. Pour tout $n \neq 0$,
$$u_n = \frac{n^2\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = n\frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}}$$
Par somme et produit
$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$$
Par quotient
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Enfin, $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. Par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

9. **Réflexe** : lorsque l'on a des puissances ainsi, on met en facteur la plus grande puissance, et on se ramène à des suites de la forme (q^n). Ici, pour tout entier n, on a

$$u_n = \frac{5^n\left(\frac{2^n}{5^n}+\frac{4^n}{5^n}-1\right)}{5^n\left(\frac{3^n}{5^n}+2\right)} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+2}$$

Puisque $-1<\frac{2}{5}<1$, $-1<\frac{4}{5}<1$ et $-1<\frac{3}{5}<1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n-1 = -1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n+2 = 2$$

Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1}{2}$$

10. Pour tout entier n,

$$u_n = \frac{4^n\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right)}{7^n\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)} = \left(\frac{4}{7}\right)^n\frac{2\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^n)}$$

Puisque $-1<\frac{4}{7}<1$, $-1<\frac{3}{4}<1$ et $-1<\frac{1}{7}<1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$$

Par somme, produit et quotient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^n)} = \frac{-1}{1} = -1$$

et par produit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Exercice 6

On utilise les propriétés des équivalents et petit o. Ainsi,

1. $u_n \underset{+\infty}{\sim} -n^3$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{-4n} = -\frac{1}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{2}$.
3. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n^2}{n} = 2n$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
6. On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} 3n^3$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
7. De même, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-3n}{-3n} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
8. On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$, donc $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
9. Ici, en utilisant les comparaisons, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-5^n}{2\times5^n} = -\frac{1}{2}$ et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$
10. Enfin, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-4^n}{7^n} = -\left(\frac{4}{7}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car $-1<\frac{4}{7}<1$) et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 7

1. Soit P la proposition définie pour tout entier $n \geqslant 2$ par P_n:"$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".
Initialisation : pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et donc $0 \leqslant u_2 \leqslant 1$: P_2 est vraie.
Héréditié : supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$ fixé, et montrons que P_{n+1} est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Mais alors :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 &\implies 0 \leqslant u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \leqslant 1 - \frac{1}{n^2} && \text{car } 1 - \frac{1}{n^2} > 0 \\ &\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 && \text{car } \frac{1}{n^2} > 0 \text{ donc } 1 - \frac{1}{n^2} < 1 \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie et la proposition est héréditaire.
D'après le principe de récurrence, on en déduit que la proposition P_n est vraie pour tout $n \geqslant 2$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall\ n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1}$$

Déterminons la monotonie. Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - u_n \\ &= u_n - \frac{1}{n^2} u_n - u_n = -\frac{1}{n^2} u_n \end{aligned}$$

Or, d'après ce qui précède, $u_n \geqslant 0$ et $-\frac{1}{n^2} < 0$. Par quotient, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 2$, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geqslant 2} \text{ est décroissante}}$.

2. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que (u_n) converge.

3. Soit Q la proposition définie pour tout entier $n \geqslant 2$ par Q_n:"$u_n = \frac{n}{2(n-1)}$".
Initialisation : pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et $\frac{n}{2(n-1)} = \frac{2}{2\times 1} = 1$. Ainsi, Q_2 est vraie.
Hérédité : supposons que la proposition Q_n est vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$ fixé, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = \frac{n}{2(n-1)}$. Mais alors, en utilisant la définition :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{n}{2(n-1)} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n}{2(n-1)} \frac{n^2 - 1}{n^2} \\ &= \frac{n}{2(n-1)} \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2(n+1-1)} \end{aligned}$$

ainsi, Q_{n+1} est vraie et la proposition est héréditaire.
D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout $n \geqslant 2$, et donc

$$\boxed{\forall\ n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{n}{2(n-1)}.}$$

Mais alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$$

Remarque

On pouvait trouver l'expression de u_n en fonction de n sans récurrence. En effet, on remarque, par définition de u que

$$\begin{aligned}
u_n &= \prod_{i=3}^{n}\left(1-\frac{1}{(i-1)^2}\right)\\
&= \prod_{k=2}^{n-1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{en posant k=i-1}\\
&= \prod_{k=2}^{n-1}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\\
&= \prod_{k=2}^{n-1}\frac{k-1}{k}\times\prod_{k=2}^{n-1}\frac{k+1}{k}\\
&= \frac{1}{n-1}\frac{n}{2} = \frac{n}{2(n-1)} \qquad \text{par télscopage}
\end{aligned}$$

Exercice 8

1. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n:"$u_n \geqslant 0$".

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 \geqslant 0$ par hypothèse donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé, et démontrons que P_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a donc $u_n \geqslant 0$. Mais alors :

$$1 + 5u_n \geqslant 1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2u_n^2 \geqslant 0$$

donc par quotient, $\dfrac{2u_n^2}{1+5u_n} \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 0$: P_{n+1} est donc vraie et la proposition est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que la proposition P_n est vraie pour tout entier n, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall\ n, \quad u_n \geqslant 0}$$

Déterminons alors la monotonie de u. Soit n un entier. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n^2}{1+5u_n} - u_n\\
&= \frac{2u_n^2}{1+5u_n} - \frac{u_n(1+5u_n)}{1+5u_n}\\
&= \frac{2u_n^2-(u_n+5u_n^2)}{1+5u_n}\\
&= \frac{-u_n-3u_n^2}{1+5u_n}
\end{aligned}$$

D'après l'étude précédente, puisque $u_n \geqslant 0$, alors $-u_n \leqslant 0$. De plus, $-3u_n^2 \leqslant 0$; par somme, $-u_n - 3u_n^2 \leqslant 0$. Le dénominateur est quant à lui positif :$1 + 5u_n \geqslant 0$. Par quotient

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

Ceci étant vrai pour tout entier n, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$
La suite est donc décroissante, minorée : d'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite (u_n) converge.

2. Fixons un entier n. On constate que $1+5u_n \geqslant 5u_n$. Puisque $u_n \geqslant 0$ et que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que

$$\frac{1}{1+5u_n} \leqslant \frac{1}{5u_n}$$

Mais alors, puisque $2u_n^2 \geqslant 0$, on en déduit par produit que

$$\frac{2u_n^2}{1+5u_n} \leqslant \frac{2u_n^2}{5u_n} = \frac{2u_n}{5}$$

3. Soit Q la proposition définie pour tout entier n par Q_n : "$u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$".

Initialisation : pour $n=0$, on constate que $\left(\frac{2}{5}\right)^0 u_0 = u_0$: la proposition Q_0 est donc vraie.

Hérédité : supposons la proposition Q_n vraie pour un certian entier n fixé, et démontrons que Q_{n+1} est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$$

En utilisant la question 2, on a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant \frac{2u_n}{5} \\ &\leqslant \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n u_0 \text{ par H.R.} \\ &\leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} u_0 \end{aligned}$$

Ainsi, Q_{n+1} est vraie et la proposition est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que Q_n est vraie pour tout entier n, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n u_9}$$

En utilisant la question 1, on a plus précisément, pour tout n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$$

Constatons que, puisque $-1 < \frac{2}{5} < 1$, alors $\left(\frac{2}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit donc que

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Exercice 9

Démontrons que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et que $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

La suite u est donc croissante. De même, soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\
&= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} \\
&= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0
\end{aligned}$$

La suite v est donc décroissante. Enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Les suites u et v sont donc adjacentes. Par théorème, elles sont donc convergente et ont la même limite.

> **Remarque**
> Leur limite commune est $\frac{\pi^2}{6}$, mais la démonstration n'est pas aisée.

Exercice 10

1. La fonction f est définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$. Pour tout $x > -1$, on a

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - x1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Pour tout réel $x > 1$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$		
Variations de f	||	0	$\frac{1}{2}$	

Par croissance de f sur $]-1;+\infty[$, on constate alors que si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors

$$0 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) = \frac{1}{2} \leqslant 1.$$

> **Remarque**
> On dit que l'invervalle $[0;1]$ est **stable** par f.

2. Soit P la proposition définie pour tout entier naturel n par P_n : "$u_n \in [0;1]$".
Initialisation : pour $n = 0$, on constate que $u_0 = 1 \in [0;1]$: P_0 est vraie.
Hérédité : supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé. On a alors, par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0;1]$. Mais alors, d'après la question 1, $f(u_n) \in [0;1]$, c'est-à-dire

$u_{n+1} \in [0;1]$. Ainsi, P_{n+1} est vraie et la proposition est héréditaire.
D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout n, et ainsi

$$\forall \ n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0;1]$$

3. Soit $x \in]-1;+\infty[$. On a

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x}{x+1} - x \\ &= \frac{x - x(x+1)}{x+1} = \frac{-x^2}{x+1} \end{aligned}$$

Puisque $x \in]-1;+\infty[$, $x+1 > 0$ et $-x^2 < 0$. Ainsi, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f(x) - x < 0$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2, $u_n \in [0;1]$. On peut donc appliquer la résultat précédent à $x = u_n \in]-1;+\infty[$ et on obtient $f(u_n) - u_n < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n < 0$. Ceci étant valable pour tout entier n, on en déduit que la suite (u_n) est (strictement) décroissante.
5. D'après la question 4, la suite (u_n) est décroissante. Mais d'après la question 2, elle est bornée, et donc minorée (par 0). D'après le théorème de la limite monotone, on peut donc dire que la suite (u_n) converge.
6. La suite (u_n) converge. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. D'après ce qui précède, $\ell \geqslant 0$. Mais alors, par somme et quotient de limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_n+1} = \frac{\ell}{\ell+1}$$

De plus, ℓ est également la limite de la suite (u_{n+1}). En utilisant la relation de définition et en passant à la limite, on en déduit

$$\ell = \frac{\ell}{\ell+1}$$

c'est-à-dire $\ell(\ell+1) = \ell$, soit encore $\ell^2 = 0$, et finalement $\ell = 0$.
Bilan : la suite (u_n) converge verss 0.

> **Remarque**
> Le raisonnement précédent, qu'on précisera plus tard dans l'année, s'appelle le **théorème du point fixe** et dit (sous condition sur f) que si $u_{n+1} = f(u_n)$ et que la suite (u_n) converge, alors la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire est un **point fixe** de f.

Exercice 11

1. Pour tout réel x, on constate que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 3x) + 3 \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right) + 3 \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{8} + 3 \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{8} \end{aligned}$$

2. On utilise la relation de la question 1. Soit $x \in [2;3]$. Alors

$$\begin{aligned} 2 \leqslant x \leqslant 3 &\implies \frac{1}{2} \leqslant x - \frac{3}{2} \leqslant \frac{3}{2} \\ &\implies \frac{1}{4} \leqslant \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leqslant \frac{9}{4} \text{ car la fonction carrée est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &\implies \frac{1}{8} \leqslant \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leqslant \frac{9}{8} \\ &\implies 2 = \frac{16}{8} \leqslant \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{8} \leqslant \frac{24}{8} = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $x \in [2;3]$, $f(x) \in [2;3]$: l'intervalle $[2;3]$ est stable par f.

3. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n \in [2;3]$".

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2,5 \in [2;3]$: P_0 est vraie.

Hérédité : supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé, et démontrons que P_{n+1} est vraie.
Ainsi, par hypothèse de récurrence, $u_0 \in [2;3]$. Or, on a montré à la question 2 que l'intervalle $[2;3]$ est stable par f. Donc, puisque $u_n \in [2;3]$, $f(u_n) \in [2;3]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [2;3]$: la proposition P_{n+1} est donc vraie et la propriété est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [2;3]}$$

4. Fixons un réel x. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 3 - x \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \end{aligned}$$

On dresse le tableau de signe de ce trinôme du second degré : le discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{4}$ et les racines sont donc $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. On utilise les questions 3 et 4. Pour tout entier n, $u_n \in [2;3]$. Or, on vient de voir que si $x \in [2;3]$, $f(x) - x \leqslant 0$. Ainsi, pour tout entier n, $f(u_n) - u_n \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: la $\boxed{\text{suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$.

6. D'après la question 5, la suite (u_n) est décroissante. D'après la question 2, elle est minorée par 2. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite (u_n) est convergente. Notons ℓ sa limite. Par somme et produit, on a

$$\frac{1}{2}u_n^2 - \frac{3}{2}u_n + 3 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}\ell^2 - \frac{3}{2}\ell + 3$$

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. En utilisant la définition de la suite u, on a

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - \frac{3}{2}u_n + 3$$

et par passage à la limite

$$\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \frac{3}{2}\ell + 3$$

c'est-à-dire $\frac{1}{2}\ell^2 - \frac{5}{2}\ell + 3 = 0$, équation déja résolue dans la question 4, et qui admet comme solutions 2 et 3. Or, la suite (u_n) est décroissante, et $u_0 = 2,5$; elle ne peut donc pas converger vers 3. On en déduit finalement que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$$

Exercice 12

1. Soit P_n la proposition définie pour tout entier n par "$0 \leqslant u_n \leqslant 3$".
• Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 3$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$: P_0 est vraie.
• Hérédité : supposons que la proposition P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie :

$$\begin{array}{rll} & 0 \leqslant u_n \leqslant 3 & \\ \text{donc} & 1 \leqslant u_n + 1 \leqslant 4 & \\ \text{et donc} & \frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{u_n+1} \geqslant \frac{1}{4} & \text{car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{ainsi} & 2 \geqslant u_{n+1} \geqslant \frac{1}{2} & \text{soit } 3 \geqslant u_n \geqslant 0 \end{array}$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie.
Bilan : d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n.
2.
a) Puisque pour tout entier n, $0 \leqslant u_n$ alors $u_n + 2 \geqslant 2 \neq 0$. Ainsi (v_n) est bien définie.
b) Montrons que la suite (v_n) est géométrique :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2}{1+u_n} - 1}{\frac{2}{1+u_n} + 2} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}} = \frac{1 - u_n}{4 + 2u_n} = \frac{-1}{2}v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique, de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{2}{5}$.
c) On a donc, pour tout entier n, $v_n = \dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
3. Puisque pour tout entier n, on a $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$, alors

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1}$$

Ainsi, pour tout entier n,

$$u_n = \frac{-1 - \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

Puisque $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, par théorème, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$. Par somme et quotient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1}{-1} = 1$$

Exercice 13

1.
a) Pour tout entier n, on a

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 9v_n - (4u_n + 8v_n)}{12} = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{w_n}{12}$$

La suite (w_n) est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 12 - 1 = 11$.

b) Ainsi, pour tout entier n, on a $w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$.

c) Puisque $11 > 0$ et $\frac{1}{12} > 0$, pour tout entier n, $w_n > 0$.

d) Puisque $-1 < \frac{1}{12} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$. Par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

2. Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{2v_n - 2u_n}{3} = \frac{2w_n}{3}$$

Puisque pour tout entier n, $w_n > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite u est bien croissante.
De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4}$$

Ainsi, puisque pour tout n, $w_n > 0$, alors $v_{n+1} - v_n < 0$: la suite v est décroissante.
3. D'après les questions 1*d*) et 2, on vient de démontrer que la suite u est croissante, v est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. Les suites u et v sont bien adjacentes.
Par théorème, les deux suites adjacentes convergent, et convergent vers la même limite que l'on note ℓ.
4.
a) Pour tout n, on a

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n) = 3u_n + 8v_n = t_n$$

La suite (t_n) est donc constante.
b) La suite étant constante, pour tout entier n, $t_n = t_0 = 99$. Par somme et produit, puisque ℓ désigne la limite de (u_n) et (v_n), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 3\ell + 8\ell = 11\ell$$

Ainsi, puisque la suite (t_n) est constante, on a $11\ell = 99$ et donc $\ell = 9$.
Bilan :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 9}$$

Exercice 14

1.
a) Pour tout entier n, on a

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 5v_n}{6} = \frac{6u_n + 24v_n - (5u_n + 25v_n)}{30} = \frac{u_n - v_n}{30} = \frac{w_n}{30}$$

La suite (w_n) est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{30}$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 20 - 1 = 19$. Puisque $w_0 > 0$ et $\frac{1}{30} > 0$, la suite (w_n) est donc à terme strictement positifs.
b) Ainsi, pour tout entier n, on a

$$w_n = 19\left(\frac{1}{30}\right)^n$$

Puisque $-1 < \frac{1}{30} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{30}\right)^n = 0$. Par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

2. Pour tout entier n, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - u_n = \frac{4v_n - 4u_n}{5} = -\frac{4w_n}{5}$$

Puisque pour tout entier n, $w_n > 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite u est bien décroissante.
De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 5v_n}{6} - v_n = \frac{u_n - v_n}{6} = \frac{w_n}{6}$$

Ainsi, puisque pour tout n, $w_n > 0$, alors $v_{n+1} - v_n > 0$: la suite v est croissante.
3. D'après les questions 1b) et 2, on vient de démontrer que la suite u est décroissante, v est croissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. Les suites u et v sont bien adjacentes.
Par théorème, les deux suites adjacentes convergent, et convergent vers la même limite que l'on note ℓ.
4.
a) Pour tout n, on a

$$t_{n+1} = 5u_{n+1} + 24v_{n+1} = u_n + 4v_n + 4(u_n + 5v_n) = 5u_n + 24v_n = t_n$$

La suite (t_n) est donc constante.
b) La suite étant constante, pour tout entier n, $t_n = t_0 = 124$. Par somme et produit, puisque ℓ désigne la limite de (u_n) et (v_n), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 5\ell + 24\ell = 29\ell$$

Ainsi, puisque la suite (t_n) est constante, on a $29\ell = 124$ et donc $\ell = \frac{124}{29}$.
Bilan :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{124}{29}}$$

Enfin, puisque $u_n - v_n = w_n$ et $5u_n + 24v_n = t_n$, on obtient après résolution et pour tout entier n, que

$$u_n = \frac{t_n + 24w_n}{29} = \frac{124 + 456\left(\frac{1}{30}\right)^n}{29} \text{ et } v_n = \frac{t_n - 5w_n}{29} = \frac{124 - 95\left(\frac{1}{30}\right)^n}{29}$$

Exercice 15

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$h_{n+1} - h_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

La suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante, et admet donc une limite (finie ou infinie).
2. Pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} h_{2n} - h_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$n+1 \leqslant k \leqslant 2n \implies \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} h_{2n} - h_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}\left(2n - (n+1) + 1\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Supposons par l'absurde que la limite de (h_n) soit finie. On la note ℓ. Mais alors

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \text{et} \quad h_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

(h_{2n}) étant une suite extraite de la suite h, elle a la même limite. Mais alors

$$h_{2n} - h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$, $h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}$: c'est absurde.
Ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} h_n = +\infty.}$$